ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Α΄ ηλικιακού κύκλου (5-12 χρονών)

Διπλωματική εργασία

Γιατί «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω»; Δοκιμάζοντας μια νέα διδακτική προσέγγιση στη διαίρεση κλασμάτων με ένα πείραμα σχεδιασμού

της

Κόπτση Ιωάννας (Α.Μ. 972)

Θεσσαλονίκη, 2021

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας αυτή την εργασία αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως την επιβλέπουσα καθηγήτρια της μεταπτυχιακής μου εργασίας κυρία Ξένια Βαμβακούση για την αμέριστη συμπαράσταση και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε. Το προσωπικό της ενδιαφέρον και η ανεκτίμητη βοήθειά της συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κυρία Μαρία Καλδρυμίδου και τον κύριο Κωνσταντίνο Χρήστου για τις γνώσεις που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, καθώς και για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους μαθητές που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην έρευνα αυτή, καθώς και τους γονείς τους.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου για την ηθική στήριξη των επιλογών μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη 5
Abstract 6
Εισαγωγή 7
1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 9
1.1 Η διαίρεση και η διαίρεση κλασμάτων 9
1.1.1 Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις: Στοιχεία αναλυτικού νοήματος 9
1.1.2 Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις: Στοιχεία αναφορικού νοήματος 11
1.2 Οι αλγόριθμοι της διαίρεσης 15
1.3 Δυσκολίες με τη διαίρεση κλασμάτων 16
1.4 Θέματα για τη μάθηση και τη διδασκαλία 19
1.5 Διδακτικές προσεγγίσεις των αλγορίθμων της διαίρεσης κλασμάτων 23
1.5.1 «Αλγεβρικές» εξηγήσεις 24
1.5.2 Εξήγηση βασισμένη σε «μοντέλα» 25
1.6 Η διαίρεση κλασμάτων στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια 33
1.6.1 Η διαίρεση κλασμάτων στην Ε΄ τάξη 34
1.6.2 Η διαίρεση κλασμάτων στην ΣΤ΄ τάξη 38
1.7 Μια εναλλακτική προσέγγιση στον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» 42
2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 45
2.1 Ερευνητική μεθοδολογία και ερευνητικά ερωτήματα 45
2.2 Συμμετέχοντες 46
2.3 Διαδικασία 47
2.4 Ερευνητικά εργαλεία 48
2.5 Σχεδιασμός της παρέμβασης 52
3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 64
3.1 Φάση Α και Φάση Γ 64
3.2 Φάση Β: Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης 73
3.3 Κεντρικά θέματα – Αναστοχασμός 102
3.3.1 «Δε θέλω να εξηγήσω, να υπολογίσω θέλω» 103
3.3.2 Ελλιπείς γνώσεις, παρανοήσεις και εννοιολογικές δυσκολίες για τα κλάσματα. 104
3.3.3 Ομοιότητες και διαφορές των παιδιών 106
3.3.4 Ευνοϊκές και μη ευνοϊκές συνιστώσες του σχεδιασμού 107

3.3.5 Στοιχεία της μαθησιακής πορείας των μαθητών 108
4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.. 112
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 119
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.. 125

Περίληψη

Η παρούσα εργασία σκοπό έχει τη δημιουργία ενός προγράμματος που περιλαμβάνει μια δομημένη ακολουθία δραστηριοτήτων που στοχεύει στην υποστήριξη μαθητών Στ΄ Δημοτικού για την κατανόηση της διαίρεσης κλασμάτων και του αλγόριθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στη σύνδεση της διαίρεσης με τη μέτρηση μεγεθών, συγκεκριμένα, μήκους έτσι ώστε να υποστηριχτεί το μοντέλο της διαίρεσης μέτρησης και να αξιοποιηθεί η αρχή της «αντιστάθμισης» στη μέτρηση μεγεθών για να αποδοθεί νόημα στον εν λόγω αλγόριθμο. Η εργασία εντάσσεται σε μια έρευνα σχεδιασμού που περιλαμβάνει το σχεδιασμό της ακολουθίας δραστηριοτήτων, διερευνητική διδασκαλία, αναστοχασμό και προτάσεις επανασχεδιασμού της ακολουθίας. Το εμπειρικό μέρος της έρευνας αποτελείται από τρεις φάσεις. Στη Φάση Α διερευνάται η κατανόηση των παιδιών για τη διαίρεση κλασμάτων, στη Φάση Β πραγματοποιείται διερευνητική διδασκαλία με βάση την ακολουθία δραστηριοτήτων και στη Φάση Γ αξιολογούνται τα μαθησιακά αποτελέσματα. Το πρόγραμμα δοκιμάστηκε σε τέσσερις μαθητές της Στ΄ Δημοτικού. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω ατομικών βιντεοσκοπημένων συνεντεύξεων. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, οι μαθητές είχαν αρχικά εξαιρετικά περιορισμένη προϋπάρχουσα γνώση και κατανόηση για τη διαίρεση κλασμάτων. Η συμμετοχή τους στο πρόγραμμα τους υποστήριξε να αποδώσουν νόημα στη διαίρεση κλασμάτων, να εκτελούν και να εξηγούν τον αλγόριθμο της διαίρεσης και βελτίωσε την ικανότητά τους να αναγνωρίζουν προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων. Οι δυσκολίες των μαθητών και η αλληλεπίδρασή τους με τις δραστηριότητες και το υλικό τους αναλύονται και αξιοποιούνται για προτάσεις επανασχεδιασμού για έναν ενδεχόμενο 2ο κύκλο εφαρμογής.

Λέξεις κλειδιά: διαίρεση κλασμάτων, «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», μοντέλο μέτρησης

Abstract

This paper reports a topic-specific design research study. The purpose of the study was to design an instructional sequence aiming at supporting primary school students to understand division of fractions and the "flip and multiply" algorithm. The instructional approach is based on mapping division to measurement of quantities, in particular, length, in order to support students to discern the measurement model of division; and to employ the “compensatory principle” in measurement to make sense of this particular algorithm. The empirical part of the study had three phases: In Phase A, students’ initial understandings of fraction division was tested; in Phase B the instructional sequence was enacted; and in Phase C students’ learning gains were evaluated. Four 6th graders participated individually and data was collected via video recording. Initially the students had extremely limited knowledge of fraction division. Participating in the enactment of the sequence supported them to assign the measurement meaning to division; to perform and explain the “flip-and-multiply” algorithm; and to recognize fraction division problems. Students’ conceptual difficulties and ways of interacting with the instructional sequence and its materials are analysed with a view to re-design the program.

Key words: fraction division, “flip and multiply”, measurement model

Εισαγωγή

Η διαίρεση είναι η πιο δύσκολη πράξη και οι ρητοί οι πιο περίπλοκοι αριθμοί που συναντούν οι μαθητές μέχρι τη Στ΄ Δημοτικού, γεγονός που κάνει τη διαίρεση των ρητών αριθμών το πιο δύσκολο μαθηματικό αντικείμενο για εκπαιδευτικούς και μαθητές στα σχολικά μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Ma, 1999). Ο αλγόριθμος της διαίρεσης των κλασμάτων «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» είναι για τους μαθητές ένας από τους πιο μυστηριώδεις κανόνες των στοιχειωδών μαθηματικών. Οι μαθητές τον μαθαίνουν μηχανικά και είναι ο λιγότερο κατανοητός κανόνας (Bulgar, 2003; Ma, 1999; Sharp & Adams, 2002; Tirosh, 2000; Van de Walle, 2005; Yim, 2010).

Μαθητές και εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν δυσκολίες και κάνουν λάθη, είτε στον αλγόριθμο εξαιτίας της αποστήθισής του, ακολουθώντας σειρά βημάτων στα οποία δεν αποδίδουν κανένα νόημα (Ma, 1999; Tirosh, 2000) είτε λόγω διαισθητικών μοντέλων για τη διαίρεση τα οποία τους περιορίζουν στο να κατανοήσουν τη διαίρεση κλασμάτων και να ανταποκριθούν σε λεκτικά προβλήματα (Tirosh, 2000). Σύμφωνα με τους Fischbein, Deri, Nello και Marino (1985) το κυρίαρχο διαισθητικό μοντέλο στη διαίρεση είναι αυτό του μερισμού, σύμφωνα με το οποίο α : β σημαίνει μοιράζω το α σε ίσες β ομάδες. Αυτές οι καταστάσεις είναι οι πρώτες που αναγνωρίζουν οι μαθητές ως διαίρεση. Όμως, αυτό το μοντέλο χτίζεται στους φυσικούς αριθμούς και σταματά να έχει νόημα στους κλασματικούς αριθμούς γεγονός που προκαλεί δυσκολίες.

Λόγω των παραπάνω δυσκολιών που εντοπίζονται σε μαθητές, αλλά και σε εκπαιδευτικούς, το ενδιαφέρον της μαθηματικής εκπαίδευσης στρέφεται προς τους τρόπους που μπορούν να εξηγηθούν οι αλγόριθμοι της διαίρεσης κλασμάτων. Οι προτεινόμενες εξηγήσεις μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες: α) στις «αλγεβρικές», οι οποίες βασίζονται στο αναλυτικό νόημα των εμπλεκόμενων αριθμών και πράξεων (Chabe, 1963, στο Li, 2008; Fredua-Kwarteng & Ahia, 2006; Li, 2008; Ma, 1999; Novillis, 1979; Stohlman, 2006; Tirosh, 2000; Zembat, 2015) και β) σε αυτές που βασίζονται στο αναφορικό νόημα των εμπλεκόμενων αριθμών και πράξεων, χρησιμοποιώντας μοντέλα (Adu-Gyamfi, Schwartz, Sinicrope & Bosse, 2019; Cavey και Kinzel, 2014; Ervin, 2017; Gregg και Gregg, 2007; Kribs-Zaleta, 2006; Zembat, 2015).

Οι «αλγεβρικές» εξηγήσεις αφορούν κατά κύριο λόγο τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» και βασίζονται σε μετασχηματισμούς της αρχικής παράστασης ($\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$), μέχρι να φτάσει στην επιθυμητή μορφή ($\frac{\alpha}{\beta}\ x \frac{\delta}{\gamma}$).

Οι εξηγήσεις που αφορούν μοντέλα, χρησιμοποιούν καταστάσεις μέτρησης και μοντέλα, είτε επιφάνειας είτε μήκους για να εξηγήσουν τον αλγόριθμο του «κοινού παρονομαστή» (Adu- Gyamfi et al., 2019; Gregg και Gregg, 2007; Zembat, 2015). Όσον αφορά τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», η συντριπτική πλειοψηφία των διδακτικών προσεγγίσεων βασίζεται στην αξιοποίηση του μοντέλου της «διαίρεσης μερισμού» και μοντέλα επιφάνειας (Gregg & Gregg, 2007; Kribs-Zaleta, 2006; Van de Walle, 2005). Έχουν γίνει κάποιες απόπειρες εξήγησης του αλγόριθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» μέσω του μοντέλου μέτρησης (Cavey & Kinzel, 2014; Ervin, 2017) και μοντέλων μήκους και επιφάνειας.

Η παρούσα έρευνα μέσα από συνεντεύξεις βασισμένες σε έργα σε μαθητές Στ΄ τάξης στοχεύει στην κατανόηση της διαίρεσης κλασμάτων και στην εξήγηση του αλγόριθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Σχεδιάστηκε μια δομημένη ακολουθία δραστηριοτήτων η οποία βασίστηκε στη σύνδεση της διαίρεσης μέτρησης με τη μέτρηση μεγεθών, συγκεκριμένα του μήκους, ώστε να υποστηριχτεί το μοντέλο της μέτρησης και να μεταφερθεί η αρχή της «αντιστάθμισης» από το πλαίσιο της μέτρησης, στο πλαίσιο της διαίρεσης .

Η παρούσα εργασία αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται βιβλιογραφική ανασκόπηση για τη διαίρεση κλασμάτων (νόημα διαίρεσης, αλγόριθμοι διαίρεσης κλασμάτων, δυσκολίες, προτάσεις εξήγησης, παρουσίαση της έννοιας στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια) στην οποία βασίστηκε ο σχεδιασμός της έρευνας. Στο τέλος του πρώτου κεφαλαίου παρουσιάζεται μια εναλλακτική προσέγγιση στον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται η μεθοδολογία της έρευνας και παρουσιάζεται αναλυτικά ο σχεδιασμός της ακολουθίας δραστηριοτήτων. Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύονται διεξοδικά τα αποτελέσματα της έρευνας και στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσονται τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε. Στο τέλος, η εργασία συνοδεύεται από το παράρτημα στο οποίο περιέχεται το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε για τον έλεγχο των γνώσεων των μαθητών πριν και μετά το πρόγραμμα δραστηριοτήτων, καθώς και η δομημένη ακολουθία δραστηριοτήτων όπως δόθηκε στους μαθητές.

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Η διαίρεση και η διαίρεση κλασμάτων

Στα σχολικά μαθηματικά, η διαίρεση είναι μια από τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις οι οποίες εισάγονται στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών και, στη συνέχεια, επεκτείνονται στο πλαίσιο των ρητών (είτε σε κλασματική, είτε σε δεκαδική μορφή).

Η διαίρεση μπορεί να εξεταστεί σε καθαρά αριθμητικό πλαίσιο, ως πράξη μεταξύ αριθμών (αναλυτικό νόημα), ή ως μοντέλο καταστάσεων στις οποίες οι αριθμοί αναφέρονται σε ποσότητες και σχέσεις ποσοτήτων (Greer, 1992). Από την πρώτη οπτική, η διαίρεση μπορεί να πάρει νόημα σε σύνδεση με άλλες πράξεις, για παράδειγμα η διαίρεση ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση, ή η διαίρεση ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού, με τη δεύτερη να αποτελεί κεντρικό ζήτημα της παρούσας εργασίας. Από τη δεύτερη οπτική, η διαίρεση παίρνει νόημα μέσω της σύνδεσή της με μια πληθώρα καταστάσεων, με την κατάσταση της «δίκαιης μοιρασιάς» να αποτελεί το πιο σύνηθες παράδειγμα. Και υπό αυτό το πρίσμα, η σχέση της διαίρεσης με τον πολλαπλασιασμό έχει προεξάρχουσα σημασία.

Στα παρακάτω εστιάζουμε στη σχέση μεταξύ της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού, εξετάζοντάς την ως προς το αναλυτικό και ως προς το αναφορικό της νόημα.

1.1.1 Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις: Στοιχεία αναλυτικού νοήματος

Στα σχολικά μαθηματικά, η αντίστροφη σχέση μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μπορεί να εκφραστεί ως εξής: «Όταν πολλαπλασιάζω έναν αριθμό α με το $\beta \neq 0$ και μετά τον διαιρώ με το β, ο αριθμός α δεν αλλάζει», αλλιώς, $\alpha \times \beta : \beta = \alpha$. Παρόμοια και με τη διατύπωση «όταν διαιρώ έναν αριθμώ α με το $\beta \neq 0$ και μετά τον πολλαπλασιάζω με το β, ο αριθμός α δεν αλλάζει», αλλιώς $\alpha : \beta \times \beta = \alpha$.

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[d, bend left=60, "\mathrm{x}\ \beta"] \\ \alpha \ \mathrm{x}\ \beta \arrow[u, bend left=60, ":\beta"] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \alpha \arrow[d, bend left=60, ":\beta"] \\ \alpha : \beta \arrow[u, bend left=60, "\mathrm{x}\ \beta"] \end{tikzcd}$$

Η έκφραση αυτή είναι γνωστή ως «αρχή της αντιστροφής», αποτελεί εργαλείο για την απλοποίηση σύνθετων υπολογισμών, τόσο με συγκεκριμένους, όσο και με γενικευμένους αριθμούς, και θεωρείται ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης των δύο πράξεων (Robinson & Lefevre, 2012). Η αρχή της αντιστροφής βασίζεται στο γεγονός ότι β:β=1 και στο δεδομένο ότι α x 1 = 1 x α = α και ισχύει τόσο στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών, όσο και σε αυτό των ρητών. Με το πέρασμα από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς, καθίσταται δυνατός ο ορισμός του αντίστροφου αριθμού του β ($\frac{1}{\beta}$ ή β^{-1}) για τον οποίο ισχύει ότι β x $\frac{1}{\beta}$ =1. Η παραπάνω έκφραση της αρχής της αντιστροφής μπορεί τότε να μετατραπεί σε α x β x $\frac{1}{\beta}$ =α.

Ωστόσο, η εισαγωγή του αντίστροφου αριθμού έχει βαθύτερες επιπτώσεις για την πράξη της διαίρεσης και τη σχέση της με τον πολλαπλασιασμό, από την απλή αυτή μετατροπή: η εισαγωγή του αντίστροφου αριθμού καθιστά την πράξη της διαίρεσης πλεονάζουσα, καθώς η διαίρεση με το β μπορεί να αντικατασταθεί από τον πολλαπλασιασμό με το $\frac{1}{\beta}$ (α : β = α x $\frac{1}{\beta}$). Πράγματι, από την άποψη των ανώτερων μαθηματικών, μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού (και της πρόσθεσης) είναι απαραίτητες για να οριστούν οι συνήθεις αλγεβρικές δομές στους ρητούς και τους πραγματικούς, καθώς η διαίρεση αναπληρώνεται από τον πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο και, αντίστοιχα, η αφαίρεση από την πρόσθεση του αντίθετου. Η «διπλή» αυτή αντιστροφή (Chabe, 1963 στο Li, 2008), δηλαδή η αντικατάσταση της διαίρεσης με την αντίστροφη πράξη και η αντικατάσταση του β με τον αντίστροφο του β, αποτελεί και τη βάση του συνήθους αλγόριθμου για τη διαίρεση κλασμάτων («αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω»).

Μια διαφορετική έκφραση της σχέσης μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι η εξής: Οι σχέσεις α x β = γ, α = γ : β και β = γ : α είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. Με δεδομένη οποιαδήποτε από τις δύο τελευταίες σχέσεις, το πέρασμα στην πρώτη είναι άμεσο, βάσει της «αρχής της αντιστροφής» όπως διατυπώθηκε παραπάνω. Με δεδομένη την πρώτη σχέση, όμως, το πέρασμα σε οποιαδήποτε από τις δύο άλλες σχέσεις υποκρύπτει μια επιλογή ως προς το ρόλο που παίζουν τα α και β στο γινόμενο α x β. Αν το α έχει τη θέση του πολλαπλασιαστή, τότε γίνεται διαιρέτης και προκύπτει η τρίτη σχέση (β = γ : α). Αν, αντίθετα, τον ρόλο του πολλαπλασιαστή έχει το β, τότε γίνεται το β διαιρέτης και προκύπτει η δεύτερη σχέση (α = γ : β).

Σε αριθμητικό πλαίσιο και δεδομένης της αντιμεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού, η παραπάνω παρατήρηση δεν έχει ιδιαίτερες συνέπειες. Όταν, όμως, οι αριθμοί και συνακόλουθα οι πράξεις έχουν αναφορικό νόημα, τότε υπάρχουν ουσιαστικές διαφοροποιήσεις.

1.1.2 Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις: Στοιχεία αναφορικού νοήματος

Μια αριθμητική πρόταση της μορφής α x β = γ και οι ισοδύναμές της μπορεί να μοντελοποιεί μεγάλη ποικιλία καταστάσεων με σημαντικές σημασιολογικές διαφορές. Ο Greer (1992) αναφέρεται σε διαφορετικές προτεινόμενες κατηγοριοποιήσεις τέτοιων καταστάσεων από διάφορους ερευνητές, και παρουσιάζει μια λεπτομερή δική του κατηγοριοποίηση, στην οποία δίνει ιδιαίτερη σημασία στο είδος των ποσοτήτων (διακριτές/συνεχείς) και στο είδος των αριθμών (φυσικοί/ρητοί) που εμπλέκονται σε κάθε κατάσταση. Επιπλέον, κάνει μια διάκριση (Greer, 2012) η οποία είναι σημαντική για την παρούσα εργασία. Συγκεκριμένα, διακρίνει τις καταστάσεις σε «συμμετρικές» και «ασυμμετρικές», με κριτήριο το αν οι εμπλεκόμενες ποσότητες έχουν ανταλλάξιμους ρόλους (πολλαπλασιαστής, πολλαπλασιαστέος) στο γινόμενο α x β, ή όχι. Παράδειγμα συμμετρικής κατάστασης είναι αυτή που είναι γνωστή ως «εμβαδόν ορθογωνίου» και η γενίκευσή της «γινόμενο μέτρων» (product of measures) ή «γινόμενο παραγόντων» (product-factors) (Ma, 1999; Sinicrope, Mick & Kolb, 2002, στο Yim, 2010). Στον γνωστό τύπο που εκφράζει το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου ως το γινόμενο των μηκών των δύο διαδοχικών πλευρών του, δεν έχει σημασία (και, ίσως, νόημα) να εξεταστεί το μήκος ποιας πλευράς έχει τον ρόλο του πολλαπλασιαστή ή του πολλαπλασιαστέου.

Αντίθετα, υπάρχουν καταστάσεις, όπως αυτή του τύπου «ισοπληθείς ομάδες» (equal groups), στις οποίες οι εμπλεκόμενες ποσότητες έχουν διακριτό ρόλο. Για παράδειγμα, στην κατάσταση «Η δασκάλα είχε 20 μαρκαδόρους και έδωσε από 4 στο καθένα από τα 5 παιδιά μιας ομάδας», οι εμπλεκόμενες ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους με την εξής σχέση: 5 παιδιά x 4 μαρκαδόροι/παιδί = 20 μαρκαδόροι. Στη σχέση αυτή, η πρώτη ποσότητα λειτουργεί ως πολλαπλασιαστής (δείχνει πόσες φορές πρέπει να επαναληφθεί η δεύτερη ποσότητα), ενώ η δεύτερη ως πολλαπλασιαστέος (είναι η ποσότητα που επαναλαμβάνεται).

Από την κατάσταση αυτή προκύπτουν τρία διαφορετικά προβλήματα, ανάλογα με τα δεδομένα και το ζητούμενο, τα οποία αντιστοιχούν σε μία από τις τρεις ισοδύναμες σχέσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω ($\alpha \times \beta = \gamma$, $\alpha = \gamma : \beta$, $\beta = \gamma : \alpha$):

α. Η δασκάλα έδωσε από 4 μαρκαδόρους σε καθένα από τα 5 παιδιά μιας ομάδας. Πόσους μαρκαδόρους τους έδωσε συνολικά;
β. Η δασκάλα είχε 20 μαρκαδόρους και τους μοίρασε δίκαια στα παιδιά μιας ομάδας. Κάθε παιδί πήρε 4 μαρκαδόρους. Πόσα ήταν τα παιδιά της ομάδας;
γ. Η δασκάλα είχε 20 μαρκαδόρους και τους μοίρασε δίκαια στα 5 παιδιά της ομάδας. Πόσους μαρκαδόρους πήρε το κάθε παιδί;

Τα προβλήματα αυτά, γνωστά και ως «αντίστροφα προβλήματα» αντιστοιχούν σε ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού (α: $5 \times 4 = 20$) και δύο προβλήματα διαίρεσης (β: $20:4=5$ και γ: $20 : 5 = 4$). Τα δύο προβλήματα διαίρεσης αντιστοιχούν σε διαφορετικά νοήματα για τη διαίρεση, αυτό της διαίρεσης μέτρησης (β) και αυτό της διαίρεσης μερισμού (γ).

Πιο αναλυτικά, στο πρόβλημα (β) ο πολλαπλασιαστέος γίνεται διαιρέτης και μετριέται «πόσες φορές χωράει» ο πολλαπλασιαστέος στο γινόμενο ενώ στο πρόβλημα (γ), ο πολλαπλασιαστής γίνεται διαιρέτης και το γινόμενο διαμερίζεται σε όσα ίσα μέρη υποδεικνύονται από αυτόν.

Συμπλέκοντας το αναφορικό με το αναλυτικό νόημα της διαίρεσης, μπορούν να διακριθούν δύο διαφορετικά νοήματα μιας διαίρεσης όπως $8 : 2$, αυτό του μερισμού («ισομερίζω το 8 σε 2 μέρη») και αυτό της μέτρησης («μετράω πόσα 2άρια υπάρχουν στο 8»).

