



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ* ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Β΄ Ηλικιακός κύκλος

Διπλωματική εργασία

Απόψεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη και τη διδασκαλία της

του

Βασιλειάδη Χρήστου. Α.Ε.Μ. 931

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια Τ.Ε.Π.Α.Ε./Α.Π.Θ

Εξεταστές: Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Π.Δ.Μ.

Νικολαντωνάκης Κωνσταντίνος, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Π.Δ.Μ.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2021

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της Διπλωματικής μου εργασίας στη Διδακτική των Μαθηματικών, κλείνει ένας πολύς σημαντικός κύκλος πάνω στην ενασχόληση μου με την επιστήμη των Μαθηματικών που τόσο αγαπώ.

Πρωτίστως, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κυρία Τζεκάκη Μαριάννα για την αμέριστη συμπαράσταση που μου παρείχε όλο αυτό το διάστημα. Τα εφόδια που μου παρείχε, η άμεση ανταπόκριση στις ερωτήσεις μου, το ήθος της καθώς και η επιστημονική της κατάρτιση ήταν αρωγοί σε όλη μου την προσπάθεια. Χωρίς την καθοδήγησή της δε θα είχα καταφέρει να ολοκληρώσω με επιτυχία την εκπόνηση της εργασίας μου.

Επιπροσθέτως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές του ΠΜΣ της Διδακτικής των Μαθηματικών για όλα τα εχέγγυα που μου προσέφεραν και για το ζήλο που επέδειξαν στην προσπάθειά τους να μας μεταλαμπαδεύσουν γνώσεις και μεθόδους προσέγγισης της διδακτικής των Μαθηματικών.

Θα ήταν παράλειψη να μην αναφερθώ και σε όλους τους συναδέλφους μου που συνέβαλαν ουσιαστικά με τη συμμετοχή τους στην έρευνα που διεξήγαγα. Άξια λόγου η καλή τους διάθεση, η κατάρτισή τους και η άψογη συνεργασία μας πάνω στο κομμάτι των συνεντεύξεων.

Τέλος, θα ήθελα από καρδιάς να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη στήριξη που μου παρείχαν. Ιδιαίτερος τη σύζυγό μου, η οποία ήταν πλάι μου σε κάθε βήμα, όπως άλλωστε σε κάθε στιγμή της ζωής μου, είτε εύκολη είτε δύσκολη και το μικρό μου γιο Κωνσταντίνο, που βοήθησε με την παρουσία του.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	5
Abstract	5
Εισαγωγή.....	7
Κεφάλαιο 2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ.....	8
2.1 Ρόλος της απόδειξης.....	8
2.2 Απαρχές της απόδειξης.....	9
2.3 Ορισμός της απόδειξης.....	10
2.4 Σημασία της απόδειξης.....	11
2.5 Λειτουργίες της απόδειξης	14
Κεφάλαιο 3 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΥΡΗΜΑΤΑ.....	20
3.1 Απόψεις εκπαιδευτικών.....	20
3.2 Δυσκολίες των μαθητών με την απόδειξη.....	20
3.3 Διδασκαλία της απόδειξης.....	23
3.4 Μη τυπική απόδειξη στην εκπαίδευση.....	25
3.5 Γνώσεις, δεξιότητες και ικανότητες	27
3.6 Εμπλοκή των μαθητών στην απόδειξη.....	29
3.7 Η απόδειξη στην εκπαίδευση	30
Κεφάλαιο 4 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ	32
4.1 Στόχος και άξονες ερωτημάτων.....	32
4.2 Μέθοδος έρευνας.....	32
4.3 Δείγμα.....	33
4.4 Διαδικασία έρευνας.....	35
4.5 Εργαλείο.....	35
4.6 Ανάλυση των στοιχείων	35
4.7 Εγκυρότητα και αξιοπιστία	36
Κεφάλαιο 5 ΕΥΡΗΜΑΤΑ.....	37
5.1 Ευρήματα ερωτήσεων 1ου άξονα.....	37
5.1.1 Σημασία της απόδειξης.....	37
5.1.2 Ρόλος της απόδειξης.....	43
5.2 Ευρήματα ερωτήσεων 2ου άξονα.....	47

5.2.1	Σημασία της διδασκαλίας της απόδειξης.....	47
5.2.2	Όφελος της απόδειξης για το μαθητή.....	50
5.2.3	Όφελος της απόδειξης για τον άνθρωπο-πολίτη	54
5.3	Ευρήματα ερωτήσεων 3ου άξονα.....	58
5.3.1	Σημεία βαρύτητας κατά την αξιολόγηση	58
5.3.2	Αποδοχή άτυπων αποδείξεων αντί για τυπικές	64
5.2.3	Εμπλοκή των μαθητών στην απόδειξη.....	71
5.3	Ευρήματα ερωτήσεων 4ου άξονα.....	80
5.4.1	Εισαγωγή της απόδειξης σε πρώιμο στάδιο	80
5.4.2	Διδακτικό κενό στη διδασκαλία της απόδειξης.....	88
5.4.3	Παρουσίαση άτυπων αποδείξεων αντί για τυπικές	94
	Κεφάλαιο 6 ΣΥΖΗΤΗΣΗ.....	98
6.1	1ος άξονας.....	99
6.1.1	Σημασία της απόδειξης.....	99
6.1.2	Ρόλος της απόδειξης.....	99
6.2	2ος άξονας.....	100
6.2.1	Σημασία της διδασκαλίας της απόδειξης.....	100
6.2.2	Οφέλη για το μαθητή.....	100
6.2.3	Οφέλη για τον άνθρωπο ως πολίτη.....	101
6.3	3ος άξονας.....	102
6.3.1	Σημεία βαρύτητας κατά την αξιολόγηση	102
6.3.2	Αποδοχή από τους εκπαιδευτικούς των άτυπων αποδείξεων	102
6.2.3	Εμπλοκή των μαθητών στην απόδειξη.....	103
6.3	4ος άξονας.....	104
6.4.1	Εισαγωγή της απόδειξης σε πρώιμο στάδιο	104
6.4.2	Κενό στη διδασκαλία της απόδειξης.....	104
6.4.3	Παρουσίαση άτυπων αποδείξεων αντί για τυπικές	105
6.5	Επίδραση του χρόνου εργασιακής εμπειρίας	107
	Κεφάλαιο 7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	108
7.1	1ος άξονας.....	108
7.2	2ος άξονας.....	108
7.3	3ος άξονας.....	109

7.4 4ος άξονας.....	109
7.5 Γενικό συμπέρασμα της έρευνας.....	110
7.6 Περιορισμοί της έρευνας.....	111
Βιβλιογραφικές αναφορές	113
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	119
ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ	119

Περίληψη

Η διδασκαλία της απόδειξης αλλά και η σημασία που αυτή έχει για κάθε εκπαιδευτικό δεν είναι πάντα η ίδια. Ακόμη και η έννοια ή η αυστηρότητα της απόδειξης μεταβάλλεται στο πέρασμα του χρόνου Στην παρούσα έρευνα , Μαθηματικοί όλων των βαθμίδων αλλά και Δάσκαλοι καταθέτουν τις απόψεις τους για τη σπουδαιότητα της απόδειξης, τη συνεισφορά της στην ανάπτυξη του μαθητή αλλά και του μελλοντικού πολίτη . Ταυτόχρονα επιχειρηματολογούν για τον τρόπο με τον οποίο πρέπει η απόδειξη να μπει πιο ουσιαστικά στα αναλυτικά προγράμματα και κυρίως σε ποια ηλικία πιστεύουν ότι αυτό είναι εφικτό και επωφελές για τους μαθητές. Παράλληλα επισημαίνουν τρόπους με τους οποίους θεωρούν ότι πρέπει να κερδίσουν την προσοχή των μαθητών για να πετύχουν την εμπλοκή τους στη μάθηση της αποδεικτικής διαδικασίας.

Λέξεις κλειδιά: Απόδειξη, εμπλοκή, ανάπτυξη, μάθηση

Abstract

The way of teaching proof and the importance that the proof itself has for every teacher isn't always the same. Even the notion or the strictness of proving changes through time. In this study, mathematicians and Elementary school teachers set their beliefs about the importance of proof, the contribution of proof to student development and the future citizen as well. They also argue about the way proof should be in a more essential way in the curriculum and most of all they argue about the appropriate age they believe that this could be possible and the most beneficial for the students. At the same time they highlight some ways they think that

are appropriate to attract students attention in order to achieve their involvement in learning the proving process.

Keywords: Proof, involvement, development, learning

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η απόδειξη θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα κομμάτια της Μαθηματικής επιστήμης (Hanna, 1990). Η επίδραση της αποδεικτικής διαδικασίας στην εξέλιξη των Μαθηματικών αλλά και στον τρόπο που διδάσκονται τα Μαθηματικά σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης είναι τεράστια (Knuth, 2002). Ο τρόπος που οι εκπαιδευτικοί βλέπουν την απόδειξη ως ένα ακόμη εργαλείο ή ως ένα διακριτό κομμάτι της Μαθηματικής Επιστήμης σχετίζεται με τις νόρμες της κάθε εποχής, την απαιτούμενη αυστηρότητα που επικρατεί, τον τρόπο με τον οποίο ζητείται να διδάσκονται τα Μαθηματικά και βέβαια με τα βιώματα και τις εμπειρίες ή τις γνώσεις του καθενός (Stylianides και Ball, 2008).

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τις απόψεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη (Alcock, 2008).επειδή αυτοί είναι που έχουν την άμεση επαφή με τους μαθητές ή φοιτητές. Αυτοί είναι που γνωρίζουν τις αδυναμίες και αλλά και τις ικανότητες των μελών της σχολικής κοινότητας και οι απόψεις τους διαμορφώνουν την εικόνα που παρουσιάζει η κοινότητα αυτή. Η έρευνα έχει ως σκοπό τη διερεύνηση των απόψεων των εκπαιδευτικών με θέματα που σχετίζονται με την απόδειξη έτσι ώστε να καταστεί πιο σαφές ποιοι είναι οι προβληματισμοί, οι δυσκολίες αλλά και οι δυνατότητες που υπάρχουν για τη βελτίωση της Μαθηματικής παιδείας. Οι ερωτώμενοι κλήθηκαν να καταθέσουν τις απόψεις και τις ιδέες τους για τη σημαντικότητα της απόδειξης στην εκπαίδευση αλλά και στα Μαθηματικά γενικότερα, τη συνεισφορά της στην ανάπτυξη του πολίτη, τις δυσκολίες των μαθητών αλλά και την αποδοχή και χρήση των άτυπων αποδείξεων.

2.ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Ρόλος της απόδειξης

Αν και το νόημα και η σημασία της είναι ενιαία για τα Μαθηματικά, η διαδικασία απόδειξης χρειάζεται να προσαρμοστεί ανάλογα με τα επίπεδα της εκπαίδευσης στα οποία αναφερόμαστε. Διαφορετικές προσεγγίσεις αλλά και απαιτήσεις υπάρχουν όταν η απόδειξη σχετίζεται με σχολικά Μαθηματικά και άλλες όταν αναφερόμαστε σε Μαθηματικά Πανεπιστημιακού επιπέδου. Ακόμη πιο συγκεκριμένα, δεν μπορεί υπάρχει κοινή αντιμετώπιση όταν ζητείται η απόδειξη μιας πρότασης από μαθητές Λυκείου και άλλη από μαθητές Δημοτικού. Ένας μαθητής Λυκείου πρέπει να παρουσιάζει την απόδειξη βασισμένος πάνω σε αξιώματα, λήμματα, ορισμούς και θεωρήματα ενώ ένας μαθητής του Δημοτικού μπορεί να σχηματίσει μόνο μια ιδέα για απόδειξη χρησιμοποιώντας τα βασικά στοιχεία της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας και βέβαια με τη βοήθεια της αντίληψης του αλλά και τη βοήθεια σχημάτων ή χειραπτικών υλικών. Για το λόγο αυτό θεωρείται απαραίτητο να προβούμε στην αποσαφήνιση του όρου ‘απόδειξη’ έτσι ώστε να καθίσταται εφικτή η προσπάθεια να γίνει αντιληπτό πότε μία αποδεικτική προσπάθεια είναι επιτυχημένη. Όπως αναφέρει ο Cutforth (2017), οι μαθηματικές αποδείξεις θεωρούνται ιδεατές και αναλλοίωτες από το πέρασμα του χρόνου. Δεν υπάρχει όμως συμφωνία ως προς τι είναι αυτό που καθιστά ένα επιχείρημα να θεωρείται μαθηματική απόδειξη όπως και με ποιον τρόπο μπορεί αυτό να επιτευχθεί. Για παράδειγμα η χρησιμοποίηση της τεχνολογίας και ειδικά αυτή των σχεδιαστικών προγραμμάτων έχει διχάσει τη Μαθηματική κοινότητα (Detlefsen,2008). Αναφορικά με το ζήτημα, ο Detlefsen (2008) υποστηρίζει ότι ο βαθμός της αυστηρότητας που

καθιστούν μία απόδειξη αποδεκτή είναι συζητήσιμος και δεν υπάρχει απόλυτο μέτρο με το οποίο μπορούμε να αποφασίσουμε αν ένα επιχείρημα λογίζεται ως απόδειξη. Ακόμη και στο Πεδίο των Μαθηματικών, η έλλειψη ενός ορισμού για το τι είναι απόδειξη φαίνεται να αποτελεί εμπόδιο αφού η ύπαρξη του ορισμού θα έθετε τις προϋποθέσεις για μια κοινή αντιμετώπιση των ερωτημάτων που προκύπτουν από τις έρευνες (Stylianides, 2007).

2.2 Απαρχές της απόδειξης

Τα Μαθηματικά θεωρούνται ένα από τα πιο παλιά επιτεύγματα της ανθρώπινης σκέψης. Η αρχική εφαρμογή τους σχετίστηκε μόνο με την επίλυση πρακτικών προβλημάτων όπως ο διαμοιρασμός της γης και το εμπόριο. Η σχεδίαση ή μία περιγραφή αρκούσε για να γίνει αποδεκτή μία αλήθεια. Ήταν ο Θαλής ο Μιλήσιος αυτός που θεωρείται ως ο πρώτος άνθρωπος που έδωσε μία απόδειξη, έχοντας ως βάση κάποιες κοινώς αποδεκτές αρχές, κάτι που συστηματοποίησε αιώνες αργότερα ο Ευκλείδης (Krantz, 2007). Η αξιωματική θεμελίωση θεωρείται ακόμη και σήμερα ένα από τα σπουδαιότερα ανθρώπινα επιτεύγματα και επηρέασε τον τρόπο δημιουργίας και διδασκαλίας των Μαθηματικών σε τεράστιο βαθμό κατά τη διάρκεια των τελευταίων 2.500 ετών. Παρά τις καινοτομίες που έχουν εμφανιστεί στην επιστήμη των Μαθηματικών, η αποδεικτική διαδικασία είναι το βασικό μοτίβο της επικοινωνίας στον τομέα αυτό (Babai, 1992 στους Harel&Sowder, 2007). Η τεράστια συνεισφορά του Ευκλείδη στα Μαθηματικά έγκειται στο γεγονός ότι χρησιμοποιώντας μια κοινώς αποδεκτή βάση, τα αξιώματα και τους ορισμούς, χρησιμοποίησε λογικές συνεπαγωγές που του έδωσαν τη δυνατότητα να προβεί στην εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων. Υπάρχουν διάφορες εικασίες ως προς ποιος

ήταν ο λόγος της διαφοροποίησης των Ελλήνων ως προς την υιοθέτηση της αποδεικτικής διαδικασίας στα Μαθηματικά. Κάποιοι υποστηρίζουν ότι το δημοκρατικό καθεστώς της αρχαίας Αθήνας έθεσε τις βάσεις για την εξύψωση της Λογικής και την αποδοχής της (Hannaford, 1998; Kleiner, 1991 στους Reid και Knipping, 2010) . Άλλοι υποστηρίζουν ότι η ύπαρξη μίας τάξης πολιτών με ελεύθερο χρόνο έδωσε την ώθηση για την ενασχόληση με τα Μαθηματικά (και τη Φιλοσοφία) χωρίς να υπάρχει κάποιο πρακτικό όφελος (Kline, 1962 στους Reid και Knipping, 2010).

2.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Αν και δεν υπάρχει ένας σαφής ορισμός της απόδειξης, υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορεί να θεωρηθεί ότι ένα επιχείρημα μπορεί να θεωρηθεί ότι επιτελεί έναν αποδεικτικό ρόλο. Κάθε πολιτισμός θέτει άλλες προδιαγραφές για να χαρακτηρίσει ως απόδειξη μια σειρά επιχειρημάτων και μάλιστα παρατηρείται ότι η αλλαγή των προδιαγραφών αλλάζει και στην πορεία του χρόνου (Wilder, 1981; Cutforth, 2017;). Οι Godin και Recio (1997) τονίζουν ότι η απόδειξη έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά σε διαφορετικά γνωστικά πεδία, όπως τα Καθαρά Μαθηματικά ή οι εφαρμοσμένες επιστήμες ή ακόμη και η καθημερινή ζωή. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε τομέας έχει το δικό του ‘ πεδίο επεξήγησης’ (Maturama, 1988). Οι Hann και Barbeau (2002) τονίζουν ότι η διαφορά της αντιμετώπισης των Μαθηματικών από τους λαούς που δεν χρησιμοποίησαν την απόδειξη στα έργα τους έγκειται στο γεγονός ότι οι Έλληνες δεν αρκέστηκαν στην απόδειξη μέσω παρατήρησης αλλά αναζητούσαν απόλυτες αλήθειες, ικανές να επαληθεύουν έννοιες όπως το άπειρο ή αφηρημένες όπως τα γεωμετρικά σχήματα. Ένας από

αυτούς τους ορισμούς , όταν η απόδειξη αναφέρεται στα Μαθηματικά που ασκούνται μέσα στο σχολείο δίνεται από τον Stylianides (2007), σύμφωνα με τον οποίο:

Απόδειξη είναι ένα μαθηματικό επιχείρημα, μία ακολουθία ισχυρισμών υπέρ ή εναντίον ενός μαθηματικού ισχυρισμού, που έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Χρησιμοποιεί δηλώσεις αποδεκτές από την κοινότητα της τάξης, που είναι αληθείς και δεν έχουν την ανάγκη περαιτέρω επιβεβαίωσης
- Χρησιμοποιεί τρόπους αιτιολόγησης που είναι έγκυροι και γνωστοί στα μέλη της κοινότητας ή τουλάχιστον μέσα στο γνωστικό επίπεδο των μελών της
- Η επικοινωνία γίνεται με κατάλληλους τρόπους, γνωστούς ή τουλάχιστον μέσα στο γνωστικό επίπεδο των μελών της κοινότητας. Για τον μαθητή όμως απόδειξη θεωρείται οτιδήποτε είναι αυτό που τον πείθει ότι ο ισχυρισμός του είναι αληθής (Sowder&Harel, 2014). Πάντως, όποιον ορισμό και να θεωρήσουμε πιο κατάλληλο, όλες οι αποδείξεις χαρακτηρίζονται από μία κοινή αρχή. Κάθε απόδειξη πρέπει να προσδιορίζει ξεκάθαρα τις υποθέσεις που δίνονται και να παρέχει κατάλληλα επιχειρήματα ώστε μέσω έγκυρων βημάτων να οδηγούμαστε στο επιθυμητό συμπέρασμα (Hanna & DeVillers, 2008).

2.4 Σημασία της απόδειξης

Αν και υπάρχει τεράστια απόκλιση ανάμεσα στους σκοπούς των εκπαιδευτικών συστημάτων σε όλο τον κόσμο, γεγονός που διαφοροποιεί τόσο τον τρόπο διδασκαλίας όσο και τα αποτελέσματα της, είναι πανθομολογούμενη η τεράστια

σημασία της απόδειξης στο πεδίο των Μαθηματικών (Weber, 2004;Tsamir, 2009; Ball, Hoyles, Jahnke&Movshovitz- Hadar, 2002; Bleiler-Baxter&Pair, 2017; Herbst, 2002, Basturk,2010 όπως αναφέρεται στον Guler, 2016;Hanna, 2000). Υπάρχει πάντως μεγάλη διαφορά στη χρήση της απόδειξης στα Μαθηματικά ως Επιστήμη που αναπτύσσεται και στα Μαθηματικά ως αντικείμενο διδασκαλίας .

- Η απόδειξη ως στοιχείο της μαθηματικής επιστήμης, είναι απολύτως φορμαλιστική και αποτελεί εργαλείο επικοινωνίας και ανάπτυξης των Μαθηματικών.
- Η απόδειξη όμως ως στοιχείο της εκπαίδευσης επιτελεί το ρόλο της γνωστικής ανάπτυξης του μαθητή και αποτελεί το βάθρο πάνω στο οποίο βασίζεται η ορθολογική σκέψη του.

Σύμφωνα με τους Hanna & De Villers (2008) η διδασκαλία της απόδειξης στο σχολείο , μπορεί να παίζει το ρόλο της σύνδεσης ανάμεσα στο μαθητή και στη Μαθηματική επιστήμη . Ο τρόπος της σκέψης που χρειάζεται για την απόδειξη εμβαθύνει την κατανόηση και διευρύνει τους ορίζοντες της επιχειρηματολογίας μετατρέποντας την διαδικασία σε ουσιαστική διεργασία για τη νοητική ανάπτυξη του ατόμου. Η απόδειξη είναι το στοιχείο εκείνο που διαφοροποιεί τα Μαθηματικά από τους υπόλοιπους γνωστικούς τομείς (Heinze&Reiss, 2003;Krantz, 2007;Komatsu, 2010;) ενώ ο Στυλιανίδης (2009) υποστηρίζει ότι η απόδειξη είναι ο πυρήνας της γνώσης και του πράττειν στα μαθηματικά.Ο Knuth (2002) τονίζει ότι η απόδειξη είναι και θα συνεχίσει να είναι ένα σημαντικό κομμάτι της πρακτικής των Μαθηματικών. Ο Rav (1999) όπως αναφέρεται στην Tsamir (2009) αναφέρει ότι η απόδειξη είναι η καρδιά των Μαθηματικών. Οι αποδείξεις είναι τα ουσιαστικά

στοιχεία των Μαθηματικών(Heintz, 2000 στους Brunner&Reusser, 2019; Ross,1998 στον Knuth, 2002) και αποτελούν ουσιώδες στοιχείο της ικανότητας ενός ατόμου στα Μαθηματικά (Reiss, 2002; Samkoff & Weber, 2015).Η απόδειξη είναι ταυτόχρονα η βασίλισσα και η υπηρέτρια των Μαθηματικών (Mingus & Grassl, 1999)αφού ένα πολύ μεγάλο τμήμα των γνώσεων, των μεθόδων και γενικότερα των διαδικασιών που κυριαρχούν στην επιστήμη, χρησιμοποιούνται για την απόδειξη ενώ ταυτόχρονα η απόδειξη εμφανίζεται παντού, καθιστώντας την ύπαρξη της αναγκαία για την περαιτέρω ανάπτυξη. Ο Wu(1996)αναφερόμενος στην απόδειξη εστιάζει στο γεγονός ότι ο εξοβελισμός της από κλάδους των Μαθηματικών εκτός της Γεωμετρίας αποτελεί παραποίηση της φύσης της απόδειξης ενώ ο Schoenfeld (1994) τονίζει ότι οι έννοιες των Μαθηματικών και της απόδειξης είναι μη διαχωρίσιμες, αφού με την απόδειξη επιτυγχάνονται βασικές λειτουργίες της Μαθηματικής επιστήμης. Ο Polya(1981) αναφέρει ότι ‘Οι αυστηρές αποδείξεις αποτελούν τη χαρακτηριστική ‘στάμπα’ των Μαθηματικών. Είναι ένα ουσιώδες κομμάτι της συνεισφοράς των Μαθηματικών στον πολιτισμό’ . Τεράστια θεωρείται η σημασία της απόδειξης στη μαθηματική εκπαίδευση επίσης. Μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας, όποια μορφή και αν παίρνει και σε όποιο επίπεδο και να τη συναντούμε, ο μαθητής ασκείται στον ορθολογικό τρόπο σκέψης και στην τεκμηρίωση των ιδεών του. Βέβαια, δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν οι ίδιες απαιτήσεις από όλους τους μαθητές ανεξαρτήτων ηλικίας και δυνατοτήτων. Θεωρείται απαραίτητη, η σταδιακή είσοδος των μαθητών στην απόδειξη σε αντίθεση με τη συνηθισμένη εισαγωγή των αποδεικτικών διαδικασιών μέσω της Ευκλείδειας γεωμετρίας στην Α΄ Λυκείου. Στην πρώιμη ηλικία (Δημοτικό)

ο μαθητής μπορεί να έρθει σε επαφή με μη τυπικές αποδείξεις. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να ορισθεί η μη τυπική απόδειξη. Ο Balachef (1988) όπως αναφέρεται στον Komatsu (2010) σημειώνει ότι η μη τυπική απόδειξη βασίζεται πάνω σε διαγράμματα ή σε γενικευμένα παραδείγματα. Στο Lorv (2011) βλέπουμε ότι ως μη τυπικές χαρακτηρίζονται οι αποδείξεις που δεν πληρούν δύο χαρακτηριστικά: α)τη χρήση συγκεκριμένης γλώσσας και συμβολισμών και β) την επαγωγική σκέψη. Στην ίδια έρευνα, υπάρχει όμως ένας άλλος τρόπος ορισμού της μη τυπικής απόδειξης: ως τέτοια ορίζεται η απόδειξη που εκτός από τη λογική εξαρτάται κυρίως από το εκάστοτε περιεχόμενο, επικεντρώνεται δηλαδή στις ιδιότητες του συγκεκριμένου αντικειμένου που μελετάται. Στη Zack(1999) βλέπουμε μία μη αμιγώς μαθηματική αντιμετώπιση, αφού ο μη τυπικός τρόπος σκέψης αντιμετωπίζεται ως ο καθημερινός τρόπος σκέψης σε αντίθεση με τον τυπικό τρόπο που ταυτίζεται με τον αμιγώς μαθηματικό τρόπο σκέψης.

2.5 Λειτουργίες της απόδειξης

Από τις απαρχές της δημιουργίας της αποδεικτικής διαδικασίας μέχρι και σήμερα, είναι ευρέως διαδεδομένο ότι ο σημαντικότερος αν όχι μοναδικός ρόλος της απόδειξης είναι ένας: η πιστοποίηση της αλήθειας μιας μαθηματικής πρότασης(Avigad,2006; Hanna, 2000;Koteleawa, 2015;).Η λειτουργία αυτή έχει επηρεάσει σε πολύ μεγάλο βαθμό τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι περισσότεροι μαθητές αντιμετωπίζουν ακριβώς αυτή τη λειτουργία της απόδειξης και μάλιστα περιορίζονται στην απόδειξη προτάσεων που στην πλειοψηφία τους είναι προφανείς, με αποτέλεσμα να δημιουργείται η εντύπωση ότι η απόδειξη μετατρέπεται σε μία διαδικασία με προκαθορισμένο αποτέλεσμα (Wheeler,1990 και

Schoenefeld, 1994 στον Knuth, 2002; Weber,2002).Η απόδειξη, μέσα από ένα τέτοιο πρίσμα, φαίνεται στα μάτια των μαθητών ανούσια Σε πολύ μεγάλο βαθμό θεωρείται η μοναδική λειτουργία και μάλιστα έχει παρατηρηθεί μία μονομερής και μάλλον φορμαλιστική άποψη για την απόδειξη από πλευράς της πλειοψηφίας των εκπαιδευτικών. Δεν είναι μάλιστα μόνο οι μαθητές που έχουν αυτή την περιορισμένη άποψη για την απόδειξη αλλά και πολλοί εκπαιδευτικοί, που ίσως επηρεασμένοι από τις δικές τους εμπειρίες από τα μαθητικά χρόνια τους, θεωρούν ότι η απόδειξη προσφέρει πολύ λίγα στοιχεία στη διδασκαλία των Μαθηματικών (Lesseig,Hine, Na&Boardman, 2019).Φαίνεται όμως ότι οι λειτουργίες που επιτελούνται από την απόδειξη είναι πολύ περισσότερες και μάλιστα όχι πάντα οι ίδιες, ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο αναφερόμαστε(Knuth, 2002;De Villers1990; Hemmi&Lowfall, 2009;Hemmi, 2006;Weber, 2002). Ο De Villers (1990) αναφέρει ότι συνολικά μπορούμε να εντοπίσουμε πέντε διαφορετικές λειτουργίες που επιτελούνται μέσω της απόδειξης. Οι λειτουργίες αυτές δεν είναι πάντα διακριτές και πολλές φορές αλληλοκαλύπτονται κάνοντας δύσκολη τη διάκριση τους. Η λειτουργία της πιστοποίησης δεν παύει βεβαίως να είναι η πιο προφανής. Η απλοϊκή εξήγηση για τη θεώρηση της μοναδικότητας αυτής της λειτουργίας σχετίζεται με το γεγονός ότι η απόδειξη ουσιαστικά δείχνει στον αναγνώστη τα βήματα μέσω των οποίων εξασφαλίζεται η ισχύς μιας πρότασης. Βεβαίως όπως αναφέρει ο Polya (1954) η απόδειξη μιας πρότασης γίνεται αφού πρώτα έχει δημιουργηθεί η υποψία της ισχύος της μέσω παραδειγμάτων και διαίσθησης. Μετά ακολουθεί η προσπάθεια απόδειξης της πρότασης αντιστρέφοντας κατ' ουσία τη σειρά του ζεύγους 'απόδειξη – πιστοποίηση'. Από τη στιγμή που η πεποίθηση για

την ισχύ της πρότασης υπάρχει, ο σκοπός της απόδειξης δεν μπορεί να είναι η πιστοποίηση της ισχύος αλλά πρέπει να αναζητηθούν άλλες λειτουργίες. Οι Hemmi, Viholainen και Lepik (2010) συμπληρώνουν το σκοπό της πιστοποίησης με αυτόν της πειθούς σύμφωνα με τον οποίο ο αναγνώστης εξαλείφει τις δικές του αμφιβολίες για την ισχύ της πρότασης. Άλλη λειτουργία της απόδειξης είναι αυτή της επεξήγησης δηλαδή της διαδικασίας σύμφωνα με την οποία δεν δίνεται απλά η ισχύς μιας πρότασης αλλά οι λόγοι για τους οποίους αυτή η πρόταση είναι αληθής. στο πεδίο της εκπαίδευσης μάλιστα η επεξήγηση θεωρείται ως ο κύριος ρόλος της απόδειξης (Hanna, 2000;) αν και πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η επεξήγηση είναι σαφώς πιο χρήσιμη από την πιστοποίηση ακόμη και στα Μαθηματικά εκτός εκπαίδευσης (Dickerson & Doerr, 2013; De Villers, 1990; Knuth, 2002). Στη σχολική τάξη ένα συνηθισμένο ερώτημα έχει να κάνει με το λόγο για τον οποίο ισχύει μία πρόταση παρά με την ισχύ την ίδια. Αυτό προϋποθέτει την εύρεση των ιδιοτήτων που διέπουν τα μαθηματικά αντικείμενα και τις σχέσεις μεταξύ τους (Hanna, 2000; Weber, 2002, Hemmi, 2006). Οι ιδιότητες των υπό μελέτη αντικειμένων είναι τόσο χαρακτηριστικές και συνδέονται τόσο ισχυρά με τα αντικείμενα που αν αλλάξουν, τότε η απόδειξη καταρρέει. Για παράδειγμα, η απόδειξη που αναφέρει ότι οι διχοτόμοι ενός τριγώνου συντρέχουν, βασίζεται πάνω στην ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου να ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας. Αν αυτή η ιδιότητα δεν υπήρχε τότε δε θα υπήρχε ούτε το συγκεκριμένο θεώρημα. Οι Davis και Hersch (1983) αναφέρουν ότι η ανάγκη για την εύρεση των συνθηκών που καθιστούν μία πρόταση αληθή είναι σημαντικότερη από την πρόταση την ίδια γιατί η έλλειψη αυτής της γνώσης υποδηλώνει έλλειψη

κατανόησης. Όταν ο ρόλος της απόδειξης είναι επεξηγηματικός τότε η απόδειξη δεν απαιτείται να είναι πολύ αυστηρή, αλλά απλά να παρέχει μία διαισθητική κατανόηση των κύριων ιδεών (Weber,2002) .