Το δεύτερο νόημα μεταφέρεται και στην περίπτωση της διαίρεσης κλασμάτων, ενώ το πρώτο μόνο υπό συνθήκες. Σύμφωνα με τη Bulgar (2009) για να μπορέσει επιτυχημένα να αντιμετωπιστεί η διαίρεση στα κλάσματα πρέπει να είναι οικείο το μοντέλο της διαίρεσης μέτρησης, κατά το οποίο α : β σημαίνει μετράω το α με μονάδα μέτρησης το β. Στους ρητούς αριθμούς η πιο ταιριαστή κατάσταση που εμπίπτει στο μοντέλο της διαίρεσης μερισμού είναι να είναι ρητός αριθμός ο διαιρετέος και φυσικός αριθμός ο διαιρέτης (Bulgar, 2009; Roche & Clark, 2013; Sinicrope, Mick & Kolb, 2002 στο Adu-Gyamfi et al., 2019).

Ωστόσο, πολλοί ερευνητές ονομάζουν ως «διαίρεσης μερισμού» καταστάσεις στις οποίες είναι γνωστό το μερίδιο και ζητείται η αρχική ποσότητα (Gregg & Gregg, 2007; Kribs-Zaleta, 2006; Li, 2008; Lo & Luo, 2012; Ma, 1999; Noparit & Saengpun, 2013; Ott, Snook et Gibson, 1991; Siebert στο Yim, 2010; Van de Walle, 2005).

Οι Gregg and Gregg (2007) σε έρευνα που πραγματοποίησαν χρησιμοποίησαν την εξής κατάσταση ως κατάσταση μερισμού:

«Έχω $\frac{3}{4}$ *ενός ολόκληρου κέικ. Θέλω να τα μοιράσω ίσα σε 2 δοχεία. Πόσο κέικ θα μπει σε κάθε δοχείο;»*

«Έχω $\frac{3}{4}$ *ενός ολόκληρου κέικ. Γεμίζουν ακριβώς το* $\frac{1}{2}$ *του δοχείου μου. Πόσο κέικ χωράει σε 1 δοχείο;»*

Οι ερευνητές υποστηρίζουν πως και στις δυο καταστάσεις υπάρχει μια συγκεκριμένη ποσότητα κέικ που τοποθετείται σε έναν συγκεκριμένο χώρο και πρέπει να βρεθεί η ποσότητα που τοποθετείται στο 1 δοχείο.

$$\frac{\frac{3}{4}\,κέικ}{2\ δοχεία} = \frac{ποσότητα\ κέικ}{δοχείο}$$

$$\frac{\frac{3}{4}\,κέικ}{\frac{1}{2}\,δοχείο} = \frac{ποσότητα\ κέικ}{δοχείο}$$

Ο Kribs-Zaleta (2006) σε έρευνά του δηλώνει πως η κατάσταση που χρησιμοποιεί είναι κατάσταση μερισμού.

«Έχεις $1\frac{1}{2}$ *πορτοκάλι, αν αυτό αποτελεί τα* $\frac{3}{5}$ *της μερίδας ενός ενήλικα, πόσα πορτοκάλια είναι η 1 μερίδα;»*

Ο Ott και οι συνεργάτες του (1991) σε έρευνά τους αναφέρουν ακριβώς ίδια κατάσταση ως κατάσταση μερισμού. Είναι γνωστό το μερίδιο και ζητείται ολόκληρη η ποσότητα.

Παρόμοια, οι Lo and Luo (2012) στο ερευνητικό τους εργαλείο συμπεριέλαβαν το λεκτικό πρόβλημα *«Ο Τζιμ έτρεξε* $1\frac{1}{2}$ *μίλια και αυτό αποτελεί τα* $\frac{3}{8}$ *του εβδομαδιαίου του στόχου. Ποιος είναι ο στόχος του;».* Θεωρούν πως όσοι εκτέλεσαν την πράξη «$1\frac{1}{2} : \frac{3}{8}$» προσέγγισαν την κατάσταση ως μερισμό αφού είναι γνωστό το μερίδιο και ζητείται ολόκληρη η ποσότητα.

Η Ma (1999) συμφωνεί με τους προηγούμενους ερευνητές και το λεκτικό πρόβλημα *«το μισό μήκος ενός σχοινιού είναι* $1\frac{3}{4}$ *πόδια, πόσο μήκος έχει όλο το σκοινί;»* το θεωρεί κατάσταση μερισμού.

Πρέπει να επισημανθεί, ωστόσο, ότι, παρά το γεγονός ότι αυτές οι καταστάσεις έχουν την ίδια δομή με τις καταστάσεις ισομερισμού όπου ο διαιρέτης είναι φυσικός αριθμός, το νόημα της διαίρεσης ως ισομερισμός («μοιράζω τον διαιρετέο σε όσα ίσα μέρη δηλώνει ο διαιρέτης») δεν παραμένει το ίδιο (τι θα σήμαινε, π.χ. «μοιράζω το 8 σε $\frac{1}{2}$ ίσα μέρη»;). Στις συγκεκριμένες καταστάσεις ο διαιρετέος δεν ισομερίζεται στον διαιρέτη αλλά σε όσα μέρη ορίζει ο αριθμητής του διαιρέτη και χρειάζεται η επανάληψη της κλασματικής μονάδας για να βρεθεί ολόκληρη η ποσότητα. Αν η κατάσταση προσεγγιστεί αλγεβρικά, για παράδειγμα, στην κατάσταση των Lo και Luo (2008) $\frac{3}{8}\ x\ \chi = 1\frac{1}{2}$ προκύπτει η διαίρεση $\chi = 1\frac{1}{2} : \frac{3}{8}$, αλλά με βάση όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για τον μερισμό δεν εμπίπτει σε αυτή την κατηγορία.

Πιο ακριβής είναι η ανάλυση του Greer (1992), ο οποίος περνώντας από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς δε χρησιμοποιεί τους όρους διαίρεση μερισμού και μέτρησης αλλά διαίρεση με τον πολλαπλασιαστή και τον πολλαπλασιαστέο, αντίστοιχα. Καταστάσεις σαν αυτές που αναφέρθηκαν παραπάνω είναι καταστάσεις διαίρεσης με τον πολλαπλασιαστή.

Συμπερασματικά, κατά τη μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς, στοιχεία του αναλυτικού (π.χ., η σχέση της με τον πολλαπλασιασμό), αλλά και του αναφορικού νοήματος της διαίρεσης (π.χ., το νόημα της διαίρεσης μερισμού, όταν ο διαιρέτης είναι κλασματικός αριθμός μικρότερος της μονάδας) μεταβάλλονται. Το γεγονός αυτό έχει σημασία από μαθησιακή και διδακτική πλευρά και θα επανατεθεί στη συνέχεια.

1.2 Οι αλγόριθμοι της διαίρεσης

Δύο είναι οι βασικοί αλγόριθμοι για τη διαίρεση των κλασμάτων, γνωστοί ως «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» και «κοινού παρονομαστή» (Ervin, 2017; Gregg & Gregg, 2007; Petit, Laird & Marsden, 2010 στο Lamberg & Wiest, 2015; Sharp & Adams, 2002; Van de Walle, 2005; Yim, 2010).

Ο αλγόριθμος «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» είναι αυτός που χρησιμοποιείται ευρέως γιατί είναι πιο γρήγορος και ταιριάζει σε όλες τις περιπτώσεις. Αυτό που πρέπει να κάνει ο μαθητής είναι να αντιστρέψει τους όρους του διαιρέτη και να πολλαπλασιάσει με τον διαιρετέο. Ο αλγόριθμος του «κοινού παρονομαστή» απαιτεί πρώτα μετατροπή των δύο κλασμάτων σε ομώνυμα και μετά διαίρεση των αριθμητών. Δημιουργείται, όμως, δυσκολία όταν οι δυο αριθμητές δε διαιρούνται ακριβώς.

Σύμφωνα με τους Gregg και Gregg (2007) και Van de Walle (2005) οι δύο αυτοί αλγόριθμοι συνδέονται με διαφορετικές καταστάσεις. Ο αλγόριθμος του «κοινού παρονομαστή» συνδέεται με καταστάσεις μέτρησης ενώ ο αλγόριθμος «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» συνδέεται με τις καταστάσεις, τις οποίες θεωρούν, μερισμού. Έχει υποστηριχθεί ότι ο αλγόριθμος «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» απαιτεί αλγεβρική προσέγγιση και βασίζεται στη σχέση του πολλαπλασιασμού με τη διαίρεση, ενώ ο αλγόριθμος του «κοινού παρονομαστή» βασίζεται στην πρότερη γνώση των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς (Sharp & Adams, 2002). Ο αλγόριθμος του «κοινού παρονομαστή» βασίζεται στην έννοια της μέτρησης, από τη στιγμή που κάθε αριθμός εκφράζεται με τη μορφή του ίδιου κλασματικού μέρους, το όνομα του κλασματικού μέρους δεν έχει καμία σημασία και η διαίρεση αφορά μόνο τη διαίρεση των αριθμητών (Van de Walle, 2005; Yim, 2010).

1.3 Δυσκολίες με τη διαίρεση κλασμάτων

Η διαίρεση είναι η πιο δύσκολη πράξη και οι ρητοί οι πιο περίπλοκοι αριθμοί, γεγονός που κάνει τη διαίρεση των ρητών αριθμών το πιο δύσκολο μαθηματικό αντικείμενο για εκπαιδευτικούς και μαθητές στα σχολικά μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Ma, 1999). Ο αλγόριθμός της διαίρεσης των κλασμάτων «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» είναι για τους μαθητές ένας από τους πιο μυστηριώδεις κανόνες των στοιχειωδών μαθηματικών. Οι μαθητές τον μαθαίνουν μηχανικά και είναι ο λιγότερο κατανοητός κανόνας (Bulgar, 2003; Ma, 1999; Sharp & Adams, 2002; Tirosh, 2000; Van de Walle, 2005; Yim, 2010).

Οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν και οι ίδιοι δυσκολίες και παρατηρείται το θέμα να απασχολεί την έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης τις τελευταίες δεκαετίες (Fischbein et al., 1985; Koichu, 2012; Ma, 1999; Tirosh, 2000). Τα αποτελέσματά τους τονίζουν την έλλειψη εννοιολογικής γνώσης θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών (Borko et al., 1992 στο Sharp & Adams, 2002; Bulgar, 2009; Koichu, 2012; Ma, 1999).

Η Ma (1999) μέσα από την έρευνα της παρατηρεί ότι μόνο το 43% των Αμερικανών δασκάλων που συμμετείχαν στην έρευνα μπόρεσε να υπολογίσει σωστά το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης κλασμάτων και όλοι οι Αμερικανοί δάσκαλοι απέτυχαν στη διατύπωση ενός κατάλληλου προβλήματος που να λύνεται με διαίρεση κλασμάτων, εκτός από έναν που κατασκεύασε ένα πρόβλημα που να λύνεται με διαίρεση κλασμάτων αλλά δεν ήταν παιδαγωγικά ορθό.

Πιο συγκεκριμένα, στην έρευνά της, καθώς οι εκπαιδευτικοί καλούνται να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα που λύνεται με την πράξη $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$, η πλειοψηφία των δασκάλων θέτει ένα πρόβλημα που λύνεται με την πράξη $1\frac{3}{4}:2$, θεωρώντας το ίδιο τη διαίρεση με την κλασματική μονάδα με τη διαίρεση με τον παρονομαστή της κλασματικής μονάδας.

Επίσης, μεγάλο ποσοστό θέτει ένα πρόβλημα που λύνεται με πολλαπλασιασμό $1\frac{3}{4}x\frac{1}{2}$, μπερδεύοντας τη διαίρεση με την κλασματική μονάδα με τον πολλαπλασιασμό με την κλασματική μονάδα, γεγονός που συμβαίνει και στην έρευνα του Simon (1993, στο Lo & Luo, 2012).

Παρόμοια, ο Koichu και οι συνεργάτες του (2012) διαπιστώνουν ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δεν έχουν ευχέρεια στην κατασκευή προβλημάτων με διαίρεση κλασμάτων. Αποδίδουν την αποτυχία των εκπαιδευτικών α) στην έλλειψη «ποσοτικού συντονισμού» (*quantitative coordination*) και β) στη χρήση της απάντησης ως σημείου αναφοράς (*answer as a reference point*). Το πρώτο αφορά τη δυσκολία των εκπαιδευτικών να αντιληφθούν τα κλάσματα ως (αριθμητικές) ποσότητες, καθώς τα αντιμετωπίζουν ως διαιρέσεις που πρέπει να εκτελεστούν. Θεωρούν πως να βλέπεις τα κλάσματα ως διαιρέσεις απαιτεί πρώτα να δώσεις κάποιο νόημα στα ίδια τα κλάσματα και μετά να δώσεις κάποιο νόημα στη διαίρεση στην οποία τα κλάσματα εμπλέκονται. Έτσι, οι εκπαιδευτικοί οι οποίοι έχουν έλλειψη «ποσοτικού συντονισμού» αποτυγχάνουν να φτιάξουν κατάλληλο πρόβλημα. Το δεύτερο αναφέρεται στη στρατηγική των εκπαιδευτικών να εκκινούν από το αποτέλεσμα που περιμένουν και στη συνέχεια να κατασκευάζουν το πρόβλημα. Υπολογίζοντας ότι το πηλίκο σε μία διαίρεση με έναν κλασματικό διαιρέτη, μικρότερο από τη μονάδα, είναι μεγαλύτερο από τον διαιρετέο και με βάση τους περιορισμούς που αναφέρθηκαν στα πρωταρχικά μοντέλα του Fiscbein και των συνεργατών του (1985), δεν μπορούν να συνδέσουν με την πραγματικότητα μια τέτοια πράξη και να φτιάξουν ένα κατάλληλο πρόβλημα.

Η διαίρεση κλασμάτων και οι αλγόριθμοί της προκαλούν, όπως είναι αναμενόμενο, μεγάλες δυσκολίες και στους μαθητές. Η Tirosh (2000) κατηγοριοποίησε τα λάθη που κάνουν οι μαθητές σε τρεις κατηγορίες με βάση διαφορετικές εξηγήσεις για την αιτία τους, οι οποίες φαίνεται να αφορούν και τους εκπαιδευτικούς. Συγκεκριμένα, η Tirosh (2000) διέκρινε τις εξής κατηγορίες.

α. Λάθη που βασίζονται στον αλγόριθμο: σε αυτήν την κατηγορία συμπεριλαμβάνονται λάθη που γίνονται κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του αλγόριθμου. Τα πιο κοινά λάθη που κάνουν οι μαθητές, αλλά, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, και οι εκπαιδευτικοί (Ma, 1999) είναι να αντιστρέφουν τον διαιρετέο αντί τον διαιρέτη ή να αντιστρέφουν και τους δυο. Η παράλειψη ή η παραποίηση βημάτων του αλγόριθμου μπορεί να αποδοθεί στην απομνημόνευση χωρίς κατανόηση του αλγόριθμου.

β. Λάθη που βασίζονται σε διαισθητικά μοντέλα: σε αυτήν την κατηγορία τοποθετούνται λάθη που πηγάζουν από διαισθήσεις για τη διαίρεση. Οι μαθητές έχουν την τάση να γενικεύουν ιδιότητες των πράξεων στους φυσικούς αριθμούς και στα κλάσματα και να ερμηνεύουν τη διαίρεση με βάση ένα αρχέγονο μοντέλο. Το κυρίαρχο διαισθητικό μοντέλο στη διαίρεση είναι αυτό του μερισμού, σύμφωνα με το οποίο α: β σημαίνει μοιράζω το α σε ίσες β ομάδες. Αυτές οι καταστάσεις είναι οι πρώτες που αναγνωρίζουν οι μαθητές ως διαίρεση. Όμως αυτό το μοντέλο χτίζεται στους φυσικούς αριθμούς και έχει κάποιους περιορισμούς. Ο διαιρετέος πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον διαιρέτη, ο οποίος με τη σειρά του οφείλει να είναι φυσικός αριθμός και το πηλίκο δεν μπορεί να ξεπερνάει τον διαιρετέο. Αυτό το μοντέλο σταματά να έχει νόημα στην περίπτωση της διαίρεσης κλασμάτων, ειδικά όταν ο διαιρέτης είναι μικρότερος από τη μονάδα. Η επικράτηση αυτού του μοντέλου οδηγεί σε περιορισμό των μαθητών αλλά και των εκπαιδευτικών στο να κατανοήσουν τη διαίρεση στα κλάσματα και να ανταποκριθούν σε λεκτικά προβλήματα (Fischbein et al., 1985; Graeber, Tirosh & Glover, 1989 στο Tirosh, 2000).

γ. Λάθη που οφείλονται είτε σε περιορισμένη εννοιολογική γνώση της έννοιας του κλάσματος είτε σε ανεπαρκή γνώση των ιδιοτήτων των πράξεων συμπεριλαμβάνονται σε αυτή την κατηγορία. Η Hart (1981, στο Tirosh, 2000), για παράδειγμα, αναφέρει πως οι μαθητές θεωρούν ότι η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει και στη διαίρεση και υπολογίζουν το $1 : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ επειδή $1 : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}$.

Μια σημαντική πηγή λαθών οφείλεται στη δυσκολία αναγνώρισης και συντονισμού διαφορετικών μονάδων που ενυπάρχουν στη διαίρεση κλασμάτων, μια διεργασία που είναι γνωστή και ως «μοναδοποίηση» (unitizing, Steffe, 2003). Αυτή είναι μια απαραίτητη διαδικασία στη διαίρεση κλασμάτων γιατί είναι επιτακτικός ο εντοπισμός της δεδομένης μονάδας (διαιρέτης) για να μετρηθεί μια ποσότητα (διαιρετέος). Ιδιαίτερα όταν η μονάδα μέτρησης δεν ταυτίζεται με την κλασματική μονάδα ο εντοπισμός της γίνεται ακόμα πιο δύσκολος. Για παράδειγμα, στη διαίρεση 6: $\frac{3}{5}$ ενυπάρχουν το $\frac{3}{5}$ ως μονάδα μέτρησης του 6, το $\frac{1}{5}$ ως μονάδα μέτρησης του $\frac{3}{5}$ ($\frac{3}{5} =$

$3 x \frac{1}{5}$), αλλά και το 1 ως άδηλη μονάδα αναφοράς για όλους τους εμπλεκόμενους αριθμούς. Η πολυπλοκότητα αυξάνει, αν ο διαιρετέος δεν είναι φυσικός αριθμός, προκαλώντας σημαντικές δυσκολίες στους μαθητές.

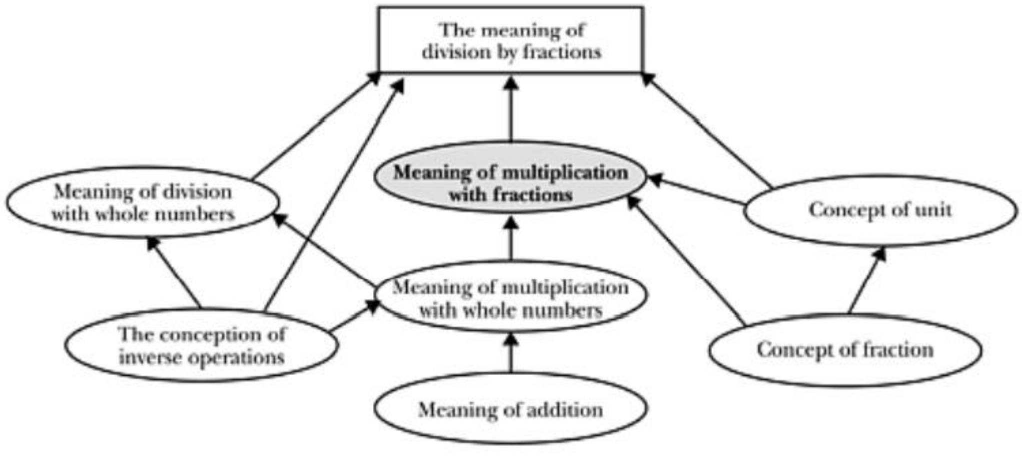
Όταν ο διαιρετέος είναι μεικτός αριθμός πολλοί μαθητές συνηθίζουν να χωρίζουν το κλασματικό του μέρος σε όσα κομμάτια ορίζει ο παρονομαστής του διαιρέτη (Kribs-Zaleta, 2006). Για παράδειγμα, αν πρέπει να διαιρέσουν $1\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$, χωρίζουν το $\frac{1}{2}$ σε τέσσερα κομμάτια και το κάθε κομμάτι θεωρούν ότι αποτελεί το $\frac{1}{4}$ του ακέραιου μέρους του διαιρετέου, αντί του κλασματικού.

Όταν το πηλίκο δεν είναι φυσικός αριθμός, οι μαθητές συνηθίζουν να συνδέουν το κλασματικό του μέρος με τον διαιρετέο και όχι με τον διαιρέτη (Gregg & Gregg, 2007; Kribs-Zaleta, 2006; Lamberg & Wiest, 2015; Zembat, 2015). Υπάρχει δυσκολία στο να δουν οι μαθητές τον διαιρέτη ως μονάδα αναφοράς δηλαδή διαιρώντας το $\frac{3}{4}$ με το $\frac{1}{2}$ το αποτέλεσμα $1\frac{1}{2}$ αναφέρεται στον διαιρέτη, δηλαδή το $\frac{1}{2}$ είναι του διαιρέτη και όχι του διαιρετέου. Για παράδειγμα, όταν πρέπει να διαιρέσουν $2\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$ καταλήγουν σε πηλίκο $3\frac{1}{4}$ γιατί δε συνδέουν το $\frac{1}{4}$ με το μέρος του διαιρέτη που αποτελεί, δηλαδή το $\frac{1}{3}$.

1.4 Θέματα για τη μάθηση και τη διδασκαλία

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε προκύπτει ότι η διαίρεση κλασμάτων, αλλά και οι αλγόριθμοί της παρουσιάζουν μεγάλες προκλήσεις για μαθητές και εκπαιδευτικούς. Μια σημαντική πηγή δυσκολίας είναι ότι πρόκειται για ένα σύνθετο θέμα που προαπαιτεί μια σειρά γνώσεων.

Σύμφωνα με τη Ma (1999), οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές πρέπει να κατέχουν ένα «πακέτο γνώσης» για τη διαίρεση κλασμάτων (Εικόνα 1). Με βάση αυτό, μια βαθιά εννοιολογική κατανόηση της διαίρεσης κλασμάτων χτίζεται πάνω σε ένα δίκτυο προηγούμενων γνώσεων. Στο υψηλότερο στάδιο βρίσκεται η έννοια της μονάδας του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, της διαίρεσης φυσικών αριθμών και των αντίστροφων πράξεων. Αυτά με τη σειρά τους χτίζονται πάνω σε έννοιες, όπως τα κλάσματα και ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς, ο οποίος χτίζεται πάνω στην πρόσθεση των φυσικών αριθμών (Ma, 1999).



Εικόνα 1. Το "πακέτο γνώσης" που απαιτείται για την κατανόηση της διαίρεσης κλασμάτων (Ma 1999, p. 77)

Μια δεύτερη πηγή δυσκολίας είναι ότι πολλά από τα νοήματα που χτίζονται για τη διαίρεση στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών, παύουν να ισχύουν (π.χ. «διαίρεση σημαίνει μοιράζω σε ίσα μέρη», «η διαίρεση πάντα μικραίνει τον διαιρετέο») ή τροποποιούνται σημαντικά στο πλαίσιο των ρητών (όπως η σχέση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με την εισαγωγή του αντίστροφου).

Οι μαθητές βασίζονται σε εμπειρίες τους και σε προηγούμενες ιδέες που έχουν κατακτήσει, προκειμένου να πραγματοποιήσουν νέες κατασκευές (Davis et al., 1992 στο Bulgar, 2003; Fredua-Kwarteng & Ahia, 2006; Li, 2008; Lo & Luo;2012; Ma, 1999). Η μάθηση είναι μια συνεχιζόμενη διαδικασία κατά την οποία η καινούρια γνώση χτίζεται πάνω στην παλιά και η παλιά ενισχύεται από την καινούρια και γίνεται εμβάθυνση σε αυτήν. Στο πεδίο της διαίρεσης των κλασμάτων χρειάζεται η καινούρια γνώση να χτιστεί πάνω στη γνώση των μαθητών για τη διαίρεση στους φυσικούς αριθμούς, που όπως φαίνεται ταυτόχρονα αποτελεί εμπόδιο για την εννοιολογική κατανόηση της διαίρεσης στους ρητούς αριθμούς. Πολλά στοιχεία της παλιάς γνώσης των μαθητών χρειάζονται αναθεώρηση ώστε να επιτευχθεί η εμβάθυνση στην καινούρια γνώση. Βασικοί στόχοι στη διδασκαλία της διαίρεσης των κλασμάτων είναι να υποστηρίξει τους μαθητές να αναθεωρήσουν τις (γνωστικές) πεποιθήσεις τους για τη διαίρεση που δεν ισχύουν στους ρητούς, να αναγνωρίσουν τα νοήματα που τροποποιούνται, καθώς και να ενισχύσει τα νοήματα που είναι συμβατά και στα δύο πλαίσια (δηλαδή στους φυσικούς και τους ρητούς).

Με βάση την έρευνα, αναδύονται κάποιες προϋποθέσεις για την αποτελεσματική διδασκαλία της διαίρεσης των κλασμάτων. Ένα σημαντικό μέρος των προϋποθέσεων αυτών αφορά την ενίσχυση της κατανόησης για την έννοια του κλάσματος, που είναι βασική προϋπόθεση για την κατανόηση της διαίρεσης κλασμάτων.

Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να σχεδιάζουν μαθήματα βασισμένα στην καθημερινότητα των μαθητών τους, σχετίζοντας τις κλασματικές έννοιες με όσα ήδη γνωρίζουν (Ma, 1999; Sharp & Adams, 2002), προκειμένου οι μαθητές να αποκτήσουν ενεργό ρόλο κατά τη διαδικασία ανάπτυξης μιας μαθηματικής ιδέας (Bulgar, 2003). Για αυτόν τον λόγο οι Sharp και Adams (2002) προτείνουν αρχικά την εισαγωγή στη διαίρεση των κλασμάτων με κλάσματα που υπάρχουν στην καθημερινότητα, όπως $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, και στη συνέχεια την εισαγωγή κλασμάτων που δεν είναι τόσο οικεία στους μαθητές.

Οι εκπαιδευτικοί είναι προτιμότερο να επιλέγουν προβλήματα με ρεαλιστικό πλαίσιο (Sharp & Adams, 2002, Van de Walle, 2005), καθώς ερευνητές εντόπισαν ότι η χρήση πλαισιωμένων προβλημάτων διευκόλυνε τη διδασκαλία κλασμάτων (Nowlin, 1996 στο Sharp και Adams, 2002). Για μια αποτελεσματική διδασκαλία απαραίτητος είναι και ο κατάλληλος χρόνος που αφιερώνεται, ώστε οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να εξερευνήσουν βαθιά τα μαθηματικά προβλήματα σε ένα υποστηρικτικό περιβάλλον μάθησης στο οποίο οι απόψεις τους θα είναι σεβαστές (Bulgar, 2003).

Η πρόσβαση στη γνώση οποιουδήποτε μαθηματικού περιεχομένου γίνεται μέσω αναπαραστάσεων. Αναπαράσταση θεωρείται οποιοδήποτε εξωτερικό αντικείμενο το οποίο χρησιμοποιείται για να μετασχηματίσει τις μαθηματικές ιδέες μέσω συμβάσεων που έχουν εγκαθιδρυθεί από τη μαθηματική κοινότητα (Adu-Gyamfi and Bossé, 2014; Goldin, 1998 στο Adu-Gyamfi et al., 2019).

Στο μαθηματικό πεδίο των κλασμάτων οι αναπαραστάσεις είναι μοντέλα τα οποία είναι εμπράγματα, δηλαδή χειραπτικά υλικά, εικονικά δηλαδή εικόνες των αντικείμενων και των μοντέλων και συμβολικά, δηλαδή αριθμοί, σύμβολα και λέξεις (Adu-Gyamfi et al., 2019; Petit et al., 2010 στο Wahyu, Amin & Lukito, 2017; Van de Walle, 2005). Στις δύο πρώτες κατηγορίες ανήκουν τρεις τύποι αναπαραστατικών μοντέλων (Petit et al., 2010 στο Wahyu et al., 2017; Reys, Lindquist, Lambdin & Smith, 2012 στο Lo & Luo, 2012; Van de Walle, 2005) επιφάνειας, μήκους και συνόλου.

Στα μοντέλα επιφάνειας τα κλάσματα είναι κομμάτια μιας επιφάνειας. Η χρήση αυτών των μοντέλων απαιτεί σκέψη που περιλαμβάνει τη σύγκριση μέρους όλου. Παρόλο που τα μοντέλα αυτά μπορεί να διαφέρουν, ορθογώνια ή κυκλικά, πλέγματα, γεωπίνακες, χαρτί με διάστικτο καμβά, διπλώσεις χαρτιών και pattern blocks, τα πιο συχνά είναι οι πίτες (Lo & Luo, 2012; Ma, 1999; Reys et al., 2012, στο Lo & Luo, 2012).

Τα μοντέλα μήκους είναι παρόμοια με τα μοντέλα επιφάνειας, μόνο που αντί για τα εμβαδά συγκρίνονται τα μήκη. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ράβδοι Cuisenaire ή λωρίδες κλασμάτων και η αριθμογραμμή. Είτε συγκρίνονται χειραπτικά υλικά ως προς το μήκος είτε σχεδιάζονται και υποδιαιρούνται ευθείες γραμμές

Η χρήση της αριθμογραμμής απαιτεί σκέψη για την απόσταση των σημείων από το 0 ή την μεταξύ τους απόσταση (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Petit et al., 2010 στο Wahyu et al., 2017; Van de Walle, 2005). Παρόλο που η αριθμογραμμή λογίζεται ως κατάλληλο αναπαραστατικό μοντέλο για τη διδασκαλία των κλασμάτων και των πράξεων τους, έρευνες έχουν αποδείξει ότι οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στη χρήση της. Συγκεκριμένα, οι Charalambous and Pitta-Pantazi (2007) αναφέρουν πως οι μαθητές μετράνε ευκολότερα τα σημεία πάνω στην αριθμογραμμή και όχι τα διαστήματα ανάμεσα στα σημεία, χρησιμοποιούν λανθασμένη μονάδα ειδικά όταν η αριθμογραμμή έχει μήκος δύο μονάδων και δυσκολεύονται να τοποθετήσουν σωστά τα κλάσματα πάνω της όταν είναι χωρισμένη σε μέρη πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια του παρονομαστή (Baturo, 2004; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Στα μοντέλα συνόλου το όλο θεωρείται ένα σύνολο αντικειμένων και τα υποσύνολα του συνόλου συνιστούν κλασματικά μέρη (Lo & Luo, 2012; Petit et al., 2010 στο Wahyu et al., 2017; Van de Walle, 2005). Η ιδέα της αναφοράς σε ένα σύνολο από αντικείμενα ως μεμονωμένη οντότητα δυσχεραίνει την κατανόηση αυτών των μοντέλων, αλλά τα μοντέλα αυτά βοηθούν στη συγκρότηση σημαντικών συνδέσεων με καθημερινές εφαρμογές καθώς και με έννοιες των λόγων (Van de Walle, 2005). Για την αναπαράσταση των κλασματικών μερών των συνόλων μπορούν να χρησιμοποιηθούν συλλογές όμοιων αντικειμένων όπως, κουμπιά, δίχρωμα πούλια, καραμέλες, όσπρια, βότσαλα (Adu-Gyamfi et al., 2019; Petit et al., 2010 στο Wahyu et al., 2017; Van de Walle, 2005).

Αυτά τα μοντέλα αποτελούν τη σκαλωσιά μέσω της οποίας οι μαθητές θα μπορέσουν να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος και των πράξεων με αυτά. Απαραίτητες είναι οι εμπειρίες με ποικιλία μοντέλων σε όλες τις ηλικίες των μαθητών για τη βαθιά εννοιολογική κατανόηση των κλασματικών εννοιών (Adu-Gyamfi et al., 2019; Cramer, Wyberg, & Leavitt, 2008; Duval, 2006; NCTM, 2000 στο Wahyu et al., 2017; Van de Walle, 2005).

Τα μοντέλα για τα κλάσματα αποτελούν κεντρικό συστατικό στοιχείο σε διδακτικές προσεγγίσεις για τη διαίρεση κλασμάτων και των αλγορίθμων της και θα συζητηθούν στη συνέχεια.

1.5 Διδακτικές προσεγγίσεις των αλγορίθμων της διαίρεσης κλασμάτων

Εξαιτίας του ενδιαφέροντος της μαθηματικής εκπαίδευσης για εννοιολογική κατανόηση της διαίρεσης κλασμάτων, υπάρχουν πολλές προτάσεις σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να εξηγηθούν οι αλγόριθμοι της διαίρεσης, ιδιαίτερα ο αλγόριθμος «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», ο οποίος παρουσιάζει τη μεγαλύτερη δυσκολία. Οι προτεινόμενες εξηγήσεις μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες: α) στις «αλγεβρικές», οι οποίες βασίζονται στο αναλυτικό νόημα των εμπλεκόμενων αριθμών και πράξεων (Chabe, 1963, στο Li, 2008; Fredua-Kwarteng & Ahia, 2006; Li, 2008; Ma, 1999; Novillis, 1979; Stohlman, 2006; Tirosh, 2000; Zembat, 2015) και β) σε αυτές που βασίζονται στο αναφορικό νόημα των εμπλεκόμενων αριθμών και πράξεων, χρησιμοποιώντας μοντέλα (Adu- Gyamfi et al., 2019; Cavey και Kinzel, 2014; Ervin, 2017; Gregg και Gregg, 2007; Kribs-Zaleta, 2006; Zembat, 2015).

1.5.1 «Αλγεβρικές» εξηγήσεις

Οι «αλγεβρικές» εξηγήσεις αφορούν κατά κύριο λόγο τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» και βασίζονται σε μετασχηματισμούς της αρχικής παράστασης ($\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$), μέχρι να φτάσει στην επιθυμητή μορφή ($\frac{\alpha}{\beta}\ x\,\frac{\delta}{\gamma}$).

Μια από τις πιο συνήθεις εξηγήσεις αυτού του τύπου στηρίζεται στη μετατροπή της διαίρεσης σε κλασμάτων σε σύνθετο κλάσμα και την απλοποίησή του (Novillis, 1979; Stohlman, 2006; Tirosh, 2000):

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}}{\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}}=\frac{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}}{1}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Η Ma (1999) προτείνει έναν άλλο τρόπο, που βασίζεται στη μετατροπή του διαιρέτη από κλάσμα σε διαίρεση και προϋποθέτει τη γνώση κανόνων για την απαλοιφή παρενθέσεων σε παραστάσεις που εμπλέκονται ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση:

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}:(\gamma:\delta)=\frac{\alpha}{\beta}:\gamma.\delta=\frac{\alpha}{\beta}.\delta:\gamma=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Ένας διαφορετικός μετασχηματισμός προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τον διαιρετέο και τον διαιρέτη με τον ίδιο αριθμό, με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστό ότι αυτό δεν αλλάζει την αξία του πηλίκου (Fredua-Kwarteng & Ahia, 2006; Ma, 1999). Έτσι, η διαίρεση των κλασμάτων μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\left(\frac{\alpha}{\beta}.\frac{\delta}{\gamma}\right):\left(\frac{\gamma}{\delta}.\frac{\delta}{\gamma}\right)=\left(\frac{\alpha}{\beta}.\frac{\delta}{\gamma}\right):1=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Οι Copur- Gencturk (2021), Fredua-Kwarteng και Ahia (2006), Li (2008), Tirosh (2000) και ο Zembat (2015) αναφέρουν άλλους δύο τρόπους απόδειξης του κανόνα που τους ονομάζουν «κοινό παρονομαστή» και «αντίστροφη πράξη»

Για τον πρώτο, τα κλάσματα αρχικά μετατρέπονται σε ομώνυμα με κοινό πολλαπλάσιο το γινόμενο των παρονομαστών, ενώ προϋποτίθεται και η γνώση ότι κατά τη διαίρεση κλασμάτων, ο αριθμητής του πηλίκου μπορεί να προκύψει με διαίρεση των αριθμητών και αντίστοιχα για τον παρονομαστή του.

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}:\frac{\beta\gamma}{\beta\delta}=\frac{\alpha\delta;\,\beta\gamma}{\beta\delta;\,\beta\delta}=\frac{\alpha\delta;\beta\gamma}{1}=\alpha\delta:\beta\gamma=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Για τον δεύτερο, η διαίρεση κλασμάτων ανάγεται σε μια εξίσωση με άγνωστο το πηλίκο και εφαρμόζονται οι συνήθεις μετασχηματισμοί για την επίλυσή της.

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta} = x \Leftrightarrow x.\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (x.\frac{\gamma}{\delta}).\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}.\frac{\delta}{\gamma} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

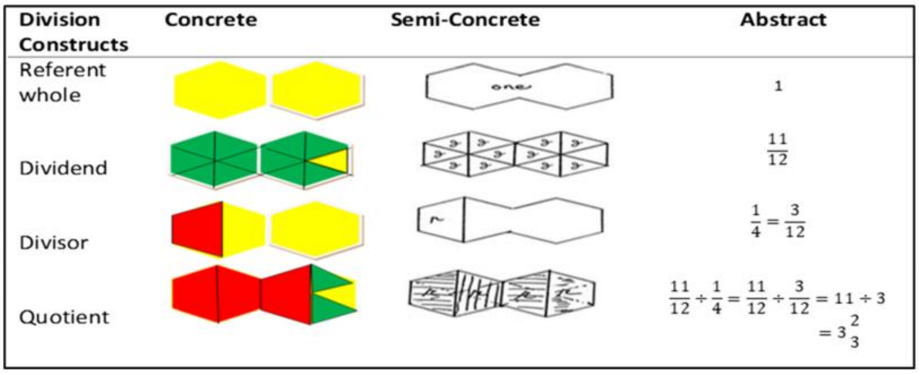
Όπως είναι φανερό από τα προηγούμενα, για όλους αυτούς τους τρόπους εξήγησης του αλγόριθμου προϋποτίθενται γνώσεις, αλλά και ευχέρεια των μαθητών στους μετασχηματισμούς,. Οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να χειρίζονται τη μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό, τη μετατροπή κλάσματος σε διαίρεση και το αντίστροφο, τις ιδιότητες των πράξεων. Όλα αυτά καθιστούν τέτοιου είδους αποδείξεις δύσκολες για μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, που σε αυτή την ηλικία χρειάζονται να δώσουν κάποιο νόημα στη διαίρεση ώστε να την κατανοήσουν.

1.5.2 Εξήγηση βασισμένη σε «μοντέλα»

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης των αλγόριθμων της διαίρεσης κλασμάτων που έχουν προταθεί από ερευνητές ή δασκάλους των μαθηματικών. Οι προσεγγίσεις αυτές διαφοροποιούνται, με βάση τα μοντέλα κλασμάτων που αξιοποιούν, το μοντέλο της διαίρεσης που προκρίνουν, καθώς και το είδος των δραστηριοτήτων που συμπεριλαμβάνουν.

Όσον αφορά τον αλγόριθμο του «κοινού παρονομαστή», παρά τις όποιες διαφορές μεταξύ των προσεγγίσεων, υπάρχει σύγκλιση ως προς το μοντέλο της διαίρεσης που αξιοποιείται, συγκεκριμένα το μοντέλο της διαίρεσης μέτρησης. Για παράδειγμα:

Οι Adu- Gyamfi et al.(2019) προτείνουν χειραπτικά μοντέλα επιφάνειας και την ερμηνεία της μέτρησης για να μοντελοποιήσουν μια διαίρεση με κλασματικούς αριθμούς (Εικόνα 2) Στη διαίρεση $\frac{11}{12}:\frac{1}{4}$ βρίσκουν πόσες φορές χωράει το $\frac{1}{4}$ στο $\frac{11}{12}$. Αρχικά, ορίζουν ως ολόκληρο τα δυο εξάγωνα και με τη βοήθεια των άλλων σχημάτων ορίζουν τον διαιρετέο και τον διαιρέτη. Άρα, πρέπει να βρεθεί πόσα κόκκινα τραπέζια ($\frac{1}{4}$ του όλου) χωράνε μέσα σε 11 πράσινα τρίγωνα ($\frac{11}{12}$ του όλου). Από τα σχήματα φαίνεται πως ένα τραπέζιο ισούται με τρία τρίγωνα άρα $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, επομένως μετριέται πόσες φορές χωράει το 3 στο 11. Μετατρέποντας τα κλάσματα σε ομώνυμα, η μέτρηση μεταφέρθηκε μόνο στους αριθμητές, άρα σε επίπεδο φυσικών αριθμών. Η εικόνα δείχνει τη σύνδεση ανάμεσα στα διαφορετικά είδη αναπαραστάσεων η οποία είναι απαραίτητη για να αναπτυχθεί αλγεβρικός συλλογισμός (Bruner, 1966 στο Adu- Gyamfi et al., 2019).

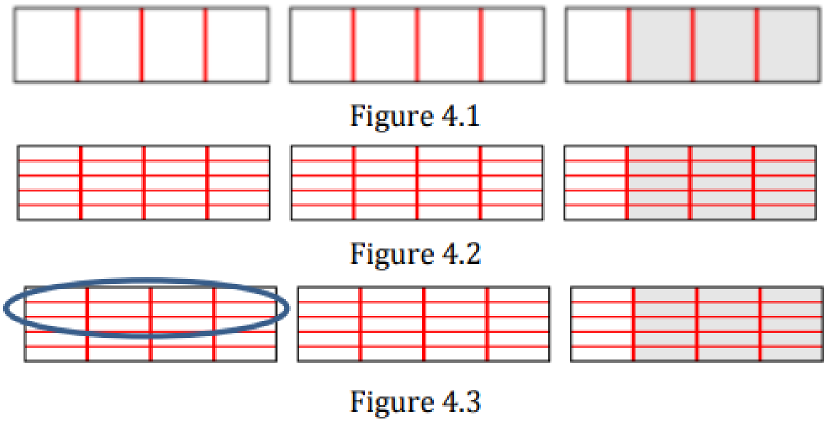


Εικόνα 2. Χειραπτικές, εικονικές, συμβολικές αναπαραστάσεις για τη λύση $\frac{11}{12}:\frac{1}{4}$ (Adu- Gyamfi et al. 2019, p. 513)

Παρόμοια ο Zembat (2015) σε έρευνα του σε υποψήφιους δασκάλους δίνει νόημα στον αλγόριθμο του «κοινού παρονομαστή», χρησιμοποιώντας καταστάσεις μέτρησης και μοντέλα επιφάνειας. Αρχικά, ο ερευνητής σχεδίασε δραστηριότητες για να συνδεθούν οι καταστάσεις της μέτρησης με τη διαίρεση μέτρησης στα κλάσματα. Στόχος του ήταν, οι συμμετέχοντες στην έρευνα, να θεωρούν τη διαίρεση μέτρησης μοντελοποίηση των καταστάσεων της μέτρησης και ανακάλυψη της ποσότητας του διαιρέτη που υπάρχει στον διαιρετέο και όχι ως μια αριθμητική πράξη που βοηθά να βρεθεί ο παράγοντας που λείπει, πηλίκο, ενώ είναι γνωστοί οι δυο άλλοι παράγοντες, διαιρετέος και διαιρέτης. Συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες θα ήταν ικανοί να κατανοήσουν ότι η αριθμητική παράσταση $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ μοντελοποιεί την κατάσταση πόσα $\frac{1}{2}$ υπάρχουν στο $\frac{3}{4}$ αντί να σκέφτονται απλώς ποιο είναι το αριθμητικό αποτέλεσμα της πράξης αυτής.

Στη συνέχεια δίνει εικονικά μοντέλα μήκους για να μπορέσουν να βρουν τα αποτελέσματα των διαιρέσεων μέσω των μοντέλων ερχόμενοι αντιμέτωποι με την αναγκαιότητα της δημιουργίας σχημάτων όμοια χωρισμένων, ώστε να πραγματοποιηθεί η μέτρηση. Οι συμμετέχοντες μέσα από αυτή τη διαδικασία, συνδέοντάς την με αριθμητικές πράξεις αντιλαμβάνονται τον λόγο της μετατροπής των ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα. Στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 3) φαίνεται η λύση ενός συμμετέχοντα στη διαίρεση $\frac{9}{4}:\frac{3}{5}$. Αρχικά, αναπαριστά το $\frac{9}{4}$ και στη συνέχεια το χωρίζει σε πέντε μέρη όπως ορίζει ο παρονομαστής του διαιρέτη. Στην επόμενη εικόνα βρίσκει τη μονάδα μέτρησης (διαιρέτη) για να κάνει τη μέτρηση. Μέσα από το σχήμα του καταλήγει πως ο διαιρετέος έχει μετατραπεί σε $\frac{45}{20}$ και ο διαιρέτης του σε $\frac{12}{20}$.

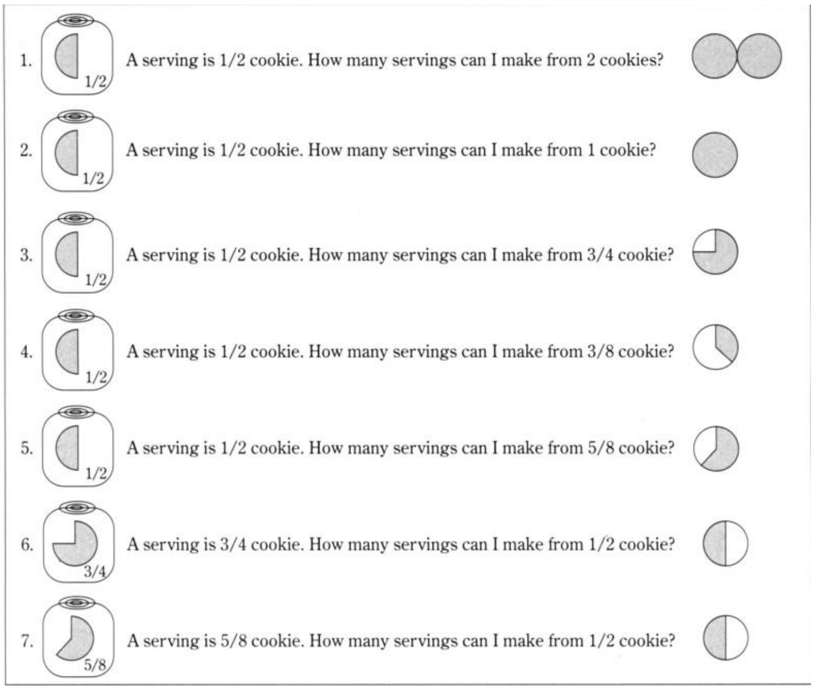
Το επόμενο σημείο που δουλεύει ο ερευνητής είναι το υπόλοιπο. Περνάει από το υπόλοιπο στους φυσικούς αριθμούς στο υπόλοιπο στους κλασματικούς αριθμούς. Συνδέει το υπόλοιπο με τον διαιρέτη μέσω των εικονικών αναπαραστάσεων.



Εικόνα 3. Εικονική αναπαράσταση της λύσης $\frac{9}{4}:\frac{3}{5}$ (Zembat 2015, p. 410)

Οι Gregg και Gregg (2007) σε έρευνα που πραγματοποιούν σε μαθητές σχεδιάζουν μια ακολουθία δραστηριοτήτων χρησιμοποιώντας καταστάσεις μέτρησης και εικονικά μοντέλα επιφάνειας, πίτες, για να εξηγήσουν τον αλγόριθμο των κοινών παρονομαστών.