Στην έρευνα των Hemmi et al (2015) σε καθηγητές Β΄θμιας εκπαίδευσης φαίνεται ότι ο ρόλος της επεξήγησης καταλαμβάνει πρωταρχικό ρόλο στις πεποιθήσεις τους επαληθεύοντας την τάση αυτή όσον αφορά στα σχολικά Μαθηματικά. Η απόδειξη έχει επίσης το ρόλο της συστηματοποίησης της μαθηματικής γνώσης. Με τον όρο αυτόν εννοούμε την ταξινόμηση όλων των προτάσεων σε ένα σύστημα αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων (De Villers,1990;Hemmi, 2006 ;Knuth, 2002;Lesseig et al, 2019;Hemmi et al, 2015).Κλασικό παράδειγμα συστηματοποίησης θεωρείται η Ευκλείδεια γεωμετρία στην οποία ξεκινώντας από ένα μικρό σύνολο ορισμών και αξιωμάτων, ‘ χτίζεται’ ένα συμπαγές σύνολο θεωρημάτων , το καθένα εκ των οποίων αποτελεί βάση και περαιτέρω αποδείξεις. Με τη βοήθεια της απόδειξης λοιπόν είναι εφικτή η εκ των υστέρων διαδικασία αξιωματικής θεμελίωσης και ορισμού των εννοιών (Krygowska, 1971 και Human, 1978; στον De Villers, 1990), που αποτελούν τη ραχοκοκαλιά της συστηματοποίησης. Αυτού του είδους η διεργασία έχει πολλά θετικά οφέλη στο πεδίο των Μαθηματικών καθώς:

- Επιτρέπει την αποφυγή κυκλικών συμπερασμάτων και την εύρεση ανακολουθιών
- ενοποιεί και απλοποιεί τις θεωρίες αφομοιώνοντας στοιχεία ξένα και ασύνδετα μεταξύ τους. Με τον τρόπο αυτό γίνεται πιο εύκολα κατανοητή η ύπαρξη ενός αξιωματικού συστήματος που στην αρχή φαίνεται σαν ένα σύνολο προτάσεων άσχετων μεταξύ τους

- οδηγεί σε εναλλακτικά αξιωματικά συστήματα
- επιτρέπει την πρακτική εφαρμογή θεωριών ελέγχοντας τη δυνατότητα αυτής της εφαρμογής
- Δίνει τη δυνατότητα της ολιστικής θεώρησης μίας θεωρίας μέσω της (De Villers, 1990)
- Επιτρέπει τη χρήση συμπερασμάτων που έχουν ήδη εξαχθεί (Hemmi et al, 2015)

Η συστηματοποίηση δημιουργεί με τον τρόπο αυτό ένα σταθερό σώμα μαθηματικής γνώσης, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί από ανθρώπους διαφορετικών εποχών που μπορούν να επικεντρωθούν στα ίδια προβλήματα (Hemmi, 2006). Μία ακόμη λειτουργία είναι αυτή της ανακάλυψης νέων προτάσεων. Αν και υπάρχει η πεποίθηση ότι τα θεωρήματα κατασκευάζονται σχεδόν αποκλειστικά μέσω διαίσθησης ή πειραματισμών και ακολουθεί η απόδειξη που πιστοποιεί την ισχύ τους, (Hanna, 1983), υπάρχουν πολλές περιπτώσεις κατά τις οποίες τα νέα αποτελέσματα προέκυψαν μέσω αποδεικτικής διαδικασίας με κλασικό παράδειγμα αυτό των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών (Hemmi, 2006; De Villers, 1990). Ειδικά αν χρησιμοποιηθούν προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας, η αναζήτηση μπορεί να οδηγήσει σε εικασίες, οι οποίες με τη σειρά τους μπορεί να επαληθευθούν με τη χρήση τυπικών αποδείξεων, οδηγώντας στην κατασκευή καινούριας γνώσης (Knuth, 2000; Hemmi, 2006). Η απόδειξη μπορεί επίσης να γίνει ένα μέσο επικοινωνίας μεταξύ των μελών μιας μαθηματικής κοινότητας δηλαδή να γίνει ο φορέας της μεταφοράς της μαθηματικής γνώσης (Hanna & Barbeau, 2008;

Mingus & Grassl, 1999; Schoenfeld; 1994). Ο μαθητής, μέσω της απόδειξης μπορεί να αποκτήσει δεξιότητες όπως στρατηγικές και μεθόδους, που τον καθιστούν ικανό να αντεπεξέλθει σε άλλα μαθηματικά έργα. Μέσω της επικοινωνίας, καθίσταται δυνατή η εκμάθηση της Μαθηματικής γλώσσας και των συμβολισμών που αυτή χρησιμοποιεί (Hemmi & Lofwall, 2009). φαίνεται όμως ότι αυτός ο ρόλος της απόδειξης είναι αυτός που λαμβάνει τη μικρότερη αναγνώριση , καθώς ειδικά στα σχολικά μαθηματικά δε φαίνεται η δυνατότητα της απόδειξης να επιτρέπει την επικοινωνία ανάμεσα στα μέλη της μαθηματικής κοινότητας (Balachef, 1991).

3. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΥΡΗΜΑΤΑ

3.1 Απόψεις εκπαιδευτικών

Ο ρόλος της επικοινωνίας αναγνωρίζεται αντιθέτως από τους ίδιους τους μαθηματικούς (Knuth, 2002; Hemmi et al, 2015; Schoenfeld, 1994). Με τον όρο ‘επικοινωνία’ οι ερευνητές συνοψίζουν την λειτουργία σύμφωνα με την οποία ο μαθητής αποκτά γνώση για τις μεθόδους, τις στρατηγικές, τα εργαλεία και γενικότερα τις διαδικασίες για την επίλυση προβλημάτων. Για παράδειγμα, στους Hemmi & Lowfall (2015), συναντούμε την άποψη που λέει ότι η απόδειξη του Αρχιμήδη για τον τύπο του όγκου της σφαίρας, έδωσε τη δυνατότητα να βρεθούν όγκοι άλλων στερεών, χρησιμοποιώντας παρόμοια βήματα. Η αρχική απόδειξη χρησιμοποιήθηκε και βρήκε άλλες εφαρμογές, ξεπερνώντας τον αρχικό σκοπό για τον οποίο δημιουργήθηκε. Ο Knuth (2002) σε έρευνα που έκανε σε καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης βρήκε ότι ο ρόλος της επικοινωνίας της μαθηματικής γνώσης θεωρείται πολύ σημαντικός από την πλειοψηφία των μαθηματικών. Μέσω της απόδειξης, τα μέλη της μαθηματικής κοινότητας πείθονται για την αλήθεια και την ισχύ μιας πρότασης, δίνοντας στην απόδειξη και έναν ρόλο αποδοχής, δηλαδή μιας κοινωνικής πράξης.

3.2 Δυσκολίες των μαθητών με την απόδειξη

Αφού η απόδειξη αντιμετωπίζεται διαφορετικά ως προς την ηλικία και το επίπεδο των μαθητών, είναι φυσικό να υπάρχει τεράστια διαφοροποίηση ως προς τις απαιτήσεις που έχουν οι εκπαιδευτικοί από τους μαθητές τους. Οι μαθητές του Δημοτικού απλά απαιτείται να δείχνουν την ισχύ μίας πρότασης χρησιμοποιώντας

χειραπτικά υλικά ή σχεδιάζοντας ένα σχήμα. Ασφαλώς, οι απαιτήσεις είναι πολύ μικρές και δεν υπάρχει εκ μέρους των εκπαιδευτικών καμιά απαίτηση τυπικής αιτιολόγησης. Όσο όμως η ηλικία και το γνωστικό επίπεδο μεγαλώνει, τόσο αλλάζει μορφή και η απόδειξη που πρέπει να δίνεται. Οι Μαθηματικοί απαιτούν όλο και πιο τυπικές αποδείξεις με αποτέλεσμα την αύξηση των δυσκολιών των μαθητών. Η σύνδεση ανάμεσα στην αλυσίδα των ισχυρισμών είναι πολύ συνηθισμένο φαινόμενο, μαζί βεβαίως με τη γνωστή παρουσίαση μιας μη τυπικής απόδειξης, που έρχεται μέσω της κατασκευής ενός σχήματος ή την επαλήθευση μιας πράξης. Το σύνολο των ερευνών έχει δείξει ότι οι μαθητές και οι φοιτητές αντιμετωπίζουν πάρα πολλές δυσκολίες όσον αφορά στην απόδειξη (Selden & Selden, 2007; Herbst, 2002; Stylianou et al, 2009; Guler, 2016; Heinze, 2004; Harel & Sowder, 2007; Knipping, 2004; Ball et al, 2002; Bleiler- Baxter & Pair 2017;). Οι δυσκολίες αυτές έχουν πολυπαραγοντικό υπόβαθρο και φαίνεται ότι η αντιμετώπιση τους πρέπει να λογίζεται σοβαρά πριν από το σχεδιασμό κάθε διδακτικής παρέμβασης. Οι Harel και Sowder (2007) και Reyhani et al, (2012) υποστηρίζουν ότι ένας σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει τη σχέση των μαθητών και της απόδειξης είναι ο γνωστικός. Παρουσιάζεται, δηλαδή, έλλειψη της απαραίτητης λογικής ωριμότητας, γεγονός που εμποδίζει το μαθητή να καταλάβει την αναγκαιότητα της απόδειξης (Chaves, 2014; Guler, 2016). Ένα άλλο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές έγκειται στον τρόπο με τον οποίο οργανώνεται η σειρά των επαγωγικών βημάτων που πρέπει να κάνουν κατά την αποδεικτική διαδικασία (Knipping, 2004; Cyr, 2010). Δεν γνωρίζουν ποια στοιχεία μπορούν να πάρουν ως αποδεκτά, πώς να κάνουν τα αρχικά βήματα και δεν αναγνωρίζουν

πότε ακριβώς έχει αποδειχθεί το ζητούμενο (Hemmi, 2006; Ball et al, 2002). Οι δυσκολίες της μαθηματικής απόδειξης προσομοιάζουν με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζει ένας επιστήμονας κατά τη δημιουργία μίας νέας θεωρίας, δηλαδή δεν έχει διαχωρίσει τις υποθέσεις, τη διαδικασία αλλά και τον τρόπο με τον οποίο θα αντιληφθεί ότι έφτασε στο τέλος. Σε έρευνες συναντάμε το γεγονός της δημιουργίας επιπρόσθετων δυσκολιών στους μαθητές όσον αφορά την απόδειξη εξ αιτίας της τάσης των καθηγητών να παρουσιάζουν την αποδεικτική διαδικασία μέσω της καθηγητοκεντρικής θέσης. Με τον τρόπο αυτό περιορίζουν την εμπλοκή των μαθητών (Harel and Rabin, 2010; Otten, Bleiler-Baxter & Engledowl, 2017). Ένα συνηθισμένο πρόβλημα που συναντάμε είναι η ελλιπής χρήση των ορισμών που αποτελούν την αρχή της αποδεικτικής διαδικασίας (Alcock, 2010, Guler, 2016). Η πολύ μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών/σπουδαστών αντιμετωπίζει μεγάλες δυσκολίες όταν πρέπει να κάνει χρήση των ποσοδεικτών (Alcock, 2010; Selden & Selden, 2007, Guler, 2016). Η χρήση της κατάλληλης γλώσσας και των αντίστοιχων συμβόλων είναι μία ακόμη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οι φοιτητές (Epp, 2003). Οι περισσότεροι αντιμετωπίζουν προβλήματα στην κατανόηση των όρων ‘ αν’, ‘αν και μόνο αν’ ,’για κάθε’ και ‘ ή ‘. Εντοπίζεται εδώ η διαφοροποίηση της σημασίας των παραπάνω όρων στα Μαθηματικά από την καθημερινή γλώσσα. Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η χρήση της λέξης ‘ ή ‘ που ενώ στη Μαθηματική λογική είναι συνώνυμη με τη λέξη ‘τουλάχιστον’ στην καθημερινή γλώσσα λαμβάνει το χαρακτήρα της αποκλειστικής διάζευξης. Αυτό αποτελεί μία ακόμη ένδειξη της έλλειψης γνώσεων της Μαθηματικής λογικής καθώς φαίνεται ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν αναγνωρίζει τη σωστή χρήση

ούτε των κατάλληλων συμβόλων με χαρακτηριστικό παράδειγμα την λανθασμένη χρήση των συμβόλων της απλής και της διπλής συνεπαγωγής. Η χρήση αντίστροφων συλλογισμών και αντιπαραδειγμάτων φαίνεται να είναι ακόμη ένα στοιχείο που σύμφωνα με τις έρευνες προβληματίζει μεγάλη μερίδα των μαθητών (Reid & Knipping, 2010; Epp; 2003). Πολλοί μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν μία λεκτική περιγραφή αντί να χρησιμοποιούν την κατάλληλη αποδεικτική μέθοδο (Mariotti, 2006). Το μεγαλύτερο όμως πρόβλημα που εντοπίζεται στο σύνολο των ερευνών σχετίζεται με την τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν συγκεκριμένα παραδείγματα αντί της γενικευμένης απαιτούμενης απόδειξης (Reyhani et al, 2011; Aylar & Sahiner, 2013; Healy & Hoyles; 2000; Kunimune et al, 2009). Η πλειοψηφία των μαθητών, δηλαδή, θεωρεί ότι η παρουσίαση ενός συγκεκριμένου παραδείγματος μπορεί να θεωρηθεί απόδειξη., όπως για παράδειγμα τις φράσεις.

3.3 Διδασκαλία της απόδειξης

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων ετών, φαίνεται ότι εμφανίζεται σε ευρεία κλίμακα μία στροφή της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην αποδεικτική διαδικασία και ένας εν μέρει απεγκλωβισμός από την απλή διδασκαλία υπολογιστικών μεθόδων. Πολλά προγράμματα σπουδών (CCSS-M) τονίζουν την αναγκαιότητα της δημιουργίας κατάλληλων συνθηκών, έτσι ώστε ο μαθητής να καταστεί ικανός στη δικαιολόγηση της σκέψης του και στην ανάπτυξη της κατάλληλης επιχειρηματολογίας. Στο Ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του 2003 σημειώνεται ότι ένας από τους σκοπούς της εκπαιδευτικής διαδικασίας είναι ‘ η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την εκπαιδευτική διαδικασία’ τόσο στο Δημοτικό όσο και στο Γυμνάσιο. Η διδασκαλία της απόδειξης

θεωρείται σημαντική γιατί μέσω αυτής χτίζει τα θεμέλια της μαθηματικής σκέψης και χρησιμοποιεί με τον καλύτερο δυνατό τρόπο το σύνολο της μαθηματικής γνώσης (Aylar et al, 2013). Η απόδειξη στα περισσότερα αναλυτικά προγράμματα εμφανίζεται ταυτόχρονα με την Ευκλείδεια Γεωμετρία και μάλιστα με έναν τρόπο που δυσχεραίνει την αποδοχή της από το μέσο μαθητή καθώς οι περισσότερες ασκήσεις που ζητείται να αποδειχθούν θεωρούνται αυτονόητες από μεγάλη μερίδα των μαθητών με αποτέλεσμα την εντύπωση ότι η απόδειξη είναι περιττή. Για το λόγο αυτό αλλά και για την υπερπήδηση των δυσκολιών που αναφέρθηκαν προηγουμένως, θεωρείται απαραίτητη η εισαγωγή των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία, έστω με την άτυπη μορφή της, σε πρώιμο στάδιο και όχι αποκλειστικά μέσω της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Alcock et al, 2015; Ball et al, 2002; Bleiler – Baxter, 2017; Samkoff & Weber; 2015; Lester, 1975; Heinze, 2004, Cutforth, 2017; Edwards, 1998). Ένα ζήτημα που προκύπτει σχετίζεται με την ύλη των Μαθηματικών που πρέπει να διδάσκονται έτσι ώστε ο μαθητής /σπουδαστής να μπορεί να ανταπεξέλθει στις απαιτήσεις της αποδεικτικής διαδικασίας. Στην πλειοψηφία των Αμερικάνικών κολλεγίων, υπάρχουν μαθήματα που παίζουν το ρόλο της γέφυρας ανάμεσα στη Λυκειακή, προσανατολισμένη σε υπολογισμούς, κατεύθυνση των Μαθηματικών και σε αυτήν που συναντούν οι φοιτητές στη σχολή και σχετίζεται με την Άλγεβρα και την Ανάλυση. Στα μαθήματα αυτά, εκτός από τη διδασκαλία τεχνικών απόδειξης, προσφέρονται στοιχεία Μαθηματικής Λογικής, Θεωρίας Συνόλων καθώς και πλήθος από άλλους τομείς. (David, 2019; Sacin et al; 2014). Το παραπάνω αποτελεί ένδειξη ότι για την επιτυχή έκβαση της αποδεικτικής διαδικασίας, απαιτούνται στοιχεία από μεγάλο πλήθος

Μαθηματικών γνώσεων καθώς και το γνωστικό υπόβαθρο για το συνδυασμό τους. Το όφελος που αποκομίζει ο μαθητής από την αποδεικτική διαδικασία είναι πολύ σημαντικό. Εκτός από την εισαγωγή των μαθητών στους ρόλους που επιτελούνται από την απόδειξη, ρόλοι που είναι άμεσα συσχετισμένοι με τα Μαθηματικά, η δημιουργία ενός τρόπου σκέψης μπορεί να ωφελήσει τους μαθητές στη μαθητική πορεία τους αλλά και στη μελλοντική ζωή τους γενικότερα (Fawcett, 1938; Reid, 2005).

3.4 Μη τυπική απόδειξη στην εκπαίδευση

Ενώ η απόδειξη που αντιμετωπίζουμε στα χρόνια του Λυκείου και του Πανεπιστημίου έχει στέρεο υπόβαθρο που βασίζεται σε ορισμούς, αξιώματα και αποδεικτικές μεθόδους που δεν αφήνουν αμφιβολία για την εγκυρότητα των ισχυρισμών που μελετούν υπάρχει και μία σειρά αποδείξεων, οι μη τυπικές που συνήθως απασχολούν τη σχολική κοινότητα σε σχετικά πρώιμο στάδιο. Οι αποδείξεις αυτές κατάλληλες για να εισάγουν το μαθητή στην απαιτούμενη αυστηρότητα σε μελλοντικό στάδιο, εμπεριέχουν το ρίσκο της λανθασμένης απάντησης καθώς η λογική τους σχετίζεται με χάραξη, μέτρηση, υπολογισμούς και γενικά με την αντιμετώπιση συγκεκριμένων παραδειγμάτων που πολλές φορές είναι παραπλανητικά και εσφαλμένα. Σύμφωνα με τις περισσότερες μελέτες, η εισαγωγή της απόδειξης μέσω μίας μη τυπικής μορφής, σε πρώιμο στάδιο κρίνεται επωφέλης για τους μαθητές (Cyr, 2010). Ο De Villers (2009) αναφέρει ότι μέσω της άτυπης απόδειξης ο μαθητής αποκτά μία ολιστική άποψη του αντικειμένου που μελετά. Ο Cutforth (2017) τονίζει ότι μέσω της μη τυπικής απόδειξης ο μαθητής μπορεί να οδηγηθεί στην τυπική της μορφή, μέσω μίας διαδικασίας που

‘γενικοποιεί’ τα συμπεράσματα του. Ο Polya, όπως αναφέρεται στον Edwards (1998) υποστηρίζει ότι οι μαθητές ωφελούνται από τη χρήση της μη τυπικής απόδειξης, καθώς με τον τρόπο αυτό εμπλέκονται περισσότερο στην αποδεικτική διαδικασία. Οι Mason (1982) και Polya (1954) όπως αναφέρονται στον Stylianides (2009) τονίζουν ότι οι πειραματικές αποδείξεις βοηθούν τους μαθητές να οργανώσουν τις παρατηρήσεις τους σε πιο γενικά συμπεράσματα και τους βοηθούν να αποκτήσουν διαίσθηση, στοιχείο απαραίτητο για να αποδείξουν τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν. Είναι κοινώς αποδεκτό ότι παρατηρείται έλλειψη της αποδεικτικής διαδικασίας σε πρώιμο στάδιο, ακόμη και στην άτυπη μορφή της (Stylianides, 2006; Sowder & Harel, 2008). Οι μαθητές συνήθως έρχονται σε επαφή με την απόδειξη στο Λύκειο (ή στο αντίστοιχο στάδιο σε κάθε εκπαιδευτικό σύστημα). Μάλιστα, η επαφή αυτή γίνεται μέσω της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δημιουργώντας την εντύπωση ότι η απόδειξη δεν υπάρχει σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, είναι πάρα πολύ συνηθισμένο το φαινόμενο που παρατηρείται και που θέλει τους μαθητές να εγκαταλείπουν την προσπάθεια απόδειξης μέσω της τυπικής διαδικασίας. Θεωρούν ότι ένα ή περισσότερα συγκεκριμένα παραδείγματα καθιστούν το συλλογισμό τους έγκυρο και με τον τρόπο αυτό νομίζουν ότι έφτασαν στη ζητούμενη απόδειξη. Η πλειοψηφία των μαθηματικών θεωρούν τις μη τυπικές αποδείξεις ως μη κατάλληλες για τη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση (Miller, 2016; Dreyfus, 2000). Αντίθετα, στις πρώιμες ηλικίες, στις οποίες η απόδειξη δεν έχει λάβει ακόμη το φορμαλιστικό χαρακτήρα της, οι άτυπες αποδείξεις γίνονται δεκτές αφού εξυπηρετούν τα τρία σημεία που αναφέρθηκαν παραπάνω (Stylianides,

2007).Ο Komatsu(2010) στην έρευνα του αναφέρει ότι οι ‘αποδείξεις της δράσης’, δηλαδή μη τυπικές αποδείξεις που διεκπεραιώνονται με τη χρήση χειριστικών αντικειμένων έχουν προταθεί ως κατάλληλες για την πρώιμη ηλικία ως συνδετικός κρίκος ανάμεσα στην σκέψη ενός μαθητή και την τυπική απόδειξη. Στην έρευνα των Gutierrez, Pegg & Lawrie (2004)βλέπουμε ότι οι παρατηρήσεις που κάνουνε οι μαθητές σε μια σειρά πειραματικών αποδείξεων μπορούν και οδηγούν σε μια γενίκευση που ακολουθείται από την κανονική απόδειξη

3.5 Γνώσεις, ικανότητες και δεξιότητες των μαθητών για την απόδειξη

Για την επιτυχή διεκπεραίωση ενός έργου που απαιτεί απόδειξη, ο μαθητής πρέπει να κατέχει κάποιες γνώσεις και κάποιες δεξιότητες. Με τον όρο γνώσεις εννοούμε την κατοχή των απαραίτητων θεωρητικών εργαλείων (ορισμών, αξιωμάτων, κλπ) ενώ με τον όρο ικανότητες εννοούμε έμφυτα ταλέντα του ατόμου. Ο όρος ‘δεξιότητες’ όμως αντιστοιχεί στην ικανότητα εκτέλεσης ενεργειών με το συνδυασμό γνώσεων και ικανοτήτων. Η ικανότητα να προβεί ο μαθητής σε μια απόδειξη σχετίζεται άμεσα με την μαθηματική του κατανόηση όπως υποστηρίζουν οι Maya & Sumarmo (2011). Ένα πολύ σημαντικό στοιχείο θεωρείται η ικανότητα σαφούς διαχωρισμού των δεδομένων από τα ζητούμενα (Gyogy & Konya, 2019) όπως και η σωστή αιτιολόγηση (Guhnan, 2014). Η ικανότητα της οπτικοποίησης θεωρείται επίσης πολύ σημαντική, ειδικά σε θέματα που σχετίζονται με Γεωμετρία, ικανότητα που βελτιώνεται μέσω της εξάσκησης και της κατάλληλης διδασκαλίας (Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1988).Στην έρευνα τουTIMMS (Trends in International Mathematics and Science (Study, 2011) βλέπουμε ότι οι μαθητές που

ασκούνται στην εφαρμογή της αποδεικτικής διαδικασίας πρέπει να μπορούν να ανταπεξέλθουν στις παρακάτω καταστάσεις:

- Ανάλυση: εύρεση σχέσεων μεταξύ μεταβλητών, οπτικοποίησης των προβλημάτων και επαγωγή έγκυρων συμπερασμάτων
- Γενίκευση: επέκταση των αποτελεσμάτων που αποκτούνται μέσω της επίλυσης προβλημάτων
- Σύνθεση: χρήση των πράξεων και των αποτελεσμάτων που έχουν ήδη εξαχθεί με σκοπό την παραγωγή ενός πιο σύνθετου αποτελέσματος.
- Αιτιολόγηση: Χρήση ιδιοτήτων για την παροχή πιστοποίησης για την εγκυρότητα μιας μαθηματικής έκφρασης.

Τα στοιχεία που ένας μαθηματικός συνήθως απαιτεί από τις αποδείξεις που παρουσιάζονται από τους μαθητές του ποικίλουν ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών αλλά και το βαθμό αυστηρότητας που επιδεικνύει. Ακόμη περισσότερη διαφοροποίηση συναντούμε στον τρόπο που ένας μαθηματικός κατανέμει τους βαθμούς στα διάφορα τμήματα μιας απόδειξης. Οι περισσότεροι μαθηματικοί ζητούν από τους μαθητές τους να επιδεικνύουν τα παρακάτω στοιχεία:

- Εγκυρότητα. Το κυριότερο στοιχείο που πρέπει να υπάρχει σε μια απόδειξη είναι η τεκμηρίωση όλων των βημάτων (Brown & Michel, 2010; Dreyfus, 2000; Miller, Infante & Weber, 2017; Moore, 2016; Stylianides & Stylianides, 2009; Weber, 2008). Απαιτείται η παρουσίαση και η απόδειξη των επιμέρους βημάτων καθώς και η σωστή διεκπεραίωση των αλγεβρικών υπολογισμών.

- Ευχέρεια στην παρουσίαση και διαχείριση της μαθηματικής γλώσσας. Όπως αναφέρουν οι Brown & Michel (2010), η χρήση των κατάλληλων μαθηματικών όρων αντί της συνηθισμένης γλώσσας, η χρησιμοποίηση συμβόλων που μειώνουν τον όγκο του κειμένου εκτιμάται και προτιμάται από τους καθηγητές (Π.χ. η χρήση των όρων ‘αριθμητής’ και ‘παρονομαστής’ αντί για ‘πάνω’ και ‘κάτω’ ή η χρησιμοποίηση των κατάλληλων γραμμμάτων και συμβόλων για την εισαγωγή μίας συνάρτησης).
- Γραπτό κείμενο. Οι επεξηγήσεις που συνοδεύουν μία σειρά πράξεων είναι πάντα απαραίτητες όπως και τα σαφή σχόλια που συνοδεύουν ένα γράφημα. Όπως χαρακτηριστικά τονίζουν οι Brown & Michel (2010), ‘ ένα κατάλληλο επιλεγμένο γράφημα, με εξήγηση και σχόλια αξίζει όσο 1000 λέξεις, αλλά 1000 γραφήματα χωρίς σχόλια δεν αξίζουν τίποτα’.

3.6 Εμπλοκή των μαθητών στην απόδειξη

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών αντιμετωπίζει πολλές δυσκολίες στην απόδειξη. Πώς θα καταστεί λοιπόν εφικτή η εμπλοκή των μαθητών με την αποδεικτική διαδικασία. Το στοιχείο στο οποίο στέκονται όλοι οι ερευνητές σχετίζεται με τον τρόπο που γίνεται η παρουσίαση του συγκεκριμένου τομέα στους μαθητές. Αν η αποδεικτική διαδικασία παρουσιασθεί με τον συνήθη τρόπο που συναντούμε στην Ευκλείδεια γεωμετρία, στην οποία γίνονται αποδείξεις θεωρημάτων που οι μαθητές θεωρούν αυτονόητα (ακόμα και για τον λάθος τρόπο) τότε η απόδειξη εκφυλίζεται σε μια στείρα διαδικασία γραφής συμβόλων και προτάσεων. Αντίθετα, αν η παρουσίαση γίνει μέσω έργων κατάλληλα επιλεγμένων

τότε ο μαθητής αποκτά μία θετική στάση, που μπορεί να τον οδηγήσει στη βελτίωση της επίδοσης του (Kunimune, 2009; Maher, 1996; Aylar, 2013; Komatsu, 2010). Ο Polya, από την άλλη, όπως αναφέρεται στον Edwards (1999), υποστηρίζει ότι η εμπλοκή επιτυγχάνεται μέσω των άτυπων αποδείξεων χρησιμοποιώντας τη διαισθητική ικανότητα των μαθητών. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι πολύ σημαντικός για την εμπλοκή του μαθητή. Ο Herbst (2002) αναφέρει ότι ο εκπαιδευτικός έχει το ζωτικό ρόλο της δημιουργίας κατάλληλων έργων χωρίς να χειραγωγεί τη μαθηματική σκέψη των μαθητών. Ειδικά για την πρώιμη ηλικία ο Guhnan (2012) τονίζει ότι ο εκπαιδευτικός πρέπει να δημιουργεί καταστάσεις στις οποίες ο μαθητής να μπορεί να δημιουργεί, επεξεργάζεται και τεστάρει τις δικές του εικασίες.