Η ακολουθία δραστηριοτήτων ήταν η ίδια κατάσταση αλλά κάθε φορά άλλαζαν οι αριθμοί. Επίσης, οι αναπαραστάσεις δίνονταν έτοιμες στο φύλλο εργασίας. Ξεκινούσε από τους φυσικούς αριθμούς, συνέχιζε με φυσικό διαιρετέο και κλασματική μονάδα διαιρέτη, φυσικό διαιρετέο και κλάσμα διαιρέτη. Η ακολουθία συνεχιζόταν με κλασματικούς αριθμούς και στον διαιρετέο και στον διαιρέτη (Εικόνα 4). Το πηλίκο ήταν φυσικός αριθμός, μεικτός αριθμός και κλάσμα. Οι μαθητές παρουσίασαν την ίδια δυσκολία, όπως προαναφέρθηκε, όταν το πηλίκο δεν ήταν φυσικός αριθμός. Παρακάτω φαίνονται οι δραστηριότητες με διαιρέσεις κλασμάτων.



Εικόνα 4. Ακολουθία δραστηριοτήτων στις οποίες η μερίδα και η ποσότητα είναι κλάσματα (Gregg & Gregg 2007, p. 492)

Στο τέλος δόθηκαν οι ίδιες δραστηριότητες αλλά χωρίς τις εικονικές αναπαραστάσεις. Οι μαθητές επιτρεπόταν να χρησιμοποιήσουν εικονική αναπαράσταση αν τους βοηθούσε αλλά ο στόχος ήταν να συνδέσουν την κάθε δραστηριότητα με μια μαθηματική πρόταση και να οδηγηθούν προς τον αλγόριθμο. Μέσα από τις δραστηριότητες οι μαθητές κατέληξαν ότι όταν ο διαιρετέος και ο διαιρέτης είναι εκφρασμένοι σε ίδια κομμάτια, τότε το μέγεθος των κομματιών δεν έχει σημασία και η διαίρεση μεταφέρεται μόνο στους αριθμητές, επομένως, σε επίπεδο φυσικών αριθμών.

Όσον αφορά τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», η συντριπτική πλειοψηφία των διδακτικών προσεγγίσεων βασίζεται στην αξιοποίηση του μοντέλου της «διαίρεσης μερισμού» (Gregg & Gregg, 2007; Kribs-Zaleta, 2006; Van de Walle, 2005). Όπως έχει ήδη σχολιαστεί στην ενότητα 1.1.2, εδώ υποκρύπτεται μια επανατοποθέτηση της «διαίρεσης μερισμού» ως «διαίρεση με τον πολλαπλασιαστή» (Greer, 1992). Ένας δημοφιλής τρόπος ανάδειξης αυτής της ιδέας είναι η εκκίνηση από ένα πρόβλημα που είναι αναγνωρίσιμο από τους μαθητές ως πρόβλημα διαίρεσης μερισμού, και στη συνέχεια η σταδιακή παρουσίαση παραλλαγών του ως προς τους εμπλεκόμενους αριθμούς, με στόχο την αναγνώριση προβλημάτων της μορφής «ξέρω το μέρος, ψάχνω το όλο» ως προβλήματα διαίρεσης.

Για παράδειγμα, οι Gregg και Gregg (2007) σχεδίασαν μια ακολουθία δραστηριοτήτων με καταστάσεις μερισμού τις οποίες οι μαθητές έλυναν με τη βοήθεια εικονικών αναπαραστάσεων για να συνδέσουν τη διαίρεση με αυτές τις καταστάσεις και να εξηγήσουν τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Οι καταστάσεις αρχικά περιλάμβαναν διαίρεση κλασματικού αριθμού με φυσικό αριθμό. Στη συνέχεια προσάρμοσαν τις καταστάσεις δίνοντας το κλασματικό μέρος και ψάχνοντας ολόκληρη τη μονάδα. Το κλασματικό μέρος που ήταν γνωστό ήταν η κλασματική μονάδα. Οι μαθητές έλυναν τέτοιου είδους καταστάσεις με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα σε ένα λεκτικό πρόβλημα του τύπου «*Αν τα* $\frac{3}{4}$ *ενός κέικ γεμίζουν το* $\frac{1}{2}$ *ενός δοχείου, πόσο κέικ γεμίζει 1 δοχείο*;», οι μαθητές έκαναν $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$ ή $2x\frac{3}{4}$. Για να συνδέσουν τις καταστάσεις αυτές με τη διαίρεση έκαναν σύγκριση της ίδιας κατάστασης με φυσικούς αριθμούς και κλασματικούς. Έδωσαν τις καταστάσεις:

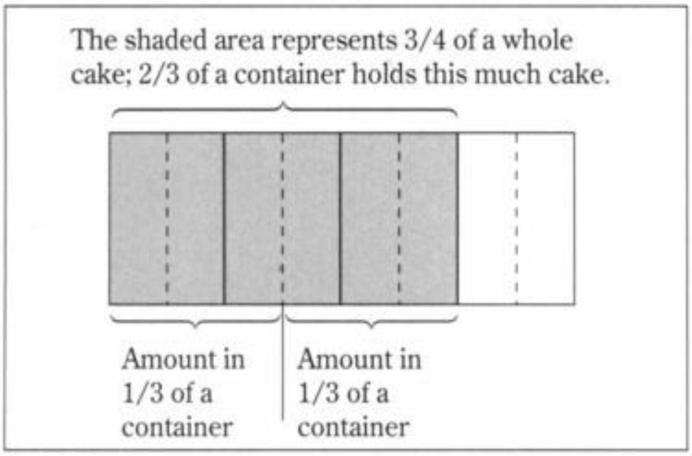
«Έχω $\frac{3}{4}$ *ενός ολόκληρου κέικ. Θέλω να τα μοιράσω ίσα σε 2 δοχεία. Πόσο κέικ θα μπει σε κάθε δοχείο;»*

«Έχω $\frac{3}{4}$ *ενός ολόκληρου κέικ. Γεμίζουν ακριβώς το* $\frac{1}{2}$ *του δοχείου μου. Πόσο κέικ χωράει σε 1 δοχείο;»* υποστηρίζοντας πως αφού στην πρώτη χρειάζεται διαίρεση για να βρεθεί η ποσότητα σε ένα δοχείο, το ίδιο συμβαίνει και στη δεύτερη.

$$\frac{\frac{3}{4}\,κέικ}{2\;δοχεία}=\frac{ποσότητα\;κέικ}{δοχείο}$$

$$\frac{\frac{3}{4}\,κέικ}{\frac{1}{2}\,δοχείο}=\frac{ποσότητα\;κέικ}{δοχείο}$$

Στη συνέχεια οι δραστηριότητες περιλάμβαναν διαίρεση με διαιρέτη μη μοναδιαίο κλάσμα και διαιρετέο φυσικό αριθμό, μοναδιαίο κλάσμα και μη μοναδιαίο κλάσμα. Παρακάτω (Εικόνα 5) φαίνεται η εικονική λύση στην κατάσταση «*Έχω* $\frac{3}{4}$ *ενός κέικ και γεμίζουν τα* $\frac{2}{3}$ *ενός δοχείου. Πόσο κέικ γεμίζει το* $\frac{1}{3}$ *του δοχείου και πόσο κέικ όλο το* *δοχείο;*». Γνωρίζοντας οι μαθητές ότι τα $\frac{3}{4}$ γεμίζουν τα $\frac{2}{3}$, διαιρούν με το 2 για να βρουν το $\frac{1}{3}$ και πολλαπλασιάζουν με το 3 για να βρουν τα $\frac{3}{3}$, δηλαδή ολόκληρο το δοχείο. Αυτή η διαδικασία τους οδηγεί στον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω».

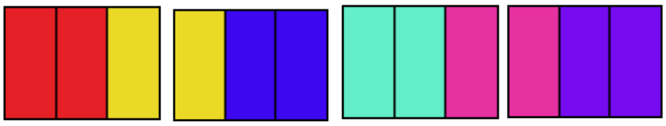


Εικόνα 5. Αν το $\frac{1}{3}$ του δοχείου γεμίζει με τα $\frac{3}{8}$ του κέικ, 1 δοχείο γεμίζει με $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=3\,x\,\frac{3}{8}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$ *κέικ* (Gregg & Gregg 2007, p. 495)

Σε έρευνά του ο Kribs-Zaleta (2006) σε εκπαιδευτικούς και μαθητές στην οποία ερεύνησε τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν σε λεκτικά προβλήματα χρησιμοποίησε καταστάσεις μερισμού όπως τις αναφέρει (δηλαδή, του τύπου «διαίρεση με τον πολλαπλασιαστή») και εικονικά μοντέλα. Δίνοντας το κλασματικό μέρος και ψάχνοντας ολόκληρη τη μονάδα, οι συμμετέχοντες σχεδίασαν μπάρες με όσα κομμάτια όριζε ο αριθμητής του διαιρέτη και βρήκαν το κάθε κομμάτι διαιρώντας τον διαιρετέο με τον αριθμητή του διαιρέτη. Στη συνέχεια σχεδίασαν και τα επιπλέον κομμάτια που όριζε ο παρονομαστής του διαιρέτη και πολλαπλασίασαν το ένα κομμάτι με όσα κομμάτια όριζε ο παρονομαστής του διαιρέτη για να βρεθεί ολόκληρη η μπάρα. Αυτή η διαδικασία σε αριθμητικό επίπεδο οδηγεί στον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω».

Αν και λιγότερο διαδεδομένες, υπάρχουν ωστόσο και προσεγγίσεις στον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» που βασίζονται στο μοντέλο της διαίρεσης μέτρησης.

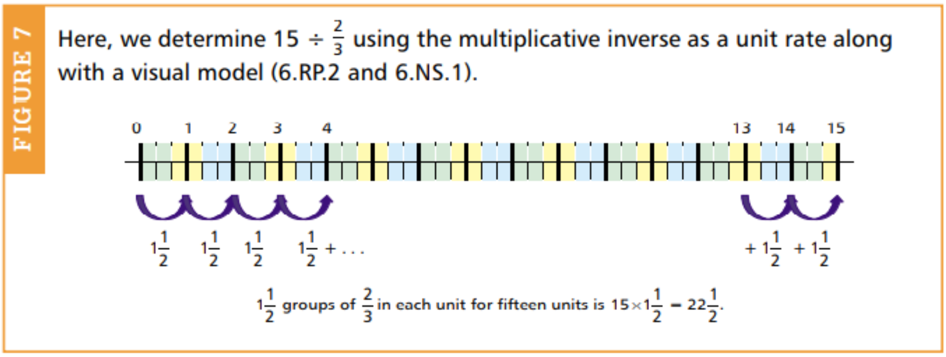
Μια τέτοια προσέγγιση προτείνεται από την Ervin (2017), παρόλο που εκφράζει επιφυλάξεις ως προς το αν αυτός ο αλγόριθμος μπορεί να κατανοηθεί με χρήση μοντέλων. Η Ervin χρησιμοποιεί μοντέλα επιφάνειας: Δίνει τη διαίρεση 4 : $\frac{2}{3}$ και ορίζει τον διαιρετέο ως 4 ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Χρειάζεται να χωρίσει το όλο σε τρίτα και να υπολογίσει πόσες ομάδες των δυο υπάρχουν στο όλο. Ξεκινάει χωρίζοντας τα 4 ορθογώνια σε τρίτα και έτσι δε θεωρεί πια ότι έχει 4 ολόκληρα αλλά (4 x 3= 12) 12. Στη συνέχεια, ομαδοποιεί ανά δύο (12 : 2= 6) άρα υπάρχουν 6 ομάδες των δυο (Εικόνα 6). Επομένως, πολλαπλασίασε με τον παρονομαστή και διαίρεσε με τον αριθμητή, όπως ορίζει ο αλγόριθμος «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω».



Εικόνα 6.Μοντέλο επιφάνειας για τον αλγόριθμο "αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω" (Ervin 2017, p. 273)

Ο Kribs-Zaleta (2006) εφάρμοσε μια παρόμοια ιδέα σε εκπαιδευτικούς και μαθητές χρησιμοποιώντας καταστάσεις μέτρησης και εικονικά μοντέλα επιφάνειας για να δει τι στρατηγικές ακολουθούν ώστε να λύσουν τα λεκτικά προβλήματα. Οι συμμετέχοντες τεμάχιζαν την εικονική αναπαράσταση του διαιρετέου σε όσα κομμάτια υποδείκνυε ο παρονομαστής του διαιρέτη και μετρούσαν πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο. Πιο γεινικά, θα μπορούσε να εκφραστεί ως πολλαπλασιασμός του διαιρετέου με τον παρονομαστή του διαιρέτη και στη συνέχεια ομαδοποίηση ανά όσα ορίζει ο αριθμητής του διαιρέτη, δηλαδή διαίρεση με τον αριθμητή. Αυτή η στρατηγική, σε αριθμητικό επίπεδο, οδηγεί στον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω».

Οι Cavey και Kinzel (2014) εξήγησαν τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» μέσω μιας κατάστασης μέτρησης χρησιμοποιώντας την έννοια της μονάδας και του πολλαπλασιαστικού αντίστροφου και μοντέλο μήκους, την αριθμογραμμή. Ο πολλαπλασιαστικός αντίστροφος οποιοδήποτε φυσικού αριθμού n είναι το $\frac{1}{n}$, το οποίο σημαίνει πόσα n υπάρχουν μέσα σε μία μονάδα, άρα $n\, x \frac{1}{n} = 1$. Οι ερευνητές χρησιμοποίησαν αυτό το νόημα για τον αντίστροφο για να εξηγήσουν τον αλγόριθμο της διαίρεσης κλασμάτων. Η μέθοδός τους μπορεί να χαρακτηριστεί ως «μέθοδος αναγωγής στη μονάδα». Για παράδειγμα, το πρόβλημα «αν χρειάζονται $\frac{2}{3}$ γιάρδας κορδέλας για να φτιαχτεί ένας φιόγκος και υπάρχουν 15 γιάρδες κορδέλα, πόσοι φιόγκοι μπορούν να φτιαχτούν;» είναι ένα πρόβλημα διαίρεσης μέτρησης που αντιστοιχεί στην πράξη $15:\frac{2}{3}$. Ένα παραγωγικό ενδιάμεσο ερώτημα είναι «πόσοι φιόγκοι μπορούν να φτιαχτούν από 1 γιάρδα κορδέλας;». Η απάντηση στο ερώτημα αυτό, με βάση το συγκεκριμένο νόημα για τον πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, είναι ότι από την κάθε μονάδα (γιάρδα) προκύπτουν $\frac{3}{2}$ φιόγκοι, δηλαδή $1\frac{1}{2}$ φιόγκοι. Άρα πολλαπλασιάζοντας το 15 με το $\frac{3}{2}$ θα βρεθούν πόσοι φιόγκοι προκύπτουν από τις 15 γιάρδες κορδέλας. Στην Εικόνα 7 φαίνεται η αναπαράσταση της λύσης πάνω στην αριθμογραμμή.



Εικόνα 7. Εικονική λύση με τη χρήση αριθμογραμμής της διαίρεσης $15:\frac{2}{3}$ (Cavey & Kinzel, 2014, p 382)

Τέλος θα πρέπει να σημειωθεί ότι, ενώ οι περισσότερες έρευνες εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στα μοντέλα του μερισμού και της μέτρησης, που συνδέονται με τις μη συμμετρικές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, ο Yim (2009) υποστηρίζει ότι και το «αντίστροφο του καρτεσιανού γινομένου» (*inverse of Cartesian product*) ή «παράγοντες και γινόμενο» (δηλαδή, μια συμμετρική κατάσταση) μπορεί να αποτελέσει ένα πρόσφορο έδαφος, ώστε οι μαθητές να φτάσουν στο σημείο μόνοι τους να κατασκευάσουν τον αλγόριθμο της διαίρεσης κλασμάτων «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Χρησιμοποιώντας λοιπόν αυτό το μοντέλο της διαίρεσης και εικονικά μοντέλα επιφάνειας και αξιοποιώντας τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών (διαίρεση στους φυσικούς και διαίρεση με κλασματικό διαιρεταίο μελετάει τις στρατηγικές που ακολουθούν οι μαθητές ώστε να λύσουν τα λεκτικά προβλήματα, στα οποία είναι γνωστό το μήκος της μιας πλευράς του ορθογωνίου και το εμβαδόν και ζητούμενο η άλλη πλευρά. Για αυτόν τον λόγο, οι μαθητές σχεδιάζουν ορθογώνια και μεταχειρίζονται τις εικονικές αναπαραστάσεις τους, για να λύσουν τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν. Αναπτύσσουν διάφορες στρατηγικές, όπως το να προσπαθούν να μετατρέψουν κάποιο από τα μεγέθη που έχουν στη διάθεσή τους στη μονάδα ή σε φυσικούς αριθμούς. Τα βήματα που ακολουθούν οι μαθητές για την επίλυση των έργων τούς οδηγούν στην ανακάλυψη του αλγόριθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Σε κάθε περίπτωση, η προϋπάρχουσα γνώση της διαίρεσης κλασμάτων με φυσικούς αριθμούς ή η διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών είναι αυτή που βοηθά τους μαθητές να οδηγηθούν στην κατασκευή του αλγόριθμου για τη διαίρεση κλασμάτων.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, αξίζει να συνοψιστούν οι εξής επισημάνσεις: Στη βιβλιογραφία εμφανίζονται πολύ συχνότερα προσεγγίσεις του αλγόριθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» βασισμένες στο αναλυτικό νόημα των αριθμών και των πράξεων, παρά στο αναφορικό. Οι εξηγήσεις αυτές έχουν το πλεονέκτημα ότι μπορούν να γενικευτούν σε αλγεβρικού τύπου «αποδείξεις» του αλγόριθμου. Ωστόσο, τέτοιου είδους προσεγγίσεις δεν είναι, όπως αναφέρθηκε, κατάλληλες για την εισαγωγή του αλγόριθμου σε παιδιά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Σε προσεγγίσεις που βασίζονται στο αναφορικό νόημα των αριθμών και των πράξεων, ο αλγόριθμος «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» τυπικά συσχετίζεται με το μοντέλο του μερισμού (ως «διαίρεση με τον πολλαπλασιαστή»). Εντοπίστηκαν και αναφέρθηκαν και εξαιρέσεις στην πεπατημένη αυτή (Cavey & Kinzel, 2014, Ervin, 2007; Yim, 2009).

Στην επόμενη ενότητα εξετάζεται ο τρόπος που παρουσιάζεται η διαίρεση κλασμάτων στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια.

1.6 Η διαίρεση κλασμάτων στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια

Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών οι γενικοί στόχοι στον γνωστικό άξονα «Αριθμοί και πράξεις» της Ε΄ τάξης για τα κλάσματα είναι οι μαθητές να απαγγέλουν, να διαβάζουν και να γράφουν κλασματικούς αριθμούς και να εκτελούν τις τέσσερις πράξεις με τους αριθμούς αυτούς. Στη Στ΄ τάξη τίθεται ως στόχος και η διάταξη κλασματικών αριθμών.

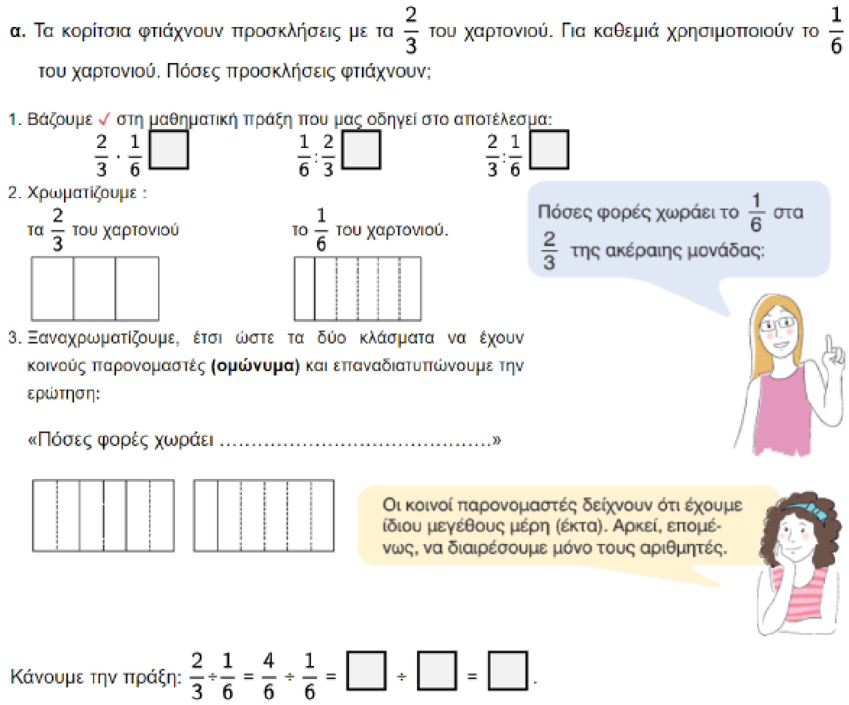
1.6.1 Η διαίρεση κλασμάτων στην Ε΄ τάξη

Με βάση τους ειδικούς στόχους για την Ε΄τάξη που αφορούν τη διαίρεση κλασμάτων από τους μαθητές αναμένεται να διαιρούν κλάσματα, να χρησιμοποιούν κατάλληλες αναπαραστάσεις για τη διαίρεση κλασμάτων και να επιλύουν απλά προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων.

Στο κεφάλαιο 20 του βιβλίου μαθητή της Ε΄ τάξης γίνεται η εισαγωγή στη διαίρεση κλασμάτων. Υπάρχουν δυο διερευνητικές δραστηριότητες και στην πορεία παρουσιάζονται οι κανόνες.

Οι διερευνητικές δραστηριότητες που δίνονται χρησιμοποιούν καταστάσεις μέτρησης και εικονικά μοντέλα μήκους κλασμάτων ώστε να συνδέσουν οι μαθητές τη μέτρηση με τη διαίρεση κλασμάτων και να οδηγηθούν στην ανακάλυψη του αλγόριθμου του «κοινού παρονομαστή», μια προσέγγιση που είναι συμβατή με όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, ότι το μοντέλο μέτρησης οδηγεί στον αλγόριθμο του «κοινού παρονομαστή».

Οι δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου (Εικόνα 8) δίνουν έτοιμες τις εικονικές αναπαραστάσεις που οι μαθητές θα έπρεπε να σχεδιάσουν και κάποιους κανόνες που προκύπτουν από την κάθε δραστηριότητα. Αν και οι δραστηριότητες είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν με εμπράγματες αναπαραστάσεις στο πλαίσιο της τάξης, ώστε οι μαθητές να εμπλακούν ενεργά με τις δραστηριότητες και να οδηγηθούν μόνοι τους σε συμπεράσματα, η απόφαση εναπόκειται στην/ στον εκπαιδευτικό.



α. Τα κορίτσια φτιάχνουν προσκλήσεις με τα $\frac{2}{3}$ του χαρτονιού. Για καθεμιά χρησιμοποιούν το $\frac{1}{6}$ του χαρτονιού. Πόσες προσκλήσεις φτιάχνουν;

1. Βάζουμε ✓ στη μαθηματική πράξη που μας οδηγεί στο αποτέλεσμα: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$ ☐ $\frac{1}{6} : \frac{2}{3}$ ☐ $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ ☐
2. Χρωματίζουμε : τα $\frac{2}{3}$ του χαρτονιού το $\frac{1}{6}$ του χαρτονιού.
3. Ξαναχρωματίζουμε, έτσι ώστε τα δύο κλάσματα να έχουν κοινούς παρονομαστές **(ομώνυμα)** και επαναδιατυπώνουμε την ερώτηση:

«Πόσες φορές χωράει ....»

Κάνουμε την πράξη: $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \div \frac{1}{6} = \square \div \square = \square$.

Εικόνα 8. Δραστηριότητα του σχολικού εγχειριδίου της Ε΄ Δημοτικού (σελ. 53)

Στη συνέχεια το σχολικό εγχειρίδιο παρουσιάζει τις *βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες* όπως τις ονομάζει (Εικόνα 9). Δηλαδή, αναφέρει τον κανόνα του αλγόριθμου των κοινών παρονομαστών λέγοντας *«Για να διαιρέσουμε δυο ομώνυμα κλάσματα διαιρούμε τους αριθμητές τους.», «Για να διαιρέσουμε δυο ετερώνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και έπειτα διαιρούμε τους αριθμητές τους.», «Όταν σε μια διαίρεση οι αριθμοί είναι διαφορετικής μορφής τους μετατρέπουμε όλους στην ίδια μορφή».* Δίπλα από τους κανόνες υπάρχουν παραδείγματα.