3.7 Η απόδειξη στην εκπαίδευση

Ο Stylianides (2006) τονίζει ότι υπάρχει τεράστιο χάσμα στην εκπαίδευση όσον αφορά στη διδασκαλία της απόδειξης. Η πρώτη και ίσως μοναδική επαφή του μαθητή με την απόδειξη γίνεται μέσω της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, γεγονός που κάνει το μαθητή να αντιλαμβάνεται την απόδειξη ως κάτι ξένο και άσχετο με τις προηγούμενες γνώσεις που κατέχει. Στο ίδιο συμπέρασμα έχουν καταλήξει πολλοί άλλοι ερευνητές που τονίζουν αυτό το διδακτικό χάσμα που έχει δημιουργηθεί στα περισσότερα αναλυτικά προγράμματα (Ball et al, 2002; Sowder & Harel, 1998). Η απόδειξη όπως βλέπουμε έχει απασχολήσει πλήθος ερευνητών λόγω της χρησιμότητας αλλά και της σπουδαιότητας της. Μεγάλο πλήθος μελετών έχουν επικεντρωθεί γύρω από τις απόψεις των εκπαιδευτικών γύρω από την απόδειξη, τον τρόπο που κρίνουν τις προσπάθειες των μαθητών στο αποδεικτικό έργο αλλά

και στη συνεισφορά της άτυπης απόδειξης στην καλλιέργεια ενός τρόπου σκέψης, ικανού να οδηγήσει το μαθητή στη διαμόρφωση ενός κατάλληλου νοητικού πλαισίου για την τυπική απόδειξη. Η διαφορά στην ελληνική Μαθηματική εκπαίδευση σε σχέση με την πλειοψηφία των υπόλοιπων χωρών έγκειται στο γεγονός ότι παρά την ένταξη της απόδειξης σε ηλικία παρόμοια με αυτήν που συναντούμε στα περισσότερα κράτη, η απόδειξη παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στο ελληνικό εξεταστικό σύστημα της ανώτερης Β' θμιας εκπαίδευσης. Ειδικά η βαρύτητα του κλάδου της Ανάλυσης στις εισαγωγικές εξετάσεις σε συνδυασμό με το γεγονός ότι στο Ελληνικό εξεταστικό σύστημα ζητείται μεγάλο πλήθος αποδείξεων και όχι η εύρεση αποτελεσμάτων μέσω αλγοριθμικών διαδικασιών, κάνει την απόδειξη και τις μεθόδους της πολύ ισχυρό εργαλείο στα χέρια των μαθητών. Εξ αιτίας αυτής της διαφοροποίησης, θεωρούμε ότι η παρούσα έρευνα θα συνεισφέρει στην καταγραφή των απόψεων των εκπαιδευτικών με απώτερο στόχο τη βελτίωση της διδασκαλίας της απόδειξης.

4. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ

4.1 Στόχος και άξονες ερωτημάτων

Η έρευνα έχει ως στόχο τη διερεύνηση των απόψεων των Ελλήνων Μαθηματικών και Δασκάλων σχετικά με την απόδειξη, τη διδασκαλία της και τη χρησιμότητα της τόσο στην εκπαίδευση όσο και στην Μαθηματική επιστήμη. Για την καταγραφή των απόψεων, δημιουργήθηκαν τέσσερις άξονες ερωτημάτων:

1. Ποια, κατά την άποψη των εκπαιδευτικών, είναι η σημασία της απόδειξης στα Μαθηματικά;
2. Ποια, κατά την άποψη των εκπαιδευτικών, είναι η σημασία της διδασκαλίας της απόδειξης στα Σχολικά Μαθηματικά;
3. Ποιές, κατά την άποψη των εκπαιδευτικών, είναι οι απαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες των μαθητών για την αποδεικτική διαδικασία;
4. Ποιά, κατά την άποψη των εκπαιδευτικών, είναι η σύνδεση της άτυπης απόδειξης από τις μικρότερες ηλικίες στην τυπική μαθηματική απόδειξη των μεγαλύτερων ηλικιών;

Με τον όρο ‘γνώσεις’ εννοούμε την κατοχή των απαραίτητων θεωρητικών εργαλείων (ορισμών, αξιωμάτων, κλπ) ενώ με τον όρο ικανότητες εννοούμε έμφυτα ταλέντα του ατόμου. Με τον όρο ‘δεξιότητες’ εννοούμε, στα πλαίσια της έρευνας την εκτέλεση ενεργειών με το συνδυασμό γνώσεων και ικανοτήτων.

4.2 Μέθοδος έρευνας

Για την έρευνα προτιμήθηκε η μέθοδος της ποιοτικής έρευνας, μέσω της συνέντευξης των μελών του δείγματος. Η μέθοδος αυτή προτιμήθηκε έτσι ώστε να

μπορεί να γίνει εις βάθος μελέτη των απόψεων των εκπαιδευτικών, παρόμοια με τις έρευνες των Knut (2002) και των Lessseig et al (2019). Οι ερωτώμενοι είχαν την δυνατότητα να αναπτύξουν τις ιδέες τους, τις απόψεις τους αλλά και τα προσωπικά τους βιώματα χωρίς να εγκλωβίζονται σε μονολεκτικές απαντήσεις ενός ερωτηματολογίου. Ταυτόχρονα, ο διάλογος με την ερευνητή έδωσε τη δυνατότητα στην αποσαφήνιση ορισμένων όρων και επεξήγηση κάποιων ερωτημάτων όπως ακριβώς συνέβη στην έρευνα του ο Knut (2002)

4.3. Δείγμα

Το δείγμα αποτελείται από 15 εκπαιδευτικούς Α΄θμιας, Β΄θμιας και Γ΄θμιας εκπαίδευσης. Οι εκπαιδευτικοί της Β΄θμιας και της Γ΄θμιας εκπαίδευσης είναι Μαθηματικοί. Όσον αφορά τους Μαθηματικούς της Β΄θμιας εκπαίδευσης πρόκειται για καθηγητές τόσο Δημοσίων σχολείων όσο και Φροντιστών. Οι εκπαιδευτικοί της Α΄θμιας εκπαίδευσης είναι δάσκαλοι που έχουν όμως ικανοποιητικό επίπεδο Μαθηματικών γνώσεων είτε επειδή είναι πτυχιούχοι τμήματος Μαθηματικών είτε επειδή κατέχουν Μεταπτυχιακό τίτλο στα Μαθηματικά. Το δείγμα περιλαμβάνει όλο το εύρος της εκπαίδευσης, ώστε να εξαχθούν συμπεράσματα για όλες τις βαθμίδες και να εξαχθεί ένα συμπέρασμα που να συνδέει τα επιμέρους αποτελέσματα. Συγκεκριμένα το δείγμα αποτελείται από 5 ομάδες κάθε μία εκ των οποίων αποτελείται από τρεις έως πέντε εκπαιδευτικούς. Οι πέντε ομάδες είναι οι παρακάτω:

- Δάσκαλοι
- Μαθηματικοί Γυμνασίου

- Μαθηματικοί Λυκείου
- Φροντιστές
- Πανεπιστημιακοί

Σε κάθε ομάδα εκπαιδευτικών συμμετέχει ένας του οποίου η εκπαιδευτική εμπειρία είναι περίπου μία 10ετία, ένας με αντίστοιχη εμπειρία γύρω στα 25 χρόνια και ένας με εμπειρία γύρω στα 40 χρόνια. Η διασπορά της ηλικιακής εμπειρίας έγινε έτσι ώστε να αντιπροσωπεύονται διαφορετικές τάσεις και απόψεις για να διερευνηθεί αν υπάρχει συσχέτιση των χρόνων διδασκαλίας με τις απόψεις ενός εκπαιδευτικού. Η επιλογή των μελών του δείγματος έγινε μέσω του επαγγελματικού περιβάλλοντος του ερευνητή. Επειδή η διδασκαλία είναι μία διαδικασία με εντελώς δυναμικό χαρακτήρα, κρίθηκε σκόπιμο το δείγμα να περιλαμβάνει εκπαιδευτικούς με διαφορετική εργασιακή εμπειρία και από διαφορετικούς κλάδους. Οι Πανεπιστημιακοί καθηγητές εξ αιτίας της φύσης των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο, έχουν σαφώς πιο αυστηρή αντίληψη για την απόδειξη και βεβαίως η ενασχόληση τους με Μαθηματικά υψηλότερου επιπέδου τους δίνει μια βαρύνουσα κατευθυντήρια γραμμή για τη σημασία της απόδειξης στην εξέλιξη των Μαθηματικών. Οι καθηγητές της Μέσης εκπαίδευσης, ειδικά αυτοί που ασχολούνται με τα Μαθηματικά της Γ' Λυκείου, έχουν την ευθύνη της προετοιμασίας των μαθητών για την εισαγωγή τους στο Ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα. και απαιτούν από τους μαθητές τους την ενδεδειγμένη σαφήνεια και αυστηρότητα, χωρίς όμως η απαίτηση αυτή να είναι καθολικής ισχύος.

4.4 Διαδικασία έρευνας

Η συνέντευξη βασίστηκε σε ερωτηματολόγιο και διενεργήθηκε εξ αποστάσεως με τη χρήση του προγράμματος Skype. Οι συνεντεύξεις καταγράφηκαν σε υπολογιστή ώστε να είναι δυνατή η περαιτέρω μελέτη τους. Για την καταγραφή ζητήθηκε και δόθηκε η άδεια των συμμετεχόντων. Κάθε συνέντευξη διήρκησε περίπου 30 λεπτά. Μερικές μέρες πριν τη συνέντευξη, οι συμμετέχοντες παρέλαβαν μέσω e-mail το ερωτηματολόγιο, έτσι ώστε να μπορούν να το μελετήσουν και να είναι προετοιμασμένοι κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

4.5 Εργαλείο έρευνας

Για το σκοπό της έρευνας έχει συνταχθεί ερωτηματολόγιο (Παράρτημα), το οποίο αρχικά διαχωρίζεται σε τέσσερις άξονες. Οι άξονες αυτοί αναλύονται σε επιμέρους ερωτήματα και ο στόχος τους είναι η διερεύνηση των απόψεων των Ελλήνων εκπαιδευτικών γύρω από την απόδειξη.

4.6 Ανάλυση των στοιχείων

Αρχικά θα γίνει μία ακρόαση κάθε συνέντευξης στην οποία θα σημειωθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία τίθεται κάθε ερώτημα σε κάθε μέλος του δείγματος. Σκοπός της αυτής της διεργασίας είναι η διευκόλυνση της ανάλυσης που θα ακολουθήσει, καθώς θα γίνεται ακρόαση κάθε ερώτησης από όλα τα μέλη του δείγματος πριν γίνει μετάβαση στην επόμενη ερώτηση.

Για τη μελέτη των απόψεων των εκπαιδευτικών θα ακολουθηθεί ένας διπλός τρόπος ανάλυσης. Πρώτον, θα διερευνηθούν οι απόψεις των εκπαιδευτικών

αναλόγως της επαγγελματικής ιδιότητας τους (Πανεπιστημιακοί, φροντιστές, κλπ) και ακολούθως θα γίνει ανάλογη μελέτη ανάλογα με τα χρόνια της επαγγελματικής εμπειρίας τους. Η συνέντευξη κάθε μέλους του δείγματος κωδικοποιήθηκε με τον ακόλουθο τρόπο: αναλόγως της ειδικότητας δόθηκε ένα γράμμα (Δ για τους δασκάλους, Γ για τους καθηγητές Γυμνασίου, Λ για τους καθηγητές Λυκείου, Φ για τους φροντιστές και Π για τους πανεπιστημιακούς) και ένας αριθμός (0 αν η εμπειρία είναι μέχρι 5 χρόνια, 1 αν η εμπειρία είναι από 10 έως 15 χρόνια, 2 αν η εμπειρία είναι από 15 μέχρι 25 χρόνια και 3 αν η εμπειρία είναι από 25 χρόνια και άνω). Στην περίπτωση που ένα δείγμα έχει 2 εκπαιδευτικούς της ίδιας ομάδας και εμπειρίας, ο Κωδικός αποτελείται από το γράμμα ακολουθούμενο από τον αντίστοιχο αριθμό εις διπλούν .

4.7 Εγκυρότητα και αξιοπιστία

Για να επιτευχθεί η εγκυρότητα της έρευνας τα ερευνητικά ερωτήματα επιλέχθηκαν έτσι ώστε να βρίσκονται σε αρμονία με τη βιβλιογραφία. Για τη διασφάλιση της αξιοπιστίας έγινε μία μικρή επανάληψη της έρευνας από την οποία προέκυψαν παρόμοια αποτελέσματα.

5. ΕΥΡΗΜΑΤΑ

5.1 Ευρήματα ερωτήσεων 1ου άξονα

5.1.1 Σημασία της απόδειξης

Στις απαντήσεις των ερωτώμενων του Πανεπιστημιακού τομέα παρατηρούμε γενικά λακωνικές και σαφείς απαντήσεις, πράγμα που οφείλεται μάλλον στην αυστηρότητα που έχουν τα μαθηματικά στα πανεπιστημιακά τμήματα. Οι καθηγητές του Λυκείου καλούνται να αντιμετωπίσουν την Μαθηματική επιστήμη μέσω ενός διπλού πρίσματος. Αρχικά, είναι οι εκπρόσωποι της Μαθηματικής κοινότητας που επικοινωνούν με τους μαθητές και προσπαθούν να τους μεταδώσουν ένα τμήμα της γνώσης τους και δευτερευόντως αποτελούν κύτταρα ενός οργανισμού που κουβαλάει εμπειρίες γνώσεις άσχετες με τη σχολική κοινότητα.

- **Πανεπιστημιακοί:** Στις απαντήσεις των ερωτώμενων του Πανεπιστημιακού τομέα παρατηρούμε γενικά λακωνικές και σαφείς απαντήσεις, Η Π1 και ο Π3 ανέφεραν ότι μέσω της απόδειξης εξελίσσεται η επιστήμη αφού η αποδεικτική διαδικασία εξαλείφει τις αμφιβολίες και συνδέει τα αποτελέσματα διαφορετικών ερευνών.

Η Π1 έχοντας διδάξει θεωρητικά Μαθηματικά του κλάδου της ανάλυσης ανέφερε μάλιστα ότι η απόδειξη μπορεί και γίνεται ένα εργαλείο διεύρυνσης των νοητικών ικανοτήτων αφού μέσω αυτής το μυαλό μαθαίνει να συνδυάζει ή να απορρίπτει θεωρίες, ενώ ο αρχικός της χαρακτηρισμός για τη σημασία της απόδειξης ήταν:

‘ Τεράστια... ..Μαθαίνεις να παίρνεις από άλλα αποτελέσματα και να τα συνδυάζεις και αυτό γίνεται συνέχεια..... .Γιατί να πιστέψω αυτό που μου λες αν δεν μπορώ να το αποδείξω;’

Ο Π2 έχοντας διδάξει Μαθηματικά σε εντελώς διαφορετικά τμήματα (Μαθηματικό και Παιδαγωγικό) έδωσε στην απόδειξη το χαρακτήρα της βάσης της ορθολογικής σκέψης τονίζοντας μάλιστα την ικανότητα ανάπτυξης των Μαθηματικών μέσω της θεμελίωσης ξεκινώντας από έναν πολύ μικρό αριθμό αξιωμάτων. όλοι οι ερωτώμενοι πάντως, τόνισαν ότι η απόδειξη εξαλείφει τις αμφιβολίες που μπορεί να παρουσιασθούν κατά τη διάρκεια μίας έρευνας.

- **Φροντιστές:** Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι απόψεις των φροντιστών φαίνεται να ακολουθούν τον ρόλο που επιτελούν στη Μαθηματική εκπαίδευση της χώρας μας, Στις συνεντεύξεις που έγιναν, υπήρξαν αρκετές περιπτώσεις στις οποίες έπρεπε να τονιστεί ότι η απόδειξη ως διαδικασία και οι αποδείξεις των θεωρημάτων των σχολικών βιβλίων δεν ταυτίζονται ως έννοιες και για το λόγο αυτό διαφέρει και η αντιμετώπιση τους γιατί ή διδασκαλία της απόδειξης ενός θεωρήματος απαιτεί σχεδόν πάντα στείρα απομνημόνευση ενώ η διδασκαλία του τρόπου της απόδειξης είναι το βασικό κομμάτι των Μαθηματικών της Γ’ Λυκείου και απαιτεί πλήθος τεχνικών και δεξιοτήτων. Οι Φ1 , Φ3 και Φ11 υπερθεματίζουν υπέρ του γεγονότος ότι η απόδειξη εξαλείφει τις αμφιβολίες για κάποιον ισχυρισμό και δίνουν τη δυνατότητα να χτισθεί ένα σύνολο γνώσεων απαραίτητο για την εξέλιξη της επιστήμης. Ο Φ11 αναφέρει πιο συγκεκριμένα ότι η φύση

των Μαθηματικών βασίζεται στην πλήρη αιτιολόγηση άρα ο οποιοσδήποτε ερευνά ένα μαθηματικό δημιούργημα οφείλει να εξαλείφει τις αμφιβολίες που δημιουργούνται μέσω της απόδειξης. Σύμφωνα με τον Φ1 μέσω της απόδειξης γίνεται κατανοητή η παρουσίαση της σκέψης ενός μαθηματικού στο ευρύ κοινό και ταυτόχρονα η παρουσίαση των βημάτων που ακολουθεί. Ο Φ2 σημειώνει ότι η απόδειξη αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά στοιχεία των Μαθηματικών καθώς μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας οικοδομήθηκαν καινούριες έννοιες και ταυτόχρονα επιτρέπει σε κάποιον να κατανοήσει σε βάθος τις έννοιες που μελετάει. Ο Φ3 με τη σειρά του, μέσα από ένα πρίσμα προσανατολισμένο στην εκπαιδευτική πορεία ενός μαθητή που στοχεύει σε διακρίσεις, υπερθεμάτισε υπέρ του χαρακτήρα της απόδειξης ως ένα εργαλείο όχι μόνο κατανόησης αλλά και επανάληψης των γνωστών μέχρι τώρα εννοιών. Όσον αφορά την άποψη του για τη συνεισφορά της απόδειξης στην εξέλιξη των Μαθηματικών η απάντηση του ήταν:

‘αρκετά σημαντική, στο μέτρο του δυνατού, αφού δίνει τη δυνατότητα της χρησιμοποίησης κάποιων συμπερασμάτων, άφοβα’. Φαίνεται ότι για αυτόν η βαρύτητα της αποδεικτικής διαδικασίας είναι μεγαλύτερη και πιο χρήσιμη στα σχολικά μαθηματικά από ότι στην Μαθηματική επιστήμη καθώς για την Μαθηματική επιστήμη τονίζει ότι η χρησιμότητα της βρίσκεται στο *‘μέτρο του δυνατού’*

- **Καθηγητές Λυκείου:** Οι καθηγητές του Λυκείου καλούνται να αντιμετωπίσουν την Μαθηματική επιστήμη μέσω ενός διπλού πρίσματος.

Αρχικά, είναι οι εκπρόσωποι της Μαθηματικής κοινότητας που επικοινωνούν με τους μαθητές και προσπαθούν να τους μεταδώσουν ένα τμήμα της γνώσης τους και δευτερευόντως αποτελούν κύτταρα ενός οργανισμού που κουβαλάει εμπειρίες γνώσεις άσχετες με τη σχολική κοινότητα. Για το λόγο αυτό συναντάμε κάποιες απόψεις που διαχωρίζουν τη σημασία της απόδειξης στη σχολική Μαθηματική εκπαίδευση από τη αντίστοιχη σημασία της απόδειξης στη Μαθηματική επιστήμη.

Ο Λ1 τόνισε ότι η αποδεικτική διαδικασία προσέφερε στην παράγωγη νέας γνώσης άποψη που τη συναντούμε και στην Λ3 η οποία ερωτώμενη για τη σημασία της απόδειξης ανέφερε ότι:

‘ Τεράστια. Βασικά είναι το έναυσμα για να προχωράει, γιατί αν δεν προσπαθήσεις να πείσεις τον άλλο για το δίκιο σου, αυτά που πρεσβεύεις είναι σωστά μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας, ο άλλος δε θα σε πιστέψει. Μέσω της αμφισβήτησης θα βρεθούνε κάποια αντιπαραδείγματα, θα αναγκαστείς να δώσεις κάποιους περιορισμούς, θα πέσεις σε κάποιες αντιφάσεις, θα προσπαθήσεις να τις διορθώσεις, οπότε αυτή η διαδικασία ωφέλησε. ’

Ο Λ2 τόνισε ότι η απόδειξη έχει τεράστια σημασία για τα Μαθηματικά. Ο ίδιος τόνισε:

‘ Εκτιμώ ότι η απόδειξη είναι ο θεμέλιος λίθος των Μαθηματικών. Όταν μπαίνει η απόδειξη στη Μαθηματική εκπαίδευση, κάνουμε τη μετάβαση από την Αριθμητική στα Μαθηματικά. Εκτιμώ ότι είναι η απαρχή των

Μαθηματικών. Για μένα είναι το κυρίαρχο στοιχείο για τη Μαθηματική παιδεία ενός μαθητή'.

Αντίστοιχη είναι η άποψη του για τη σημασία της απόδειξης στα Μαθηματικά γενικότερα:

'Θεωρώ ότι η απόδειξη παρέχει θεμελίωση, μία δομή. Δίνει τη δυνατότητα να δομήσεις. Αυτό γίνεται και μέσω της απόδειξης'

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Η συνολική άποψη των καθηγητών Γυμνασίου για τη σημασία της απόδειξης είναι ανάλογη με αυτή των υπόλοιπων εκπαιδευτικών. Τονίζεται από όλους η σπουδαιότητα της αποδεικτικής διαδικασίας τόσο στην επιστήμη όσο και στο σχολείο. Οι διαφορές της απόδειξης στο γυμνάσιο φανερώνονται σε άλλα ερωτήματα της έρευνας.

Ο Γ2 δείχνει πάντως της προαναφερθείσα σύγχυση ανάμεσα στην έννοια της απόδειξης και σε μια συνηθισμένη άσκηση αφού τονίζει ότι:

'Η απόδειξη είναι πολύ σημαντική αφού η ίδια η διαδικασία απαιτεί ψάρεμα γνώσεων, συνδυασμό, λύση και αποτέλεσμα. Είναι σαν να λύνεις μία άσκηση'

Η Γ0 παρόμοια με τον Γ2 αναφέρει ότι η απόδειξη είναι σημαντική αλλά αναφέρει:

'Κάποιες αποδείξεις του σχολικού είναι δύσκολες'.

Πάντως η Γ0 ήταν πολύ λακωνική όσον αφορά τη συνεισφορά της απόδειξης στα Μαθηματικά, γεγονός που μάλλον οφείλεται στη μακρόχρονη απουσία της από τη Μαθηματική εκπαίδευση.

Ο Γ2 αναφέρει ότι η απόδειξη έδωσε ώθηση στα Μαθηματικά αφού άλλαξε τον τρόπο αντιμετώπισης των προ απόδειξης Μαθηματικών,

διαμορφώνοντας τη μετάβαση από την αυθαιρεσία και τη διαίσθηση σε ένα συγκροτημένο δομημένο έργο, βασισμένο σε αξιώματα και λογική. Εκτός αυτού ο ίδιος συνεχίζει προσθέτοντας:

‘Από μόνη της η απόδειξη δημιουργεί μαθηματικά’. δίνοντας έτσι ακόμη ένα χαρακτηριστικό της απόδειξης, βγαλμένο μέσα από την Ιστορία της μαθηματικής επιστήμης.

Ο Γ3 θεωρεί ότι η απόδειξη είναι η βάση της εξέλιξης των Μαθηματικών και ονομάζει και αυτός την απόδειξη ‘θεμέλιο λίθο των Μαθηματικών’.
Τονίζει μάλιστα ότι:

‘...Γι αυτό (τα Μαθηματικά) είναι πραγματική επιστήμη και ασχολείται με την πραγματικότητα’

- **Δάσκαλοι**

Οι δάσκαλοι είναι οι εκπαιδευτικοί που έχουν τη μικρότερη άμεση σχέση με την αποδεικτική διαδικασία. Οι απαντήσεις που δίνουν σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό από τις εμπειρίες τους ως μαθητές αλλά και από το εκπαιδευτικό περιβάλλον και τα εν γένει βιώματα τους.

Η Δ1 τονίζει ότι η απόδειξη βοηθάει στην ανάπτυξη της σκέψης και εξ αιτίας της διαφοροποίησης της από την απλή εύρεση αποτελεσμάτων (όπως συμβαίνει σε απλές ασκήσεις) βοηθάει στην κατανόηση ενός φαινομένου. Ο Δ2 με τη σειρά του απάντησε πολύ λακωνικά ότι η απόδειξη είναι πολύ σημαντική. Ο Δ3 από την άλλη υπερθεματίζοντας για την πολύ μεγάλη σημασία της απόδειξης είπε:

‘Η απόδειξη είναι σαν το οξυγόνο και το νερό στη ζωή μας.... Οδηγούμαστε, με την απόδειξη στην ανακάλυψη της αλήθειας.’

Όσον αφορά στην απόδειξη και την εξέλιξη των Μαθηματικών τόνισε ότι οι διάφορες αποδεικτικές μέθοδοι έχουν βοηθήσει την επιστήμη να φύγει από το σκοτάδι.

Βλέπουμε ότι παρά την διαφορά στους τρόπους διδασκαλίας και προσέγγισης της απόδειξης δεν εντοπίζονται κοινές απαντήσεις σε βαθμό που μπορούμε να πούμε ότι οι εκπαιδευτικοί μιας συγκεκριμένης βαθμίδας παρουσιάζουν κοινή αντιμετώπιση ως προς το συγκεκριμένο ερώτημα. Φαίνεται περισσότερο ότι οι απόψεις είναι προϊόν προσωπικών εμπειριών. Υπάρχει καθολική αποδοχή της σημασίας της απόδειξης τόσο στην εξέλιξη των Μαθηματικών όσο και στη Μαθηματική εκπαίδευση. Από τις απαντήσεις των ερωτώμενων δεν προέκυψαν σημαντικές διαφορές που να οφείλονται στις ούτε στα χρόνια εμπειρίας τους. Ως γενικό συμπέρασμα προκύπτει ότι η σημασία της απόδειξης στην εξέλιξη των Μαθηματικών είναι τεράστια και αυτό οφείλεται σε μια σειρά από λόγους που συναντάμε στις διάφορες απαντήσεις.

5.1.2 Ρόλοι της απόδειξης

Όσον αφορά στο συγκεκριμένο ερώτημα, είναι το τμήμα της έρευνας στο οποίο οι ερωτώμενοι χρειάστηκαν τις περισσότερες διευκρινήσεις, αφού η έννοια του ρόλου δεν είναι κάτι με το οποίο οι καθηγητές των μαθηματικών είναι συνειδητά εμπλεκόμενοι.

Πανεπιστημιακοί: Η Π1, θεωρεί ότι εκτός από τους προφανείς ρόλους της πιστοποίησης και της κατανόησης, η απόδειξη δίνει την ευκαιρία στους Μαθηματικούς να επικοινωνήσουν και να γνωστοποιήσουν τις ιδέες και την εργασία τους. Ο Π2 έχοντας περάσει ως καθηγητές από Μαθηματικό τμήμα, θεωρεί ότι ο σημαντικότερος ρόλος της απόδειξης είναι η συστηματοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης λέγοντας:

‘ Η απόδειξη είναι μία διαδικασία ακολουθητική, από το A συμπεραίνουμε το B, από το B συμπεραίνουμε το Γ, χωρίς να γίνεται ένα byrass, δηλαδή δεν μπορεί να βγει από το A το Γ χωρίς να μεσολαβήσει το B. Αυτή είναι μία ντετερμινιστική διαδικασία’. Έτσι εξαλείφεται η πιθανότητα να αφήνουμε τις σκέψεις στο κενό.

Η Π3, καθηγήτρια Μαθηματικός τμήματος, στον τομέα των Καθαρών Μαθηματικών και ειδικότερα στην Ανάλυση ανέφερε ότι ένας βασικός ρόλος της απόδειξης είναι η δυνατότητα που παρέχει να γνωστοποιούνται τα αποτελέσματα των ερευνών, δηλαδή επιτρέπει την επικοινωνία. Επίσης θεωρεί ότι μέσω της απόδειξης μπορεί κάποιος να κάνει επανάληψη των γνώσεων του αλλά και να δημιουργήσει καινοτόμες ιδέες. Η πιστοποίηση μιας αλήθειας αναφέρεται επίσης στις απαντήσεις της αλλά φαίνεται ότι δεν αποτελεί τον καθοριστικό ρόλο.

- **Φροντιστές:** Ο Φ2 τόνισε ότι δύο ρόλοι της απόδειξης είναι η τεκμηρίωση και η επεξήγηση. Αναφέρει συγκεκριμένα:

‘ Εξαρτάται, θεωρώ, από την απόδειξη. Υπάρχουν αποδείξεις που σε βοηθούν να τους πεις πέντε πράγματα παραπάνω, να τεκμηριώσεις καλύτερα αυτό που

θες να πεις και υπάρχουν αποδείξεις που δε βοηθούν το μαθητή. Παράδειγμα στα Μαθηματικά του Γυμνασίου είναι η απόδειξη της ταυτότητας του τετραγώνου του αθροίσματος, που γίνεται μέσω της επιμεριστικής ιδιότητας. Στη Γ' Λυκείου οι αποδείξεις που γίνονται με το θεώρημα Bolzano, αν συνδυασθούν με κατάλληλα εποπτικά μέσα, εξηγούν το λόγο ύπαρξης μιας ρίζας σε συγκεκριμένο διάστημα'

Ο Φ1 τόνισε ότι με τη βοήθεια μιας απόδειξης ο αναγνώστης όχι μόνο κατανοεί καλύτερα το φαινόμενο αλλά παράλληλα μπορεί και ελέγχει την ορθότητα των βημάτων, δηλαδή ουσιαστικά επικοινωνεί με τον δημιουργό της απόδειξης. Ο Φ3, επηρεασμένος, όπως αναφέρθηκε από το είδος της δουλειάς και της διδασκαλίας αναφέρει ότι ο βασικός ρόλος της απόδειξης είναι η επανάληψη και η συστηματοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης. Ο Φ0 με τη σειρά του, χρησιμοποιεί την ετυμολογία της λέξης ' απόδειξη' και θεωρεί ότι η απόδειξη αποτελεί το τεκμήριο της ορθής διαδικασίας.

- **Καθηγητές Λυκείου** Ο Λ1 απλά θεωρεί ότι η απόδειξη προσφέρει μία νοητική εξάσκηση, ενώ κοινό χαρακτηριστικό στις απαντήσεις των Λ2 και Λ3 είναι ο ρόλος της πειθούς. Ο Λ2 μάλιστα, αναφέρει ειδικότερα ότι:

‘ Σε πείθει για την ορθότητα, ότι ένα πόρισμα, ένα θεώρημα , μία εικασία σταματάει να είναι εικασία. Όταν υπάρχει η απόδειξη από κάτω γίνεται αλήθεια. ’

Ο ίδιος συνεχίζει παρατηρώντας ότι τόσο από την παρατήρηση των μαθητών του όσο και από εξατομικευμένη ενασχόληση νε τα Μαθηματικά,

η απόδειξη μπορεί να επιτελέσει το κίνητρο που θα οδηγήσει σε περαιτέρω ανακάλυψη, δηλαδή στη δημιουργία περαιτέρω γνώσης.

Η Λ3 προσθέτει ότι με την απόδειξη γίνεται βαθύτερη κατανόηση του αντικειμένου:

‘Θεωρώ ότι μέσω αυτής της διαδικασίας ο μαθητής ξεκαθαρίζει τις σχέσεις, τις συνδέσεις που έχουν τα αντικείμενα που διαχειρίζεται κάθε στιγμή, είτε αυτά τα αντικείμενα είναι αλγεβρικά, είτε γεωμετρικά’

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Ο Γ1 τόνισε ότι ο ρόλος της απόδειξης είναι να ‘μαγεύει’ τον αναγνώστη της με την προϋπόθεση ότι στηρίζεται σε μία σωστή υπόθεση ενώ η Γ0 θεωρεί ότι η απόδειξη προσφέρει την επικοινωνία ανάμεσα στα μέλη της Μαθηματικής κοινότητας. Ο Γ2, που έδωσε απαντήσεις πολύ συναφείς με αυτές που συναντούμε στη βιβλιογραφία, πιθανώς επηρεασμένος από τις γνώσεις του στη Διδακτική των Μαθηματικών. Τόνισε χαρακτηριστικά:

‘Απόδειξη είναι η εξήγηση, ο έλεγχος, η προσπάθεια να πείσεις κάποιον, το να επιχειρηματολογήσεις, να επαληθεύσουμε’

Ο Γ3 τέλος, απάντησε λέγοντας ότι η απόδειξη βελτιώνει τη σκέψη, δίνοντας δηλαδή ως απάντηση το όφελος που αποκομίζει κάποιος.