Ο αλγόριθμος «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» δεν ανακαλύπτεται μέσω κάποιας δραστηριότητας αλλά διατυπώνεται σαν εναλλακτικός κανόνας στο τέλος ως *Πρόσθετη μαθηματική ιδέα* ως εξής: *«Ένας άλλος τρόπος να διαιρέσουμε δύο κλάσματα είναι να αντιστρέψουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και, αντί για διαίρεση να κάνουμε πολλαπλασιασμό».*

Ο κανόνας εξηγείται μέσω μιας ειδικής περίπτωσης, με αναφορά στη σχέση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης (αντίστροφες πράξεις). Με βάση μια κατάσταση μερισμού σε φυσικούς αριθμούς («μοιράζω 6 μπαλόνια σε 3 παιδιά»), το μερίδιο εκφράζεται συμβολικά πρώτα ως πηλίκο (6 : 3) και, στη συνέχεια, ως μέρος του διαιρέτη ($6x\frac{1}{3}$). Με βάση ότι το αποτέλεσμα πρέπει να είναι ίδιο και στις δύο περιπτώσεις αναδεικνύεται η ισότητα που προκύπτει από τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», δηλαδή $6:3 = 6x\frac{1}{3}$. Δε γίνεται καμία αναφορά στον αντίστροφο ενός αριθμού, ούτε στην ειδική, ούτε σε γενικότερη περίπτωση. Σαν σημείωση προστίθεται ότι ο διαιρετέος μπορεί να είναι κλάσμα και δε γίνεται κάποια αναφορά στον διαιρέτη.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η έννοια των αντίστροφων αριθμών έχει εισαχθεί στο κεφάλαιο 19, *Πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού ή κλάσματος με κλάσμα- Αντίστροφοι αριθμοί, στην ενότητα Βασικές Μαθηματικές έννοιες και διεργασίες* του κεφαλαίου στους αντίστροφους αριθμούς. Συγκεκριμένα, υπάρχει διατυπωμένος ο κανόνας *«αντίστροφοι λέγονται δύο αριθμοί που το γινόμενό τους είναι 1»* χωρίς να προηγείται ή να έπεται κάτι για τους αντίστροφους αριθμούς.

Θα μπορούσε να σχολιαστεί και ότι η έκφραση του μεριδίου στη μορφή $6x\frac{1}{3}$ για να εξυπηρετηθεί ο στόχος να αναγνωρίσουν οι μαθητές τι πρέπει να αντιστρέψουν, δεν είναι συμβατό με το ρόλο του $\frac{1}{3}$ ως πολλαπλασιαστή που είναι και ο συνήθης τρόπος γραφής που ακολουθούν οι μαθητές όταν υπολογίζουν το μέρος μιας ποσότητας.

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Για να διαιρέσουμε δυο **ομώνυμα κλάσματα**, διαιρούμε τους αριθμητές τους.	$\frac{3}{5}:\frac{4}{5}=3:4=\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}:\frac{3}{8}=6:3=2$
Για να **διαιρέσουμε** δυο **ετερώνυμα κλάσματα**, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και έπειτα διαιρούμε τους αριθμητές τους.	$\frac{2}{3}:\frac{6}{5}=\frac{10}{15}:\frac{18}{15}=10:18=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$
Όταν σε μια διαίρεση οι αριθμοί είναι διαφορετικής μορφής, τους μετατρέπουμε όλους στην ίδια μορφή.	$2{,}5:3\frac{1}{2}=\frac{25}{10}:\frac{7}{2}=\frac{25}{10}:\frac{35}{10}=25:35=\frac{25}{35}=\frac{5}{7}$
Πρόσθετη μαθηματική ιδέα Ένας άλλος τρόπος για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα είναι να αντιστρέψουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και, αντί για διαίρεση, να κάνουμε πολλαπλασιασμό. π.χ. $\frac{2}{3}:\frac{5}{4}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$, $6:\frac{3}{4}=\frac{6}{1}\times\frac{4}{3}=\frac{6\times4}{3}=\frac{24}{3}=8$	**Εξήγηση του κανόνα** *Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις: Π.χ. Μοιράζω 6 μπαλόνια σε 3 παιδιά.α. Κάνω διαίρεση: 6 : 3 = 2 μπαλόνια. β. Κάνω πολλαπλασιασμό: Αφού τα παιδιά είναι 3, το καθένα θα πάρει το $\frac{1}{3}$ των μπαλονιών:* *$6 \times \frac{1}{3}=\frac{6}{3}=6:3=2$ μπαλόνια.* *γ. Επομένως: $6:3=6\times\frac{1}{3}=\frac{6}{3}=6:3=2$* ***Σημείωση:** Ο διαιρετέος μπορεί να είναι και κλάσμα.*

Εικόνα 9. Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες στο βιβλιο της Ε΄Δημοτικού (σελ.54)

Παράλληλα με το βιβλίο μαθητή, υπάρχει το τετράδιο εργασιών με ασκήσεις και προβλήματα προς επίλυση (Τετράδιο Εργασιών Μαθητή Ε΄, σελ. 53). Η μία άσκηση απαιτεί να βρεθεί το πηλίκο με τη βοήθεια εικονικών μοντέλων επιφάνειας, ενώ οι υπόλοιπες είναι εφαρμογή των αλγόριθμων. Το πρώτο πρόβλημα είναι μερισμού με φυσικό διαιρέτη, ενώ τα άλλα δύο μέτρησης. Τα δύο πρώτα περιέχουν εικονικές αναπαραστάσεις με μοντέλα επιφάνειας και μήκους ώστε να τα λύσουν οι μαθητές με τη βοήθεια αυτών σε συνδυασμό με αριθμητική πράξη. Στο πρώτο πρόβλημα οι μαθητές πρέπει να φτιάξουν την εικονική αναπαράσταση, ενώ στο δεύτερο τους δίνεται έτοιμη μια αριθμογραμμή. Στο τρίτο πρόβλημα δε δίνεται κάποια εικονική αναπαράσταση ούτε και ζητείται. Η επιλογή χρήσης συγκεκριμένου αλγόριθμου φαίνεται να αφήνεται στο μαθητή.

Όμως, η εκτέλεση του αλγόριθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» ζητείται στην 3η Άσκηση (Εικόνα 10) του τετραδίου και, μάλιστα, με κλασματικό διαιρέτη ενώ δεν έχει διδαχθεί παρά μόνο δόθηκαν παραδείγματα χωρίς εξήγηση.

3η Άσκηση

Να συμπληρώσεις τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς:

α. $\frac{3}{4} : \frac{5}{\square} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{18}{20} = \frac{\square}{10}$

β. $\frac{\square}{\square} : \frac{\square}{\square} = \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{21} = \frac{\square}{\square} = \frac{1}{3}$

Εικόνα 10. Άσκηση του τετραδίου εργασιών της Ε΄Δημοτικού (σελ. 53)

Στο τέλος δίνεται μια δραστηριότητα η οποία ορίζεται ως *διερεύνηση- επέκταση* (Εικόνα 11). Δίνεται μια κατάσταση διαίρεσης μέτρησης μεικτού κλάσματος με κλασματική μονάδα και ζητείται από τους μαθητές να βρουν πολλούς τρόπους λύσης. Στη συνέχεια τους ζητείται να προβλέψουν πώς θα άλλαζε το αποτέλεσμα αν άλλαζε ο διαιρέτης και συγκεκριμένα διπλασιαζόταν.

Διερεύνηση – Επέκταση

Μια ομάδα εργατών τοποθετεί νέες σιδηροδρομικές γραμμές. Σε μια ημέρα τοποθετεί γραμμές σε μήκος $\frac{1}{3}$ του χιλιόμετρου. Πόσες ημέρες θα χρειαστεί, για να τοποθετήσει γραμμές σε μήκος $4\frac{5}{6}$ χιλιόμετρα;

- Να διερευνήσεις πώς θα μπορούσες να λύσεις το συγκεκριμένο πρόβλημα με διάφορους τρόπους.
- Να υπολογίσεις νοερά τις ημέρες που θα χρειαστούν οι εργάτες για το ίδιο έργο, αν τοποθετούν την ημέρα γραμμές σε μήκος $\frac{2}{3}$ του χιλιόμετρου.

Εικόνα 11. Δραστηριότητα του τετραδίου εργασιών της Ε΄ Δημοτικού (σελ.54)

1.6.2 Η διαίρεση κλασμάτων στην ΣΤ΄ τάξη

Στο κεφάλαιο 24*, Προβλήματα με πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων* οι στόχοι που υποδεικνύει το βιβλίου δασκάλου είναι οι εξής: οι μαθητές να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν κλάσματα, να λύνουν προβλήματα υπολογισμού του κλασματικού μέρους ενός ποσού και να υπολογίζουν αριθμητικές παραστάσεις που περιέχουν κλάσματα. Από τους μαθητές αναμένεται να γνωρίζουν τη σειρά εκτέλεσης των αριθμητικών πράξεων σε μια αριθμητική παράσταση ώστε να μπορούν να βρουν το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας κλάσματα (Βιβλίο Εκπαιδευτικού Στ΄, σελ. 65).

Το βιβλίο δίνει μια κατάσταση μέτρησης αρχικά με φυσικούς αριθμούς και στη συνέχεια με κλασματικούς για να συνδέσει την κατάσταση αυτή με τη διαίρεση μέτρησης (Εικόνα 12). Δε χρησιμοποιεί αυτή την κατάσταση ώστε να οδηγηθούν οι μαθητές στον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», αφού δεν καταλήγουν σε κάτι τέτοιο μέσω της λύσης του προβλήματος. Γίνεται λεκτικά επίκληση της υποτιθέμενης προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών ότι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις και αυτό χρησιμοποιείται για να διατυπωθεί άμεσα το συμπέρασμα «*άρα, αντί να διαιρέσεις, μπορείς να πολλαπλασιάσεις με τον αντίστροφο αριθμό*». Στη συνέχεια, οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν τα αποτελέσματα που προκύπτουν χωρίς και με αυτόν τον αλγόριθμο.

Όπως προαναφέρθηκε και σύμφωνα με το βιβλίο της Ε΄ Δημοτικού, ο κανόνας αυτός έχει διδαχθεί ως «αντιστρέφω το δεύτερο κλάσμα και κάνω πολλαπλασιασμό». Τώρα δε μιλάει πια για αντιστροφή του δεύτερου κλάσματος και πολλαπλασιασμό αλλά πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο. Εισάγει δηλαδή την έννοια του αντίστροφου, ως κάτι γνωστό στους μαθητές, οι οποίοι τον έχουν διδαχθεί μόνο ως έναν λεκτικό κανόνα στην Ε΄ τάξη και δεν έχει γίνει καμία άλλη αναφορά σε αυτή την έννοια, όπως πώς βρίσκεται ο αντίστροφος ενός φυσικού αριθμού ή κλασματικού.

Δεν είναι, επίσης, καθόλου προφανές ποια θεωρείται ότι είναι η προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για τις αντίστροφες πράξεις και αν είναι συμβατή με το νόημα το οποίο υπονοείται εδώ. Όπως συζητήθηκε στην ενότητα 1.1.1, υπάρχουν διαφορετικές εκφάνσεις της αντίστροφης σχέσης μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, με τη «διπλή αντιστροφή» που απαιτείται για την αντικατάσταση της μιας πράξης από την άλλη να είναι η πιο προηγμένη.

Στο τέλος της δραστηριότητας παρουσιάζεται ο λεκτικός κανόνας του αλγόριθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» ως συμπέρασμα της παραπάνω δραστηριότητας δηλαδή ότι για να διαιρέσουμε δυο κλάσματα αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και κάνουμε πολλαπλασιασμό, επιστρέφοντας πάλι στον αρχικό κανόνα που είχαν διδαχθεί στην Ε΄ δημοτικού (Βιβλίο Μαθητή Στ΄, σελ.54).

Δραστηριότητα 2η

Πήγα σε ένα γαλακτοκομικό αγρόκτημα και αγόρασα γάλα σε ένα δοχείο 10 λίτρων. Το δοχείο δεν χωράει στο ψυγείο μου. Έτσι θέλω να το μεταγγίσω σε δοχεία των 2 λίτρων.

- Πόσα δοχεία χρειάζομαι;...
- Γράψε την πράξη που έκανες:..

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αγόρασα το $\frac{1}{2}$ λίτρο γάλα και θέλω να το μεταγγίσω σε μικρές ατομικές κανάτες του $\frac{1}{8}$ λίτρου για να τις σερβίρω με τον καφέ.

- Πόσες ατομικές κανάτες χρειάζομαι; ....
- Γράψε την πράξη που πρέπει να κάνεις:...
- Γνωρίζεις ότι η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός είναι αντίστροφες πράξεις. Άρα, αντί να διαιρέσεις, μπορείς να πολλαπλασιάσεις με τον αντίστροφο αριθμό.
- Δοκίμασε τώρα να κάνεις την προηγούμενη πράξη αντιστρέφοντας το δεύτερο κλάσμα.

  ....
- Είναι λογικό το αποτέλεσμα;..

Εικόνα 12. Δραστηριότητα του βιβλίου της Στ΄ Δημοτικού (σελ. 55)

Στο βιβλίο του δασκάλου γίνεται μια αναφορά στη συγκεκριμένη δραστηριότητα ως μια σύνδεση των καταστάσεων της διαίρεσης στους φυσικούς αριθμούς με τους κλασματικούς αριθμούς. Αλλά, ενώ η συγκεκριμένη κατάσταση είναι μια κατάσταση μέτρησης και μετριέται μια ποσότητα με μια δεδομένη μονάδα μέτρησης, στο βιβλίο εξηγεί τη διαίρεση αυτή ως «μοίρασμα» μιας ποσότητας σε ίσα μέρη είτε η ποσότητα είναι φυσικός αριθμός είτε κλασματικός (Εικόνα 13). Γεγονός που δεν ισχύει στην περίπτωση αυτή αφού η διαίρεση που πραγματοποιείται δε μοιράζει την κλασματική ποσότητα σε ίσα μέρη (ομάδες), αλλά η ποσότητα είναι μοιρασμένη σε ομάδες και ζητείται ο αριθμός των ομάδων αυτών. Συνεχίζει, προτείνοντας στους εκπαιδευτικούς να προτρέπουν τους μαθητές να σκέφτονται με βάση τη λογική τους το αποτέλεσμα και συγκεκριμένα εδώ, να σκεφτούν «*είναι λογικό να μοιράσουμε κάτι και τα μέρη στα οποία το μοιράζουμε να είναι μεγαλύτερα του αρχικού;*». Δεν υπάρχει σύγκριση ανάμεσα στα μέρη (ομάδες) που μοιράζεται η ποσότητα και στην ποσότητα, αφού είναι δύο διαφορετικά είδη ποσοτήτων (λίτρα, κανάτες). Αν λέγοντας μέρη εννοεί το μέγεθος του κάθε μέρους (ομάδας), γιατί μόνο τότε μπορεί να υπάρξει σύγκριση, υπάρχουν δυο περιπτώσεις. Σε επίπεδο φυσικών αριθμών το μέγεθος της κάθε ομάδας θα είναι μικρότερο του αρχικού αλλά σε επίπεδο κλασματικών αριθμών, όπως ορίστηκε ο μερισμός παραπάνω σε περίπτωση κλασματικού διαιρέτη, το μέγεθος της μία ομάδας θα είναι μεγαλύτερο του αρχικού γιατί το αρχικό είναι το κλασματικό μέρος της μίας ομάδας . Η συγκεκριμένη κατάσταση όμως δεν αφορά το μέγεθος της ομάδας, αφού αυτό είναι γνωστό, αλλά αφορά το πλήθος των ομάδων. Επομένως, αυτή η ερώτηση δεν έχει λογική ούτε σε αυτήν την περίπτωση αλλά ούτε και στον μερισμό.

Δραστηριότητα 2η

Κάνοντας τη δραστηριότητα αυτή τα παιδιά θα διαπιστώσουν ότι, όπως στους φυσικούς αριθμούς η διαίρεση «μοιράζει» μια ποσότητα σε ίσα μέρη, έτσι και στα κλάσματα η διαίρεση «μοιράζει» μια ποσότητα (εκφράζεται με κλασματικό αριθμό) σε ίσα μέρη. Ο τρόπος με τον οποίο εργαζόμαστε για να κάνουμε τη διαίρεση είναι ο εξής: Αντί να κάνουμε διαίρεση, αντιστρέφουμε τους όρους στο ένα από τα κλάσματα και κάνουμε πολλαπλασιασμό (ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις).

Το τελικό αποτέλεσμα κάθε πράξης πρέπει να το ελέγχουμε πρώτα με βάση τη λογική. Φαίνεται λογικό να μοιράσουμε κάτι και τα μέρη στα οποία το μοιράζουμε να είναι μεγαλύτερα του αρχικού; Ζητούμε από τους μαθητές να ελέγχουν πάντοτε με τη λογική το αποτέλεσμα που βρήκαν πριν συνεχίσουν στο επόμενο βήμα.

Εικόνα 13. Διευκρινίσεις για τη δραστηριότητα 2 στο βιβλίο εκπαιδευτικού (σελ.65)

Παράλληλα με το βιβλίο μαθητή υπάρχει το τετράδιο εργασιών με ασκήσεις και προβλήματα προς επίλυση.

Το τετράδιο εργασιών έχει δύο ασκήσεις και τρία λεκτικά προβλήματα. Η μία άσκηση αφορά τη διαίρεση κλασμάτων, συγκεκριμένα είναι υπολογισμός αριθμητικής παράστασης. Τα δυο προβλήματα αφορούν τη διαίρεση κλασμάτων. Είναι λεκτικά προβλήματα το ένα μέτρησης και το άλλο μερισμού με φυσικό διαιρέτη και με κλασματικό, όπως ορίστηκε ο μερισμός με κλασματικό διαιρέτη παραπάνω, ως γνωστό το κλασματικό μέρος και ζητούμενη η μονάδα. Όμως, το βιβλίο υποδεικνύει να το λύσουν με τη μέθοδο «αναγωγή στην κλασματική μονάδα» (Τετράδιο εργασιών Μαθητή Στ΄, σελ. 17).

Συνοψίζοντας, οι μαθητές διδάσκονται και τους δύο αλγόριθμους στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού (Ε΄, Στ΄). Όσον αφορά τον αλγόριθμο του «κοινού παρονομαστή», υπάρχει η απόπειρα εξήγησης βασισμένης στο μοντέλο της διαίρεσης μέτρησης. Όσον αφορά τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», φαίνεται οι απόπειρες εξήγησης να είναι εξαιρετικά περιορισμένες και με ασυνέχειες όσον αφορά βασικά προαπαιτούμενα, όπως είναι η έννοια των αντίστροφων αριθμών, αλλά και τι ακριβώς σημαίνει «αντίστροφες πράξεις». Επιπλέον, στο βιβλίο του εκπαιδευτικού της Στ΄ τάξης, υπάρχουν ενδείξεις ότι υπάρχει σύγχυση όσον αφορά το νόημα της διαίρεσης ως μέτρηση και ως μερισμό, ενώ γίνεται ρητή σύσταση να μεταφερθεί το νόημα της διαίρεσης ως «δίκαιη μοιρασιά» και στο πλαίσιο της διαίρεσης κλασμάτων, κάτι που, όπως έχει συζητηθεί στην ενότητα 1.1.2 δεν μπορεί να συμβεί, όταν ο διαιρέτης είναι μικρότερος από τη μονάδα.

Τέλος, παρά το γεγονός ότι η διαχείριση του περιεχομένου των βιβλίων μπορεί να γίνει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους από τον/ την εκπαιδευτικό κάθε τάξης, θα λέγαμε ότι το περιεχόμενο των βιβλίων δεν υποστηρίζει μια διδασκαλία για τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» με στόχο την κατανόησή του από τους μαθητές. Θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι δίνεται έμφαση στη διαδικαστική γνώση και δε δίνεται αξία στο νόημα που θα δοθεί ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν βαθύτερα τις εμπλεκόμενες έννοιες.

1.7 Μια εναλλακτική προσέγγιση στον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω»

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε, γίνεται φανερό ότι ο αλγόριθμος «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» θέτει ένα πρόβλημα για τη διδασκαλία, ιδιαίτερα στις τάξεις του Δημοτικού, στις οποίες γίνεται η εισαγωγή του. Καταρχάς, εκφράζεται ρητά η άποψη ότι η απόδοση αναφορικού νοήματος στον αλγόριθμο είναι δύσκολη (Ervin, 2017). Επιπλέον, ο αλγόριθμος συσχετίζεται συνήθως με το νόημα της διαίρεσης ως μερισμό (Gregg και Gregg, 2007; Van de Walle, 2005). Όπως συζητήθηκε στην ενότητα 1.1.2, το νόημα της διαίρεσης μερισμού δε διατηρείται γενικά, κατά τη μετάβαση από το πλαίσιο των φυσικών αριθμών, στο πλαίσιο των ρητών. Ειδικότερα, όταν ο διαιρέτης είναι μικρότερος της μονάδας, το νόημα «μοιράζω τον διαιρετέο σε ίσα μέρη» παύει να ισχύει. Συνακόλουθα, τα προβλήματα που παρουσιάζονται ως προβλήματα μερισμού στους μαθητές, δεν είναι συμβατά με το πρωταρχικό διαισθητικό μοντέλο της διαίρεσης βάσει του οποίου είναι πολύ πιθανόν να λειτουργούν (Fishbein, et al, 1985; Tirosh, 2000).

Από τις λίγες απόπειρες που εντοπίστηκαν να αξιοποιούν το μοντέλο της μέτρησης, ξεχωρίζει αυτή των Cavey και Kinzel (2014) που αναδεικνύει τον ρόλο και το νόημα του αντίστροφου ενός αριθμού. Θα πρέπει να σημειωθεί, ωστόσο, ότι οι συγκεκριμένες ερευνήτριες απευθύνονταν σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, και όχι σε μαθητές Δημοτικού. Επιπλέον, η μέθοδός τους (ουσιαστικά, μια μέθοδος «αναγωγής στη μονάδα»), όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 1.5.2 είναι στενά συνδεδεμένη με το είδος των προβλημάτων που χρησιμοποίησαν.

Παρουσιάζουμε μια νέα (από όσο μπορούμε να γνωρίζουμε) προσέγγιση στον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», η οποία βασίζεται στην άμεση σύνδεση της διαίρεσης μέτρησης με τη μέτρηση μεγεθών, συγκεκριμένα του μήκους. Βασίζεται στο νόημα της διαίρεσης ως μέτρηση και αξιοποιεί την αρχή της «αντιστάθμισης» (compensatory principle, Lamon, 2008), η οποία στην πιο στοιχειώδη της μορφή διατυπώνεται ως «όσο μεγαλώνει η μονάδα μέτρησης, τόσο μικραίνει το (αριθμητικό) αποτέλεσμα της μέτρησης». Επειδή η σχέση που συνδέει το υπό μέτρηση μέγεθος, τη μονάδα μέτρησης, και το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης είναι γραμμική, η αρχή της αντιστάθμισης μπορεί να εκφραστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια.
Όταν κανείς μετρά ένα μέγεθος Μ με μια μονάδα μ, τότε Μ = α x μ, όπου α είναι το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης ($\frac{M}{\mu}$). Αν το Μ είναι σταθερό, και η μονάδα μεταβάλλεται, τότε το α είναι αντιστρόφως ανάλογο με το μ. Επομένως, αν το μ πολλαπλασιαστεί με το λ (≠ 0), τότε το α πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφό του.