- **Δάσκαλοι:** Οι δάσκαλοι, όντες οι εκπαιδευτικοί με τη μικρότερη άμεση σχέση με την απόδειξη, έδωσαν ως βασικό ρόλο της απόδειξης, τον προφανή που είναι η πειθώ. Η Δ1, έχοντας γνώσεις πάνω στη Διδακτική των Μαθηματικών, τόνισε επιπρόσθετα ότι η κατανόηση ενός αντικειμένου και η επικοινωνία μεταξύ των Μαθηματικών, επιτελούνται με τη βοήθεια της

απόδειξης, ενώ ο Δ2 ανέφερε ότι η απόδειξη επιδεικνύει τη λογική συνάφεια μεταξύ των βημάτων. Ο Δ3 πρόσθεσε ότι ένας ρόλος της απόδειξης είναι η παραγωγή νέας γνώσης αφού όπως τόνισε:

‘ Ο Ρόλος της απόδειξης είναι να μας οδηγήσει σε νέες γνώσεις και να μας διασφαλίσουν την εγκυρότητα αυτών. Μας διασφαλίζουν το αποτέλεσμα. Κάθε νέα γνώση γίνεται αφετηρία για μία καινούρια γνώση. Η υπόθεση είναι η αφετηρία, ο δρόμος είναι η απόδειξη και το τέρμα είναι το συμπέρασμα. ‘

Οι περισσότεροι ερωτώμενοι συσχέτισαν την απόδειξη με την τεκμηρίωση. Πάντως πρέπει να τονιστεί ότι ο όρος ‘ρόλος της απόδειξης’ χρειάστηκε αποσαφήνιση για σχεδόν όλους τους εκπαιδευτικούς καθώς κανένας δεν ήταν εξοικειωμένος με τον όρο. Οι απαντήσεις των πανεπιστημιακών καθηγητών διαφέρουν πάρα πολύ μεταξύ τους, καθώς προέρχονται από τμήματα με εντελώς διαφορετικό γνωστικό αντικείμενο. Στις απαντήσεις αυτού των φροντιστών μπορούμε να παρατηρήσουμε την επίδραση του είδους της διδασκαλίας που επιτελείται στα φροντιστήρια ενώ κάτι παρόμοιο συναντούμε και στους καθηγητές του Λυκείου. Στην περίπτωση των καθηγητών του Γυμνασίου και στους Δασκάλους έχουμε απαντήσεις που συνδέονται με τη βασική λειτουργία της αποδεικτικής διαδικασίας.

5.1 Ευρήματα ερωτήσεων 2ου άξονα

5.2.1 Σημασία της διδασκαλίας της απόδειξης

Η διδασκαλία της απόδειξης κρίνεται πολύ σημαντική σε γενικές γραμμές από όλους τους εκπαιδευτικούς. Παρακάτω θα επισημανθούν οι διάφορες απόψεις ανάλογα με τον κλάδο τους. Εδώ πρέπει να επισημανθεί για μια ακόμη φορά η

σύγχυση που επικρατεί ανάμεσα στους όρους ‘απόδειξη’ και ‘διδασκαλία της απόδειξης’ καθώς στο πρώτο άκουσμα της του δεύτερου όρου, ένας σημαντικός αριθμός των ερωτώμενων θεώρησε ότι η ερώτηση αφορά στη διδασκαλία των θεωρημάτων που αποδεικνύονται στα σχολικά εγχειρίδια. Οι Πανεπιστημιακοί αντιμετωπίζουν πολλά προβλήματα στις Πανεπιστημιακές διαλέξεις γιατί θεωρούν ότι οι φοιτητές εισάγονται στις σχολές έχοντας μεγάλες ελλείψεις στο συγκεκριμένο τομέα. Οι καθηγητές Μέσης εκπαίδευσης που έχουν ως απώτερο στόχο τις εισαγωγικές εξετάσεις βλέπουν τη διδασκαλία μέσα από ένα, ούτως ή άλλως, βαθμοθηρικό πρίσμα. Οι Δάσκαλοι είναι αυτοί που αντιμετωπίζουν πρώτοι τις δυσκολίες αλλά και τις δυνατότητες των μικρών μαθητών

- **Πανεπιστημιακοί:** στο σύνολο τους οι πανεπιστημιακοί καθηγητές θεωρούν ότι η διδασκαλία της απόδειξης είναι σημαντική και τονίζουν ότι θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα αποδεικτικών διαδικασιών που θα δίνουν στο μαθητή / φοιτητή τη δυνατότητα να αντιμετωπίζει διάφορα μαθηματικά έργα που προέρχονται από διαφορετικούς τομείς. Οι Π2 και Π3 τόνισαν ότι πρέπει να διδάσκεται σίγουρα η επαγωγική μέθοδος που μάλιστα φαίνεται να προβληματίζει τους φοιτητές αλλά τονίστηκε ότι η διδασκαλία, τουλάχιστον σε πανεπιστημιακό επίπεδο, πρέπει να είναι σχετικά σύντομη και να μην καταλαμβάνει ολόκληρο εξάμηνο.
- **Φροντιστές:** στην ερώτηση αυτή υπήρξε πλήρης ομοφωνία. το σύνολο των εκπαιδευτικών του κλάδου υπερθεμάτισαν για τη διδασκαλία της αποδεικτικής μεθόδου, τονίζοντας ότι η παρουσίαση μεθόδων όπως αυτή της απαγωγής σε άτοπο, κρίνεται αναγκαία, σε συνδυασμό με τη

διδασκαλία στοιχείων από τη Μαθηματική Λογική. Η μοναδική ένσταση παρουσιάστηκε από τον Φ11 ο οποίος υποστήριξε ότι μια τέτοιου είδους διδασκαλία μπορεί να έχει τα επιθυμητά αποτελέσματα μόνο αν απευθύνεται στο κατάλληλο κοινό.

- **Καθηγητές Λυκείου:** Παρόμοια αποτελέσματα παρουσιάζουν και οι απαντήσεις των καθηγητών του Λυκείου. Όλοι τους κρίνουν αναγκαία την εισαγωγή της διδασκαλίας της μαθηματικής απόδειξης, συμπεριλαμβανομένων των στοιχείων που απαιτούνται, όπως αυτά της Μαθηματικής λογικής αλλά και τη διδασκαλία της χρήσης των τελεστών και των ποσοδεικτών. Η Λ3 αναφέρει χαρακτηριστικά παραδείγματα εσφαλμένης χρήσης των συμβόλων, τονίζοντας με αυτόν τον τρόπο, την ανάγκη διδασκαλίας τους. Ο Λ1 με τη σειρά του, τονίζει ότι το βάρος αυτής της διδασκαλίας πρέπει να δοθεί όχι μόνο στο σχολείο αλλά και στα Μαθηματικά τμήματα, στα οποία, όπως παρατηρεί, εμφανίζεται πρόβλημα όσον αφορά στις αποδεικτικές διαδικασίες των φοιτητών.
- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Οι απαντήσεις των καθηγητών γυμνασίου διαφοροποιούνται σε κάποιο βαθμό από τις απαντήσεις των υπόλοιπων εκπαιδευτικών. Ίσως εξ αιτίας της έλλειψης της απόδειξης με τον τυπικό χαρακτήρα της στα σχολικά προγράμματα του Γυμνασίου, οι περισσότεροι καθηγητές του κλάδου δεν είναι απόλυτοι όσον αφορά την ανάγκη της διδασκαλίας της απόδειξης. Η Γ0 θεωρεί ότι αναγκαία προϋπόθεση για την εισαγωγή ενός μαθήματος διδασκαλίας της απόδειξης είναι η μείωση της ύλης, τόσο στο Γυμνάσιο όσο και στο Λύκειο. Ο Γ3 θεωρεί ότι η

διδασκαλία μπορεί να γίνει μόνο με την εισαγωγή περισσότερων αποδείξεων, δηλαδή προτείνει τη διδασκαλία μέσω της μάθησης περισσότερων αποδείξεων. Ο μοναδικός καθηγητής Γυμνασίου που τάχθηκε υπέρ της εισαγωγής ενός αντίστοιχου μαθήματος ήταν ο Γ2 που είπε:

‘Ναι, βέβαια, εννοείται’

Δάσκαλοι: Οι Δάσκαλοι ήταν αρκετά λακωνικοί όσον αφορά στην απάντηση τους στο συγκεκριμένο ερώτημα. Όλοι παρουσιάζονται θετικοί όσον αφορά στη διδασκαλία της απόδειξης. Η Δ1 τόνισε ότι η διδασκαλία πρέπει να γίνει ουσιαστική και όχι μηχανική. Λέει χαρακτηριστικά:

‘Θεωρώ ότι είναι πολύ σημαντικό να υπάρχει διδασκαλία αλλά αυτό το εγχείρημα πρέπει να γίνει ομαλά’

Η συντριπτική πλειοψηφία των ερωτώμενων τάχθηκε υπέρ της διδασκαλίας της απόδειξης και των μεθόδων της. Βέβαια, όπως τονίστηκε, η διδασκαλία της απόδειξης θα πρέπει να απαιτήσει ώρες από το ωρολόγιο πρόγραμμα με σαφή αναδιάρθρωση του.

5.2.2. Όφελος για το μαθητή

Πρόκειται για την ερώτηση με τη μεγαλύτερη ποικιλία στις απαντήσεις. Όπως θα δούμε το όφελος από την ενασχόληση με την αποδεικτική διαδικασία, δεν φαίνεται να περιορίζεται μόνο στις θετικές επιστήμες, όπως είναι το αναμενόμενο. Οι Πανεπιστημιακοί καθηγητές, εξ αιτίας της φύσης της εργασίας τους, δεν ανέφεραν κάποιο μάθημα στο οποίο υπάρχει βελτίωση εξ αιτίας της ενασχόλησης με την απόδειξη, αλλά περισσότερο εστίασαν σε εξωσχολικούς τομείς. Οι εκπαιδευτικοί

που εργάζονται σε σχολεία και φροντιστήρια όμως, εστίασαν την προσοχή τους στο κέρδος των μαθητών σε συγκεκριμένα μαθήματα

- **Πανεπιστημιακοί:** . Ο Π2 απάντησε ότι ο τρόπος σκέψης επιφέρει βελτίωση σε όλους τους τομείς. Συγκεκριμένα τόνισε:

‘ Προφανώς η μαθηματική σκέψη είναι κεντρική στη διαδικασία της επιστήμης . Η επιστήμη δεν είναι αυθαίρετη, βασίζεται σε δεδομένα και συμπεράσματα ’

Οι Π1 και Π3 τόνισαν ότι ένας κλάδος που σχετίζεται με την απόδειξη είναι η Νομική. Συγκεκριμένα η Π2 τόνισε:

‘ Η Νομική είναι Μαθηματικά ’

ενώ ο Π1 παρόμοια ανέφερε:

‘ Γενικότερα, αποδεικτική διαδικασία μπορεί να υπάρχει και σε άλλες επιστήμες, και στη Νομική με κάποια επιχειρήματα κάποιος προσπαθεί να αποδείξει σιγά σιγά κάποιο πόρισμα. Και ο άλλος προσπαθεί να πείσει κάποιο Δικαστή ’.

- **Φροντιστές:** Στις απαντήσεις των ερωτώμενων βλέπουμε δύο τάσεις. Οι φροντιστές με μεγάλη εμπειρία τόνισαν ότι η απόδειξη βελτιώνει πρωτίστως τη μαθηματική σκέψη. Ο Φ3 τόνισε:

‘ Σίγουρα, έχουμε τη μεταγνώση. Αρχικά, γνωρίζει τους συλλογισμούς των Μαθηματικών, τον επαγωγικό συλλογισμό, στρατηγικές για να λύνει ασκήσεις. Πώς προσεγγίζει το βιβλίο μια απόδειξη. Κατανοεί, ίσως και τι είναι σημαντικό να μείνει στη μνήμη.

Ο Φ2 αναφέρει ότι η βελτίωση στα Μαθηματικά μπορεί να έρθει μόνο στους πολύ καλούς μαθητές ενώ δε φαίνεται να υπάρχει κέρδος και σε άλλα μαθήματα.

Ενώ θα περιμέναμε να υπάρχει σύνδεση των Μαθηματικών με συναφή μαθήματα όπως η Φυσική, το συγκεκριμένο μάθημα αναφέρεται μόνο από τους Φ3 και Φ1. Ο Φ0, Φ1 και Φ3 θεωρούν ότι ο τρόπος σκέψης της αποδεικτικής διαδικασίας φαίνεται σε μαθήματα θεωρητικά μαθήματα. Πιο συγκεκριμένα οι Φ0 και Φ1 θεωρούν ότι ο μαθητής αποκομίζει όφελος σε αντικείμενα όπως η Λογοτεχνία και η Έκθεση ενώ ο Φ3 τονίζει ότι από προσωπική εμπειρία γνωρίζει πώς το συντακτικό των Αρχαίων Ελληνικών σχετίζεται ως τρόπος σκέψης με τη συλλογιστική της απόδειξης.

- **Καθηγητές Λυκείου:** Η Φυσική είναι το μάθημα που θεωρείται ως ο κλάδος με το μεγαλύτερο όφελος δια μέσου της ενασχόλησης με την απόδειξη όπως αναφέρθηκε από όλους τους καθηγητές. Ο Λ2 χαρακτηριστικά τονίζει:

‘Αν ένας μαθητής μάθει τον τρόπο που χρησιμοποιείς τα δεδομένα και στη Φυσική, υπάρχει μεγάλος όγκος πληροφοριών, που πρέπει να επεξεργαστεί, αν μάθεις να βγάζεις το συμπέρασμα φαίνεται ότι η μελέτη αποδείξεων μπορεί να αποτελέσει το εφιαλτήριο για να προχωράς’.

Ο ίδιος συνεχίζει λέγοντας:

‘Η απόδειξη βελτιώνει το μαθητή 9 στα 10. Η μελέτη της απόδειξης ανοίγει τους ορίζοντας γενικότερα για τη μελέτη’

Η Λ3 πάντως θεωρεί ότι ένας μαθητής εμφανίζεται βελτιωμένος και στα Αρχαία Ελληνικά αφού όπως αναφέρει:

‘Μπορούνε, στο συντακτικό και είναι πολύ καλύτερα γιατί αναγνωρίζουν τις θέσεις και το ρόλο κάποιων λέξεων’.

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Φαίνεται ότι οι καθηγητές Γυμνασίου δεν έχουν αποκρυσταλλωμένη άποψη για τα οφέλη της αποδεικτικής διαδικασίας σε άλλους γνωστικούς τομείς. Πλην ενός, οι υπόλοιποι απάντησαν με μια γενική άποψη που σχετίζεται με την ικανότητα κριτικής σκέψης και σύνθεσης απόψεων. Μόνο ο Γ1 απάντησε συγκεκριμένα, τονίζοντας ότι ο τρόπος σκέψης που δομείται μέσω της απόδειξης, μπορεί να ωφελήσει το μαθητή σε μαθήματα φαινομενικά άσχετα, όπως η Ιστορία:

‘Χρησιμοποιώ ένα παράδειγμα για να πω στα παιδιά ότι η λογική των Μαθηματικών είναι παντού. Οι περισσότεροι ξέρουν ότι ο Τρωικός πόλεμος κράτησε δέκα χρόνια. Και ρωτάω: Αν όλοι οι γεροί άντρες έλειπαν για δέκα χρόνια, ποιος θα προστάτευε το μέρος, ποιος θα καλλιεργούσε τη γη; Άρα δεν κράτησε δέκα χρόνια. Πηγαينوέρχονταν δέκα χρόνια. Είναι απλή λογική. Οπότε καταλαβαίνουν τα παιδιά ότι ισχύει η ίδια λογική σε όλα τα πράγματα’

- **Δάσκαλοι:** Όπως και στην περίπτωση των καθηγητών Γυμνασίου, έτσι και σε αυτήν των δασκάλων, βλέπουμε ότι δεν υπάρχει αποκρυσταλλωμένη και σαφής αναφορά στο όφελος των μαθητών σε κάποιο τομέα. Εξαίρεση αποτελεί η απάντηση του Δ2 ο οποίος συνδέει την αποδεικτική διαδικασία με το μάθημα της Ιστορίας. Ο συγκεκριμένος δάσκαλος αναφέρει:

‘Η Ιστορία έχει πάρα πολύ καλή σχέση με τα Μαθηματικά, σε σχέση με την απόδειξη. Η Ιστορία έχει μία συνέχεια. Οι αιτίες ενός γεγονότος, τα αποτελέσματα του, όλα αυτά έχουν μια Μαθηματική λογική. Το ‘συνεπάγεται’ μπορώ να το πάω εκεί’.

Ο ίδιος δάσκαλος θεωρεί ότι ένας μαθητής μπορεί να ωφεληθεί αν παρατηρήσει τις συνδέσεις δύο λέξεων, δίνοντας με τον τρόπο αυτό μία ώθηση για την εκμάθηση της ετυμολογίας τους.

Οι Δ1 και Δ3 δεν αναφέρουν κάποιο συγκεκριμένο μάθημα στο οποίο ωφελείται ο μαθητής, αλλά τονίζουν ότι η ενασχόληση με την απόδειξη μπορεί να βοηθήσει στη δομή της σκέψης και παράλληλα να δημιουργήσει το αίσθημα της κριτικής σκέψης. Ειδικά ο Δ3 τονίζει ότι με την απόδειξη ένας μαθητής μαθαίνει να συνδυάζει ή να απορρίπτει συμπεράσματα και να προβαίνει σε εξαγωγή λογικών πορισμάτων.

Στις απαντήσεις των ερωτώμενων συναντούμε μεγάλο εύρος όσον αφορά στα οφέλη του μαθητή. Ενώ κάποιος θα περίμενε να βρίσκουμε απαντήσεις που σχετίζονται αποκλειστικά με θετικά μαθήματα, αντιθέτως πολλοί εκπαιδευτικοί τόνισαν το κέρδος των μαθητών σε μαθήματα που φαινομενικά δεν έχουν σχέση με τα Μαθηματικά όπως η Ιστορία και τα Αρχαία.

5.2.3. Όφελος για τον άνθρωπο-πολίτη

Στο ερώτημα αυτό οι ερωτώμενοι κλήθηκαν να δώσουν την άποψη τους για τα οφέλη που αποκομίζει ο μαθητής μετά το πέρας της μαθητικής πορείας του. . Βεβαίως, επειδή η ερώτηση σχετίζεται με τα οφέλη των ατόμων ως πολίτες έξω

από το σχολικά πλαίσια, οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν σε άτομα μεγαλύτερης ηλικίας (Πανεπιστημιακοί κατά πρώτο λόγο αλλά και φροντιστές ή Καθηγητές Λυκείου) έχουν την ευκαιρία να διαπιστώνουν απευθείας την επίδραση του τρόπου σκέψης που διαμορφώνεται υπό την επίδραση της ορθής αποδεικτικής διαδικασίας.

- **Πανεπιστημιακοί:** Οι Π1 κα Π2 ανέφεραν ότι το κύριο όφελος της απόδειξης είναι η ορθολογική σκέψη που διαμορφώνεται στον πολίτη. Ο Π2 είπε για το ζήτημα:

‘Είναι πολύ επίκαιρο το θέμα της πανδημίας. Αν μπορείς να καταλάβεις την απόδειξη που σχετίζεται με τον τύπο της μετάδοσης λόγω της αύξησης των επαφών σε ένα χώρο, τότε κάτι κερδίζεις’.

Η Π3 θεώρησε ως όφελος για τον άνθρωπο την κοινωνικοποίηση που έρχεται ως απόρροια της προσπάθειας του ατόμου να αποδείξει έναν ισχυρισμό σε συνεργασία με κάποιον άλλο. Παράλληλα όπως τονίζει η ίδια:

‘Η αποδεικτική διαδικασία σου ανοίγει το μυαλό και τους ορίζοντες. Γίνεσαι καλύτερος σχεδόν στα πάντα’. Στην ερώτηση να δώσει ένα συγκεκριμένο γνωστικό πεδίο , η απάντηση της ήταν:

‘ Η Νομική επιστήμη. Σύμφωνα με νομικούς, η νομική επιστήμη είναι Μαθηματικά, γιατί έχουν μέσα τους τη λογική. Στη βάση τους βρίσκεται η λογική’.

- **Φροντιστές:** Οι Φ0, Φ11, Φ2 και Φ3 θεωρούν ότι η καθημερινότητα ενός ατόμου μπορεί και βελτιώνεται μέσω της απόδειξης, ως αποτέλεσμα της ορθολογικής σκέψης. Ειδικά ο Φ2 τονίζει:

‘Ο άνθρωπος ωθείται να βρίσκει εναλλακτικές στα καθημερινά προβλήματα του’

Αντίθετη γνώμη έχει ο Φ1 που θεωρεί ότι η απόδειξη προσφέρει ελάχιστα στο μέσο πολίτη. Αιτιολογεί την άποψη του με τον εξής τρόπο:

‘Υπάρχει τεράστια έλλειψη βασικών γνώσεων σε έναν άνθρωπο. Λείπουν από τις γνώσεις του ουσιαστικά πράγματα και η γνώση κάποιων αποδεικτικών μεθόδων δεν μπορεί να του προσφέρει τίποτε. Ή ίσως ένα μικρό λιθαράκι’

- **Ορθολογική σκέψη:** Οι περισσότεροι συμμετέχοντες, τόνισαν ότι το μεγάλο όφελος που μπορεί να αποκομίσει ένα άτομο μέσω της ενασχόλησης με την αποδεικτική διαδικασία είναι η δημιουργία ενός ορθολογικού τρόπου σκέψης. Ειδικά, όπως τονίστηκε, στην εποχή που φαίνεται να υπάρχει εύκολη διασπορά ανυπόστατων ειδήσεων με τρομακτική ταχύτητα (fake news), ο ορθολογικός τρόπος σκέψης μπορεί να αποτελέσει ανάχωμα σε αυτό το φαινόμενο. Πιο συγκεκριμένα οι ερωτώμενοι τόνισαν ότι όταν ένα άτομο σκέφτεται ορθολογικά μπορεί να φιλτράρει και να δεχτεί ή να απορρίψει ένα μεγάλο μέρος από τις πληροφορίες που λαμβάνει χρησιμοποιώντας τη λογική του. Ας σημειωθεί πάντως ότι υπήρξε η άποψη ενός ερωτώμενου, του Φ1, που ανέφερε ότι ο σημερινός πολίτης στερείται σε πολύ μεγάλο βαθμό από απλές γνώσεις, έτσι ώστε η λογική σκέψη και η αποδεικτική διαδικασία δεν μπορούν να επιφέρουν καμία ουσιαστική βελτίωση στον τρόπο με τον οποίο δέχεται τις πληροφορίες από το περιβάλλον του. Ένας ακόμη εκπαιδευτικός, ο Λ2 σημείωσε ότι:

- **Καθηγητές Λυκείου:** Ο ορθολογισμός και η κριτική σκέψη είναι το κοινό χαρακτηριστικό στις απαντήσεις και των τριών καθηγητών Λυκείου. Ο Δ2 έκανε πάντως μία παρατήρηση σχετικά με την υπερβολική χρήση της απόδειξης:

‘Από την άλλη, μπορεί να μπλέξει σε περίεργους δρόμους, για παράδειγμα να νομίζει ότι όταν κάτι δεν αποδεικνύεται, τότε δεν υπάρχει. Μπορεί να ψάχνει το ‘γιατί’ και να σου δημιουργεί ένα διαρκές κενό’

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Οι καθηγητές αυτής της βαθμίδας συμφώνησαν με τους αντίστοιχους του Λυκείου, λέγοντας ότι η καθημερινότητα του πολίτη βελτιώνεται με τον σωστό τρόπο σκέψης. Ο Γ2 είπε χαρακτηριστικά:

‘Υπάρχει βελτίωση στη ζωή μέσω της βελτίωσης της κριτικής σκέψης’

Επιπρόσθετα ο Γ1 τόνισε τα οφέλη που έχει ένας επαγγελματίας της Νομικής επιστήμης. : *‘Και στη Νομική ισχύει η υπεροχή της λογικής σκέψης’*

- **Δάσκαλοι:** Ο κάθε δάσκαλος έδωσε διαφορετικά αν και όχι άσχετα μεταξύ τους οφέλη για τον πολίτη. Η Δ1 θεωρεί ότι η απόδειξη κάνει τον άνθρωπο πιο δεκτικό στην έρευνα ενώ ο Δ2 υποστηρίζει ότι η επιχειρηματολογία ενός ανθρώπου οξύνεται μέσω της εμπλοκής με την αποδεικτική διαδικασία. Ο Δ3 τονίζει:

‘Η απόδειξη υπάρχει στη ζωή μας. Δεν τη συναντούμε μόνο στα Μαθηματικά. Η απόδειξη οξύνει το νου’

Συνολικά βλέπουμε ότι ο ορθολογισμός και η βελτίωση της καθημερινότητας προκρίνονται ως τα σημαντικότερα οφέλη που αποκομίζει ο μέσος πολίτης από την εμπλοκή του με την απόδειξη.

5.1 Ευρήματα ερωτήσεων 3ου άξονα

5.3.1 Σημεία βαρύτητας κατά την αξιολόγηση

Τα στοιχεία στα οποία επικεντρώνεται η προσοχή των εκπαιδευτικών όταν βαθμολογούν ασκήσεις που απαιτούν απόδειξη ποικίλουν ανάλογα με τη βαθμίδα των μαθητών που απευθύνονται, το γνωστικό επίπεδο των μαθητών αλλά σίγουρα επηρεάζονται και από τις προσωπικές τους απόψεις. Οι φροντιστές και οι καθηγητές Λυκείου επηρεάζονται από το πνεύμα των εξετάσεων για τις οποίες προετοιμάζουν τους μαθητές τους ενώ οι συνάδελφοι τους στο Γυμνάσιο και στο Δημοτικό αντιμετωπίζουν γενικά πιο ελαστικά τους μαθητές, χρησιμοποιώντας και άλλα κριτήρια.

- **Πανεπιστημιακοί:** Οι Πανεπιστημιακοί του δείγματος ανήκουν ή ανήκαν στο προσωπικό τμημάτων που δεν είναι μόνο Μαθηματικά. Οι Π2 και Π3 συμφωνούν στην απαιτούμενη αιτιολόγηση των βημάτων μιας απόδειξης. Η Π3, καθηγήτρια σε Μαθηματικό τμήμα, άρα έχοντας τη διάθεση να είναι πιο ακριβής και τυπική στη βαθμολογία της, τόνισε ότι βασικό στοιχείο στο οποίο επικεντρώνει την προσοχή της είναι η σαφής αιτιολόγηση. Βαθμολογεί αρνητικά τα βασικά θεωρητικά λάθη και απαιτεί την κατασκευή αντιπαραδείγματος όταν απαιτείται η απόρριψη μιας πρότασης. Η καθηγήτρια συνεχίζει σημειώνοντας ότι δεν δίνει βαρύτητα σε μικρά λάθη

αλλά απαιτεί να υπάρχει καλή γνώση των θεωρημάτων και των ορισμών ώστε να γίνεται η σωστή χρήση τους. Να τονίσουμε πάντως ότι η Π3 βαθμολογεί με θετική προδιάθεση τους φοιτητές των οποίων η επίδοση είναι γενικά υψηλή ακόμη και αν έχουν παραλείψει κάποια σημεία τα οποία εννοούνται δίνοντας τους το πλεονέκτημα της αμφιβολίας.

Επιπρόσθετα ο Π2, έχοντας υπάρξει καθηγητής σε τμήματα Μαθηματικών, Παιδαγωγικών και Πολιτικών Επιστημών τόνισε ότι αυτό που προσέχει σε ένα γραπτό είναι η ύπαρξη μεταγνωστικών ικανοτήτων του φοιτητή, δηλαδή την ικανότητα να κάνει αυτοέλεγχο και να επιβεβαιώνει ή να απορρίπτει τα συμπεράσματα του. Βεβαίως η συνάφεια μεταξύ των βημάτων είναι και σε αυτήν την περίπτωση απαιτούμενο στοιχείο.

Ο Π1, καθηγητής σε τμήμα Πληροφορικής, τόνισε ότι η εφαρμογή των αποδεικτικών μεθόδων είναι το μοναδικό στοιχείο που ζητείται αφού σε τέτοια τμήματα δεν υπάρχουν απαιτήσεις ανάλογες με αυτές που βρίσκουμε σε ένα αμιγώς μαθηματικό τμήμα.

- **Καθηγητές Λυκείου:** Στους καθηγητές Λυκείου συναντούμε ένα απαιτούμενο στοιχείο που πιθανώς προκαλεί ερωτηματικά αφού δεν άπτεται τόσο άμεσα της αποδεικτικής διαδικασίας, αλλά σχετίζεται με την σωστή διατύπωση των δεδομένων και των ζητούμενων. Οι Λ1 και Λ3 τονίζουν λοιπόν ότι δίνουν μεγάλη σημασία στον διαχωρισμό των ζητούμενων από τα δεδομένα. Οι καθηγητές αυτής της βαθμίδας τονίζουν ότι μεγάλος αριθμός μαθητών έχει σημαντικό πρόβλημα στον καθορισμό των στοιχείων που ισχύουν καθώς και αυτών των οποίων ζητείται η απόδειξη, γεγονός

που καθιστά αυτή την ικανότητα σαφούς διατύπωσης πολύ σημαντική. Βεβαίως, οι καθηγητές του Λυκείου δεν παραλείπουν να σημειώσουν ότι η σαφής αιτιολόγηση ανάμεσα στα βήματα μιας απόδειξης είναι εξίσου σημαντική και βαθμολογείται αναλόγως. Ο Λ2 τονίζει πάντως ότι είναι ελαστικός ως προς κάποια στοιχεία:

‘Είμαι ελαστικός όταν υπάρχουν κάποια μικρά κενά. Και δέχομαι τη χρήση της γλώσσας αντί για τη χρήση συμβόλων. Μπορείς να καλύψεις τα κενά χρησιμοποιώντας λέξεις’

- **Φροντιστές:** Στον κλάδο των φροντιστών συναντούμε πολλές διαφορετικές απόψεις. Οι καθηγητές με πολλά χρόνια εμπειρίας (Φ2 και Φ3) απαιτούν την σαφή διατύπωση της επαγωγικής σκέψης και την απώλεια νοηματικών κενών ενώ αυτοί που ασχολούνται με μικρότερες τάξεις ζητούν μία ποικιλία παραγόντων όπως καθαρό γραπτό, σαφήνεια και ένδειξη ότι υπάρχει κατανόηση της πρακτικής που εφαρμόζεται. Πρέπει να σημειωθεί ότι ένας καθηγητής που έχει ως βασικό στόχο την προετοιμασία των μαθητών των μεγάλων τάξεων (Β’ και Γ’ Λυκείου) , τόνισε, όπως και οι καθηγητές Λυκείου, την ανάγκη σαφούς διαχωρισμού δεδομένων και ζητούμενων, δίνοντας έτσι την εικόνα που φαίνεται να επικρατεί στις τάξεις των μαθητών και που σχετίζεται με τον προβληματικό χαρακτήρα που λαμβάνει η ανάγνωση μιας άσκησης από έναν μαθητή. Ο Φ1 τονίζει με τη σειρά του:

‘Θέλω να μπορώ να καταλαβαίνω τι λένε οι μαθητές. Οι ελλείψεις των μαθητών είναι τόσο μεγάλες, που συνήθως δεν μπορείς να καταλάβεις τι λέει

η απόδειξη. Για παράδειγμα μπορεί να συναντήσεις απαντήσεις της μορφής ‘ Το σχήμα είναι τρίγωνο, άρα αποδείχθηκε ότι είναι ορθογώνιο’. Δηλαδή βλέπεις πράγματα που δε στέκουν καθόλου. Πρέπει να υπάρχει μια ροή... Πρέπει να έχει την ικανότητα ο μαθητής να καταγράφει τις σκέψεις του’.

Ο ίδιος συνεχίζει κάνοντας αναφορά σε ένα πολύ σημαντικό ζήτημα όσον αφορά στη βαθμολογία:

‘Αυτός που παραλείπει κάποια βήματα αλλά ολοκληρώνει την απόδειξη, βαθμολογείται με έναν ολιστικό τρόπο, παίρνοντας όλα τα μόρια, ενώ ένας που παραλείπει βήματα αλλά δεν ολοκληρώνει την απόδειξη, συνήθως χάνει τα μόρια των βημάτων που παρέλειψε’. Ο μαθητής λοιπόν, που μέσα στην τάξη έχει αποδείξει τις ικανότητες του, έχει κερδίσει το ‘δικαίωμα της αμφιβολίας’ δηλαδή μπορεί να παραλείπει κάποια ευκόλως εννοούμενα βήματα ενώ ένας αδύναμος μαθητής πρέπει να αποδεικνύει όλες τις συνεπαγωγές, για να δείξει στο διδάσκοντα ότι η μετάβαση από το ένα βήμα στο άλλο, έγινε σκόπιμα και όχι τυχαία.

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Οι καθηγητές του Γυμνασίου φαίνεται να έχουν αρκετά διαφορετικές απόψεις όσον αφορά στα σημεία που επικεντρώνουν το ενδιαφέρον τους. Η απουσία των αποδεικτικών ασκήσεων που συναντούμε στις ανώτερες βαθμίδες κάνει τους εκπαιδευτικούς να παρουσιάζονται περισσότερο ελαστικοί ως προς τις απαιτήσεις τους. Βλέπουμε λοιπόν ότι πριμοδοτείται η πρωτοτυπία και ο τρόπος σκέψης ακόμη και αν οδηγεί σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Χαρακτηριστικά ο Γ2 αναφέρει:

‘ Παρ’ όλο ότι τα Μαθηματικά προϋποθέτουν μια αυστηρότητα και στη διατύπωση αλλά και στην επιχειρηματολογία, από διδακτική άποψη δεν το απαιτώ... Αυτό που θα παρατηρήσω είναι ο τρόπος σκέψης, ακόμα και αν ο μαθητής κάποιες φορές ακροβατεί μεταξύ τυπικού και άτυπου. Ακόμα και αν είναι λάθος, με ενδιαφέρει η πρωτοτυπία ή μια ιδέα που έχει. Το επικροτώ ακόμα και αν είναι λάθος.

Ο Γ3, με παρόμοιο τρόπο σκέψης, τονίζει:

‘Θέλω να υπάρχει απόδοση της σκέψης στην κόλλα και να εμφανίζεται η συνέχεια της σκέψης. Δε βαθμολογώ αυστηρά και υπάρχει λόγος γι αυτό. Θέλω να ενθαρρύνω τους μαθητές να πειραματιστούν.

- **Δάσκαλοι:** Οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν τις, έστω, άτυπες αποδείξεις στις πρώιμες σχολικές τάξεις, παρουσιάζουν χαρακτηριστικά, που φαίνονται να πηγάζουν από εντελώς ατομικές πεποιθήσεις. Δεν παρατηρείται κάποιο μοτίβο που να μπορεί να αποδοθεί στη διαφορά των ετών εμπειρίας, αλλά ο κάθε εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές του να παρουσιάζουν στοιχεία που ο ίδιος θεωρεί σημαντικά, πιθανώς λόγω προσωπικών εμπειριών.

Η Δ1 θεωρεί ότι δύο είναι τα σημαντικά στοιχεία που ένας μαθητής καλείται να επιδείξει όταν προσπαθεί να αποδείξει έναν ισχυρισμό. Το πρώτο είναι η σαφήνεια, κάτι που εμπλέκει τη χρήση και της γλώσσας, αλλά η ίδια εκπαιδευτικός τονίζει ότι ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση να διαχωρίζει τα δεδομένα από τα ζητούμενα. Βλέπουμε λοιπόν ότι

μία εκπαιδευτικός τονίζει την αναγκαιότητα ύπαρξης ενός στοιχείου που το θεωρούν απαραίτητο κάποιοι εκπαιδευτικοί άλλων βαθμίδων.

Ο Δ2 βλέπει τη βαθμολογία μέσω από άλλο πρίσμα. Όπως τονίζει ο ίδιος, θεωρεί ότι πρέπει να υπάρχει διαφοροποίηση στον τρόπο μιας απόδειξης ανάλογα με το γνωστικό αντικείμενο του μαθήματος, δηλαδή με την Άλγεβρα ή τη Γεωμετρία. Ο ίδιος χαρακτηριστικά τονίζει:

‘Η Γεωμετρία συνδέεται και μη τη σχηματοποίηση. Δεν μπορώ να φανταστώ ότι ένας μαθητής δουλεύει στη Γεωμετρία και δε σχεδιάζει με γεωμετρικά όργανα. Εκεί, ως προς την αξιολόγηση έχω μια μικρή ένσταση. Δε μου αρέσει η ‘αλγεβροποίηση’ της Γεωμετρίας, Θέλω να υπάρχουν σχήματα και τα σχήματα να έχουν τη λογική της χρήσης των γεωμετρικών οργάνων. Θέλω τη λογική των εννοιών της ένωσης, χάραξης, μέτρησης. Ένα μέρος της αξιολόγησης μου πάει και σε αυτό.

Ο Δ2 είναι ο μοναδικός εκπαιδευτικός της έρευνας που αναφέρει ότι τον ενδιαφέρει και η εικόνα του γραπτού. Δεν πρόκειται, όπως λέει, να αφαιρέσει βαθμό από ένα πολύ καλό γραπτό, εξ αιτίας μιας μουτζούρας, αλλά ο συγκεκριμένος μαθητής θα λάβει μία σχετική παρατήρηση.

Ο Δ2 είναι επίσης πολύ συγκεκριμένος όσον αφορά στο πλεονέκτημα της αμφιβολίας που αναφέρθηκε προηγουμένως. Δεν δίνει αυτό το πλεονέκτημα στους καλούς μαθητές, τονίζοντας ότι όταν κάποιος καλός μαθητής κάνει κάποιο νοητικό άλμα, ζητούνται από αυτόν το μαθητή επεξηγήσεις για να γεφυρωθεί αυτό το άλμα.

Ο Δ3, χωρίς να δώσει σαφή απάντηση, επικεντρώθηκε στο γεγονός ότι οι απαιτήσεις των εκπαιδευτικών από τους μαθητές πρέπει να εξαρτώνται από την ηλικία των τελευταίων καθώς και το γνωστικό επίπεδο που βρίσκονται.

Τα σημεία που ένας εκπαιδευτικός επικεντρώνεται όσον αφορά στην απόδειξη κυμαίνονται σε ένα μεγάλο εύρος. Όταν η απόδειξη τίθεται προς βαθμολόγηση σε εξετάσεις, η βαθμολογία περιστρέφεται γύρω από τη σαφήνεια, τη διατύπωση και την ορθότητα των συλλογισμών. Όταν όμως η απόδειξη περιστρέφεται γύρω από την προετοιμασία του μαθητή σε πρώιμο στάδιο, ο εκπαιδευτικός είναι γενικά πιο ελαστικός και επικεντρώνεται περισσότερο στον τρόπο σκέψης και στην πρωτοτυπία

5.3.2 Αποδοχή των άτυπων αποδείξεων:

Ένα ζήτημα που απασχολεί την εκπαιδευτική κοινότητα, ακόμα και σε επίπεδο Λυκείου και Πανεπιστημίου, είναι το κατά πόσο ένας εκπαιδευτικός αποδέχεται την απόδειξη ενός ισχυρισμού μέσω μιας άτυπης απόδειξης, δηλαδή της απόδειξης που χρησιμοποιεί σχήματα, γραφικές παραστάσεις ή περιγραφές χωρίς να επικεντρώνεται στην επαγωγική διαδικασία που απαιτείται. Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών σχεδόν πάντα σχετίζονται άμεσα με το επίπεδο της βαθμίδας στην οποία απασχολούνται και τις απαιτήσεις του μαθήματος σε αυτήν. Οι Πανελλήνιες εξετάσεις και ο τρόπος βαθμολόγησης των μαθητών επηρεάζει τους καθηγητές που σχετίζονται με αυτές

- **Πανεπιστημιακοί:** Εξ αιτίας της φύσης των μαθηματικών στην πανεπιστημιακή εκπαίδευση, θα περιμέναμε να υπάρχει σχετική

αυστηρότητα όσον αφορά στην αποδοχή κάποιας μη τυπικής απόδειξης. Αντίθετα, βλέπουμε ότι οι Πανεπιστημιακοί Π2 και Π3 δηλώνουν ότι αποδέχονται μια μη τυπική απόδειξη, αρκεί να υπάρχουν σαφή και ικανοποιητικά στοιχεία πειθούς του ισχυρισμού. Βεβαίως πρέπει να επισημάνουμε ότι οι Π1 και Π2 διδάσκουν Μαθηματικά σε τμήματα οικονομικής κατεύθυνσης, τμήματα στα οποία δεν υπάρχουν μαθήματα που να απαιτείται μεγάλος βαθμός μαθηματικής αυστηρότητας. Χαρακτηριστικά, ο Π2 αναφέρει:

‘Εξαρτάται. Αν κάποιος περιγράψει με λόγια, αντί να το γράψει με σύμβολα, δεν πειράζει ιδιαίτερα. Αρκεί αυτό που κάνει να είναι επιστημονικά επαρκές. Όχι να είναι διαισθητικό ...Πρέπει να βρεθεί σε μια αυστηρή τυπολογική λογική. Πρέπει να ακολουθείς τη γλώσσα των Μαθηματικών.

Η Π3, καθηγήτρια σε Μαθηματικό τμήμα, αναφέρει ότι ακόμα και όταν κάνει αποδεκτή μία μη τυπική απόδειξη, δεν τη βαθμολογεί με τον πλήρη βαθμό και ακόμα και σε αυτήν την περίπτωση, τη δέχεται μόνο σε περίπτωση που η αντίστοιχη τυπική απόδειξη είναι πολύ δύσκολη.

- **Καθηγητές Λυκείου:** Οι καθηγητές Λυκείου εμφανίζουν μία κοινή αντιμετώπιση ως προς τις μη τυπικές αποδείξεις. Σε γενικές γραμμές οι Λ2 και Λ3 αναφέρουν ότι οι αποδείξεις αυτού του είδους γίνονται αποδεκτές στην περίπτωση που αποτελούν αντιπαράδειγμα ενός ισχυρισμού.. Χαρακτηριστικά ο Λ2 αναφέρει:

‘Όταν πάω να αποδείξω ότι κάτι δεν ισχύει, το αντιπαράδειγμα μπορεί να είναι και εποπτικό, μία γραφική παράσταση. Για παράδειγμα, όταν ζητείται να

αποδειχθεί ότι μία συνεχής συνάρτηση δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη, αρκεί ο μαθητής να σχεδιάσει ένα γωνιακό σημείο. Αν θα δω το γωνιακό σημείο, αντιλαμβάνομαι ότι ο μαθητής έχει καταλάβει την έννοια. Ειδικά στην περίπτωση που η αντίστοιχη θεωρητική απόδειξη δεν απέχει και πάρα πολύ. Θεωρώ ότι είναι παραλογισμός να δέχεσαι μόνο τον τύπο της συνάρτησης αλλά όχι μόνο τη γραφική παράσταση της συνάρτησης’.

Ο Λ1 σημειώνει ένα άλλο σημαντικό ζήτημα που προκύπτει στην απόδειξη και στην αποδεικτική διαδικασία και σχετίζεται με την προκατάληψη που δείχνουν οι εκπαιδευτικοί απέναντι στους αδύναμους μαθητές. Ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός τονίζει ότι η αποδοχή μίας μη τυπικής απόδειξης σχετίζεται όχι μόνο με την πειθώ που προσφέρει αλλά και με την άποψη του για την ποιότητα του κάθε μαθητή. Αν ένας μαθητής θεωρείται ικανός στα Μαθηματικά, έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να δει την μη τυπική απόδειξη του να γίνεται αποδεκτή, επειδή ο εκπαιδευτικός θεωρεί ότι ο συγκεκριμένος μαθητής κατέχει τις απαραίτητες δεξιότητες και γνώσεις και απλά παραλείπει αν τις χρησιμοποιήσει.

Οι μη τυπικές αποδείξεις των προτάσεων δεν γίνονται αποδεκτές όταν δε συνοδεύονται από την αντίστοιχη θεωρητική τεκμηρίωση ειδικά στον τομέα της Γεωμετρίας όπως τονίζει ο Λ2:

‘ Στη Γεωμετρία δε δέχομαι μη τυπικές αποδείξεις. Και επιπρόσθετα δε δέχομαι λεκτικές περιγραφές και συνδέσεις παρά μόνο αν υπάρχει αναγκαιότητα σύνδεσης δύο προτάσεων ή σχέσεων. Αλλά να στηριχθεί μία

απόδειξη , ειδικά στη Γεωμετρία και πιο ειδικά στην Α' Λυκείου, που μπαίνουν τα θεμέλια, σε περιγραφές με λόγια δεν είναι αποδεκτό.

- **Φροντιστές:** Οι καθηγητές αυτού του κλάδου έχουν αντικρουόμενες απόψεις για την αποδοχή των μη τυπικών αποδείξεων και με τον όρο 'αντικρουόμενες' δεν υπονοείται ότι κάποιοι από αυτούς έχουν διαφορετικές απόψεις από τους υπόλοιπους αλλά ότι κάθε εκπαιδευτικός αμφιταλαντεύεται ως προς την αποδοχή μιας τέτοιας απόδειξης. Φαίνεται ότι ίσως εξ αιτίας της φύσης του επαγγέλματος του φροντιστή και τις ευθύνες που αυτός αναλαμβάνει απέναντι στο μαθητή και στην οικογένεια του, υπάρχει αφ' ενός ένα αίσθημα αυστηρότητας και αφ' ετέρου υπάρχει η λογική της χαλαρής βαθμολόγησης που επικρατεί σε μεγάλο τμήμα της Μαθηματικής κοινότητας. Όσον αφορά στην επιδεικνυόμενη αυστηρότητα, αν αναλογιστούμε ότι οι φροντιστές προετοιμάζουν τους μαθητές είτε για τις σχολικές τους απαιτήσεις είτε για τις εισαγωγικές εξετάσεις. Ειδικά για τη δεύτερη περίπτωση και τις απαιτήσεις που υπάρχουν, οι μαθητές προετοιμάζονται ώστε να αποφεύγουν λεκτικές περιγραφές ή αποδείξεις που δίνονται με γραφικές παραστάσεις .

Ο Φ0 δηλώνει ότι μία σκέτη γραφική παράσταση δεν τον ικανοποιεί, αμέσως μετά όμως συμπληρώνει ότι σε μικρές τάξεις ίσως την κάνει δεκτή καθώς στους μαθητές αυτών των τάξεων δεν είναι πολύ αυστηρός. Ο Φ1 με τη σειρά του δηλώνει ότι γενικά δεν αποδέχεται μη τυπικές αποδείξεις εκτός αν πρόκειται για αποδείξεις πολύ αδύναμων μαθητών που δεν μπορούν να τεκμηριώσουν τους ισχυρισμούς τους με τον απαιτούμενο

φορμαλισμό. Οι Φ2 και Φ3, δηλαδή οι δύο μαθηματικοί με την μεγαλύτερη εργασιακή εμπειρία, εμφανίζονται επίσης με διαφορετικές απόψεις για το συγκεκριμένο θέμα. Ο Φ2 τονίζει:

‘Είναι κάτι που χαρακτηρίζεται σαν δίκοπο μαχαίρι. Και για τις δύο απόψεις, αυτές της αποδοχής και της απόρριψης, υπάρχουν επιχειρήματα που μπορούν να σε πείσουν ότι είναι η σωστή επιλογή. Απλά θεωρώ ότι όταν η απόδειξη είναι πλήρως τεκμηριωμένη, δεν επιδέχεται αμφισβήτησης’.

Ο ίδιος όμως συνεχίζει λέγοντας ότι στη Γεωμετρία απαιτεί να φαίνεται η επαγωγική διαδικασία της απόδειξης και δε δέχεται επεξηγήσεις που βασίζονται μόνο στην κατασκευή σχημάτων.

Ο Φ3, με παρόμοιο τρόπο σκέψης σημειώνει ότι θα μπορούσε να δεχτεί κάποιες αποδείξεις που βασίζονται σε σχήματα αν ο μαθητής φρόντιζε να σημειώσει μία έστω μικρή επεξήγηση γιατί όπως τονίζει χαρακτηριστικά:

‘Στα Μαθηματικά, το προφανές του μαθητή δεν είναι προφανές και για τον καθηγητή. Με πολύ ψάξιμο θα μπορούσα να τη δεχτώ’

Ο Φ11 διαφοροποιείται από τους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς του κλάδου, τονίζοντας ότι δέχεται τις άτυπες αποδείξεις, καθώς θεωρεί ότι η κατασκευή μιας τέτοιας απόδειξης υποδηλώνει ότι ο μαθητής έχει κατανοήσει το αντίστοιχο μαθηματικό υπόβαθρο αλλά δεν έχει τις κατάλληλες φορμαλιστικές δεξιότητες που θα του επιτρέψουν την έκφραση που απαιτείται.

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Οι Μαθηματικοί που διδάσκουν Γυμνασιακές τάξεις εμφάνισαν πλήρη συμφωνία ως προς την αντιμετώπιση που δείχνουν για

τις άτυπες αποδείξεις. Δήλωσαν ότι τις κάνουν αποδεκτές, κάτι που ίσως θα πρέπει να αναμένεται καθώς το Γυμνάσιο παίζει το ρόλο της μετάβασης από την Αριθμητική του Δημοτικού στα Μαθηματικά του Λυκείου και οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να είναι αρωγοί στην προσπάθεια των μαθητών να ξεπεράσουν τις δυσκολίες που εμφανίζονται. Για το λόγο αυτό, φαίνεται ότι είναι αρκετά επιεικείς ως προς την αυστηρότητα και το φορμαλισμό των Μαθηματικών και από την άλλη θεωρούν ότι οι άτυπες αποδείξεις αποτελούν εφελτήριο για την εισαγωγή στην τυπική μορφή των αποδείξεων. Ο Γ3 αναφέρει:

‘ Προσπαθώ να μην είμαι τόσο αυστηρός. Δέχομαι και τις άτυπες αποδείξεις. αρκεί ο μαθητής να μην πέφτει σε αντίφαση ή να μην δημιουργεί παρανοήσεις ’

Ο Γ1 επαληθεύοντας την πεποίθηση ότι για την τυπική απόδειξη χρειάζεται πολύ καλή χρήση της φορμαλιστικής σκέψης αναφέρει ένα παράδειγμα από την εμπειρία του:

‘ Είχα έναν μαθητή που ήταν πάρα πολύ ευφυής ενώ δεν ήξερε τα Μαθηματικά που του δίδασκα. Αποδείκνυε τους ισχυρισμούς με πρακτική Αριθμητική. Ήταν όμως απόδειξη. Για μένα είναι δεκτές. Αν και θέλεις κάτι παραπάνω. ’

Ο Γ3 είναι ο εκπαιδευτικός που μάλλον διατηρεί πιο επιφυλακτική στάση με τους υπόλοιπους του τομέα. Δέχεται τις μη τυπικές αποδείξεις αλλά όχι στον βαθμό που αναφέρουν οι υπόλοιποι συνάδελφοι του. Δηλώνει ειδικά για αυτό:

‘Μπορεί η απόδειξη να μεν είναι 100% κανονική , αλλά τη δέχομαι σε ποσοστό άνω του 50%. Εξαρτάται και από το τι έχει γράψει ο μαθητής’

- **Δάσκαλοι:** Οι Δάσκαλοι είναι αυτοί που επίσης δέχονται τις μη τυπικές αποδείξεις, δημιουργώντας με τον τρόπο αυτό ένα μοτίβο που συνδυάζεται με αυτό των καθηγητών Γυμνασίου και υποδηλώνει μία σχέση ανάμεσα στην ηλικία των μαθητών και την αποδοχή των μη τυπικών αποδείξεων. Ειδικά ο Δ2 τονίζει:

‘ Προσπαθώ να πατήσω πάνω στη σχεδίαση για να περάσουμε και στην αλγεβρική μορφή. Δε θα απορρίψω τη σχεδίαση αλλά θα πω ότι η σχεδίαση μας βοηθάει, είναι ένα επικουρικό μέτρο. Καλό είναι να το έχουμε , μας βοηθάει να καταλάβουμε Λέω στα παιδιά ότι μας βοηθάει η ζωγραφική αλλά δεν αρκεί μόνο η ζωγραφική’.

Η Δ1 θεωρεί ότι κυρίαρχο ρόλο για την αποδοχή μίας μη τυπικής απόδειξης αποτελεί η ηλικία αλλά και οι ικανότητες του μαθητή. Λέει χαρακτηριστικά:

‘ Σε μικρότερες τάξεις είμαι πιο ελαστική, φτάνοντας όμως στην Ε’ και στην ΣΤ’, που είναι οι τάξεις που πλησιάζουν στο Γυμνάσιο, προσπαθώ να μην δέχομαι τόσο πολύ τις άτυπες αποδείξεις. Είναι όμως και θέμα ικανότητας του παιδιού. Αν ένα παιδί αντιμετωπίζει κάποιες δυσκολίες μπορεί να το δεχτώ. Από ένα παιδί που είναι καλύτερο θα ζητήσω πιο τυπική απόδειξη. Δεν έχω ξεκάθαρη απάντηση. Όλα εξαρτώνται από την τάξη και το επίπεδο των μαθητών. Υπάρχουν, δυστυχώς, πολλές παράμετροι στο Δημοτικό. Δεν

ζητάς από όλους το ίδιο πράγμα. Στην ΣΤ' πάντως ζητάμε πιο τυπικά πράγματα'

Ο Δ3, δίνει ένα πρόσθετο επιχείρημα υπέρ της αποδοχής των μη τυπικών αποδείξεων:

' Η διαισθητική σκέψη του παιδιού μας ενδιαφέρει πάρα πολύ' .

Υπερθεματίζει λοιπόν υπέρ της άποψης που υποστηρίζει ότι οι μη τυπικές αποδείξεις αποτελούν το δρόμο για τη μετάβαση προς τις τυπικές.

Η αποδοχή των μη τυπικών αποδείξεων γίνεται αποδεκτή σε Πανεπιστημιακά μαθήματα αν και όχι πάντα δίνοντας τον πλήρη βαθμό. Αντίθετα η άτυπη απόδειξη θεωρείται πλήρης όταν πρόκειται για την παρουσίαση ενός αντιπαραδείγματος. Οι εκπαιδευτικοί του Γυμνασίου και του Δημοτικού δέχονται και χρησιμοποιούν την άτυπη απόδειξη ως σκαλοπάτι για την ισχυροποίηση των ισχυρισμών. Πάντως πρέπει να σημειωθεί ότι οι καθηγητές Λυκείου και οι φροντιστές έχουν αντικρουόμενες απόψεις καθώς άλλοι απορρίπτουν εντελώς μια τέτοιου είδους απόδειξη και άλλοι τη δέχονται.

5.3.3 Εμπλοκή των μαθητών στην απόδειξη

Ο τρόπος και οι μέθοδοι που ακολουθούν οι εκπαιδευτικοί για να επιτύχουν την ενεργή συμμετοχή των μαθητών τους στην αποδεικτική διαδικασία διαφέρουν από άτομο σε άτομο. Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών φαίνεται να καθορίζονται από προσωπικές απόψεις και όχι από παράγοντες όπως η εργασιακή εμπειρία ή η βαθμίδα εκπαίδευσης.

- **Πανεπιστημιακοί:** Ένα πολύ σημαντικό στοιχείο που μπορούμε να εξάγουμε από τα δεδομένα των απαντήσεων είναι το γεγονός ότι οι καθηγητές κάθε σχολής ακολουθούν διαφορετική προσέγγιση, αναλόγως της κάθε σχολής. Για μια ακόμη φορά φαίνεται η σύγχυση που επικρατεί ανάμεσα στη θεώρηση που έχουν οι ίδιοι οι Μαθηματικοί για την αποδεικτική διαδικασία και την επίλυση προβλήματος καθώς οι απαντήσεις αποκλίνουν από την ερώτηση και περιστρέφονται γύρω από την εμπλοκή των φοιτητών στην επίλυση των ασκήσεων που τίθενται. Όταν ζητείται απόδειξη σε σχολή της οποίας το αντικείμενο είναι περισσότερο πρακτικό βλέπουμε ότι η προσέγγιση γίνεται μέσω πρακτικών εφαρμογών και παραδειγμάτων. Ο Π2, καθηγητής σε σχολή με οικονομικό προσανατολισμό, τονίζει χαρακτηριστικά:

‘Δίνοντας εφαρμογές και παραδείγματα. Από τη φύση ή από την κοινωνία μπορούμε να βρούμε παραδείγματα για να κινήσουμε το ενδιαφέρον. Βεβαίως παρακάτω εμφανίζεται η προαναφερθείσα σύγχυση καθώς ο Π2 συνεχίζει λέγοντας:

‘ Όλες οι αποδείξεις ξεκινάνε από ένα πραγματικό πρόβλημαΤο αποτέλεσμα έχει φυσική σημασία, δεν είναι κάτι θεωρητικό.

Αντίθετα, η Π2 θεωρεί ότι η εμπλοκή ενός φοιτητή μπορεί να γίνει μέσω παροχής κινήτρων, όπως είναι η βελτίωση της βαθμολογίας:

‘Θα πριμοδοτήσω το φοιτητή που θα κάνει την απόδειξη κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Ή θα ζητήσω από τους φοιτητές να κάνουν ένα κομμάτι της παρουσίασης του επόμενου μαθήματος, πάλι πριμοδοτώντας το φοιτητή. Όταν

ακολουθώ αυτή την τακτική, οι φοιτητές αποφασίζουν να ασχοληθούν λίγο περισσότερο. Κάτι θα διαβάσουν παραπάνω'.

Αντίθετα με τους προηγούμενους καθηγητές ο Π1 θεωρεί ότι ένα πολύ μεγάλο κομμάτι της εμπλοκής εξαρτάται από το έμφυτο ταλέντο του μαθητή. Δεν πιστεύει ότι υπάρχουν μέθοδοι για να κάνεις το μαθητή που δεν μπορεί να ασχοληθεί με την απόδειξη, να εμπλακεί περισσότερο αφήνοντας πάντως ένα μικρό περιθώριο:

‘Όταν είσαι γονιός πρέπει να ενθαρρύνεις το παιδί και να του τονώσεις την αυτοπεποίθηση’. Βλέπουμε ότι ο ίδιος δεν προτείνει μία προσέγγιση για τους φοιτητές που διδάσκει.

- **Καθηγητές Λυκείου:** Οι εκπαιδευτικοί αυτού του κλάδου, φαίνεται να έχουν μία πιο ξεκάθαρη άποψη για τη μέθοδο που πρέπει να ακολουθήσουν για να κερδίσουν την εμπλοκή των μαθητών τους. Ίσως εξ αιτίας του μικρότερου αριθμού των μαθητών τμημάτων τους σε σχέση με αυτά των Πανεπιστημίων, θεωρούν ότι η εμπλοκή των μαθητών αυξάνεται μέσω της σταδιακής κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων και τόπων έτσι ώστε η απόδειξη ενός θεωρήματος να θεωρηθεί ως λογικό επακόλουθο. Ο Λ2 τονίζει για το συγκεκριμένο θέμα τα παρακάτω:

‘Με διάφορα τεχνήματα προσπαθείς να προσεγγίσεις το τι είπε ο Πυθαγόρας, έτσι να έρθει η θεωρητική απόδειξη και να πέσει σαν ώριμο φρούτο μετά από παρατήρηση και πείραμα. Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα

άκρα του, παίρνουμε σκοινιά και ράβδους και κατασκευάζουμε γεωμετρικά το αντίστοιχο θεώρημα'.

Όμως στο σημείο αυτό έρχεται η ένσταση τόσο του και των τριών καθηγητών που τονίζουν ότι όλες οι μέθοδοι που αποσκοπούν στην ενεργοποίηση των μαθητών έχουν το αντίστοιχο χρονικό τίμημα. Ακόμη και αν ακολουθηθεί η προσέγγιση που προτείνει η Λ3, δηλαδή η κατάτμηση μιας απόδειξης σε τόσο μικρά τμήματα, που να μπορούν να απαντήσουν διαφορετικοί μαθητές, ο χρόνος που απαιτείται είναι σημαντικά μεγαλύτερος από αυτόν που χρειάζεται όταν η απόδειξη διεκπεραιώνεται από έναν μόνο άτομο. Η Λ2 αναφέρει για το συγκεκριμένο ζήτημα:

'Είναι χρονοβόρο. Είμαι στην ύλη μονίμως πίσω από όλους τους συναδέλφους. Τρέχω να προλάβω' ενώ ο Λ1 αναφέρει παρομοίως:

'Για να καλλιεργηθεί η νοοτροπία της απόδειξης χρειάζεται χρόνος. Ώρα με την ώρα, εβδομάδα με την εβδομάδα, μήνα με το μήνα, τι να πρωτοκάνεις; Αν ο σκοπός είναι να βγει η ύλη;'

Πρέπει πάντως να επισημανθεί το γεγονός ότι και οι τρεις εκπαιδευτικοί, όταν τους ζητήθηκε να αναφέρουν τη μέθοδο προσέγγισης των μαθητών, αναφέρθηκαν μόνο στη Γεωμετρία. Ίσως επειδή η αποδεικτική μέθοδος έχει ταυτιστεί με την επαγωγική μέθοδο που επιδεικνύεται καλύτερα μέσω της αξιωματικής θεμελίωσης ή επειδή στη Γεωμετρία υπάρχει και η βοήθεια των σχημάτων που βοηθούν το μαθητή να εμπλακεί σε μια ερώτηση, κατανοώντας το σχήμα με πιο εύκολο τρόπο από ότι θα συνέβαινε σε μία άσκηση Ανάλυσης.

- **Φροντιστές:** Στον κλάδο των φροντιστών φαίνεται ότι επικρατεί σύγχυση που μεγαλώνει όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη στην οποία απευθύνεται ο εκπαιδευτικός. Από τις απαντήσεις των μαθηματικών, διαφαίνεται μία σύγχυση, κάτι που διαπιστώθηκε και στους καθηγητές Λυκείου και που σχετίζεται με την ταύτιση της έννοιας της απόδειξης από τη μία και των ασκήσεων που καλούνται να λύσουν οι μαθητές από την άλλη.