Η διαίρεση είναι μια ανάλογη κατάσταση της μέτρησης μεγεθών, από την οποία αντλεί και το νόημά της ως «διαίρεση μέτρησης»: Ο διαιρετέος (Δ), ο διαιρέτης (δ) και το πηλίκο (π) συνδέονται με τη σχέση Δ = π x δ. Αν ο Δ παραμένει σταθερός, ενώ ο δ μεταβάλλεται, τότε το π είναι αντιστρόφως ανάλογο του δ. Επομένως, αν ο δ πολλαπλασιαστεί με το λ (≠ 0), τότε το π πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφο του λ, δηλαδή το $\frac{1}{\lambda}$.
Με βάση το παραπάνω, η διαίρεση κλασμάτων (ή και γενικότερα) μπορεί να θεωρηθεί υπό το πρίσμα μιας αλλαγής μονάδας (διαιρέτη), από μια αρχική μέτρηση (Δ, δ1, π1) σε μια δεύτερη μέτρηση (Δ, δ2, π2). Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κάνουμε τη διαίρεση $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$. Ως αρχική διαίρεση μπορεί πάντα να λαμβάνεται αυτή με διαιρέτη το ουδέτερο στοιχείο (δ1=1), με π1=$\frac{2}{3}$. Στη συνέχεια πρέπει να εντοπιστεί ο συντελεστής της μεταβολής του δ1, στη συγκεκριμένη περίπτωση το δ2= $\frac{5}{6}$ x δ1. Με

βάση της αρχή της αντιστάθμισης, το π2 προκύπτει αν το π1 ($\frac{2}{3}$) πολλαπλασιαστεί με τον αντίστροφο του $\frac{5}{6}$, δηλαδή το $\frac{6}{5}$.

Από διδακτική άποψη, η αξιοποίηση της αρχής της αντιστάθμισης στο πλαίσιο της διαίρεσης, έχει ορισμένα πλεονεκτήματα: Η αρχή της αντιστάθμισης μπορεί να θεμελιωθεί στο πλαίσιο της μέτρησης μεγεθών, ειδικότερα του μήκους. Το πλαίσιο αυτό είναι συγκεκριμένο και προσφέρεται για τη χρήση και σταδιακή αναβάθμιση αναπαραστάσεων (εμπράγματες, εικονικές, συμβολικές) και τη διασύνδεσή τους. Η αρχή της αντιστάθμισης μπορεί να μεταφερθεί σε αριθμητικό πλαίσιο, μέσω της αναπαράστασης των αριθμών ως μήκη, ένα μοντέλο που είναι συμβατό και μπορεί να οδηγήσει και στο αναλυτικό νόημα του αριθμού (π.χ. ως σημείο στην αριθμογραμμή).

Η προσέγγιση αυτή αναδεικνύει το νόημα της διαίρεσης ως μέτρηση, που όπως συζητήθηκε, διατηρείται κατά τη μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς, χωρίς να το συνδέει αποκλειστικά με προβλήματα διαίρεσης μέτρησης.

Τέλος, συνδέεται με μαθηματικό περιεχόμενο το οποίο υπάρχει (αν και δεν αξιοποιείται κατάλληλα) στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών του Δημοτικού (για παράδειγμα, μέτρηση μεγεθών, διαίρεση φυσικών, διαίρεση κλασμάτων, ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά). Αξίζει να επισημανθεί ότι ένα ψήγμα της ιδέας αυτής υπάρχει στη δραστηριότητα «Διερεύνησης-Επέκτασης» στο βιβλίο της Ε΄ Δημοτικού που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

2.1 Ερευνητική μεθοδολογία και ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα εργασία είναι μια έρευνα σχεδιασμού με εστίαση σε συγκεκριμένο θέμα (topic-specific design research study, Gravemeijer & Prediger, 2019). Ακολουθώντας τις φάσεις αυτού του τύπου έρευνας α) σχεδιάστηκε μια δομημένη ακολουθία δραστηριοτήτων με βάση την προσέγγιση στον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, β) το πρόγραμμα αυτό δοκιμάστηκε με λίγους μαθητές με μια διερευνητική διδασκαλία (exploratory teaching, Steffe & Thompson, 2000 και γ) η εμπειρία από την εφαρμογή αυτή αξιοποιείται για προτάσεις επανασχεδιασμού της συγκεκριμένης ακολουθίας, για έναν ενδεχόμενο $2^{ο}$ κύκλο εφαρμογής.

Το ευρύτερο θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας είναι εποικοδομηστικό, καθώς η κεντρική μας θεωρητική παραδοχή είναι ότι ένα μεγάλο μέρος των δυσκολιών των μαθητών στη διαίρεση κλασμάτων οφείλεται στο γεγονός ότι μεταφέρουν στο πλαίσιο των ρητών αριθμών την προϋπάρχουσα γνώση που έχουν δομήσει στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών. Η ειδικότερή μας υπόθεση είναι ότι οι μαθητές βασίζονται στο νόημα της διαίρεσης μερισμού, όπως αυτό διαμορφώνεται στο πλαίσιο των φυσικών (ουσιαστικά, η διαίρεση ως «δίκαιη μοιρασιά»), γεγονός που εμποδίζει την κατανόησή τους για τη διαίρεση στο πλαίσιο των ρητών, ενώ παραμένει κυρίαρχο και μετά την τυπική διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων (Fischbein et al., 1985; Tirosh, 2000). Βασικό στοιχείο της προσέγγισής μας είναι η αξιοποίηση του νοήματος της διαίρεσης μέτρησης, το οποίο μπορεί να οικοδομηθεί στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών, αλλά ταυτόχρονα είναι επεκτάσιμο και στην περίπτωση των ρητών.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται για την εμπειρική μελέτη είναι τα εξής:

1. Ποια είναι η προϋπάρχουσα γνώση για τη διαίρεση κλασμάτων που φέρουν οι μαθητές; Συγκεκριμένα, τι νόημα αποδίδουν στη διαίρεση κλασμάτων;

Αναγνωρίζουν οι μαθητές τις καταστάσεις που συνδέονται με τη διαίρεση μέτρησης στα κλάσματα; Είναι σε θέση να εκτελέσουν τον αλγόριθμο της διαίρεσης κλασμάτων; Είναι σε θέση να εξηγήσουν πώς και γιατί λειτουργεί;

2. Πώς εμπλέκονται οι μαθητές με το συγκεκριμένο πρόγραμμα δραστηριοτήτων; Συγκεκριμένα, αντιμετωπίζουν δυσκολίες και αν ναι, τι είδους και ποιες (εννοιολογικές δυσκολίες ή τεχνικές δυσκολίες με το εκπαιδευτικό υλικό); Ποια στοιχεία του προγράμματος φαίνεται να είναι υποστηρικτικά;
3. Τι επίδραση έχει η συμμετοχή των μαθητών στο συγκεκριμένο πρόγραμμα δραστηριοτήτων στην κατανόησή τους για τη διαίρεση κλασμάτων;
4. Ποια από τα παραπάνω μπορούν να αξιοποιηθούν για τον επανασχεδιασμό του προγράμματος δραστηριοτήτων;

Ο αρχικός σχεδιασμός για την εφαρμογή του προγράμματος ήταν να γίνει σε μικρές ομάδες μαθητών, αλλά αυτό κατέστη αδύνατο λόγω της πανδημίας. Τελικά, η εφαρμογή έγινε ατομικά σε κάθε μαθητή. Οι συνεδρίες βιντεσκοπήθηκαν.

2.2 Συμμετέχοντες

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν τέσσερις μαθητές, οι οποίοι φοιτούν στη Στ΄ τάξη σχολείων της Δυτικής Θεσσαλονίκης και της Λέρου. Η επιλογή της τάξης έγινε με το σκεπτικό να ελεγχθεί και η βασική θεωρητική παραδοχή της έρευνας, ότι το μοντέλο της διαίρεσης ως «δίκαιης μοιρασιάς» παραμένει κυρίαρχο και μετά τη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων.

Η συλλογή των δεδομένων έγινε τον Ιανουάριο του 2021. Το δείγμα μπορεί να χαρακτηριστεί ως ευκολίας αφού επιλέχθηκαν πρόσωπα οικεία της ερευνήτριας και μικρό σε μέγεθος. Επιλέχθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να καθιστά εφικτή τη μετακίνηση των μαθητών στον χώρο διεξαγωγής της συνέντευξης καθώς και τη βιντεοσκόπηση της συνέντευξης.

Οι τρεις μαθητές ήταν αγόρια και υπήρχε ένα κορίτσι. Τα ονόματα που αναφέρονται παρακάτω είναι ψευδώνυμα και ορίστηκαν για τη διατήρηση της ανωνυμίας της έρευνας. Οι δύο μαθητές, η Δέσποινα και ο Μάριος, φοιτούν στο ίδιο σχολείο αλλά σε διαφορετικό τμήμα. Οι υπόλοιποι μαθητές, Θοδωρής και Κοσμάς, φοιτούν σε διαφορετικά σχολεία. Οι μαθητές, κρίνοντας από τον βαθμό τους στον έλεγχο, θεωρούνται άριστοι. Όλοι τους έχουν διδαχθεί τη διαίρεση κλασμάτων στην Ε΄ τάξη και μόνο ο Θοδωρής και ο Μάριος την έχουν διδαχθεί και στη Στ΄.

2.3 Διαδικασία

Η έρευνα ήταν σχεδιασμένη σε 3 φάσεις (Α, Β, Γ). Η φάση Α είχε το χαρακτήρα προελέγχου, καθώς οι μαθητές κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν έργα σχετικά με τη διαίρεση κλασμάτων χωρίς υποστήριξη από την ερευνήτρια. Κατά τη φάση Β, οι μαθητές πραγματεύτηκαν την ακολουθία των δραστηριοτήτων. Τέλος, στη φάση Γ, οι μαθητές αντιμετώπισαν ξανά έργα του προελέγχου και ορισμένα νέα έργα και άρα είχε το χαρακτήρα μετα-ελέγχου.

Οι συνεδρίες ήταν ατομικές και έλαβαν χώρα στην οικία της ερευνήτριας σε κλίμα ευχάριστο. Προηγήθηκε συνεννόηση και ενημέρωση των γονέων. Μετά από τη σύμφωνη γνώμη των γονέων και των μαθητών υπήρξε βιντεοσκόπηση των συνεντεύξεων. Παράλληλα, η ερευνήτρια διατηρούσε δομημένο φύλλο καταγραφής των δεδομένων.

Με τον πρώτο μαθητή (Θοδωρής) έγιναν τρεις συναντήσεις, μία για την κάθε φάση του πειράματος. Η πρώτη συνάντηση (Φάση Α), διήρκησε μισή ώρα. Η δεύτερη συνάντηση (Φάση Β) έγινε την επόμενη μέρα. Η συνάντηση κράτησε μιάμιση ώρα. Την επόμενη μέρα έγινε η τελευταία συνάντηση (Φάση Γ), η οποία ολοκληρώθηκε σε ένα τέταρτο.

Μετά τις συναντήσεις με τον Θοδωρή, άλλαξε ο προγραμματισμός των συναντήσεων, καθώς η ολοκλήρωση της παρέμβασης σε μία συνεδρία φάνηκε να είναι πολύ κουραστική για τον μαθητή. Με τα επόμενα παιδιά έγιναν δύο συναντήσεις. Στην πρώτη συνάντηση πραγματοποιήθηκε η αρχική αξιολόγηση και ένα μέρος της παρέμβασης και στη δεύτερη συνάντηση, ολοκληρώθηκε η παρέμβαση και έγινε ο μετα-έλεγχος. Αποφασίστηκε αυτή η αλλαγή για να διαρκέσει η κάθε συνάντηση περίπου την ίδια ώρα. Η κάθε συνάντηση διήρκησε περίπου μία ώρα, ανάλογα με τον ρυθμό του κάθε παιδιού. Επίσης, οι δύο συναντήσεις διευκόλυναν τους γονείς και τα παιδιά, όσον αφορά τον χρόνο που είχαν να διαθέσουν.

2.4 Ερευνητικά εργαλεία

Για τη Φάση Α σχεδιάστηκαν 7 έργα με στόχο τη διερεύνηση γνώσεων και ικανοτήτων των παιδιών σχετικά με τη διαίρεση κλασμάτων. Στη Φάση Γ χρησιμοποιήθηκαν τα έργα της Φάσης Α με ορισμένες εξαιρέσεις, και νέα έργα. Στους Πίνακας 1 και Πίνακας 2 παρουσιάζονται τα κοινά και μη κοινά έργα των Φάσεων Α και Γ.

Πιο αναλυτικά, στο πρώτο έργο (Ε1) ζητείται από τους μαθητές να εξηγήσουν τι σημαίνει μια διαίρεση με φυσικούς αριθμούς, με διαιρέτη μικρότερο από τον διαιρετέο και να διατυπώσουν ένα λεκτικό πρόβλημα που να λύνεται με αυτήν τη διαίρεση. Στόχος του έργου αυτού είναι να ελεγχθεί αν μπορούν να δώσουν νόημα οι μαθητές στη διαίρεση φυσικών αριθμών, ποιο είναι αυτό και αν είναι σε θέση να διατυπώσουν κατάλληλο λεκτικό πρόβλημα.

Στο δεύτερο έργο (Ε2) ζητείται από τους μαθητές να εξηγήσουν τι σημαίνει μια διαίρεση με κλασματικό διαιρέτη και να διατυπώσουν ένα λεκτικό πρόβλημα που να λύνεται με τη διαίρεση αυτή. Στόχος του δεύτερου έργου είναι να ελεγχθεί αν μπορούν να δώσουν νόημα στη διαίρεση με κλασματικό διαιρέτη, ποιο νόημα δίνουν και αν είναι σε θέση να διατυπώσουν ένα κατάλληλο λεκτικό πρόβλημα.

Στο τρίτο έργο (Ε3) ζητείται από τους μαθητές να εξηγήσουν τι σημαίνει μια διαίρεση με φυσικούς αριθμούς, με διαιρέτη μεγαλύτερο από τον διαιρετέο. Σκοπός του έργου αυτού είναι να ελεγχθεί αν μπορούν οι μαθητές να δώσουν νόημα σε μια τέτοια πράξη και ποιο νόημα δίνουν.

Πίνακας 1. Κοινά και μη κοινά έργα των Φάσεων Α και Γ

Έργο	Υποέργο	Περιεχόμενο	Τίτλος	Προ-Ε	Μετα-Ε
Ε1	Ε1α	Εξήγησε σε έναν μικρότερο μαθητή τι σημαίνει 8:2 με λόγια.	«Δίνω νόημα στο 8:2»	X	-
	Ε1β	Φτιάξε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την πράξη 8:2.	«Φτιάχνω πρόβλημα με το 8:2»	X	-
Ε2	Ε2α	Εξήγησε σε έναν μικρότερο μαθητή τι σημαίνει 8: $\frac{1}{2}$ με λόγια.	«Δίνω νόημα στο 8 : $\frac{1}{2}$»	X	X
	Ε2β	Φτιάξε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την πράξη 8: $\frac{1}{2}$.	«Φτιάχνω πρόβλημα με το 8 :$\frac{1}{2}$»	X	X
Ε3		Εξήγησε σε έναν μικρότερο μαθητή τι σημαίνει 3 : 5.	«Δίνω νόημα στο 3:5»	X	X
Ε4	Ε4αi	Ξέρεις πώς να υπολογίσεις το αποτέλεσμα 8 : $\frac{1}{2}$;	«Υπολογίζω το 8 : $\frac{1}{2}$»	X	X
	Ε4αii	Πώς το υπολόγισες;	«Εξηγώ πώς υπολόγισα 8: $\frac{1}{2}$»	X	-
	Ε4βi	Ξέρεις πώς να υπολογίσεις το αποτέλεσμα 8 : $\frac{2}{3}$;	«Υπολογίζω το 8 : $\frac{2}{3}$»	X	X
	Ε4βii	Πώς το υπολόγισες;	«Εξηγώ πώς υπολόγισα 8 : $\frac{2}{3}$»	X	-
Ε5	Ε5α	Μπορείς να εξηγήσεις γιατί όταν διαιρείς με ένα κλάσμα αντιστρέφεις τους όρους του κλάσματος και πολλαπλασιάζεις; Δηλαδή, γιατί 8 : $\frac{1}{2}$= 8x $\frac{2}{1}$;	«Εξηγώ τον αλγόριθμο αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω»	-	X
	Ε5β	Μπορείς να εξηγήσεις γιατί όταν διαιρείς με ένα κλάσμα αντιστρέφεις τους όρους του κλάσματος και πολλαπλασιάζεις; Δηλαδή, γιατί 8 : $\frac{2}{3}$ = 8 x $\frac{3}{2}$;		X	X
Ε7	Ε7α	Αν θέλεις να βρεις το πενταπλάσιο του αριθμού 30, τι πράξη θα κάνεις; Με ποιους αριθμούς;	«Βρίσκω το πενταπλάσιο του 30»	X	-
	Ε7β	Αν θέλεις να βρεις το ένα πέμπτο του 30, τι πράξη θα κάνεις; Με ποιους αριθμούς;	«Βρίσκω το ένα πέμπτο του 30»	X	-
	Ε7γi	Ένας συμμαθητής σου μου είπε το εξής: «Για να βρω το πενταπλάσιο του 30, το πολλαπλασιάζω με το 5.». Συμφωνείς με τον συμμαθητή σου;	«Συμφωνώ ή όχι στο πώς βρίσκω το πενταπλάσιο του 30»	X	-
	7γii	Ένας συμμαθητής σου μου είπε το εξής: «Για να βρω το ένα πέμπτο του 30, το πολλαπλασιάζω με το $\frac{1}{5}$.». Συμφωνείς με τον συμμαθητή σου;	«Συμφωνώ ή όχι στο πώς βρίσκω το ένα πέμπτο του 30»	X	-

Στο τέταρτο έργο (Ε4) καλούνται να υπολογίσουν το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης ακεραίου με μοναδιαίο και με μη μοναδιαίο κλάσμα και να εξηγήσουν πώς το έκαναν. Σκοπός του έργου αυτού είναι να ερευνηθεί ο τρόπος που επιλέγουν να βρουν το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης με κλασματικό διαιρέτη και αν μπορούν να δώσουν μια εξήγηση στον τρόπο αυτό.

Στο πέμπτο έργο (Ε5) οι μαθητές πρέπει να εξηγήσουν τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Στόχος αυτού του έργου είναι να ελεγχθεί αν οι μαθητές καταλαβαίνουν γιατί λειτουργεί αυτός ο αλγόριθμος ή αν τον εκτελούν διαδικαστικά.

Στο έκτο έργο (Ε6) οι μαθητές ζητείται να επιλέξουν τα λεκτικά προβλήματα τα οποία λύνονται με μια διαίρεση ακέραιου αριθμού με κλασματικό διαιρέτη. Η διαίρεση που τους δόθηκε είναι «5 : $\frac{1}{2}$». Συνολικά δόθηκαν 6 προβλήματα (Ε6α-Ε6στ), τα οποία παρουσιάζονται στον Πίνακα 2 με τους κωδικούς τους και τη σύντομη ονομασία τους.

Πίνακας 2. Έκτο έργο

Έργο	**Υποέργο**	**Περιεχόμενο**	**Τίτλος**	**Προ-Ε**	**Μετα-Ε**
Ε6		Επίλεξε ποια προβλήματα λύνονται με την πράξη 5: $\frac{1}{2}$.			
	Ε6α	Έχετε 5 κιλά αλεύρι και θέλετε να βάλετε το μισό σε έναν κουβά, πόσο αλεύρι θα μπει στον κουβά;	«Μοιράζω το αλεύρι»	Χ	Χ
	Ε6β	Έχετε ένα ύφασμα μήκους 5 μέτρων και θέλετε να φτιάξετε πετσέτες μήκους $\frac{1}{2}$ μέτρου. Πόσες πετσέτες θα φτιάξετε;	«Φτιάχνω πετσέτες»	Χ	Χ
	Ε6γ	Πόσα μισάωρα έχουν οι 5 ώρες;	«Μετράω μισάωρα»	Χ	Χ
	Ε6δ	Το 1 κιλό τυρί κοστίζει 5 ευρώ, πόσο κοστίζει το μισό κιλό;	«Κόστος τυριού»	Χ	Χ
	Ε6ε	Έχετε 5 λίτρα νερό και θέλετε να τα αδειάσετε σε μπουκαλάκια του μισού λίτρου. Πόσα μπουκαλάκια θα χρειαστείτε;	«Μετράω μπουκάλια»	Χ	Χ
	Ε6στ	Ένας τοίχος είναι 5 μέτρα ψηλός και θέλετε να τον καλύψετε με πλακάκι που έχει ύψος $\frac{1}{2}$ μέτρα. Πόσα πλακάκια θα χρησιμοποιήσετε;	«Μετράω πλακάκια»	Χ	Χ

Το πρώτο πρόβλημα (Ε6α), «*Μοιράζω το αλεύρι*» επιλέχθηκε για να ελέγξει αν οι μαθητές έχουν την παρανόηση, η οποία σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Ma, 1999) εμφανίζεται και στους εκπαιδευτικούς, ότι διαιρώντας έναν αριθμό με το $\frac{1}{2}$ ταυτίζεται με τη διαίρεση με το 2.

Το δεύτερο πρόβλημα (Ε6β) *«Φτιάχνω πετσέτες»* είναι μια κατάσταση μέτρησης που συνδέεται με τη διαίρεση αυτή. Χρησιμοποιείται συνεχής ποσότητα η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί με φυσικά αντικείμενα ή μοντέλο μήκους.

Το τρίτο πρόβλημα (Ε6γ) «*Μετράω μισάωρα*» είναι μια κατάσταση που συνδέεται με τη διαίρεση μέτρησης. Χρησιμοποιείται συνεχής ποσότητα, η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί με μοντέλο επιφάνειας και μήκους.

Το τέταρτο πρόβλημα (Ε6δ) «*Κόστος τυριού*» επιλέχθηκε για να ελέγξει την παρανόηση πως η διαίρεση με το $\frac{1}{2}$ ταυτίζεται με τον πολλαπλασιασμό με το $\frac{1}{2}$, η οποία εμφανίζεται στους εκπαιδευτικούς (Ma, 1999).

Το πέμπτο πρόβλημα (Ε6ε) *«Μετράω μπουκάλια»* είναι μια κατάσταση μέτρησης που συνδέεται με τη διαίρεση αυτή. Χρησιμοποιείται συνεχής ποσότητα η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί με φυσικά αντικείμενα.

Το έκτο πρόβλημα (Ε6στ) *«Μετράω πλακάκια»* είναι μια κατάσταση μέτρησης που συνδέεται με την πράξη αυτή. Χρησιμοποιείται συνεχής ποσότητα η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί με μοντέλο μήκους ή επιφάνειας.

Στο έβδομο έργο (Ε7) ζητείται από τους μαθητές εξηγήσουν με ποιο τρόπο βρίσκουν το πολλαπλάσιο και το υποπολλαπλάσιο ενός αριθμού, καθώς και να αξιολογήσουν την απάντηση ενός υποθετικού μαθητή που περιγράφει ρητά τη διαδικασία εύρεσης του υποπολλαπλάσιου μέσω του πολλαπλασιασμού με τον αντίστροφο. Στόχος του έργου αυτού είναι να διερευνηθεί αν οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι η διαίρεση με έναν αριθμό ταυτίζεται με τον πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφό του. Το έργο αυτό λειτούργησε ως γέφυρα για την εισαγωγή στη Φάση Β.

Φάση Γ

Η Φάση Γ έχει στόχο να αξιολογήσει τις γνώσεις των μαθητών ως προς τη διαίρεση κλασμάτων μετά την παρέμβαση.

Το πρώτο έργο αφορούσε στη διαίρεση φυσικών αριθμών και δε θεωρήθηκε απαραίτητο στην τελική δραστηριότητα. Το τελευταίο έργο ήταν ένας έλεγχος ως προς το αν οι μαθητές ταυτίζουν τη διαίρεση με ακέραιο με τον πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφό του. Αποτέλεσε μια εισαγωγή στην έννοια του αντίστροφου και μια αρχική διατύπωση αυτής της δήλωσης. Θεωρήθηκε ότι κάτι τέτοιο είναι περιττό στην τελική δραστηριότητα αφού ελέγχθηκε κατά τη διάρκεια του πειράματος σε όλες τις δραστηριότητες αλλά και στο πέμπτο έργο της τελικής δραστηριότητας. Τα έργα αυτά κωδικοποιήθηκαν όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα για την ευκολία της ανάλυσης των δεδομένων και την καταγραφή των αποτελεσμάτων. Τα έργα της τελικής δραστηριότητας ταυτίζονται με τα έργα της εισαγωγικής δραστηριότητας. Αφαιρέθηκε το πρώτο έργο και το τελευταίο έργο.