Ο Φ0, με μικρή εμπειρία, θεωρεί ότι οι νέες τεχνολογίες και η παρουσίαση των σχολικών αποδείξεων με τη βοήθεια τους θα αυξήσει το ενδιαφέρον των μαθητών και την εμπλοκή τους. Επίσης προτείνει τη διδασκαλία μέσω της ομαδοσυνεργατικής μάθησης, πάντα βεβαίως υπό την επίβλεψη και την καθοδήγηση του διδάσκοντα. Βεβαίως και οι δύο προτάσεις είναι γνωστές για την εφαρμογή τους όχι τόσο στην εκμάθηση της απόδειξης όσο για την αύξηση της εμπλοκής των μαθητών στη διαδικασία της μάθησης γενικά. Άρα όπως βλέπουμε δεν υπάρχει κάποια ιδέα που να διαχωρίζει τη μάθηση της απόδειξης από τη μάθηση μιας μεθοδολογίας επίλυσης ενός τύπου ασκήσεων.

Ο Φ1 ακολουθεί μία διαφορετική προσέγγιση θεωρώντας ότι το ενδιαφέρον ενός μαθητή μπορεί να αυξηθεί αν η απόδειξη παρουσιασθεί σε συνδυασμό με ιστορικά στοιχεία που συνδέονται με αυτήν. Λέει χαρακτηριστικά:

‘Πρέπει πρώτα να κεντρίσεις το ενδιαφέρον για να καταλάβει ο μαθητής ότι η απόδειξη έχει δύναμη. Ότι δουλεύει και ότι με τη βοήθεια της έχουν επιτευχθεί πολλά πράγματα. Άρα ίσως πρέπει να επιλεγούν κατάλληλα

παραδείγματα που είναι πιο ενδιαφέροντα, να προστεθούν ιστορικά στοιχεία... Και μέσα στο μάθημα να δει ο μαθητής ότι η απόδειξη δουλεύει σε ασκήσεις'.

Ο Φ1 θεωρεί ότι η ομαδοσυνεργατική διαδικασία δεν μπορεί να επιφέρει αποτελέσματα γιατί το επίπεδο των μαθητών είναι, σε γενικές γραμμές, αρκετά χαμηλή, ώστε να μπορέσουν να εργασθούν και να μάθουν σε συνεργασία με τους υπόλοιπους συμμαθητές τους.

Οι Φ11, Φ2 και Φ3, μαθηματικοί με κύρια εργασία σε μαθητές Γ' Λυκείου, σαφώς συγχέουν την μάθηση της απόδειξης με την επίτευξη της επίδοσης στις εξετάσεις. Οι προτάσεις τους για την εμπλοκή των μαθητών σχετίζονται με βαθμολογικά κίνητρα για τα διαγωνίσματα και βεβαίως για τις εξετάσεις. Όπως θα δούμε ενώ το ερώτημα αναφέρεται στην εμπλοκή των μαθητών, το επίκεντρο μεταφέρεται στον τρόπο διδασκαλίας: Ο Φ2 αναφέρει:

‘Να δείξεις στο μαθητή ένα μεγάλο πλήθος ασκήσεων. Να επιμένει ο καθηγητής. Όταν ο μαθητής δεν κάνει ένα βήμα, να τον υποχρεώσεις να το επαναλάβει’.

Ο Φ11 με τη σειρά του, θεωρεί ότι η εμπλοκή μπορεί να επιτευχθεί μέσω κατάλληλων παραδειγμάτων. Βεβαίως φαίνεται ότι η απάντηση του, σχετίζεται με τη χρησιμότητα των μαθηματικών καθώς καμία αναφορά δεν γίνεται στην αποδεικτική διαδικασία:

‘Με φυσικά παραδείγματα. Τα Μαθηματικά και η Γεωμετρία χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή. Πού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ισότητα

τριγώνων, πού είναι ο κύκλος και πηγαίνοντας αναλυτική Γεωμετρία, στα διανύσματα λέγοντας ότι τα videogames χρησιμοποιούν όλη τη θεωρία των διανυσμάτων’

Ο Φ3 τονίζει ότι η παροχή κινήτρων, βαθμολογικών κυρίως, είναι η προφανής προσέγγιση που ακολουθεί. Και ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός όμως, αποκλίνει από το ερώτημα καθώς στη συνέχεια της απάντησης του αναφέρεται σε οφέλη που αποκομίζει ο μαθητής και όχι στον τρόπο που θα κερδίσει την εμπλοκή του μαθητή:

‘ Η απόδειξη σου δίνει μια σαφήνεια για το πώς προχωράς στα Μαθηματικά. Υπάρχει σχέση απόδειξης και λύσης προβλημάτων, επιχειρηματολογίας και συλλογισμού και βοηθάει το μαθητή στις στρατηγικές επίλυσης των ασκήσεων. Επιπρόσθετα κάθε απόδειξη είναι η βάση για μια νέα απόδειξη, καλύπτοντας τη συνέχεια των εννοιών’.

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Οι καθηγητές αυτής της βαθμίδας επίσης δεν παρουσιάζουν κάποια ομοιομορφία, κάποιο μοτίβο όσον αφορά στις απαντήσεις τους. Αντιθέτως, υπάρχει ένας Μαθηματικός, ο Γ1 που δηλώνει ότι δεν υπάρχει κάποια προσέγγιση που μπορεί να κάνει το μαθητή να γίνει πιο ενεργός, αν δεν υπάρχει η προδιάθεση και η αγάπη για τη μάθηση. Όπως φαίνεται παρακάτω, τονίζει ότι:

‘ Δεν υπάρχει τρόπος να τον κάνεις να ενδιαφερθεί. Μόνο αν έχει έρωτα για τη γνώση, για την έρευνα. Αν θέλει να καταλαβαίνει και να πετυχαίνει.... Με την ίδια λογική που βλέπω την Ιστορία θα δω και τα Μαθηματικά. Αν θέλω

*να μαθαίνω... Τα μαθηματικά τα βλέπω σαν εργαλείο για να καταλαβαίνω.
Η διαδικασία είναι να συνεπάρεις το μαθητή'.*

Η Γ1 θεωρεί ότι το ενδιαφέρον των μαθητών μπορεί να αυξηθεί μέσω της χρήσης του υπολογιστή και των αντίστοιχων προγραμμάτων. Βεβαίως και σε αυτήν την περίπτωση όπως και στην απάντηση του Γ2 τονίζεται ότι η ίδια προσέγγιση προτιμάται όχι μόνο σε περιπτώσεις που διδάσκονται αποδείξεις αλλά οι εκπαιδευτικοί την ακολουθούν στην διδακτική διαδικασία γενικότερα, Ο Γ2 θεωρεί ότι ο διάλογος μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού μπορεί να δώσει κίνητρο για εμπλοκή αφού διευκολύνει το μαθητή, μέσω της κατάτμησης μιας σχετικά μεγάλης διαδικασίας σε μικρότερα τμήματα.

Ο Γ3 αφού τονίζει ότι η διδασκαλία των αποδείξεων απαιτεί χρόνο άρα η εμπλοκή των παιδιών είναι μία χρονοβόρα διαδικασία που απαιτεί εξορθολογισμό της ύλης. Με τους ρυθμούς που διδάσκονται τα Μαθηματικά, όπως τονίζει, οι μαθητές δεν έχουν την ευκαιρία να εντρυφήσουν σε αυτά και βεβαίως δεν μπορούν να επιτύχουν κάτι περισσότερο από στείρα απομνημόνευση . Αξίζει πάντως να σημειωθεί ότι, όπως και πολλοί καθηγητές Λυκείου, έτσι και ο Γ1 θεωρεί ότι η σύνδεση του μαθητή με την απόδειξη επιτυγχάνεται πολύ περισσότερο μέσω της Γεωμετρίας.

- **Δάσκαλοι:** Στην περίπτωση των δασκάλων, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες βαθμίδες των εκπαιδευτικών, συναντούμε μία σχεδόν κοινή αντιμετώπιση ως προς τον τρόπο που προσεγγίζουν τους μαθητές τους. Δίνεται βάση στην ψυχολογία του μαθητή, αφού ούτως ή άλλως δεν αναμένουμε να

υπάρξει μία προσέγγιση που να συσχετίζει διδασκαλία των αποδεικτικών μεθόδων εξ αιτίας του νεαρού της ηλικίας. Η Δ1 θεωρεί ότι για να εμπλακεί ο μαθητής θα πρέπει να δει ο ίδιος πόσο συναρπαστικό είναι να αποδεικνύεις έναν ισχυρισμό. Η ίδια αναφέρει:

‘Αποδεικνύοντας κάτι που θα αφήσει το μαθητή έκπληκτο, θα τον ενθουσιάσει, έτσι ώστε να θέλει να φτάσει και ο ίδιος σε κάτι παρόμοιο. Δείχνοντας τη μαγεία των Μαθηματικών. Πόσο ωραίο είναι να θέλεις να φτάσεις σε ένα συμπέρασμα’

Ο Δ2 δε διαχωρίζει άσκηση με απόδειξη, δείχνοντας έτσι ότι η έλλειψη ξεχωριστής αντιμετώπισης της διδασκαλίας της απόδειξης από τα υπόλοιπα τμήματα των Μαθηματικών δεν υπάρχει μόνο στη Μέση και ανώτερη εκπαίδευση, αλλά ξεκινάει από το Δημοτικό. Ο συγκεκριμένος δάσκαλος τονίζει ότι ο τρόπος που ακολουθεί για να κερδίσει το ενδιαφέρον του μαθητή είναι να μην αναθέτει πάρα πολλές εργασίες. Θεωρεί ότι αν ο μαθητής επικεντρώσει την προσοχή του σε λίγες ασκήσεις, έχει την ευκαιρία να εμβαθύνει περισσότερο στο αντικείμενο που μελετάει και να βελτιωθεί. Του τονίζει ότι αν μάθει να αποδεικνύει (μέσω της επίλυσης ασκήσεων) θα μπορεί να λύνει ακόμη περισσότερες ασκήσεις δίνοντας με τον τρόπο αυτό ένα κίνητρο.

Ο Δ3 έχει παρόμοιο σκεπτικό με αυτό της Δ1. Αναφέρει ότι στην ηλικία που βρίσκονται οι μαθητές, υπάρχει η δυνατότητα να αυξήσεις το ενδιαφέρον του μαθητή. Ο ίδιος δηλώνει ότι:

‘Αν παρακινήσεις το μαθητή μέσω του προβληματισμού. Η υποκίνηση του ενδιαφέροντος, η παρότρυνση, η έμπνευση. Η διδασκαλία ενός θέματος αναλυτικά και επεξηγηματικά. Όλα αυτά έχουν πρακτική σημασία για να κερδίσεις το ενδιαφέρον. Και επιπρόσθετα να τονίσεις ότι η απόδειξη έχει εφαρμογή και στη ζωή, στην καθημερινότητα. Η εκτίμηση του μαθητή για το δάσκαλο του είναι επίσης σημαντική’.

Η εμπλοκή μπορεί να επιτευχθεί μέσω του ενδιαφέροντος του μαθητή, είτε αυτό προσελκύεται μέσω νέων τεχνολογιών είτε μέσω ιστορικών παραδειγμάτων ή βαθμολογικών κινήτρων. Πάντως οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί τονίζουν ότι η Γεωμετρία, μάθημα στο οποίο η οπτικοποίηση παίζει πρωτεύοντα ρόλο μπορεί να αποτελέσει καλύτερο πεδίο εφαρμογής της τακτικής που ακολουθείται.

5.1 Ευρήματα ερωτήσεων 4ου άξονα

5.4.1 Εισαγωγή της απόδειξης σε πρώιμο στάδιο

Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών στο ερώτημα αυτό φαίνεται να ακολουθούν κάποιο μοτίβο ανάλογα με την ιδιότητα τους. Αρχικά πρέπει να τονιστεί ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών θεωρεί ότι είναι πιο πρόσφορο να υπάρχει μία εισαγωγή της απόδειξης σε πρώιμο στάδιο και να μην υπάρχει η παρουσίαση της απόδειξης στην Α΄ Λυκείου, όπως γίνεται σήμερα. Οι πιθανοί λόγοι που οδηγούν τους εκπαιδευτικούς να δώσουν τις απαντήσεις τους θα αναλυθούν παρακάτω. Βέβαια, δεν λείπουν και οι απόψεις που τονίζουν ότι δε χρειάζεται να υπάρξει καμία αλλαγή στο υφιστάμενο πρόγραμμα. Οι εμπειρίες των Πανεπιστημιακών καθηγητών στην τεκμηρίωση των φοιτητών τους αλλά και οι αντίστοιχες εμπειρίες των καθηγητών Λυκείου διαμορφώνουν τις απόψεις τους σχετικά με το χρονικό

διάστημα που πρέπει ένας μαθητής να εξασκηθεί στην αποδεικτική διαδικασία.

Αντίστοιχα όμως, οι εκπαιδευτικοί του Γυμνασίου και του Δημοτικού έχουν άμεση επαφή με τους μικρούς μαθητές και είναι σε θέση να γνωρίζουν καλύτερα τις δυνατότητες αλλά και τις αδυναμίες που υπάρχουν σε αυτή την ηλικιακή περίοδο.

- **Πανεπιστημιακοί:** Οι καθηγητές Πανεπιστημίου θεωρούν ότι οι μαθητές πρέπει να αντιμετωπίζουν την αποδεικτική διαδικασία σε αρκετά πρώιμο στάδιο, δηλαδή στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού, στην Ε΄ και Στ΄. Ίσως φαίνεται παράδοξο το γεγονός ότι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν ενήλικες, ζητούν να αρχίσει η εμπλοκή των μαθητών με την εκπαιδευτική διαδικασία, σε πολύ νεαρή ηλικία. Αυτό οφείλεται μάλλον σε δύο παράγοντες: α) Οι πολύ κακές επιδόσεις των φοιτητών σε θέματα που απαιτούν τεκμηρίωση ή απόδειξη, κάνουν τους Πανεπιστημιακούς καθηγητές να θεωρούν ότι είναι αναγκαία η εξάσκηση σε αντίστοιχα θέματα όσο το δυνατόν νωρίτερα. και β) Η απώλεια της επαφής των Πανεπιστημιακών καθηγητών με τη Β΄ θμια εκπαίδευση, τους εμποδίζει να αποκτήσουν εικόνα για άλλες πιθανές αιτίες που δυσχεραίνουν την επιτυχή εμπλοκή των φοιτητών με την αποδεικτική διαδικασία με αποτέλεσμα να θεωρούν ότι η επιμήκυνση του χρόνου αντίστοιχης διδασκαλίας θα αποτελέσει λύση για το πρόβλημα.

Οι Π2 και Π3 είναι σαφείς όσον αφορά την άποψη τους. Θεωρούν ότι η εισαγωγή μιας άτυπης αποδεικτικής διαδικασίας είναι εφικτή. Ο Π2 τονίζει χαρακτηριστικά:

‘ Η θεωρία αναφέρει ότι πρέπει να ξεκινήσουμε από το Δημοτικό. Να μάθει ο μαθητής να τεκμηριώνει τα συμπεράσματα από το Δημοτικό. Δεν πρέπει αν φτάσει κάποιος στην Α΄ Λυκείου για να το μάθει αυτό. Πρέπει ο μαθητής να εισαχθεί στη λογική ότι το να καταλήξεις σε κάτι πρέπει να βασιστείς σε συμπεράσματα. Πάντως η εισαγωγή στη λογική σκέψη μπορεί να γίνει από τις πρώτες τάξεις . Να δείξουμε στα παιδιά ότι η προϋπάρχουσα γνώση είναι η βάση για να καταλήξουμε σε συμπεράσματα. Υπάρχουν κατάλληλα παραδείγματα στα σχολικά βιβλία’.

Η Π3 τονίζει όμως ότι για να καταστεί επιτυχημένη μια τέτοιου είδους παρέμβαση, θεωρείται απαραίτητη η όρεξη αλλά και η ικανότητα του δασκάλου. Με αφορμή τις προσωπικές της εμπειρίες ως μητέρα, αλλά και ως εισηγήτρια σε σεμινάρια εκπαιδευτικών εκπαίδευσης αναφέρει τα παρακάτω:

‘ Σημαίνει ότι ο δάσκαλος πρέπει να παίρνει δουλειά για το σπίτι. Πρέπει να παιδευτεί με την απόδειξη γιατί ακόμα και αν διδάχθηκε πώς να την κάνει, μπορεί να έχει ξεχάσει τον τρόπο... Πάντως θα πρέπει να μπει ο μαθητής στην απόδειξη σταδιακά. Πρώτα θα πρέπει να μάθει να σκέφτεται, να συλλογίζεται, να εξηγεί γιατί κάνει μία ενέργεια. Και νομίζω ότι τα παιδιά θα τα ενδιαφέρει... Χρειάζεται πάντως υπομονή και να προσέξουμε να μην καταστρέψουμε την ψυχολογία του παιδιού’

Ο Π1 θεωρεί ενδιαφέρουσα την εμπλοκή του μαθητή μέσω άτυπης απόδειξης σε πρώιμη ηλικία. Τονίζει ότι το υπόβαθρο κάθε μαθητή είναι πολύ σημαντικό για την περαιτέρω εξέλιξη του, άρα αν ο μαθητής εισαχθεί

επιτυχώς στην αποδεικτική διαδικασία , έχει αρκετά εχέγγυα για να ανταπεξέλθει στις απαιτήσεις που θα αντιμετωπίσει ως φοιτητής.

- **Καθηγητές Λυκείου:** Οι καθηγητές του Λυκείου παρουσιάζουν επίσης ομοφωνία ως προς τις απαντήσεις τους. Η καθημερινή επαφή τους με την απόδειξη μέσω της διδασκαλίας των ασκήσεων και των θεωρημάτων τους δίνει πιο σαφείς ενδείξεις ως προς τις αδυναμίες αλλά και τις ικανότητες των μαθητών τους σε σχέση με τους Πανεπιστημιακούς καθηγητές. Άλλωστε, οι τελευταίοι απευθύνοντας σε πολύ μεγάλα ακροατήρια και δεν μπορούν να δουν ξεχωριστά τις ικανότητες των φοιτητών τους. Θεωρούν ότι η κατάλληλη ηλικία για την εισαγωγή των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία είναι αυτή κατά την οποία οι μαθητές βρίσκονται στο Γυμνάσιο. Τονίζουν ότι η εμπλοκή του μαθητή στο Δημοτικό είναι αδύνατη εξ αιτίας της έλλειψης ωριμότητας. Η μοναδική διαφορά στις απαντήσεις τους εντοπίζεται στην τάξη που προτείνουν να γίνει η εισαγωγή στην απόδειξη. Ο Λ1 τονίζει:

‘ Σε Δημοτικό σίγουρα όχι. Στην Α΄ Γυμνασίου επίσης όχι. Δειλά-δειλά ίσως στην Β΄ Γυμνασίου, σε ένα πρώιμο στάδιο. Τα παιδιά δεν έχουν ακόμη ωριμάσει’

Ο Λ2 είναι απόλυτος ως προς την εισαγωγή της απόδειξης πιο νωρίς:

‘ Ναι, ξεκάθαρα ναι. Στην Α΄ Γυμνασίου πρέπει να εισάγεις την απόδειξη και μία ήπια εισαγωγή των αποδεικτικών εργαλείων. Θα πρέπει οι έννοιες της ισοδυναμίας και της συνεπαγωγής να “πέσουν” δύο τάξεις πιο πίσω ‘

Η έλλειψη όμως μαθηματικής ωριμότητας καθιστά απαγορευτική την εισαγωγή της απόδειξης πιο νωρίς ακόμη και αν εισαχθεί σε παιγνιώδη μορφή. Ο ίδιος τονίζει χαρακτηριστικά:

‘Και στην Α΄ Γυμνασίου μιλάμε για μια ήπια προσέγγιση. Χωρίς τη χρήση του όρου “απόδειξη”. Θα ζητήσουμε από το μαθητή να απαντήσει σε ένα “γιατί συμβαίνει αυτό”.

Η Λ3 θεωρεί επίσης ότι η εισαγωγή στο Δημοτικό είναι ανώφελη:

‘Νομίζω ότι δεν υπάρχει η μαθηματική ωριμότητα. Δεν υπάρχει η πειθαρχία’

Στο σημείο αυτό η Λ3 κάνει μία σημαντική παρατήρηση για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό:

‘Οι δάσκαλοι αποφεύγουν τη μοντελοποίηση. Η μοντελοποίηση βοηθάει στο μέλλον. Θα έπρεπε να διδάσκεται αυτό. Θα βοηθήσει στο μέλλον’.

- **Φροντιστές:** Σε αντίθεση με τους προηγούμενους κλάδους εκπαιδευτικών, στην περίπτωση των φροντιστών υπάρχει μεγάλη ποικιλία απόψεων. Το εύρος των απαντήσεων είναι μεγάλο, καθώς υπάρχουν απόψεις που θεωρούν ότι η αρχή της αποδεικτικής διαδικασίας πρέπει να γίνει στο Δημοτικό, ενώ υπάρχει και μία άποψη που υποστηρίζει ότι δεν πρέπει να αλλάξει τίποτα και η Α΄ Λυκείου να εξακολουθήσει να είναι η τάξη στην οποία ο μαθητής εμπλέκεται ουσιαστικά πρώτη φορά με την απόδειξη. Οι Φ0 και Φ3, μαθηματικοί με πολλή μεγάλη διαφορά στην εργασιακή εμπειρία τους θεωρούν ότι η πρώτη επαφή με την άτυπη απόδειξη πρέπει να γίνει στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού. Ο Φ0 αναφέρει:

‘ Απαιτούμε από τα παιδιά, ξαφνικά στην Α΄ Λυκείου, να αποδεικνύουν προτάσεις. Θεωρώ σίγουρα ότι πρέπει να υπάρχει μία ομαλή μετάβαση ...Νομίζω ότι πρέπει αν ξεκινήσουμε από τις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού, αλλά κλιμακωτά... Πρώτα να κάνουμε άτυπες αποδείξεις για να ωθήσουμε τα παιδιά να σκέφτονται... Όχι σαν ξεχωριστό κομμάτι της ύλης, αλλά ενσωματωμένο στην υπόλοιπη διαδικασία’.

Ο Φ3 με παρόμοιο τρόπο σκέψης, τονίζει τα παρακάτω:

‘ Στην Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού να γίνονται κάποια ψήγματα, κάποιες άτυπες αποδείξεις. Να δίνονται στα παιδιά ερεθίσματα.... και να προσπαθούν να βγάλουν κάποια συμπεράσματα.. Αλλά η τυπική απόδειξη, στις τάξεις του Δημοτικού δεν θα προσφέρει κάτι’.

Εντελώς διαφορετική είναι η άποψη του Φ1, ο οποίος θεωρεί ότι η κατάλληλη τάξη για την εισαγωγή στην απόδειξη είναι η Α΄ Λυκείου και διαφωνεί με πιθανή πρόωρη εμπλοκή των μαθητών. Αιτιολογεί την άποψη του παρακάτω:

‘ Όχι, δε νομίζω ότι πρέπει να το φορτώσουμε στο Δημοτικό. Μια χαρά είναι στο Λύκειο, Α΄ Λυκείου. Απαιτείται όμως αναβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας... Είναι ένα μάθημα στο οποίο μπορεί να γίνει συζήτηση, οι μαθητές να πουν τη γνώμη τους, ο καθηγητής να πει τη δική του και να διορθώσει λανθασμένες απόψεις. Πιστεύω πάρα πολύ στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και στο ρόλο της ως αποδεικτικό μάθημα. Η Α΄ Λυκείου είναι η κατάλληλη τάξη γιατί τα παιδιά είναι ώριμα και ακόμη δεν έχουν το φόρτο των Κατευθύνσεων’

Οι Φ11 και Φ2 δεν εμφανίζονται καθόλου σίγουροι για την εισαγωγή της απόδειξης στο Δημοτικό για διαφορετικούς, όμως, λόγους. Ο Φ2 τονίζει:

‘Στο Δημοτικό δεν είναι ούτε εφικτό ούτε συνετό, Δεν ξέρω αν μπορεί να μπει με μορφή παιχνιδιού. Από Α΄ και Β΄ Γυμνασίου, σιγά σιγά μπορεί να υπάρξει ένα μεταβατικό στάδιο’.

Ενώ ο Φ11 δηλώνει:

‘Από την ηλικία των 15 ετών δηλαδή στη Γ΄ Γυμνασίου ...Δε θα ήμουν αρνητικός στην εισαγωγή στο Δημοτικό, αν κάποιος με πείσει ότι υπάρχουν κατάλληλες τεχνικές. Δεν γνωρίζω να υπάρχει κάτι τέτοιο.

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Οι καθηγητές του Γυμνασίου τάσσονται ομόφωνα υπέρ της ένταξης της αποδεικτικής διαδικασίας στο Δημοτικό. Προφανώς, ο ρόλος τους που είναι αυτός της υποδοχής των παιδιών από την Α΄ θμια Εκπαίδευση τους δίνει τη δυνατότητα να αναγνωρίσουν τα προβλήματα που παρουσιάζονται στους μαθητές αλλά και στις ελλείψεις που δημιουργούνται από την έλλειψη ευκαιριών για την εμπλοκή τους στην απόδειξη. Ο Γ3 τονίζει:

‘Ανακαλυπτική προσέγγιση... Να βγάζει ο μαθητής συμπεράσματα. Αυτό νομίζω ότι θα βοηθήσει πολύ στο Δημοτικό. Όχι όμως αποδείξεις με τον τυπικό τρόπο. αυτά είναι για το Γυμνάσιο. Θεωρώ ότι η τυπική απόδειξη πρέπει να ξεκινήσει από τη Β΄ Γυμνασίου’.

Όλοι οι ερωτώμενοι συμφωνούν ότι η παιγνιώδης μορφή της απόδειξης μπορεί να ωθήσει τους νεαρούς μαθητές στην εξοικείωση με τη δημιουργία

εικασιών την εξαγωγή συμπερασμάτων, ικανότητες χρήσιμες για την μετέπειτα μαθητική πορεία τους.

- **Δάσκαλοι:** Οι Δάσκαλοι είναι επίσης υπέρ της ένταξης της απόδειξης στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού. Η δική τους γνώμη έχει μάλιστα βαρύνουσα σημασία, καθώς είναι οι καθ' ύλην αρμόδιοι για την εκπαίδευση των μαθητών σε αυτήν την ηλικία και γνωρίζουν καλύτερα από τους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς τις ελλείψεις, τις δυνατότητες αλλά και τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά της ηλικίας αυτής. Η Δ1 αναφέρει:

‘ Θεωρώ ότι η μετάβαση από τη μία βαθμίδα στην άλλη είναι απότομη, γιατί ζητάμε από τα παιδιά να αλλάζουν τρόπο σκέψης. Στο Δημοτικό ο μαθητής μαθαίνει μόνο πράξεις.... Μπορείς να πλάσεις το παιδί στο Δημοτικό και να του μεταδώσεις την κριτική σκέψη’.

Όλοι οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν ότι η εισαγωγή πρέπει να γίνει με παιγνιώδη μορφή και για το λόγο αυτό πρέπει να επιλεγούν αποδείξεις των οποίων το συμπέρασμα πρέπει να εξάγεται με αυτό τον τρόπο και επ’ ουδενί να μην αναγκαστεί ο Δάσκαλος να προστρέξει σε τυπικές μορφές απόδειξης. Να τονιστεί ότι ο Δ3 θεωρεί ότι αυτή η διαδικασία θα μπορούσε να ενταχθεί ακόμη και στην Δ’ Δημοτικού,

Η συντριπτική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών θεωρεί ότι η απόδειξη πρέπει να εισαχθεί πιο νωρίς. Η διαφοροποίηση των απαντήσεων εστιάζεται στην ηλικία που αυτή η ένταξη είναι εφικτή αλλά και επωφελής. Οι καθηγητές Λυκείου και οι φροντιστές απορρίπτουν την έναρξη μιας τέτοιας διαδικασίας στο Δημοτικό ενώ

οι καθηγητές του Γυμνασίου και οι Δάσκαλοι προκρίνουν την πολύ πρόωμη ένταξη στην μάθηση της απόδειξης. Ενδιαφέρον σημείο είναι το γεγονός ότι οι Πανεπιστημιακοί καθηγητές τάσσονται με την τελευταία άποψη και όχι με αυτήν των καθηγητών του Λυκείου .

5.4.2 Διδακτικό κενό στη διδασκαλία της απόδειξης

Οι απαντήσεις των ερωτώμενων σχετίζονται με δύο διαφορετικούς άξονες. Στον πρώτο άξονα συναντάμε απαντήσεις που σχετίζονται με το χρόνο στον οποίο πρέπει να υπεισέλθουν αλλαγές στον τρόπο με τον οποίο διδάσκεται η απόδειξη. Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί μοιράζονται ανάμεσα στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο , κάτι φυσιολογικό αφού πολλοί από αυτούς έχουν δηλώσει στο προηγούμενο ερώτημα ότι το Δημοτικό θεωρείται η πιο κατάλληλη βαθμίδα για να ξεκινήσει η εμπλοκή των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία. Μεγάλο ενδιαφέρον όμως παρουσιάζουν οι απαντήσεις που αφορούν στα τμήματα της ύλης που θα πρέπει να διδάσκεται στο σχολείο. Θα δούμε ότι οι απόψεις για την ύλη περιστρέφονται γύρω από το μάθημα της Λογικής και τη διδασκαλία των μεθόδων. Πάντως για μια ακόμη φορά, δεν υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις που να υποδηλώνουν σχέση ανάμεσα στη βαθμίδα που εργάζεται ο κάθε εκπαιδευτικός και στις απόψεις τους για την ύλη που θεωρούν ότι θα πρέπει να εισαχθεί στο σχολείο.

- **Πανεπιστημιακοί:** Οι απαντήσεις των Μαθηματικών της Πανεπιστημιακής βαθμίδας διαφέρουν μεταξύ τους και αυτό οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο αντικείμενο της σχολής που ανήκουν. Ο Π1, καθηγητής σε σχολή πληροφορικής, δεν επικεντρώνει την προσοχή του τόσο στην απόδειξη, που

δεν απαιτείται στα Μαθηματικά της σχολής, όσο στα κενά που έχουν οι φοιτητές, κενά που σχετίζονται με τις Μαθηματικές δεξιότητες τους γενικά. Οι Π2 και Π3 θεωρούν όμως ότι στην Ελληνική Μαθηματική εκπαίδευση παρατηρείται μεγάλο κενό όσον αφορά στη διδασκαλία της λογικής και της τεκμηρίωσης. Άλλωστε όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, και οι δύο ερωτώμενοι δηλώσαν ότι η εισαγωγή στην τεκμηρίωση και στη λογική θα πρέπει να ξεκινήσει από την πρώιμη ηλικία. Ο Π2 δηλώνει για το θέμα:

‘ Καταγράφεται σε έρευνες ότι πάσχουμε στην κριτική σκέψη και στο συνδυασμό στοιχείων. Βασιζόμαστε πάρα πολύ στην επανάληψη και απομνημόνευση στοιχείων αντί να βασιζόμαστε σε κριτική σκέψη και συνδυαστική λογική. Αυτό δεν μπορεί να καλλιεργηθεί στο Πανεπιστήμιο, πρέπει να καλλιεργηθεί από νωρίς. Πρέπει από το Δημοτικό να αρχίσουμε να χρησιμοποιούμε ορθολογικές, συμπερασματικές διαδικασίες, με παραδείγματα και να καταλήγουμε σε συμπεράσματα.

Η Π3, σχολιάζοντας τις επιδόσεις των φοιτητών του Μαθηματικού τονίζει:

‘ Τα παιδιά που έρχονται στο Μαθηματικό ζορίζονται πάρα πολύ... Υπάρχουν στοιχεία λογικής που δεν τα γνωρίζουν. Γι αυτό πιστεύω ότι θα έπρεπε να διδάσκονται λογική και αποδείξεις για να είναι εξοικειωμένοι με αυτά που θα συναντήσουν στο Πανεπιστήμιο. Αφού στο Πανεπιστήμιο, σε αυτή τη σχολή, απαιτείται απόδειξη για τα πάντα’.

- **Καθηγητές Λυκείου:** Οι καθηγητές του Λυκείου επίσης συμφωνούν ότι υπάρχει κενό στη Μαθηματική εκπαίδευση όσον αφορά στην αποδεικτική διαδικασία. Επικεντρώνονται μάλιστα σε ένα συγκεκριμένο στάδιο, κατά τη

μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Θεωρούν ότι η απότομη εισαγωγή στην τυπική αποδεικτική διαδικασία, είναι πολύ επίπονη για τους μαθητές, καθώς ούτε είναι εξοικειωμένη με αυτήν, αλλά ούτε και τα κατάλληλα εργαλεία διαθέτουν. Τονίζουν δηλαδή ότι η έλλειψη εξοικείωσης με τα σύμβολα και τις αντίστοιχες έννοιες δυσχεραίνουν τη μαθησιακή διαδικασία. Ο Λ2 τονίζει για το ζήτημα αυτό:

‘Ανάμεσα στην Γ’ Γυμνασίου και στην Α’ Λυκείου υπάρχει τεράστιο κενό. Ασύλληπτο κενό θα έλεγα... Για παράδειγμα, στην Άλγεβρα της Α’ Λυκείου παρουσιάζεται η μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής με ένα παράδειγμα που όχι δεν μπορεί αν διδαχθεί, αλλά ούτε καν να διαβαστεί. Αυτή η μέθοδος πρέπει να παρουσιάζεται μέσω της Γεωμετρίας..... Από τη μία στο Γυμνάσιο δεν υπάρχει ίχνος απόδειξης και από την άλλη έχουμε την απόδειξη στο Λύκειο που παρουσιάζεται ως κάτι θεσμικό, ως κάτι κυρίαρχο... δεν έχει καλλιεργηθεί η κουλτούρα του ‘γιατί’. Τελικά πρέπει να αποφασίσουμε αν θέλουμε να απαντάμε στο ‘γιατί’ ή όχι και να μαθαίνουμε δογματικά κάποια πράγματα’. Σε άλλο σημείο ο ίδιος αναφέρει: ‘Θα έπρεπε να υπάρχει ένα κομμάτι του Αναλυτικού προγράμματος στο οποίο θα μιλάμε για τη θεμελίωση των Μαθηματικών. Θεωρητικά υπάρχει αλλά με δύο ώρες που τυπικά αφιερώνονται δεν υπάρχουν αποτελέσματα’.

Ο Λ1 θεωρεί ότι θα πρέπει να εισαχθεί το μάθημα της Λογική και να διδάσκονται αναλυτικότερα διάφορες αποδεικτικές μέθοδοι όπως η επαγωγική. Θεωρεί ότι η πλειοψηφία των μαθητών συγχέει βασικές έννοιες των Μαθηματικών που είναι απαραίτητες στην απόδειξη, όπως αυτές της;

απλής και της διπλής συνεπαγωγής. Η Λ3 συμφωνεί με τον Λ2 και τονίζει ότι το πρόβλημα εμφανίζεται κατά τη μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο και ειδικά στο μάθημα της Γεωμετρίας καθώς υπάρχει τεράστια σύγχυση των μαθητών για τα στοιχεία του μαθήματος που ενώ είναι γνωστά στο Γυμνάσιο, δεν θεωρούνται γνωστά στην Α΄ Λυκείου.

- **Φροντιστές:** Στην περίπτωση των φροντιστών παρατηρούμε ότι οι απόψεις είναι ένας συνδυασμός από εντελώς διαφορετικές αντιλήψεις. Το εύρος των απόψεων ξεκινάει από την διατήρηση του ισχύοντος προγράμματος και φτάνει μέχρι την αλλαγή της ύλης αλλά και του χρόνου εφαρμογής των αλλαγών αυτών. Ο Φ1, θεωρεί ότι δεν θα έπρεπε να αλλάξει κάτι και τονίζει ότι το πρόβλημα δεν έγκειται στην διδαχθείσα ύλη ή την ηλικία των μαθητών αλλά στη γενική έλλειψη γνώσεων, ενδιαφέροντος και εν γένει στην υποβάθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τονίζει μάλιστα ότι πιο σημαντικό γεγονός είναι η έλλειψη διαδικαστικής ευχέρειας των μαθητών παρά η κακή επαφή τους με την απόδειξη. Ο Φ11 φαίνεται ότι σε μια ακόμη ερώτηση δεν έχει αποκρυσταλλωμένη άποψη για την απόδειξη καθώς η απάντηση του περιστρέφεται γύρω από τη διαφοροποίηση των τελεστών στα Μαθηματικά και τις αποδείξεις των σχολικών εγχειριδίων. Οι υπόλοιποι φροντιστές γίνονται πιο συγκεκριμένοι. Ειδικά ο Φ0 και ο Φ3 προτείνουν συγκεκριμένη ύλη προς διδασκαλία. Ο Φ0 θεωρεί ότι οι μαθητές πρέπει να εντρυφήσουν στο Μάθημα της Λογικής με ότι συνεπάγεται αυτό, δηλαδή την απόκτηση γνώσης γύρω από σύμβολα και

έννοιες ενώ ο Φ3 τονίζει την ανάγκη διδασκαλίας των αποδεικτικών μεθόδων στην Α΄ Λυκείου. Λέει για το ζήτημα:

‘Στο βιβλίο της Α΄ Λυκείου υπάρχει μία άσκηση με την εις άτοπον απαγωγή. Θα πρέπει να υπάρχουν ασκήσεις για να δοθεί έναυσμα στο μαθητή να ασχοληθεί γιατί με μία μόνο άσκηση δεν αποτυπώνεται ο τρόπος. Φτάνουμε σε μεγαλύτερη ηλικία και η μέθοδος αυτή δεν περνάει καν από το μυαλό των μαθητών’.

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Και στην περίπτωση των Μαθηματικών που διδάσκουν στο Γυμνάσιο έχουμε εντελώς διαφορετικές απόψεις όσον αφορά στην ύλη και στην περίοδο εφαρμογής των αλλαγών. Επιβεβαιώνεται λοιπόν ότι οι προσωπικές εμπειρίες είναι αυτές που διαμορφώνουν τις πεποιθήσεις παρά κάποια γενική τάση που σχετίζεται με την κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης. Η Γ0 θεωρεί ότι δεν χρειάζεται να αλλάξει κάτι. Οι Γ1, Γ2 και Γ3 τάσσονται υπέρ των αλλαγών αλλά μέσα από εντελώς διαφορετικά πρίσματα. Ο Γ2 τονίζει ότι η ύλη των αποδείξεων που διδάσκεται στην Α΄ Λυκείου πρέπει να διαμοιραστεί και στις τάξεις του Γυμνασίου, σημειώνοντας ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές:

‘Μερικοί μαθητές αντιμετωπίζουν το εξής πρόβλημα. Όταν στην Α΄ Λυκείου τους ζητείται να αποδείξουν μία πρόταση, αμφισβητούν την αξία της απόδειξης, αφού η ισχύς της είναι γνωστή από το Γυμνάσιο. δημιουργείται σύγχυση’

Ο Γ1 πιστεύει ότι η διδασκαλία της απόδειξης πρέπει να διαφοροποιηθεί και να επανέλθει στο παρελθόν, με την εισαγωγή στοιχείων από τη Λογική ενώ σε εντελώς αντίθετη κατεύθυνση βρίσκεται ο Γ3 που είναι υπέρ της μείωσης της ύλης. Θεωρεί ότι με τον τρόπο αυτό θα έχουμε μεγαλύτερη εμβάθυνση και οι μαθητές θα αποκομίσουν μεγαλύτερα οφέλη σε σχέση με τον τρόπο που διδάσκεται η απόδειξη σήμερα.

- **Δάσκαλοι:** Οι απόψεις των δασκάλων δίστανται εντελώς. Οι Δ1 και Δ2 θεωρούν ότι θα πρέπει να υπάρξει αλλαγή στον τρόπο διδασκαλίας, αν και με διαφορετικό τρόπο όπως αναφέρει ο καθένας. Η Δ1 θεωρεί ότι κάποιες αποδείξεις θα μπορούσαν να εισαχθούν ακόμη και από την Ε΄ Δημοτικού ενώ ο Δ2 τονίζει ότι οι αποδείξεις θα πρέπει να είναι μικρές σε έκταση. Τονίζει χαρακτηριστικά:

‘Και από την εμπειρία μου ως μαθητής, μπορώ να πω ότι η απόδειξη γινόταν η αιτία για να μισήσει κάποιος τα Μαθηματικά..... Τόσα πολλά δεδομένα, δεν είναι σίγουρο ότι ανήκουν στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών. Θα πρέπει να λειαινούνται οι αποδείξεις’.

Ο Δ3 βρίσκεται σε εντελώς άλλη κατεύθυνση και θεωρεί ότι δεν υπάρχει κανένα απολύτως κενό. Θεωρεί ότι τα προβλήματα που παρουσιάζονται οφείλονται στον τρόπο διδασκαλίας. Σύμφωνα με την απάντησή του, υπάρχουν ευκαιρίες για την ομαλή εμπλοκή των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία αλλά οι εκπαιδευτικοί όλων των βαθμίδων δεν τις εκμεταλλεύονται με αποτέλεσμα τις κακές επιδόσεις των μαθητών στο συγκεκριμένο τομέα

Οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι υπάρχει πολύ μεγάλο γνωστικό έλλειμμα στους μαθητές. Πιστεύουν ότι από τα σημερινά Μαθηματικά λείπει η διδασκαλία των τελεστών και της λογικής. Αποτέλεσμα αυτών των ελλείψεων είναι η πολύ μεγάλη δυσχέρεια των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία.

5.4.3. Παρουσίαση άτυπων αποδείξεων αντί για τυπικές

Οι απαντήσεις στο ερώτημα αυτό είναι σχεδόν ίδιες από όλους τους ερωτώμενους. Εκτός από ελάχιστες περιπτώσεις, η πλειοψηφία των ερωτώμενων τονίζει ότι σε μεγάλο ή μικρό ποσοστό, οι μαθητές ή φοιτητές αντιμετωπίζουν τις μη τυπικές αποδείξεις ως τις κατάλληλες για την κάθε περίπτωση. Οι Πανεπιστημιακοί αξιολογούν γραπτά φοιτητών που θεωρητικά πάντα, πρέπει να έχουν ξεπεράσει την παρανόηση που δημιουργούν οι άτυπες αποδείξεις σχετικά με την ισχύ τους. Οι Δάσκαλοι βρίσκονται στην εκ διαμέτρου αντίθετη θέση καθώς οι μαθητές τους έχουν πάρα πολύ συχνά την πεποίθηση ότι η σχεδίαση ή η επαλήθευση έχουν καθολική ισχύ. Οι καθηγητές της Μέσης εκπαίδευσης βρίσκονται στο μεταίχμιο έχοντας να αντιμετωπίσουν τη μετάβαση των μαθητών από έναν τρόπο σκέψης σε έναν άλλο.

- **Πανεπιστημιακοί:** Οι Π1 και Π3 θεωρούν ότι υπάρχει σημαντικός αριθμός φοιτητών που δίνουν μη τυπικές αποδείξεις αντί για τις ενδεδειγμένες. Ειδικά για το επίπεδο των σπουδών, αυτού του είδους οι αποδείξεις δε βαθμολογούνται καθόλου. Αντίθετα, ο Π2 τονίζει ότι δεν έχει συναντήσει καθόλου συχνά κάτι αντίστοιχο και οι λίγες περιπτώσεις που το συνάντησε σχετιζόταν μόνο με πολύ αδύναμους ή πολύ ικανούς φοιτητές. Η διαφοροποίηση έγκειται στο γεγονός ότι οι πολύ αδύναμοι δεν είχαν την

ικανότητα να προβούν σε μια κανονική απόδειξη ενώ οι πολύ ικανοί θεωρούν πολλά στοιχεία αυτονόητα σε βαθμό που θεωρούν ότι οι τυπικές αποδείξεις δεν χρειάζονται.

- **Καθηγητές Λυκείου:** Ομόφωνη είναι η άποψη των εκπαιδευτικών αυτής της βαθμίδας. Οι μαθητές σε μικρό ή μεγάλο βαθμό θεωρούν ότι ένα σχήμα, μία μέτρηση ή μία επαλήθευση αποτελούν την απόδειξη του απαιτούμενου ισχυρισμού. Ειδικά ο Λ2 τονίζει:

‘Ναι, βέβαια. Ο μαθητής έχει την ψευδαίσθηση ότι το έχει κάνει. Κάνει ένα σχήμα ή φέρνει ένα παράδειγμα.... Μου έτυχε περίπτωση μαθητή, που ενώ ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των μοιρών ενός τριγώνου είναι 180 μοίρες, σχεδίασε ένα τρίγωνο, μέτρησε τις γωνίες με το μοιρογνωμόνιο και είπε ‘Ορίστε, το ‘απέδειξα’... δεν μπορούν οι μαθητές να αντιληφθούν την καθολική ισχύ της απόδειξης και σου λένε, ότι η απόδειξη γίνεται μέσω ενός παραδείγματος.

Η Λ3 παίρνοντας αφορμή από τα θέματα των Πανελληνίων περιγράφει το συνηθισμένο φαινόμενο κατά το οποίο ένας μαθητής, κατά την κατασκευή ενός αντιπαραδείγματος, δεν αποδεικνύει την ύπαρξη μιας συνάρτησης αλλά απλά σχεδιάζει τη γραφική παράσταση της. Αναφέρει ότι το συγκεκριμένο είδος απάντησης υπάρχει στα γραπτά των υποψήφιων οι οποίοι θεωρούν ότι η σχεδίαση μιας γραφικής παράστασης χωρίς σχόλια ή επεξηγήσεις αποτελεί την ενδεδειγμένη απάντηση.

- **Φροντιστές:** Στον κλάδο των φροντιστών συναντούμε πλήρη ομοφωνία. Όλοι οι ερωτώμενοι συμφωνούν ως προς την εμφάνιση μιας μερίδας

μαθητών που δίνουν άτυπες αποδείξεις αντί για τις κατάλληλες. Τονίζουν ότι το φαινόμενο είναι πιο συχνό στη Γεωμετρία, στην οποία πολλοί μαθητές θεωρούν ότι η σχεδίαση ενός στοιχείου αποτελεί και απόδειξη για τις ιδιότητες του. Βέβαια, δεν λείπει πάλι η γνωστή σύγχυση ανάμεσα στην αποδεικτική διαδικασία και στις αποδείξεις του σχολικού αφού δύο εκ των ερωτώμενων απάντησαν για τις αποδείξεις των θεωρημάτων των σχολικών βιβλίων.

- **Καθηγητές Γυμνασίου:** Οι μαθηματικοί που διδάσκουν σε Γυμνάσιο συμφωνούν στην πλειοψηφία τους με τους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς. Εκτός από τον Γ1 που αναφέρει ότι δεν έχει συναντήσει αντίστοιχη συμπεριφορά, οι υπόλοιποι ερωτώμενοι απαντούν καταφατικά. Ο Γ2 μάλιστα γίνεται αρκετά συγκεκριμένος και τονίζει ότι όσο πιο μικρός είναι ένας μαθητής, τόσο πιο πολύ τείνει να σχεδιάζει ή να μετρά και να θεωρεί ότι έχει κάνει την κατάλληλη απόδειξη.
- **Δάσκαλοι:** Οι εκπαιδευτικοί της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης συντάσσονται με την άποψη της πλειοψηφίας στο συγκεκριμένο ερώτημα. Βεβαίως ο βαθμός στον οποίο συμφωνούν με την επικρατούσα άποψη ποικίλει. Η Δ1 απαντάει στο ερώτημα:

‘Άπειρες φορές. Πάρα πολύ συχνό φαινόμενο, ειδικά στο Δημοτικό’

Οι Δ2 και Δ3 χρησιμοποιούν το φαινόμενο για να εξελίξουν την αντιληπτική ικανότητα των μαθητών τους. Ο Δ2 αναφέρει:

‘Όταν ένας μαθητής δίνει ένα σχέδιο αντί για την απόδειξη που περιμένω, χρησιμοποιώ το σχέδιο για να περάσουμε στο στάδιο της Άλγεβρας. Υπάρχει

σίγουρα η παρεξήγηση εκ μέρους των μαθητών, ότι αφού έγινε το σχέδιο, τελείωσε η άσκηση'

Ο Δ3 τονίζει ότι στις μεγάλες τάξεις ο δάσκαλος πρέπει να οδηγεί το μαθητή, ξεκινώντας από τη μη τυπική σκέψη, δεχόμενος ότι το φαινόμενο του να νομίζει ο μαθητής ότι η μη τυπική απόδειξη είναι ενδεδειγμένη, είναι υπαρκτό.

Η πλειοψηφία των μαθηματικών δηλώνει ότι πολλοί μαθητές διατηρούν την εσφαλμένη πεποίθηση ότι μια άτυπη απόδειξη έχει την ίδια ισχύ με την αντίστοιχη τυπική. Ιδιαίτερη σημασία έχει το γεγονός ότι το φαινόμενο παρατηρείται ακόμα και σε φοιτητές Πανεπιστημιακών τμημάτων, στοιχείο που υποδηλώνει την βαθιά ριζωμένη πεποίθηση των μαθητών για την ισχύ της άτυπης απόδειξης, κάτι που φαίνεται να εμφανίζεται ακόμα και στους φοιτητές Μαθηματικών τμημάτων.

6. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από το σύνολο των απαντήσεων μπορούμε να εξάγουμε ένα κεντρικό συμπέρασμα. Παρά τη γενική συμφωνία των ερωτώμενων ως προς τη σημασία της απόδειξης στην εξέλιξη των Μαθηματικών αλλά και στη διαμόρφωση ενός σκεπτόμενου πολίτη, απουσιάζει μία γενική στρατηγική διδασκαλίας της αποδεικτικής διαδικασίας σε κεντρικό επίπεδο. Εκτός από αυτό, παρά τους στόχους που κατά καιρούς εμφανίζονται στα Αναλυτικά προγράμματα, η πλειοψηφία των ασκήσεων στο μάθημα της Άλγεβρας επικεντρώνεται στην επίλυση εξισώσεων. Οι απόψεις αυτές είναι αποτέλεσμα των προσωπικών εμπειριών τους από τους χώρους εργασίας, αλλά κάποιους φορές έρχονται ως επιστέγασμα των εμπειριών που έχουν αποκτήσει από τα μαθητικά τους χρόνια ή τις εμπειρίες τους ως γονείς. Κοινή πεποίθηση όλων είναι ότι η Μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα χωλαίνει ως προς τον τομέα της απόδειξης με βασική αιτία, ως προς τη γνώμη της πλειοψηφίας, την καθυστερημένη ένταξη της διδασκαλίας αυτής της Μαθηματικής έννοιας στο αναλυτικό πρόγραμμα. Επίσης, πρέπει να τονίσουμε ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών θεωρούν ότι μεγάλος αριθμός μαθητών έχει συγκεκριμένη ιδέα για την απόδειξη και τον τρόπο που αυτή γίνεται καθώς αναφέρουν ότι σε πολλές περιπτώσεις οι μαθητές θεωρούν ως απόδειξη την μέτρηση, την επαλήθευση ή τη χάραξη ενός σχήματος. Πρέπει όμως να αναφερθεί και ένα πολύ σημαντικό ζήτημα που άπτεται της μαθηματικής κοινότητας και των μελών της. Σε πάρα πολλές περιπτώσεις, οι ερωτώμενοι φάνηκε να ολισθαίνουν από την έννοια της απόδειξης προς την έννοια των αποδείξεων που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια. Οι Μαθηματικοί λοιπόν, δεν

έχουν αποκτήσει, σε αρκετές περιπτώσεις την πεποίθηση ότι οι αποδείξεις των βιβλίων είναι μόνο ένα μικρό κομμάτι από την αποδεικτική διαδικασία που πρέπει να διδαχθεί ένας μαθητής.

6.1 1ος άξονας

6.1.1 Σημασία της απόδειξης

Το σύνολο των εκπαιδευτικών συμφωνεί ανεπιφύλακτα για τον πολύ μεγάλο βαθμό σπουδαιότητας της απόδειξης στη Μαθηματική επιστήμη αλλά και στη Μαθηματική εκπαίδευση. Οι εκπαιδευτικοί, ανεξαιρέτως βαθμίδας και κλάδου, υποστηρίζουν ότι η φύση των Μαθηματικών ταυτίζεται με την αποδεικτική διαδικασία. Είτε πρόκειται για τα Μαθηματικά του Πανεπιστημίου είτε για τα Μαθηματικά σε πρώιμο γνωστικό στάδιο, η ισχύς των Μαθηματικών πηγάζει μέσα από την απόδειξη, παρέχοντας σιγουριά ότι οι ισχυρισμοί που διατυπώνονται έχουν στερεή βάση και δίνουν τη δυνατότητα να δημιουργηθεί ένα ισχυρό οικοδόμημα γνώσης.

6.1.2 Ρόλοι της απόδειξης

Ο σημαντικότερος ρόλος που επιτελεί η απόδειξη σύμφωνα με τους ερωτώμενους είναι αυτός της πειθούς για την εγκυρότητα ενός ισχυρισμού. Αυτός ο ρόλος αποδόθηκε από την πλειοψηφία των εκπαιδευτικών χωρίς όμως να είναι ο μοναδικός. Πολλοί ερωτώμενοι απάντησαν ότι μέσω της απόδειξης επιτυγχάνεται η επικοινωνία μεταξύ των μελών της μαθηματικής κοινότητας καθώς η απόδειξη αποτελεί έναν τρόπο για την γνωστοποίηση της εργασίας ενός Μαθηματικού προς κάθε ενδιαφερόμενο. Σημαντικός αριθμός ερωτώμενων τόνισε ότι με τη βοήθεια

της απόδειξης γίνεται καλύτερα αντιληπτή η ουσία ενός ισχυρισμού, προσδίδοντας στην απόδειξη το ρόλο της βαθύτερης κατανόησης. Η συστηματοποίηση της γνώσης και η δημιουργία ενός σώματος που περιέχει τα απαραίτητα στοιχεία για την περαιτέρω εξέλιξη των Μαθηματικών καθώς και για την παραγωγή νέας γνώσης ήταν ένας ακόμη ρόλος που αποδόθηκε στην απόδειξη.

6.2 2ος άξονας

6.2.1 Διδασκαλία της απόδειξης

Η απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα είναι κοινή για όλους τους εκπαιδευτικούς. Όλοι συμφωνούν στο γεγονός ότι η διδασκαλία της απόδειξης και των μεθόδων της είναι πολύ σημαντική. Μόνο με τη διδασκαλία αυτός του τομέα των Μαθηματικών μπορεί ο μαθητής ή ο φοιτητής να αποκτήσει τα εφόδια που είναι απαραίτητα για να διεκπεραιώσει ένα πλήθος Μαθηματικών έργων. Βεβαίως δεν λείπουν οι αναφορές ότι η διδασκαλία της απόδειξης μπορεί να επιτευχθεί μόνο με μείωση της ύλης από άλλα κομμάτια των Μαθηματικών. Να σημειωθεί επίσης ότι σε τμήμα Μαθηματικών έχει γίνει η αντίστοιχη ξεχωριστή διδασκαλία χωρίς όμως τα αναμενόμενα αποτελέσματα δηλαδή τη βελτίωση των ικανοτήτων των φοιτητών.

6.2.2 Οφέλη για το μαθητή

Στην ερώτηση αυτή παρατηρείται η εξής τάση: Οι Πανεπιστημιακοί δίνουν απαντήσεις που δεν άπτονται τόσο πολύ της μαθητικής ιδιότητας όσο της ιδιότητας του μαθητή να είναι ταυτόχρονα πολίτης της κοινωνίας. Θεωρούν ότι το σημαντικότερο όφελος που αποκομίζει ο μαθητής είναι η δημιουργία ενός

ορθολογικού τρόπου σκέψης ενώ ένας εξ αυτών απαντά ότι ο συγχρωτισμός και η τριβή με άλλους μαθηματικούς κατά την προσπάθεια εξεύρεσης μίας απόδειξης ενός ισχυρισμού τονώνει το αίσθημα κοινωνικότητας. Οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί έδωσαν μία μεγάλη ποικιλία απαντήσεων που ξεκινάει από τα κέρδη που εμφανίζει ένας μαθητής στη Φυσική και γενικότερα κατά άλλους θετικά μαθήματα και φτάνει μέχρι και την Ιστορία μάθημα στα οποία ο τρόπος σκέψης που καλλιεργείται μέσα από την απόδειξη μπορεί να παρέχει στο μαθητή ένα εργαλείο κρίσης της ορθότητας των περιγραφών. Οι καθηγητές του Γυμνασίου και οι Δάσκαλοι τόνισαν περισσότερο ότι ο μαθητής που εξασκείται στην απόδειξη έχει καλύτερη παραγωγή λόγου, δυνατότητα να συνδυάζει ξεχωριστές απόψεις και να δίνει λογικές απαντήσεις σε προβλήματα που τίθενται.

6.2.3 Οφέλη για τον άνθρωπο ως πολίτη

Στην ερώτηση αυτή κυριαρχεί ένας όρος: Ορθολογισμός. Όλοι οι ερωτώμενοι χαρακτήρισαν τη δημιουργία ορθολογικού τρόπου σκέψης ως το κυριότερο όφελος που ο μαθητής μπορεί να αποκομίσει, όφελος που θα του είναι εξαιρετικά χρήσιμο ως αυριανού πολίτη. Ιδιαίτερη αναφορά έγινε από πολλούς ερωτώμενους στην απουσία κριτικής σκέψης των πολιτών, γεγονός πολύ επίκαιρο εξ αιτίας του φαινομένου της διασποράς μεγάλου πλήθους ψευδών ειδήσεων. Η επικράτηση αυτού του φαινομένου οφείλεται σε μεγάλο μέρος στην απουσία της ικανότητας φιλτραρίσματος του πολύ μεγάλου όγκου πληροφοριών τις οποίες δέχεται ο μέσος πολίτης καθημερινά. Ο ορθολογικός τρόπος σκέψης και η απόδειξη ή η απόρριψη μέσω στέρεων επιχειρημάτων μπορεί να αποτελέσει ανάχωμα σε ένα φαινόμενο που εκτός από ενοχλητικό μπορεί να γίνει και επικίνδυνο. Κλασικό παράδειγμα

αποτελεί η περίπτωση της πανδημίας της περιόδου 2020-21 κατά τη διάρκεια της οποίας διακινήθηκε ένας τεράστιος όγκος αβάσιμων ισχυρισμών που παρουσίασαν παντελή έλλειψη επιστημονικών αποδείξεων με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός κλίματος εφησυχασμού που επιδείνωσε τα επιδημιολογικά στοιχεία.

6.3 3ος άξονας

6.3.1 Σημεία βαρύτητας κατά την αξιολόγηση

Στην ερώτηση αυτή μπορούμε να πούμε ότι οι απαντήσεις των ερωτώμενων επικεντρώνονται σε τρία σημεία. Αρχικά οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί τόνισαν ότι αυτό που προσέχουν σε μία απόδειξη είναι η σωστή αιτιολόγηση των βημάτων, δηλαδή η εξαγωγή του συμπεράσματος σε κάθε βήμα. Ένας σημαντικός αριθμός ερωτώμενων τόνισε ότι το πρώτο σημείο που επικεντρώνονται είναι ο διαχωρισμός δεδομένων από τα ζητούμενα ενώ τέλος οι καθηγητές του Γυμνασίου τόνισαν ότι τους ενδιαφέρει ο τρόπος σκέψης και η πρωτοτυπία ακόμα και αν αυτός ο τρόπος δεν είναι απολύτως σωστός. Βεβαίως υπήρξαν και απαντήσεις Πανεπιστημιακών που τόνισαν ότι προσέχουν την ύπαρξη μεταγνωστικών ικανοτήτων των φοιτητών ή την καλή γνώση των αποδεικτικών μεθόδων όπως αυτή της επαγωγικής ή της απαγωγής σε άτοπο.

6.3.2 Αποδοχή από τους εκπαιδευτικούς των άτυπων αποδείξεων

Οι απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα περιστρέφονται γύρω από δύο σημεία. Αφ' ενός η αποδοχή μιας άτυπης απόδειξης σχετίζεται με το βαθμό στον οποίο πείθει για την ορθότητα της, αφ' ετέρου η αποδοχή σχετίζεται με τη βαθμίδα εκπαίδευσης. Οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αλλά και αυτοί του

Γυμνασίου δηλώνουν ότι οι άτυπες αποδείξεις γίνονται αποδεκτές και χρησιμοποιούνται ως στάδιο για τη μετάβαση στις τυπικές. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι καθηγητές Λυκείου δέχονται άτυπες αποδείξεις όταν ζητάνε αντιπαράδειγμα ενώ υπάρχει και περίπτωση που ερωτώμενος τονίζει ότι δέχεται άτυπη απόδειξη όταν γνωρίζει ότι το γνωστικό επίπεδο του μαθητή είναι χαμηλό.

6.3.3 Εμπλοκή των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία

Στην ερώτηση αυτή συναντούμε μεγάλο πλήθος διαφορετικών απαντήσεων που ουσιαστικά αντικατοπτρίζουν τον τρόπο διδασκαλίας όχι μόνο της απόδειξης αλλά των Μαθηματικών γενικότερα. Στην πραγματικότητα οι εκπαιδευτικοί απαντούσαν τονίζοντας ότι δε διαχωρίζουν τη διδασκαλία της απόδειξης από τα υπόλοιπα Μαθηματικά. Αρχικά να επισημανθεί ότι δύο εκπαιδευτικοί τόνισαν ότι η ικανότητα της απόδειξης είναι σε μεγάλο βαθμό έμφυτη και δεν υπάρχουν μεγάλα περιθώρια παρέμβασης από τους εκπαιδευτικούς. Στις υπόλοιπες απαντήσεις βρίσκουμε ότι οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν στην αποδεικτική διαδικασία μέσω της χρήσης των υπολογιστών ή μέσω της χρησιμοποίησης χειραπτικών υλικών για κατασκευές. Οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας τονίζουν ότι για να κερδίσει κάποιος το μαθητή και να τον κάνει να ενταχθεί πιο ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία, πρέπει να του κερδίσει το ενδιαφέρον μέσα από καταστάσεις ή ενδιαφέροντα προβλήματα της καθημερινότητας. Ίσως όμως η πιο πρωτότυπη ιδέα έρχεται από Πανεπιστημιακή καθηγήτρια που προτείνει τη διδασκαλία ενός τμήματος της ύλης από τους ίδιους τους φοιτητές με στόχο την άμεση ενεργοποίησή τους.