2.5 Σχεδιασμός της παρέμβασης

Η παρέμβαση είναι σχεδιασμένη με το σκεπτικό των «προβλημάτων με παραλλαγές» (*variation problems*) τα οποία περιέχονται στα κινεζικά σχολικά εγχειρίδια και έχουν χρησιμοποιηθεί από ερευνητές και στην περίπτωση της διαίρεσης κλασμάτων (Cavey & Kinzel, 2004; Gregg & Gregg, 2007; Sun, 2011). Σύμφωνα με το σκεπτικό αυτό, παρουσιάζεται ένα πρόβλημα και παραλλαγές του (π.χ. ως προς το είδος των αριθμών που περιέχει, ως προς τους τρόπους επίλυσης, ως προς τις αναπαραστάσεις) ή και διαφορετικά προβλήματα με κοινή προσέγγιση επίλυσης (Sun, 2011). Η πρακτική αυτή έχει στόχο οι μαθητές να διακρίνουν τις ομοιότητες και τις διαφορές ανάμεσα στις παραλλαγές, και να εξαγάγουν κανονικότητες. Επίσης, δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να κάνουν συνδέσεις, αφού η σύγκριση θεωρείται προϋπόθεση για την αντίληψη των δομών και των σχέσεων που θα οδηγήσουν στη μαθηματική αφαίρεση (Sun, 2011).

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η ακολουθία βασίζεται στη σύνδεση της μέτρησης μεγεθών με την πράξη της διαίρεσης και βασίζεται στην αντισταθμιστική αρχή στη μέτρηση ώστε μέσω των ποικίλων προβλημάτων να παρατηρηθεί ότι ο διαιρέτης και το πηλίκο είναι αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη. Όταν ο διαιρέτης πολλαπλασιάζεται με το α, το πηλίκο πολλαπλασιάζεται με το $\frac{1}{\alpha}$. Αυτή η παρατήρηση αξιοποιείται για να εξηγηθεί ο αλγόριθμος της διαίρεσης κλασμάτων «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω».

Το αρχικό πρόβλημα που χρησιμοποιείται είναι ένα ρεαλιστικό πρόβλημα όπως προτείνουν πολλοί ερευνητές (Sharp & Adams, 2002; Van de Walle, 2005), το οποίο αφορά μια μέτρηση μήκους με φυσικά αντικείμενα. Η ακολουθία δραστηριοτήτων εξελίσσεται σταδιακά, ξεκινώντας χωρίς αριθμούς και όρους διαίρεσης. Συνεχίζεται με φυσικούς αριθμούς και χρησιμοποιώντας τους όρους της διαίρεσης. Γενικεύει χωρίς αριθμούς αλλά με τους γενικούς όρους της διαίρεσης. Συνεχίζεται μεταφέροντας τα συμπεράσματα στους κλασματικούς αριθμούς. Ξεκινάει με διαίρεση φυσικού αριθμού με κλασματική μονάδα, συνεχίζει με διαίρεση φυσικού αριθμού με κλάσμα και ολοκληρώνεται με διαίρεση κλάσματος με κλάσμα. Πολλοί ερευνητές (Gregg & Gregg, 2007; Huang et al., 2014; Li et al., 2009) προτείνουν η εισαγωγή στη διαίρεση κλασμάτων να πραγματοποιηθεί σταδιακά, ξεκινώντας με τη διαίρεση στους φυσικούς αριθμούς, συνεχίζοντας με διαιρέτη την κλασματική μονάδα, με διαιρέτη κλάσμα και καταλήγοντας στη διαίρεση κλάσματος με κλάσμα.

Στη συνέχεια περιγράφονται πιο αναλυτικά οι δραστηριότητες.

1η δραστηριότητα

Στην 1η δραστηριότητα, μέσω της μέτρησης ενός μήκους με διάφορες μονάδες μέτρησης, οι μαθητές θα αναγνωρίσουν πώς μεταβάλλεται το αποτέλεσμα της μέτρησης καθώς μεταβάλλεται η μονάδα μέτρησης. Η δραστηριότητα είναι σχεδιασμένη χωρίς να δίνονται αριθμοί για τα μήκη που μετρούνται.

Η 1η δραστηριότητα χωρίζεται σε 3 μέρη (1α, 1β, 1γ). Στο μέρος 1α δίνεται στους μαθητές ένα καρούλι κορδέλας και ένα κομμάτι αυτής που είναι το κομμάτι που χρειάζεται για να φτιαχτεί ένας φιόγκος. Ζητείται από τους μαθητές να βρουν πόσοι φιόγκοι θα φτιαχτούν από την κορδέλα. Εκτός από το ένα κομμάτι που δείχνει η ερευνήτρια στους μαθητές έχει στη διάθεσή της και αντίγραφα αυτού. Οι μαθητές μπορούν είτε να μετρήσουν την κορδέλα με το ένα κομμάτι είτε να χρησιμοποιήσουν όλα τα αντίγραφα και να τα απλώσουν το ένα δίπλα στο άλλο για να καλύψουν όλη την κορδέλα. Δεν υπάρχει κάποια βοήθεια ή υπαινιγμός για το πώς θα το κάνουν, τους αφήνει μόνους τους να σκεφτούν πώς θα βρουν την απάντηση.

Στο μέρος 1β η ερευνήτρια τους λέει ότι θα φτιάξουν μικρότερους φιόγκους που χρειάζονται αυτό το κομμάτι που τους δείχνει και τους ζητάει να προβλέψουν αν οι φιόγκοι θα είναι περισσότεροι ή λιγότεροι από πριν. Έπειτα, τους λέει ότι το κομμάτι που θα χρειαστούν θα είναι το $\frac{1}{2}$ του αρχικού και να προβλέψουν πόσοι φιόγκοι θα βγουν τώρα. Αφού οι μαθητές προβλέψουν τους ζητάει να το επαληθεύσουν αν επιθυμούν με τα υλικά που έχουν μπροστά τους. Πάλι έχει στη διάθεσή της αντίγραφα αυτού για να τα τοποθετήσουν, αν θέλουν, το ένα δίπλα στο άλλο και να κάνουν τη μέτρηση. Οι ίδιες ερωτήσεις επαναλαμβάνονται με το κομμάτι για τον φιόγκο να είναι το $\frac{1}{3}$ και το $\frac{1}{4}$ του αρχικού. Οι μαθητές κάθε φορά που βρίσκουν τα αποτελέσματα της μέτρησης τα σημειώνουν στον πρώτο πίνακα του μέρους 1β (Εικόνα 14).

Τι μετράω	Μέτρηση	Μονάδα Μέτρησης	Αποτέλεσμα Μέτρησης
	1η	1 κομμάτι	
	2η	$\frac{1}{2}$ κομμάτι	
	3η	$\frac{1}{3}$ κομμάτι	
	4η	$\frac{1}{4}$ κομμάτι	

Εικόνα 14. Ημιδομημένος Πίνακας της 1β δραστηριότητας

Αφού συμπληρώσουν τον πίνακα τους ζητείται να τον παρατηρήσουν και να σκεφτούν τι σχέση έχει το αποτέλεσμα της 2ης μέτρησης, της 3ης και της 4ης με το αρχικό και να το εκφράσουν αυτό με λόγια. Δηλαδή, η ερευνήτρια τους λέει ότι πειράζει τη μονάδα μέτρησης και τους ζητάει να παρατηρήσουν πώς αλλάζει το αποτέλεσμα. Παρατηρεί αν οι μαθητές εκφράζουν ταυτόχρονη μεταβολή των δύο μεγεθών και αν την ορίζουν αριθμητικά. Αν οι μαθητές εκφράσουν τη μείωση της μονάδας μέτρησης με διαίρεση τους προτρέπει να την εκφράσουν με πολλαπλασιασμό.

Ο δεύτερος πίνακας (Εικόνα 15) είναι καλυμμένος για να μην προδίδει τη συνέχεια. Είναι έτσι δομημένος ώστε η αλλαγή της μονάδας μέτρησης, σε σχέση με την αρχική μονάδα, να εκφράζεται με πολλαπλασιασμό και οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν την αλλαγή του αποτελέσματος, σε σχέση με το αρχικό αποτέλεσμα, με πολλαπλασιασμό.

Τι μετράω	**Μέτρηση**	**Μονάδα μέτρησης**	**Αποτέλεσμα Μέτρησης** (Πόσες φορές χωράει;)	**Παρατηρώ πώς αλλάζει το αποτέλεσμα**
	1η	1 κομμάτι	……..	……..
	2η	$\frac{1}{2}$ x 1 κομμάτι		……x ……..
	3η	$\frac{1}{3}$ x 1 κομμάτι		……x ……..
	4η	$\frac{1}{4}$ x 1 κομμάτι		……x ……..

Εικόνα 15. Δομημένος Πίνακας της 1β Δραστηριότητας

Κάνει την αρχή η ερευνήτρια λέγοντας ότι αν πολλαπλασιαστεί η μονάδα μέτρησης με το $\frac{1}{2}$, και περιμένει να πουν οι μαθητές ότι το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με το 2 και να συνεχίσουν με τις υπόλοιπες μετρήσεις. Παρατηρείται σε ποιο σημείο οι μαθητές είναι ικανοί να το εκφράσουν με πολλαπλασιασμό και μετά από πόσες νύξεις, επίσης, αν το εκφράζουν ως πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο του αριθμού που πολλαπλασιάστηκε η μονάδα μέτρησης. Τους γίνεται μια νύξη για το αν μπορούν να διατυπώσουν κάποιον κανόνα. Στο τέλος τούς ζητείται να κάνουν μια πρόβλεψη για το πώς αλλάζει το αποτέλεσμα αν η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιαστεί με το $\frac{1}{10}$ και $\frac{1}{100}$.

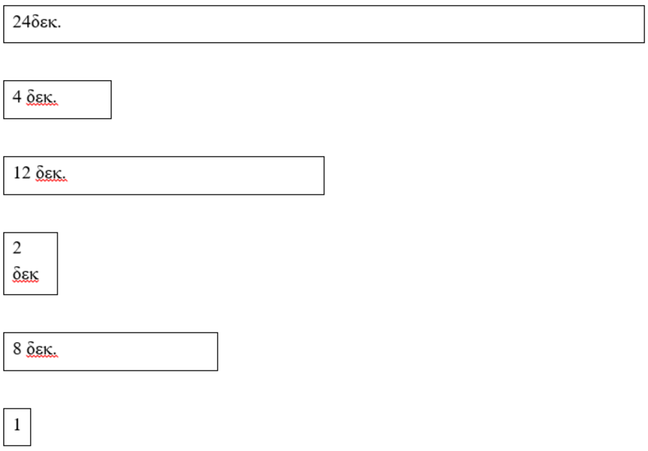
Στο μέρος 1γ επαναλαμβάνεται ακριβώς η ίδια διαδικασία με το β, με τη μόνη διαφορά ότι η μονάδα μέτρησης μεγαλώνει και γίνεται διπλάσια, τριπλάσια και τετραπλάσια. Οι γενικές προβλέψεις γίνονται με τη δεκαπλάσια και την εκατονταπλάσια μονάδα μέτρησης.

Στο τέλος της πρώτης δραστηριότητας οι μαθητές καλούνται να βγάλουν γενικό συμπέρασμα για το πώς αλλάζει το αποτέλεσμα της μέτρησης όταν αλλάζει η μονάδα μέτρησης. Σε αυτό το σημείο γίνονται ερωτήσεις από την ερευνήτρια για το πώς λέγονται οι δυο αριθμοί που πολλαπλασιάζεται η μονάδα μέτρησης και το αποτέλεσμα αντίστοιχα. Παρατηρείται αν γνωρίζουν ότι λέγονται αντίστροφοι, τους ζητείται να βρουν αντίστροφους φυσικού αριθμού, μοναδιαίου κλάσματος και μη μοναδιαίου κλάσματος.

Κατά τη διάρκεια της πιλοτικής συνέντευξης με τον πρώτο μαθητή παρατηρήθηκε δυσκολία στη χρήση του υλικού στο β υποέργο. Καθώς οι μονάδες μέτρησης μικραίνουν σταδιακά, καθιστούν τη μέτρηση δύσκολη διαδικασία. Για αυτό το λόγο επανασχεδιάστηκε το υλικό και χρησιμοποιήθηκε χάρτινη μεζούρα στην οποία ήταν σχεδιασμένη κάθε φορά η αντίστοιχη μονάδα μέτρησης.

$2^{η}$ δραστηριότητα

Στη $2^{η}$ δραστηριότητα συνδέεται η μέτρηση μήκους με τη διαίρεση, το μήκος που μετριέται με τον διαιρετέο, η μονάδα μέτρησης με τον διαιρέτη και το αποτέλεσμα της μέτρησης με το πηλίκο. Τα μήκη έχουν αριθμούς και οι μαθητές καλούνται να επαναλάβουν την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη δραστηριότητα συνδέοντας τη μέτρηση με πράξη και παρατηρώντας ταυτόχρονα τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη μεταβολή του διαιρέτη και του πηλίκου. Η δραστηριότητα χωρίζεται σε 3 μέρη μέρη (2α, 2β, 2γ).



Εικόνα 16. Υλικά δραστηριότητας 2α και 2β

Στο μέρος 2α και 2β, οι μαθητές καλούνται να δουλέψουν όπως και στην $1^{η}$ δραστηριότητα, αλλά αυτή τη φορά με αριθμούς που αναγράφονται στα υλικά της δραστηριότητας (Εικόνα 16). Συγκεκριμένα, τους δίνονται χάρτινες λωρίδες για να αναπαραστήσουν την κορδέλα και τους γίνεται γνωστό το μήκος της κορδέλας και το μήκος του κομματιού που χρειάζεται για να γίνει ο φιόγκος. Αρχικά, στο 2α, τους ζητείται να βρουν πόσοι φιόγκοι θα γίνουν και με ποια πράξη θα το έλυναν. Έπειτα, τους δίνονται οι λωρίδες για να επαληθεύσουν την απάντηση τους. Με τις λωρίδες μπορούν να δουλέψουν όπως θέλουν αυτοί. Είτε να πάρουν το κομμάτι και να μετρήσουν όλη τη λωρίδα με αυτό είτε με το μολύβι τους να σχεδιάσουν πάνω στη λωρίδα. Σε αυτή τη δραστηριότητα δεν τους δίνονται αντίγραφα του κομματιού για να τα τοποθετήσουν το ένα δίπλα στο άλλο και να κάνουν έτσι τη μέτρηση.

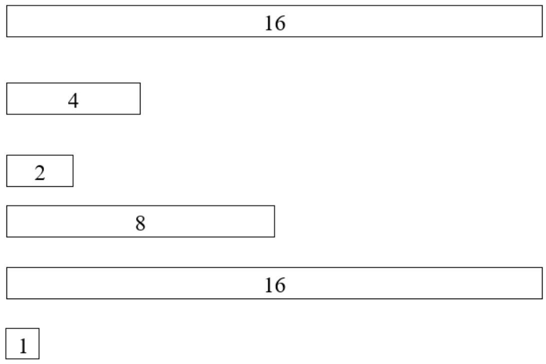
Στη συνέχεια, 2β, οι μαθητές πρέπει να κάνουν τέσσερις μετρήσεις, δυο με μονάδα μέτρησης μικρότερη από την αρχική και δυο με μονάδα μέτρησης μεγαλύτερη από την αρχική και να συμπληρώσουν τον πίνακα (Εικόνα 17), αλλά αυτή τη φορά πρέπει να συμπληρώνουν και την πράξη που έκαναν. Επίσης, οι μαθητές πρέπει να συμπληρώνουν τους αριθμούς και ταυτόχρονα τη σχέση που έχουν οι αριθμοί αυτοί με την αρχική μονάδα μέτρησης και το αρχικό αποτέλεσμα.

Σε αυτή τη δραστηριότητα ο πίνακας είναι ενιαίος για όλες τις μονάδες μέτρησης και η σειρά είναι τυχαία, Αφού συμπληρώσουν οι μαθητές τον πίνακα γίνεται η σύνδεση της μέτρησης με την πράξη της διαίρεσης. Η ερευνήτρια ρωτάει τους μαθητές ποιος είναι ο διαιρετέος, ο διαιρέτης και το πηλίκο στις διαιρέσεις που έκαναν.

Τι μετράω	Μονάδα μέτρησης	Αποτέλεσμα Μέτρησης	Με πράξη
 24 δεκ.	4 δεκ.	....	
	12 δεκ. ...... x 4 δεκ.	.... x	
	2 δεκ ...... x 4 δεκ.	.... x	
	8 δεκ ...... x 4 δεκ.	.... x	
	1 δεκ. ...... x 4 δεκ.	.... x	

Εικόνα 17. Δομημένος πίνακας Δραστηριότητας 2β

Στο μέρος 2γ, οι μαθητές παίρνουν πάλι χάρτινες λωρίδες, που αυτή τη φορά αναπαριστούν αριθμούς (Εικόνα 18) , οι οποίες από την πίσω μεριά είναι διαμερισμένες σε μονάδες (1).



Εικόνα 18. Υλικό Δραστηριότητας 2γ

Οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τον πίνακα (Εικόνα 19) αλλά χρησιμοποιώντας τους όρους διαιρετέος, διαιρέτης και πηλίκο. Οι μαθητές καλούνται να βρουν πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο.

Διαιρετέος	**Διαιρέτης**	**Πηλίκο**

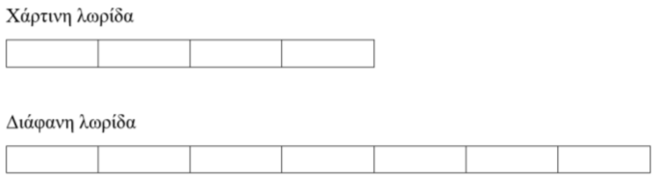
Εικόνα 19. Πίνακας Δραστηριότητας 2γ

Στο τέλος αυτής της δραστηριότητας καλούνται να καταλήξουν σε συμπέρασμα για το νόημα της διαίρεσης μέτρησης. Δηλαδή να συμπληρώσουν τις κατάλληλες λέξεις ώστε να εξηγούν ότι όταν διαιρούν μετρούν πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο.

Σε αυτό το σημείο, τους ζητείται να συγκρίνουν το νόημα της διαίρεσης που έδωσαν παραπάνω με αυτό που έδωσαν στην αρχική αξιολόγηση. Στόχος είναι να γίνει ξεκάθαρο στους μαθητές ότι υπάρχουν δυο διαφορετικές ερμηνείες για τη διαίρεση. Αυτή η ερώτηση συμπεριλήφθηκε στην παρέμβαση μετά την πιλοτική συνέντευξη.

3η δραστηριότητα

Στην 3η δραστηριότητα επεκτείνεται το προηγούμενο συμπέρασμα για τη διαίρεση μέτρησης στην περίπτωση που ο διαιρέτης είναι μεγαλύτερος από τον διαιρετέο πρώτον, για να ελεγχθεί αν οι μαθητές κατανόησαν ότι στη διαίρεση μετριέται πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο και όχι ο μικρότερος αριθμός στον μεγαλύτερο. Δεύτερον, στην πορεία της παρέμβασης έρχονται σε επαφή με διαίρεση κλασματικού αριθμού με φυσικού, επομένως πρέπει να έχει δοθεί πρωτύτερα η ερμηνεία αυτού.

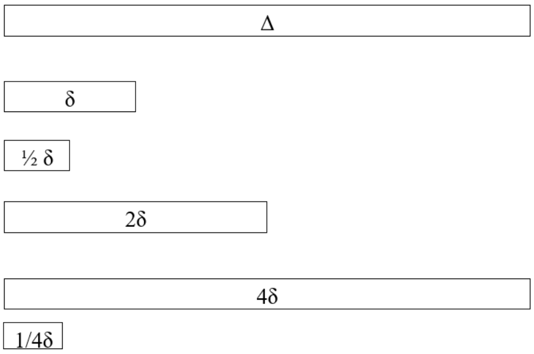


Εικόνα 20. Υλικά Δραστηριότητας 3

Οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν τι σημαίνει η διαίρεση 4:7. Η ερευνήτρια τους ρωτάει αν μπορούν να προβλέψουν αν το αποτέλεσμα θα είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο του 1. Στη συνέχεια τους δίνεται υλικό για το επαληθεύσουν. Οι μαθητές έχουν στη διάθεση τους μια χάρτινη λωρίδα που αναπαριστά τον διαιρετέο και μια διάφανη που αναπαριστά τον διαιρέτη (Εικόνα 20). Οι μαθητές βάζοντας την διάφανη λωρίδα πάνω από τη χάρτινη μπορούν να δουν το μέρος του διαιρέτη που εκφράζει με λόγο «πόσες φορές» χωράει ο διαιρέτης τους στον διαιρετέο.

4η δραστηριότητα

Στην τέταρτη δραστηριότητα γίνεται αναπαράσταση της διαίρεσης στη γενική περίπτωση ως μέτρηση. Στόχος της είναι οι μαθητές να μπορέσουν να γενικεύσουν όσα επεξεργάστηκαν στις προηγούμενες δραστηριότητες.



Εικόνα 21. Υλικά Δραστηριότητας 4

Σε αυτήν την δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να γενικεύσουν και να δουλέψουν με χάρτινες λωρίδες που πάνω τους αναγράφονται οι γενικευμένοι αριθμοί Δ και δ, με τη βοήθεια των οποίων αναπαρίσταται και η σχέση των επόμενων διαιρετών με τον αρχικό (Εικόνα 21). Οι μαθητές καλούνται πλέον να προβλέψουν συσχετίζοντας την αλλαγή στον διαιρέτη με την αλλαγή στο πηλίκο χρησιμοποιώντας τις λέξεις διαιρετέος, διαιρέτης και πηλίκο και συμπληρώνουν τον αντίστοιχο πίνακα (Εικόνα 22). Χρησιμοποιούν το υλικό για να κάνουν τις μετρήσεις και να επαληθεύσουν την πρόβλεψή τους.

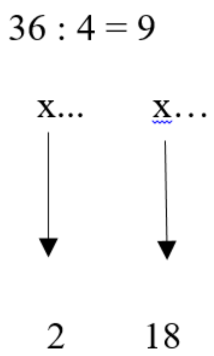
Διαιρετέος	Διαιρέτης	Πηλίκο
	δ	**π**
	$\frac{1}{2}$ **x δ**	**....x π**
Δ	**.... x δ**	**....x π**
	.... x δ	**....x π**
	.... x δ	**....x π**

Εικόνα 22. Πίνακας Δραστηριότητας 4

Στη συνέχεια τους ζητείται να επαληθεύσουν τον πίνακα στη γενική του μορφή με τον δεύτερο αριθμητικό πίνακα της δεύτερης δραστηριότητας (Εικόνα 19).

Στο τέλος καλούνται να συμπληρώσουν το συμπέρασμα που έβγαλαν και παραπάνω, πώς αλλάζει δηλαδή το πηλίκο όταν αλλάζει ο διαιρέτης, αλλά αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας τις λέξεις διαιρετέος, διαιρέτης και πηλίκο. Συμπληρώνουν, δηλαδή, τις κατάλληλες λέξεις ώστε να καταλήγουν ότι σε μια διαίρεση αν πολλαπλασιάσουν τον διαιρέτη με κάποιον αριθμό α τότε το πηλίκο πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφό του, δηλαδή, τον $\frac{1}{\alpha}$.