6.4 4ος άξονας

6.4.1 Εισαγωγή στην απόδειξη σε πρώιμο στάδιο

Πρόκειται για το ερώτημα με τη μεγαλύτερη διασπορά απόψεων και η σημασία του είναι πολύ ουσιώδης γιατί η ορθή αποδοχή των απόψεων των εκπαιδευτικών μπορεί να διαμορφώσει την αλλαγή του σχεδιασμού και την αναπροσαρμογή των αναλυτικών προγραμμάτων. Βεβαίως για να συμβεί κάτι τέτοιο, πρέπει να γίνει ανάλυση των απόψεων όλων των εκπαιδευτικών από διαφορετικές βαθμίδες για να σταθμιστούν όχι μόνο τα πιθανά οφέλη μιας τέτοιας αλλαγής αλλά και οι αρνητικές επιπτώσεις της. Οι απόψεις των ερωτώμενων δίστανται: Πολλοί εξ αυτών θεωρούν ότι η ένταξη ενός μαθητή στην απόδειξη, με μορφή παιχνιδιού βεβαίως, θα πρέπει να ξεκινήσει από τις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού, Πάρα πολλοί όμως διαφωνούν λέγοντας ότι ένας μαθητής της Ε΄ ή ΣΤ. τάξης είναι ανώριμος για να αντιμετωπίσει μια τέτοια πρόκληση και θεωρούν ότι το Γυμνάσιο είναι η κατάλληλη ηλικία. Δε λείπουν βέβαια και ακόμη δύο εκ διαμέτρου αντίθετες απόψεις: Ένας ερωτώμενος θεωρεί ότι ακόμη και οι μαθητές της Δ΄ Δημοτικού μπορούν να ανταπεξέλθουν σε ένα αποδεικτικό έργο (πάντα με παιγνιώδη μορφή) ενώ ένας άλλος τόνισε ότι πρέπει να διατηρηθεί το υπάρχον καθεστώς και η απόδειξη να εξακολουθεί να παρουσιάζεται στην Α΄ Λυκείου.

6.4.2 Κενό στη διδασκαλία της απόδειξης

Η συντριπτική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών θεωρούν ότι στην Ελληνική Μαθηματική εκπαίδευση παρουσιάζεται μεγάλο κενό όσον αφορά στον τρόπο με τον οποίο εισάγεται η έννοια της απόδειξης και γίνεται η διδασκαλία της.

Υποστηρίζεται ότι υπάρχει μεγάλη έλλειψη στην κατανόηση των συμβόλων και των τελεστών και οι περισσότεροι ερωτώμενοι υποστηρίζουν ότι πρέπει να υπάρχει μία έστω μικρή αναφορά σε στοιχεία Λογικής πριν γίνει η εισαγωγή στην απόδειξη. Τονίζεται επίσης ότι πρέπει να εμπλουτισθούν τα σχολικά εγχειρίδια με αποδεικτικές ασκήσεις για την απαγωγή σε άτοπο, την αντιθετοαντιστροφή και την επαγωγική μέθοδο. Βέβαια υπάρχουν και οι εκ διαμέτρου αντίθετες απόψεις που τονίζουν ότι δε θα πρέπει να αλλάξει κάτι και που τονίζουν ότι οι δυσκολίες των μαθητών δεν οφείλονται στην απόδειξη αυτή καθ' εαυτή αλλά στην έλλειψη διαδικαστικής ευχέρειας των μαθητών και στην υπερβολικά μεγάλη ύλη που δεν αφήνει τον εκπαιδευτικό να επικεντρωθεί στα απαιτούμενα σημεία.

6.4.3 Παρουσίαση άτυπων αποδείξεων αντί για τυπικές

Οι απαντήσεις στο ερώτημα παρουσιάζουν αξιοσημείωτη ομοιογένεια. Εκτός από δύο περιπτώσεις όλοι οι εκπαιδευτικοί τόνισαν ότι έχουν συναντήσει μεγάλο αριθμό μαθητών ή φοιτητών που έχουν σχηματίσει την εντύπωση ότι ένα σχέδιο ή μία λεκτική περιγραφή μπορεί και υποκαθιστά μία τυπική απόδειξη. Εξαίρεση αποτέλεσε μία καθηγήτρια Γυμνασίου η οποία τόνισε ότι δεν έχει συναντήσει κάποια αντίστοιχη περίπτωση και ένας Πανεπιστημιακός που χαρακτήρισε το συγκεκριμένο φαινόμενο αρκετά σπάνιο και μάλιστα συμπλήρωσε ότι μόνο εξαιρετικά καλοί φοιτητές ή κάποιοι με πολύ χαμηλές δυνατότητες θα προβούν στην παρουσίαση μιας άτυπης απόδειξης. Η αιτία είναι εκ διαμέτρου αντίθετη: οι φοιτητές με μεγάλες ικανότητες θεωρούν, όπως τόνισε, αυταπόδεικτα πολλά πράγματα ενώ αυτοί με χαμηλές ικανότητες αδυνατούν να φτάσουν στην τυπική

απόδειξη και προσπαθούν να την αντικαταστήσουν με κάποια μέτρηση ή σχεδίαση.

Η εισαγωγή ενός μαθήματος με στοιχεία Λογικής, για παράδειγμα, θα αφαιρέσει ώρες από άλλα τμήματα των Μαθηματικών, κάτι που πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπ' όψιν. Άλλωστε, υπάρχει και η άποψη, όπως αναφέρθηκε από ερωτώμενο, ότι η έλλειψη της αποδεικτικής ικανότητας των μαθητών, είναι συνδυασμός πολλών παραγόντων, στοιχείο που συνηγορεί σε μια πιο ολιστική αντιμετώπιση του προβλήματος. Φαίνεται, ότι τα προβλήματα των μαθητών στον τομέα της απόδειξης σχετίζονται με την έλλειψη ικανότητας κατανόησης του κειμένου, με προβλήματα στις πράξεις, με προβλήματα λεξιλογίου και φυσικά με την αδυναμία σύνδεσης των ξεχωριστών βημάτων που απαιτούνται. Για το λόγο αυτό, η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών θεωρεί ότι οι μαθητές πρέπει να εμπλακούν με την άτυπη μορφή της απόδειξης σε αρκετά πιο πρώιμο στάδιο από αυτό που συμβαίνει σήμερα. Η διαφοροποίηση έγκειται στο γεγονός ότι αρκετοί εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι οι τελευταίες τάξεις του Δημοτικού είναι κατάλληλες για την εισαγωγή στην απόδειξη, ενώ άλλοι θεωρούν ότι το Γυμνάσιο θα πρέπει να αποτελέσει τη βαθμίδα στην οποία ο μαθητής γνωρίζεται με την αποδεικτική διαδικασία. Όσον αφορά στα οφέλη που αποκομίζει ένας μαθητής από την απόδειξη, Ίσως να αποτελεί έκπληξη μία εκ των απαντήσεων στο ερώτημα για τα σημεία της απόδειξης που ενδιαφέρουν τους εκπαιδευτικούς. Ένα σημαντικό μέρος του δείγματος απαιτεί από τους μαθητές τον ξεκάθαρο διαχωρισμό των δεδομένων από τα ζητούμενα, δίνοντας με τον τρόπο αυτό έμφαση στην παρατηρούμενη αδυναμία των μαθητών να επεξεργαστούν την εκφώνηση του ισχυρισμού. Η

διατύπωση της απόδειξης πρέπει επίσης να είναι σαφής σύμφωνα με πολλούς εκπαιδευτικούς. Οι δύο αυτές παρατηρήσεις, δίνουν το διάγραμμα ενός προβλήματος που παρατηρείται τα τελευταία χρόνια και δεν άπτεται μόνο των Μαθηματικών, αλλά είναι γενικευμένο πρόβλημα της σχολικής κοινότητας, αυτό της δυσχέρειας της κατανόησης κειμένου αλλά και της δυσκολίας στην έκφραση και στη διατύπωση των ιδεών των μαθητών. Η πεποίθηση των μαθητών ότι η άτυπη απόδειξη έχει ισχύ αντίστοιχη με αυτή της τυπικής είναι ένα στοιχείο που αναμενόταν καθώς συμβαδίζει με τις εμπειρίες της συντριπτικής πλειοψηφίας των εκπαιδευτικών. Αυτό που ίσως αποτελεί έκπληξη είναι ότι αυτή η πεποίθηση δεν εγκαταλείπει τους μαθητές ακόμα και κατά τη μετάβαση τους στα Πανεπιστημιακά τμήματα. Φαίνεται ότι ίσως πρέπει να δοθεί μεγάλη προσοχή κατά τη διδασκαλία της απόδειξης στο συγκεκριμένο ζήτημα.

6.5 Επίδραση του χρόνου εργασιακής εμπειρίας

Στην έρευνα δε φαίνεται να υπάρχει καμιά συσχέτιση ανάμεσα στα χρόνια που εργάζεται κάποιος εκπαιδευτικός και τις πεποιθήσεις που έχει για την απόδειξη. Οι απαντήσεις των ερωτώμενων με μικρή εργασιακή εμπειρία δε φαίνεται να διαφέρουν από τις αντίστοιχες των ερωτώμενων με μέτρια ή μεγάλη εμπειρία. Αυτό έρχεται να επιβεβαιώσει την εκτίμηση ότι παρά το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί με μεγάλη εμπειρία έχουν σαφώς πιο αποκρυσταλλωμένη άποψη για τα οφέλη της απόδειξης αλλά και τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε αυτήν. ο μη διαχωρισμός της απόδειξης από τα υπόλοιπα Μαθηματικά δεν τους δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουν τις απόψεις τους με διαφορετικό τρόπο σε σχέση με κάποιον με λιγότερη εμπειρία.

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

7.1 Πρώτος άξονας

Όσον αφορά στον πρώτο άξονα, οι απαντήσεις των ερωτώμενων συμφωνούν με τα ως τώρα ερευνητικά ευρήματα. Η συντριπτική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών τονίζει την τεράστια σημασία της απόδειξης τόσο για τα Μαθηματικά ως γνωστικό αντικείμενο όσο και ως τμήμα της παιδείας που λαμβάνει ένας άνθρωπος στα πρώτα στάδια της ζωής του. Όσον αφορά στους ρόλους που επιτελούνται με την απόδειξη η πλειοψηφία θεωρεί ως βασικό ρόλο την πειθώ όπως έχει φανεί και σε προηγούμενες έρευνες (De Villers, 1990). Οι υπόλοιποι ρόλοι που έχουν αναφερθεί στη βιβλιογραφία (κατανόηση, συστηματοποίηση της γνώσης, επικοινωνία , επεξήγηση) αναφέρονται αλλά όχι με τόσο μεγάλη συχνότητα. Ένας ρόλος που αναφέρεται χωρίς να έχει σημειωθεί κάτι αντίστοιχο σε έρευνες σχετίζεται με την επανάληψη της προϋπάρχουσας γνώσης δηλαδή με την προσπάθεια του μαθητή να επαναλάβει τμήματα της ύλης που έχει ήδη διδαχθεί μέσα από την ανάγνωση μίας απόδειξης.

7.2 Δεύτερος άξονας

Η διδασκαλία της απόδειξης κρίνεται ιδιαίτερος σημαντική, έτσι ώστε να διευκολυνθεί ο μέσος μαθητής ή φοιτητής στο να ξεπεράσει τις πολλές δυσκολίες που έχει στον τομέα της απόδειξης όπως αναφέρουν οι έρευνες (Selden & Selden, 2007) . Τα οφέλη από τη διδασκαλία κρίνονται ιδιαίτερος σημαντικά τόσο για το μαθητή όσο και για τον αυριανό πολίτη, έξω από τα σχολικά πλαίσια αλλά ενταγμένο στην κοινωνία ως ένα μέλος που μπορεί να σκέφτεται, να αποφασίζει

και να πράττει ανάλογα. (Aylar et al, 2013).Ως εφόδιο για αυτή την αλυσίδα σκέψεων και πράξεων ο πολίτης έχει την ορθολογική σκέψη, δηλαδή τη δυνατότητα επεξεργασίας των πληροφοριών που δέχεται καθημερινά και την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων.

7.3 ΤΡΙΤΟΣ ΑΞΟΝΑΣ

Οι εκπαιδευτικοί ζητούν από τους μαθητές σαφήνεια και σαφή διαχωρισμό δεδομένων από τα ζητούμενα. όπως έχουν καταδείξει και οι μέχρι τώρα μελέτες (Gyogy&Konya, 2019) . Οι περισσότεροι δέχονται την παρουσίαση άτυπων αποδείξεων αν και όχι σε τόσο μεγάλο βαθμό όσο αυτός που συναντούμε στη βιβλιογραφία . Ειδικά στις μεγάλες τάξεις φαίνεται να υπάρχει μία σχετική αυστηρότητα εξ αιτίας της προετοιμασίας για τις εξετάσεις στις οποίες απαιτείται μαθηματική αυστηρότητα. Όσον αφορά στην εμπλοκή του μαθητή στην αποδεικτική διαδικασία η πλειοψηφία των ερωτώμενων θεωρεί ότι μπορεί να καταστήσουν το μαθητή πιο ενεργό συνδυάζοντας τη διδασκαλία με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών, γεγονός που συμφωνεί με τα μέχρι τώρα ευρήματα.

7.4 Τέταρτος άξονας

Όπως αναφέρεται σε μεγάλο πλήθος ερευνών, θεωρείται μάλλον κακή μαθηματική πρακτική η εισαγωγή της απόδειξης μέσω της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στις αρχές του Λυκείου, δηλαδή στην ηλικία των 14-15 ετών. Εκτός όμως από την ηλικία οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί συμφωνούν ότι τα προβλήματα των παιδιών σχετίζονται και με τον τομέα της Λογικής και του χειρισμού των τελεστών και των συμβόλων. Γι αυτό προτείνουν την εισαγωγή ενός μαθήματος μετάβασης προς

την απόδειξη που θα περιέχει τα κατάλληλα εργαλεία και τις μεθόδους που θα καταστήσουν το μαθητή ικανό να ανταπεξέλθει στα αποδεικτικά έργα. Όσον αφορά στην πεποίθηση των μαθητών ότι η άτυπη απόδειξη μπορεί να υποκαταστήσει την τυπική, η συντριπτική πλειοψηφία δίνει ως απάντηση την ίδια που αναφέρεται σε όλες τις προηγούμενες μελέτες, ότι δηλαδή οι μαθητές είτε από άγνοια είτε από έλλειψη ικανοτήτων προβαίνουν σε μια τέτοια πράξη. Αντικαθιστούν, δηλαδή, την τυπική απόδειξη με μια μέτρηση ή με ένα γράφημα. Να σημειωθεί ότι το φαινόμενο διατρέχει οριζόντια όλο το φοιτητικό και μαθητικό πληθυσμό αφού ακόμα και φοιτητές Μαθηματικών τμημάτων φαίνεται να υποπίπτουν σε αυτό το σφάλμα.

7.5 Γενικό συμπέρασμα της έρευνας

Το γενικό συμπέρασμα που μπορούμε να εξάγουμε μετά τη μελέτη των συνεντεύξεων σχετίζεται με την συγκεκριμένη άποψη που έχουν οι Έλληνες μαθηματικοί και δάσκαλοι για την απόδειξη και την αποδεικτική διαδικασία. Οι Έλληνες εκπαιδευτικοί δε φαίνεται να διαχωρίζουν την απόδειξη και τα στοιχεία που συνδέονται με αυτήν από τα υπόλοιπα τμήματα του εκπαιδευτικού προγράμματος. Φαίνεται μάλιστα ότι η έλλειψη αποκρυσταλλωμένης ιδέας για την απόδειξη διαχέεται οριζόντια σε όλες τις βαθμίδες και τους κλάδους της εκπαίδευσης με μικρές μόνο διαφοροποιήσεις, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Αν και η μεγάλη σημασία της απόδειξης είναι κοινώς αποδεκτή από τους εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων, φαίνεται να υπάρχουν διαφορετικές απόψεις για τη διδασκαλία της απόδειξης, την κατάλληλη ηλικία για την εισαγωγή στη διδασκαλία καθώς και την αντιμετώπιση και αποδοχή διαφορετικών αποδεικτικών

μεθόδων από τους διδάσκοντες. Θεωρείται σημαντικό να τονιστεί ότι σε πολλούς Μαθηματικούς, και ειδικά σε αυτούς που ασχολούνται με τα Μαθηματικά του Λυκείου, σε σχολείο ή φροντιστήριο, επικρατεί σύγχυση ανάμεσα στην έννοια της απόδειξης και στις σχολικές αποδείξεις. Ταυτίζεται, δηλαδή, η απόδειξη στην επιστήμη των Μαθηματικών με τις αποδείξεις των θεωρημάτων που βρίσκονται στα σχολικά εγχειρίδια με άμεσες συνέπειες στη διδασκαλία του μαθήματος. Οι μέχρι τώρα μελέτες γύρω από την απόδειξη έχουν καταδείξει μερικά σημαντικά στοιχεία. Αρχικά η σπουδαιότητα της είναι τεράστια για τη Μαθηματική επιστήμη αν και βαίνει ελαττωμένη για τη Μαθηματική Β΄ θμια εκπαίδευση. Φαίνεται ότι η απόδειξη διατηρεί το χαρακτήρα της μόνο στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μέσω του οποίου γίνεται η ουσιαστική επαφή του μαθητή με την απόδειξη, στην ηλικία των 14-15 ετών. Ο τρόπος που οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν την απόδειξη διαφοροποιείται ανάλογα με τη βαθμίδα που εργάζονται και παράλληλα διαφοροποιούνται τα στοιχεία στα οποία επικεντρώνουν την προσοχή τους (σαφήνεια, διατύπωση, εικόνα γραπτού). Συναντούμε περιπτώσεις που οι καθηγητές του Λυκείου ή των φροντιστηρίων δέχονται λεκτικές περιγραφές ή γραφικές παραστάσεις, δηλαδή η παρουσία μίας μη τυπικής απόδειξης δεν απορρίπτεται. Οι Μαθηματικοί του Γυμνασίου ισορροπούν ανάμεσα στις δύο τάσεις και για το λόγο αυτό δέχονται και βαθμολογούν με διαφορετικό τρόπο ενώ οι εκπαιδευτικοί της Α΄ θμιας εκπαίδευσης ασχολούνται μόνο με άτυπες αποδείξεις μέσω σχημάτων και περιγραφών.

7.6 Περιορισμοί της έρευνας

Η Μαθηματική Εκπαίδευση στον Ελληνικό χώρο διαφοροποιείται σε πολύ μεγάλο βαθμό από την πλειοψηφία των υπόλοιπων χωρών συγκεκριμένο τομέα γιατί αν και η εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία γίνεται στην ίδια ηλικία, παρουσιάζονται πολύ μεγάλες διαφορές καθώς το εξεταστικό σύστημα στην Ελλάδα υποχρεώνει τους μαθητές να εξετάζονται στην απόδειξη χωρίς όμως να διδάσκονται επαρκώς σε αυτήν. Αυτό το γεγονός υποχρεώνει τους εκπαιδευτικούς, ειδικά αυτούς που είναι επικεντρωμένοι στην προετοιμασία των μαθητών για τις εξετάσεις, διαδικασία πολύ σημαντική για την Ελληνική κοινωνία, να προσπαθούν να υπερκαλύψουν σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα, τα κενά των μαθητών. Επιπλέον, η διαφορετική εκπαίδευση των Μαθηματικών στην Ελλάδα, δίνει διαφορετικά εφόδια σε σχέση με πολλούς διδάσκοντες των Μαθηματικών σε ένα μεγάλο τμήμα της διεθνούς εκπαιδευτικής κοινότητας. Σε πάρα πολλές έρευνες οι συμμετέχοντες είναι εκπαιδευτικοί που απλά έχουν παρακολουθήσει κάποια μαθήματα Μαθηματικών, μέσα στα οποία βλέπουν ακροθιγώς την απόδειξη (Lesseig et al, 2019).

Βιβλιογραφία

- Alcock, L., (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. IN: Hitt, F., Holton, D. and Thompson, P. (eds). *Research in Collegiate Mathematics Education VII*,(pp. 63-92).
- Avigad, J. Mathematical Method and Proof. *Synthese* 153, 105–159 (2006).
<https://doi.org/10.1007/s11229-005-4064-5>
- Aylar, E., & Sahiner, Y. (2014). A Study on Teaching Proof to 7th Grade Students. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 116, 3427-3431.
- Ball, D., Hoyles, C., Jahnke, H., & Movshovitz-Hadar, N., (2002). The Teaching of Proof. *ICM 2002 Vol. III* · 1–3
- Barbeau, E. & Hanna, G. (2008). Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge . *ZDM: the international journal on mathematics education* 40(3):345-353
- Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. (1988). The Effect of Instruction on Spatial Visualization Skills of Middle School Boys and Girls. *American Education Research Journal*, vol. 25 no.1, pp. 51-71, 1988
- Bleiler-Baxter, S.K., & Pair, J.D. (2017). Engaging students in roles of proof. *The Journal of Mathematical Behavior*, (47), (pp.16-34).
- Brown, D., & Michel, S. (2010). Assessing Proofs with Rubrics: The RVF Method. *Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.
- Cutforth, A. (2017). A Transition from Informal to Formal Proofs in K-12 Mathematics. Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Master of Mathematical Sciences in the Graduate School of The Ohio State University .
- Cyr, S. (2010). Development of Beginning Skills in Proving and Proof-Writing by Elementary School Students. *CERME 7*
- David, E. & Zazkis, D. (2019): Characterizing introduction to proof courses: a survey of U.S. R1 and R2 course syllabi, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2019.1574362
- Detlefsen, M. (2008). Proof: Its Nature and Significance. In Bonnie Gold & Roger A. Simmons, *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy* (pp. 3 - 32 (2008). Spectrum.

- Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 711-733. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0091-6>
- De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics* (pp. 205–221). Dordrecht: Springer.
- Dreyfus, T. (2000). Some views on proofs by teachers and mathematicians. In A. Gagatsis (Ed.), *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (Vol. I, pp. 11–25). Nicosia: The University of Cyprus.
- Edwards, L. (1998). Odds and evens: Mathematical reasoning and informal proof among high school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17, 489-504.
- Epp, S.S. (2003). The Role of Logic in Teaching Proof. *The American Mathematical Monthly*, 110, (pp. 886 – 899).
- Fawcett, H. (1938). The Nature of Proof. A Description and Evaluation of Certain Procedures Used in Senior High School to Develop an Understanding of the Nature of Proof. *National Council of Teachers of Mathematics*, Yearbook 13 [1938]. Reprint 1966.
- Godino, J., & Recio, A. (1997). Meaning of proofs in mathematics education. *PME CONFERENCE*. 2. 2-313.
- Guler, G. (2016). The Difficulties Experienced in Teaching Proof to Prospective Mathematics Teachers: Academician Views. *Higher Education Studies*; Vol. 6, No. 1. DOI: 10.5539/hes.v6n1p145
- Gutierrez, A., Pegg, J., & Lawrie, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry. *28th International Conference for the P.M.E.* At: Bergen, Norway Volume: 2, (pp. 511-518)
- Gyory, A., & Konya, E. (2019). Proving skills in geometry of secondary grammar school leavers specialized in mathematics. *Applied Medical Informatics*, 50, 217-236.
- Gunhan, B.C. (2014). A case study on the investigation of reasoning skills in geometry. *South African Journal of Education*, 34, 1-19.
- Hanna, G (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*. (44). (pp 5-23). DOI:10.1023/A:1012737223465.
- Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge.

- Hanna, G., & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM: the international journal on mathematics education*, 40. (pp. 329 -336).
- Harel, G., & Rabin, J. (2010). Teaching Practices Associated with the Authoritative Proof Scheme. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(1), 14-19.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. In F. Lester *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428.
- Heinze, A., & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level— a video study. *ZDM*, 36, (pp. 98-104).
- Hemmi, K. (2006). Approaching Proof in a Community of Mathematical Practice
- Hemmi, K., & Löfwall, C. (2010). *Why do we need proof*. In CERME 6, Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Institut National de Recherche Pédagogique.
- Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A. (in press). Upper secondary school teachers views of proof and proving –an explorative cross-cultural study. Proceedings of MAVI 16, The 16th conference on Mathematical Views, Tallinn, Estonia, June 26-29, 2010
- Herbst, P. (2002). Engaging Students in Proving: A Double Bind on the Teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 176-203.
- Kotelawa, U. (2009). A survey of teacher beliefs on proving. In F.-L.Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. ICMI Study 19 Conference Proceedings* (Vol. 1, pp. 250–255). Taipei: The department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Knipping, C. (2004). Challenges in teaching mathematical reasoning and proof— Introduction. *ZDM* 2004 Vol. 36 (5), (pp. 127-128).
- Knuth, E. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 33(5), 61–82.
- Knuth, E. (2002). Secondary School Mathematics teachers' Conceptions of Proof.

- Journal of Mathematics Teacher Education*, 33(5), 379-405.
- Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *Journal of Mathematical Behavior* 29 (2010) 1–10
- Krantz, S. (2007). The History and Concept of Mathematical Proof . Downloaded from the Internet. <http://www.math.wustl.edu/~sk/eolss.pdf>
- Kunimune, S., Fujita, T., & Jones, K. (2010). Strengthening Student’s Understanding of Proof in Geometry in Lower Secondary School. *Proceedings of CERME 6*.
- Lesseig, K., Hine, G., Na, G.S. *et al.* Perceptions on proof and the teaching of proof: a comparison across preservice secondary teachers in Australia, USA and Korea. *Math Ed Res* **J31**, 393–418 (2019). <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00260-7>
- Lester, K. (1975). Developmental Aspects of Children's Ability to Understand Mathematical Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 6, No.1, (pp. 14-25)
- Maher, C., & Martino, A.M. (1996). The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-Year Case . *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 194-214.
- Mariotti, M. (2006). Proof and proving in mathematics education. Springer US,173-204.
- Maturana, H. (1988). Reality: The Search for Objectivity or the Quest for a Compelling Argument. *The Irish Journal of Psychology*, 1988, 9, 1, 25-82
- Maya, R., & Sumarmo, U. (2011). Mathematical Understanding and Proving Abilities: Experiment With Undergraduate Student By Using Modified Moore Learning Approach. *Journal on Mathematics Education*, 2, 231-250.
- Miller, D.Y., Infante, N., & Weber, K. (2017). How mathematicians assign points to student proofs. *The Journal of Mathematical Behavior*, 49, 24-34.
- Mingus, T. & Grassl, R. (1999). Preservice Teacher Beliefs About Proofs. *School Science and Mathematics*. Volume 99(8), December 1999.
- Otten, S., Bleiler-Baxter, S.K., & Engledow, C. (2017). Authority and whole-class proving in high school geometry: The case of Ms. Finley. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46,112-127.
- Reid, D. (2005). The meaning of proof in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *European research in mathematics education IV Proceedings of CERME 4, San Feliu de Guixols, Spain*. Barcelona:University Ramon Llull.

- Reid, D., &Knipping, C. (2010). Proof in Mathematics Education Research, Learning and Teaching (pp. 35-55). DOI:10.1163/9789460912467
- Reiss, H. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence
- Reyhani, E., Hamidi, F., &Kolahdouz, F. (2012). A study on algebraic proof conception of high school second graders. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 31, (pp. 236-241).
- Samkoff, A. & Weber, K. (2015).Lessons learned from an instructional intervention on proof comprehension. *Journal of Mathematical Behavior* 39 (2015) 28–50
- Savic, M., Mills, M. & Moore, R.C. (2014). Mathematicians' Views on Transition-to-Proof and Advanced Mathematics Courses. In T. Fukawa-Connolly, G. Karakok, K. Keene & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematic Education* (pp.1009-1014). Denver,CO
- Schoenfeld, A.(1994).What do we know about mathematics curricula? *The Journal of Mathematical Behavior*, Volume 13, Issue 1,1994,Pages 55-80,
- Selden, A., & Selden, J. (2007). Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs (Report No. 2007-1). Cookeville: Mathematics Department, Tennessee Technological University.
- Sowder, L., &Harel, G. (1988).Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, Vol. 91, No. 8, (pp. 670-675)
- Stylianides, A. (2007). Proof and Proving in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 2007, Vol. 38, No. 3, 289-321
- Stylianides, A.J., & Stylianides, G.J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 237-253.
- Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006). Students proof schemes: A closer look at what characterizes students proof conceptions. *PME-NA 2006 Proceedings*. Vol.2-54
- Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., Barkai, R. &Tabach, M. (2009). Should proof be minimal?Ms T's evaluation of secondary school students' proofs. *The Journal of Mathematical Behavior*. (28). (pp.58-67).DOI: 10.1016/j.jmathb.2009.04.002.
- Weber, K., Alcock, L. (2004) .Semantic and Syntactic Proof Productions. *Educational Studies in Mathematics*(56),(pp.209–234) doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1

Weber, K. (2002). Beyond Proving and Explaining: Proofs That Justify the Use of Definitions and Axiomatic Structures and Proofs That Illustrate Technique. *For the Learning of Mathematics*, 22(3), 14-17

Zack, V. (1999) Everyday and Mathematical Language in Children's Argumentation about Proof, *Educational Review*, 51:2, 129-146, DOI:10.1080/00131919997579

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

- 1.** Ποια, κατά την άποψη των εκπαιδευτικών, είναι η σημασία της απόδειξης στα Μαθηματικά;
 - 1) Ποια είναι η σημασία της απόδειξης στην εξέλιξη των Μαθηματικών;
 - 2) Ποιοι είναι οι ρόλοι της απόδειξης;
- 2.** Ποια, κατά την άποψη των εκπαιδευτικών, είναι η σημασία της διδασκαλίας της απόδειξης στα Σχολικά Μαθηματικά;
 - 1) Πόσο σημαντική είναι η διδασκαλία της απόδειξης;
 - 2) Σε τι ωφελείται ένας μαθητής μέσω της εξάσκησης στην αποδεικτική διαδικασία στα Μαθηματικά αλλά και σε άλλους γνωστικούς τομείς;
 - 3) Υπάρχει συμβολή στην μελλοντική ανάπτυξη ενός ατόμου μέσω της απόδειξης;
- 3.** Ποιές, κατά την άποψη των εκπαιδευτικών, είναι οι απαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες των μαθητών για την αποδεικτική διαδικασία;
 - 1) Ποια είναι τα στοιχεία της αποδεικτικής διαδικασίας στα οποία επικεντρώνει το ενδιαφέρον του ο εκπαιδευτικός;
 - 2) Γίνονται δεκτές και αν ναι σε ποιο βαθμό λιγότερο τυπικές αποδείξεις;
 - 3) Μέσω ποιων μεθόδων μπορεί να καταστεί πιο ενεργή η εμπλοκή του μαθητή στη μάθηση της αποδεικτικής διαδικασίας;
- 4.** Ποιά, κατά την άποψη των εκπαιδευτικών, είναι η σύνδεση της άτυπης απόδειξης από τις μικρότερες ηλικίες στην τυπική μαθηματική απόδειξη των μεγαλύτερων ηλικιών;
 - 1) Είναι χρήσιμο να υπάρχει μία εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία σε πρώιμο στάδιο;
 - 2) Υπάρχει κενό ανάμεσα στην αποδεικτική διαδικασία σε πρώιμο στάδιο και σε αυτό που απαιτείται στο Λύκειο και στη Γ' θμια εκπαίδευση;
 - 3) Συνηθίζουν οι μαθητές να θεωρούν μία μη τυπική απόδειξη ως ενδεδειγμένη;