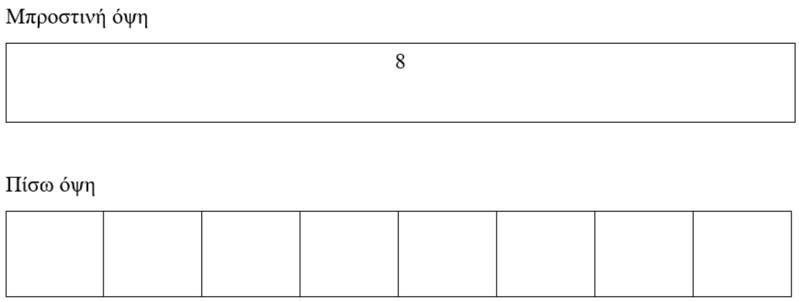
Σε αυτό το σημείο γίνονται κάποια παραδείγματα με τους μαθητές. Τους δίνει η ερευνήτρια μια γνωστή διαίρεση όπως το 36 : 4 και τους ζητάει να πουν ποιος είναι ο διαιρέτης και το πηλίκο. Στη συνέχεια τους λέει ότι θα αλλάξει τον διαιρέτη και θα τον κάνει 2 και τους ρωτάει ποιο είναι τώρα το πηλίκο. Στο τέλος τους ζητάει να παρατηρήσουν πώς άλλαξε το πηλίκο και αν αυτό μπορούν να το εκφράσουν με πολλαπλασιασμό. Σταδιακά σχεδιάζει το σχήμα της Εικόνας 23. Αν οι μαθητές δεν καταφέρουν να παρατηρήσουν τις σχέσεις, τους κάνει και άλλο παράδειγμα με άλλους αριθμούς.



Εικόνα 23. Σχήμα της Δραστηριότητας 4

5η δραστηριότητα

Η 5η δραστηριότητα σκοπό έχει να μεταφερθούν όσα επεξεργάστηκαν οι μαθητές παραπάνω στη διαίρεση με κλασματικό διαιρέτη. Στόχος της είναι να δοθεί το νόημα της μέτρησης στη διαίρεση με κλασματικό διαιρέτη, συγκεκριμένα με κλασματική μονάδα. Επίσης, στοχεύει στο να δοθεί νόημα στην εύρεση του αποτελέσματος είτε μέσω του υλικού είτε μέσω του συμπεράσματος που έβγαλαν οι μαθητές παραπάνω.



Εικόνα 24. Υλικά Δραστηριότητας 5

Στην πέμπτη δραστηριότητα οι μαθητές πρέπει να εξηγήσουν τι σημαίνει μια διαίρεση φυσικού αριθμού με κλασματική μονάδα $8 : \frac{1}{2}$. Στη συνέχεια πρέπει να βρουν το ακριβές αποτέλεσμα και να δικαιολογήσουν την απάντησή τους. Με όποιον τρόπο, υλικό ή κανόνα, δικαιολογήσουν τους ζητείται να επαληθεύσουν με τον αντίθετο.

Τους δίνεται μια χάρτινη λωρίδα με δυο όψεις, στη μία φαίνεται ο αριθμός και η άλλη είναι χωρισμένη σε μονάδες (1) (Εικόνα 24). Σε περίπτωση που δεν μπορούν να το χρησιμοποιήσουν, η ερευνήτρια τους υποστηρίζει λέγοντας να δουν πόσες φορές χωράει το 1 στο 8 και μετά το $\frac{1}{2}$. Τους υποστηρίζει στο να σκεφτούν ότι υπάρχει μια αρχική διαίρεση με διαιρέτη το 1, που έχει πηλίκο το 8 και μια δεύτερη διαίρεση με τον μισό διαιρέτη. Τους προτρέπει να σκεφτούν με τι πολλαπλασιάστηκε ο αρχικός διαιρέτης για να γίνει $\frac{1}{2}$ και με τι θα πολλαπλασιαστεί το αρχικό πηλίκο με βάση το συμπέρασμα που έβγαλαν στις προηγούμενες δραστηριότητες. Έτσι, οι μαθητές θα δώσουν νόημα στον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω».

6η δραστηριότητα

Η 6η δραστηριότητα είναι ακριβώς η ίδια με την προηγούμενη απλώς ο διαιρέτης είναι κλάσμα. Έχει τους ίδιους στόχους και χρησιμοποιεί τα ίδια υλικά.

7η δραστηριότητα

Στην 7η δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν τι σημαίνει μια διαίρεση κλάσματος με κλάσμα, να την υπολογίσουν και να εξηγήσουν πώς βρήκαν το αποτέλεσμα. Δεν τους γίνεται νύξη για το πώς να εργαστούν. Η ερευνήτρια τους αφήνει ελεύθερους να δικαιολογήσουν όπως θέλουν αυτοί την απάντησή τους.

Όπως ίσως έχει διαφανεί από την παρουσίαση των δραστηριοτήτων, μια σημαντική τους συνιστώσα είναι η έκφραση των μεταβολών στο ζεύγος μονάδα μέτρησης / αποτέλεσμα μέτρησης ή, αντίστοιχα, διαιρέτης / πηλίκο με χρήση του τελεστή της κάθε μεταβολής και να αναδειχθεί ότι πρόκειται για αντίστροφους αριθμούς. Προς αυτή την κατεύθυνση, οι πίνακες καταγραφής που δίνονται στα παιδιά (1^{η}, Δραστηριότητα, 2^{η} Δραστηριότητα, 4^{η} Δραστηριότητα) έχουν σημαντικό ρόλο. Οι πίνακες αυτοί είναι δύο ειδών. Το πρώτο είδος περιλαμβάνει τους ημιδομημένους πίνακες, στους οποίους εμφανίζονται οι τελεστές της μιας μεταβολής, αλλά τα παιδιά μπορούν να γράψουν τα αποτελέσματά τους σε όποια μορφή θέλουν (Εικόνα 14). Στο δεύτερο περιλαμβάνονται οι δομημένοι πίνακες, στους οποίους είναι ορατοί οι τελεστές και το σύμβολο του πολλαπλασιασμού στη μια μεταβολή και απαιτείται από τα παιδιά να εκφράσουν το αποτέλεσμα στην ίδια μορφή (Εικόνα 15).

Βασικό στοιχείο του ρόλου της ερευνήτριας ήταν να υποστηρίξει τα παιδιά στη μετάβαση από τον εκάστοτε ημιδομημένο, στον αντίστοιχο δομημένο πίνακα. Αυτό επιδιώχθηκε συστηματικά μέσω της λεκτικοποίησης των πληροφοριών στους πίνακες (π.χ., «*η αρχική μονάδα πολλαπλασιάστηκε με το ένα τρίτο*»), της αναδιατύπωσης ή της προτροπής για αναδιατύπωση προς τα παιδιά (π.χ. «*Η μονάδα τριπλασιάστηκε, δηλαδή πολλαπλασιάστηκε με το 3», «Μου είπες ότι το πηλίκο διαιρέθηκε με το τρία, μπορείς να το εκφράσεις αυτό με πολλαπλασιασμό;*).

Επιπλέον, η ερευνήτρια υποστήριζε συστηματικά τα παιδιά να συσχετίσουν τις δύο μεταβολές (π.χ. «Πείραξα τη μονάδα και άλλαξε το αποτέλεσμα. Πώς άλλαξε η μονάδα; Πώς άλλαξε το αποτέλεσμα; Παρατηρείς κάποια σχέση;», καθώς και να εκφράσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τις μεταβολές (π.χ., «*Μου είπες ότι το αποτέλεσμα θα μεγαλώσει. Μπορείς να πεις πόσο θα μεγαλώσει;*»

Τέλος, η ερευνήτρια προέτρεπε τα παιδιά να επιστρέψουν σε προηγούμενες παρατηρήσεις τους ή συμπεράσματα προκειμένου να επανεξετάσουν τις απαντήσεις τους, όταν έκαναν λάθος. Και σε αυτή την περίπτωση, οι πίνακες καταγραφής, αλλά και τα γραπτά συμπεράσματα λειτουργούσαν υποστηρικτικά.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1 Φάση Α και Φάση Γ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν κατά την Φάση Α και Φάση Γ (αρχική και τελική αξιολόγηση των μαθητών). Οι απαντήσεις των παιδιών εξετάστηκαν ως προς την ορθότητα (Λανθασμένη, Μερικώς σωστή, Σωστή). Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται με γαλάζιο χρώμα οι σωστές απαντήσεις των μαθητών, με πράσινο χρώμα αυτές που θεωρήθηκαν μερικώς σωστές και με γκρι χρώμα οι λανθασμένες. Στην τελευταία κατηγορία εντάχθηκαν και οι περιπτώσεις στις οποίες το παιδί δεν έδωσε καμία απάντηση.

Πίνακας 3. Αποτελέσματα της **Α** και **Γ Φάσης**

		Θοδωρής		**Δέσποινα**		**Κοσμάς**		**Μάριος**	
Έργα	Υποέργα	**Προ-Ε**	**Μετα-Ε**	**Προ-Ε**	**Μετα-Ε**	**Προ-Ε**	**Μετα-Ε**	**Προ-Ε**	**Μετα-Ε**
	Ε1α		-		-		-		
Ε1	Ε1β		-		-		-		-
	Ε2α								
Ε2	Ε2β								
Ε3									
	Ε4αi								
	Ε4αii		-		-		-	-	-
	Ε4βi			-		-		-	
Ε4	Ε4βii		-	-	-	-	-	-	-
	Ε5α	-		-		-		-	
Ε5	Ε5β								
	Ε6α								
	Ε6β								
	Ε6γ								
	Ε6δ								
	Ε6ε								
Ε6	Ε6στ								
	Ε7α		-		-		-		-
	Ε7β		-		-		-		-
	Ε7γi		-		-		-		-
Ε7	Ε7γii		-		-		-		-

Σωστή Μερικώς σωστή Λανθασμένη

Ε1 (Ε1α: «Δίνω νόημα στο 8:2», Ε1β: «Φτιάχνω πρόβλημα με το 8:2»)

Στη **Φάση Α**, στο (Ε1α) μόνο ο Θοδωρής έδωσε μια γενική απάντηση («μοιράζω το 8 σε 2 μέρη»). Ο Μάριος και ο Κοσμάς το εξήγησαν φτιάχνοντας ένα λεκτικό πρόβλημα. Η απάντηση αυτή θεωρήθηκε σωστή από την ερευνήτρια και ότι το υποέργο εκτελέστηκε με επιτυχία. Η Δέσποινα περιορίστηκε στο να το εκφράσει με κλάσμα $\frac{8}{2}$ και στη συνέχεια να πει «παίρνω τα 2 από τα 8» αλλά άμεσα να ακυρώσει την απάντησή της. Στη συνέχεια έδωσε την απάντηση «μέσα στην προπαίδεια του 2 υπάρχει το 8». Η συγκεκριμένη απάντηση θεωρήθηκε λανθασμένη.

Στο (Ε1β) («Φτιάχνω πρόβλημα με το 8:2»), όλοι οι μαθητές κατάφεραν να απαντήσουν με επιτυχία και να φτιάξουν ένα λεκτικό πρόβλημα που να λύνεται με αυτήν την πράξη. Οι τέσσερις μαθητές στην πράξη αυτή έδωσαν το νόημα της διαίρεσης μερισμού. Στο λεκτικό πρόβλημα που κατασκεύασαν χρησιμοποίησαν διακριτές ποσότητες οι οποίες έπρεπε να μοιραστούν. Το πρόβλημα που έφτιαξαν ήταν του τύπου «έχω 8 καραμέλες και θέλω να τις μοιράσω σε 2 παιδιά, πόσες καραμέλες θα πάρει το κάθε παιδί;» με κάποιες αμελητέες παραλλαγές το καθένα. Το συγκεκριμένο έργο δεν υπήρξε στην τελική δραστηριότητα.

Ε2 (Ε2α: «Δίνω νόημα στο 8: $\frac{1}{2}$», Ε2β: «Φτιάχνω πρόβλημα με το 8: $\frac{1}{2}$»)

Στη **Φάση Α**, όπως φαίνεται από τον Πίνακα 3, κανένα από τα παιδιά δεν μπόρεσε να εξηγήσει τι σημαίνει 8:$\frac{1}{2}$ (Ε2α), ούτε να διατυπώσει αντίστοιχο πρόβλημα (Ε2β). Ο Θοδωρής και η Δήμητρα περιορίστηκαν στο να «διαβάσουν φωναχτά» την αριθμητική παράσταση, λέγοντας «διαιρώ το 8 με το μισό από κάτι», «8 δια το μισό», αντίστοιχα.

Ο Κοσμάς ξεκίνησε ερμηνεύοντας λανθασμένα την παράσταση. Στη συνέχεια προσπάθησε να προσαρμόσει το πρόβλημα μερισμού που είχε προτείνει στο Ε1, καταλήγοντας σε αδιέξοδο. Τελικά, επανήλθε στην αρχική λανθασμένη του ερμηνεία:

> *Οχτώ δια μισό, δηλαδή 4 (…)Το* $\frac{1}{2}$ *είναι το μισό, το 8 είναι οι καραμέλες στο προηγούμενο, άρα…δε γίνεται μισό παιδί (…) Αυτό το έχω*

καταλάβει ,αλλά δεν μπορώ να κάνω πρόβλημα, 8: $\frac{1}{2}$ είναι το μισό δηλαδή το 4..

Παρόμοια με τον Κοσμά, ο Μάριος προσπάθησε αρχικά να προσαρμόσει το δικό του πρόβλημα διαίρεσης μερισμού, για να διαπιστώσει άμεσα ότι αυτό δεν έχει νόημα. Στη συνέχεια διατύπωσε ένα σωστό πρόβλημα διαίρεσης μέτρησης, ωστόσο ακύρωσε την απάντησή του, σχεδόν πριν τελειώσει την πρότασή του:

Έχουμε 8 σοκολάτες και θέλουμε να τις κόψουμε μισές, πόσα μισά κομμάτια είναι; Όχι, όχι, δεν πάει αυτό!

Η απάντηση του Μάριου θεωρήθηκε μερικώς επιτυχής γιατί έκανε μια σωστή προσπάθεια να διατυπώσει ένα κατάλληλο λεκτικό πρόβλημα παρόλο που τελικά την ακύρωσε.

Στη **Φάση Γ** και οι τέσσερις μαθητές εξήγησαν τι σημαίνει 8:$\frac{1}{2}$ (Ε2α) με βάση τη μέτρηση («*σημαίνει πόσες φορές χωράει το μισό στο 8*»). Ο Κοσμάς αρχικά έφτιαξε ένα λεκτικό πρόβλημα (Ε2β) για να μπορέσει να το εξηγήσει:

Έχουμε μια σοκολάτα και τη χωρίζουμε σε 8 κομμάτια (...) και όπως είναι το ένα κομμάτι θα το κόψουμε άλλη μια φορά στη μέση το κάθε κομμάτι και θα δούμε πόσα κομμάτια έχει τώρα η σοκολάτα.

και στη συνέχεια απάντησε γενικά όπως οι άλλοι τρεις μαθητές.

Τα υπόλοιπα παιδιά δυσκολεύτηκαν στην κατασκευή προβλήματος (Ε2β). Η Δέσποινα ξαναγύρισε στο ερώτημα στο τέλος και διατύπωσε ένα σωστό πρόβλημα (Ένας τοίχος έχει μήκος 8μ.. Θέλουμε να τον καλύψουμε με πλακάκια μήκους $\frac{1}{2}$ μ.. πόσα πλακάκια θα χρειαστούμε;), μάλλον εκμεταλλευόμενη τα προβλήματα που υπήρχαν παρακάτω στην τελική δραστηριότητα.

Ο Θοδωρής και ο Μάριος δεν κατάφεραν να φτιάξουν σωστό πρόβλημα, προσπαθώντας να προσαρμόσουν ένα λεκτικό πρόβλημα μερισμού, που είχαν φτιάξει χρησιμοποιώντας φυσικούς αριθμούς, επιχειρώντας να μοιράσουν τις 8 σοκολάτες, ο πρώτος στα μισά παιδιά της τάξης και ο δεύτερος σε 4 παιδιά, αντίστοιχα.

Ε3 («Δίνω νόημα στο 3 : 5»)

Στη **Φάση Α**, τα τρία αγόρια εξήγησαν το 3:5 ως διαίρεση μερισμού (π.χ., «μοιράζω 3 πίτσες σε 5 παιδιά»), ενώ η Δέσποινα εξέφρασε διαφορετικά την αριθμητική παράσταση λέγοντας «*είναι ένα κλάσμα* $\frac{3}{5}$». Και οι τέσσερις μαθητές είχαν την τάση να βρουν το αποτέλεσμα ή να δείξουν πώς εκτελούν τον αλγόριθμο.

Στη **Φάση Γ**, ο Θοδωρής και η Δέσποινα, ερμήνευσαν τη διαίρεση αυτή ως διαίρεση μέτρησης αυθόρμητα. Ο Μάριος και ο Κοσμάς αρχικά πρότειναν ένα πρόβλημα μερισμού, αλλά όταν τους ζητήθηκε, ήταν σε θέση να αποδώσουν και το νόημα της διαίρεσης μέτρησης.

Ε4 (Ε4α: «Υπολογίζω το 8 : $\frac{1}{2}$ και εξηγώ πώς το υπολόγισα», Ε4β: Υπολογίζω το 8: $\frac{2}{3}$ και εξηγώ πώς το υπολόγισα»)

Στη **Φάση Α,** στο (Ε4αi) ο Θοδωρής και η Δέσποινα επιχείρησαν να υπολογίσουν το 8 : $\frac{1}{2}$ με τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης, κάνοντας το $\frac{1}{2}$ δεκαδικό αριθμό. Κανείς από τους δύο δε θυμόταν πώς γίνεται η διαίρεση με διαιρέτη δεκαδικό αριθμό συνεπώς κανείς δεν έδωσε απάντηση. Η Δέσποινα δε σκέφτηκε άλλον τρόπο να προχωρήσει.

Αντίθετα, ο Θοδωρής σαν εναλλακτικό τρόπο σκέφτηκε «*να κάνω 0,5 + 0,5 μέχρι να βρω 8*», κάτι που έκανε αλλά βρήκε λανθασμένο αποτέλεσμα. Επομένως, η απάντησή του θεωρήθηκε λανθασμένη στο Ε4αi, αλλά σωστή στο Ε4αii («εξηγώ πώς υπολόγισα»).

Ο Μάριος εκτέλεσε τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», αλλά δεν μπόρεσε να εξηγήσει, λέγοντας πως «*ο κύριος μας έμαθε αυτό…έτσι το κάνουμε*».

Ο Κοσμάς ερμήνευσε λανθασμένα την αριθμητική παράσταση «*8 δια το μισό του 8 που είναι 4*» και έγραψε «*8:* $\frac{1}{2}$*= 8:2 =4*», στη συνέχεια αναρωτήθηκε αν είναι 8:2 ή 8:4 αλλά κατέληξε στην αρχική του απάντηση.

Τα αντίστοιχα υποέργα για την πράξη 8: $\frac{2}{3}$ (Ε4βi, Ε4βii) ζητήθηκαν μόνο από τον Θοδωρή, που μπόρεσε να δώσει εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού στο Ε4αi. Στην περίπτωση αυτή, όμως, ο Θοδωρής δεν εφάρμοσε τον εναλλακτικό του τρόπο. Επανήλθε στην αρχική του στρατηγική και αποπειράθηκε να μετατρέψει το $\frac{2}{3}$ σε δεκαδικό αριθμό, ώστε να εκτελέσει κάθετη διαίρεση. Δεν κατάφερε να ολοκληρώσει τον αλγόριθμο της διαίρεσης.

Στη **Φάση Γ** στα ίδια υποέργα ο Θοδωρής, η Δέσποινα και ο Μάριος εκτέλεσαν τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» και έδωσαν την εξήγησή τους με βάση την αρχή της αντιστάθμισης. Για παράδειγμα:

> *(…)το αποτέλεσμα από το 8:1, θα το πολλαπλασιάσω με τον αντίστροφο αυτού (*διαιρέτη*).* (Μάριος)
>
> *(…) ο αρχικός (*διαιρέτης*) ήταν 1, τον πολλαπλασιάσαμε με το* $\frac{1}{2}$ *και έτσι το πηλίκο θα πολλαπλασιαστεί με τα* $\frac{2}{1}$. (Δέσποινα)

Ο Κοσμάς ήταν ο μόνος μαθητής που για να βρει το αποτέλεσμα χρησιμοποίησε υλικό και συγκεκριμένα χάρτινες λωρίδες. Στο Ε4α χρησιμοποίησε τη χάρτινη λωρίδα, η οποία ήταν ήδη χωρισμένη σε οκτώ κομμάτια, τα χώρισε στη μέση και με μεγάλη ευκολία μέτρησε πόσα μισά κομμάτια χωράνε μέσα σε ολόκληρη τη λωρίδα.

Παρόμοια, στο Ε4β χρησιμοποίησε τη χάρτινη λωρίδα, που ήταν ήδη χωρισμένη σε οκτώ κομμάτια, χώρισε τα κομμάτια στα τρία και έπειτα τα μέτρησε ανά δύο. Κατέληξε ότι για να βρει το αποτέλεσμα πρέπει να πολλαπλασιάσει με το 3 και να διαιρέσει με το 2, δηλαδή $8 : \frac{2}{3} = 8x3:2$. Στη συνέχεια με νύξη από την ερευνήτρια παρατήρησε ότι αυτό είναι πολλαπλασιασμός με το κλάσμα $\frac{3}{2}$, άρα πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο.

Ε5 («Εξηγώ τον αλγόριθμο "αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω"»)

Στη **Φάση Α** στο πέμπτο έργο (Ε5β) της Φάσης Α «Εξηγώ τον αλγόριθμο αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» οι τρεις από τους τέσσερις μαθητές δεν έδωσαν καθόλου απάντηση.

Ο Θοδωρής εξέφρασε μια παρανόηση που είχε:

> *τα κλάσματα δεν μπορούν να διαιρεθούν επειδή είναι ήδη μια διαίρεση.*

Τα τρία αγόρια τόνισαν ότι δεν τους το έχει πει ο/η εκπαιδευτικός ποτέ αυτό, ενώ η Δέσποινα δεν δικαιολογήθηκε.

Το αντίστοιχο έργο «Εξηγώ τον αλγόριθμο αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» της Φάσης Γ αποτελούταν από δύο υποέργα. Στο πρώτο υποέργο (Ε5α) ο Θοδωρής και η Δέσποινα κατάφεραν να εξηγήσουν τον αλγόριθμο, ο πρώτος αυθόρμητα και η δεύτερη με μια νύξη από την ερευνήτρια. Και των δύο οι προσπάθειες θεωρήθηκαν επιτυχημένες. Ο Μάριος χρειάστηκε περισσότερες από μία, βοηθητικές ερωτήσεις για να μπορέσει να εκφράσει γραπτά τη σκέψη του για αυτό η προσπάθειά του θεωρήθηκε μερικώς επιτυχημένη. Ο Κοσμάς ήταν ο μόνος μαθητής που για να βρει το αποτέλεσμα και να δικαιολογήσει τη σκέψη του χρησιμοποίησε υλικό και συγκεκριμένα χάρτινες λωρίδες όπως προαναφέρθηκε. Η προσπάθειά του θεωρήθηκε επιτυχημένη.

Η εξήγηση που έδωσαν τα τρία παιδιά ήταν το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν από όλη την παρέμβαση. Δηλαδή, ότι είχαν μια αρχική διαίρεση 8:1= 8, στη συνέχεια πολλαπλασίασαν τον διαιρέτη με το $\frac{1}{2}$ για να έχουν τη διαίρεση 8:$\frac{1}{2}$, άρα το πηλίκο θα πολλαπλασιαστεί με τον αντίστροφο του $\frac{1}{2}$, το 2. Άρα, το 8: $\frac{1}{2}$ = 8 x 2=16.

Συγκεκριμένα ο Θοδωρής είπε:

> *Πολλαπλασιάζω τον διαιρέτη με το* $\frac{1}{2}$ *και πολλαπλασιάζω το πηλίκο με τον αντίστροφο του* $\frac{1}{2}$.

Ο Κοσμάς χρησιμοποίησε τη χάρτινη λωρίδα χωρίζοντας το κάθε κουτάκι στη μέση για να μετρήσει πόσες φορές χωράει το μισό κομμάτι σε όλη τη λωρίδα λέγοντας:

> *(...) πως ήταν η λωρίδα τη χωρίσαμε σε άλλα(...)το κάναμε επί 2(...)το ένα κομμάτι το σπάσαμε στη μέση.*

Στο δεύτερο υποέργο (Ε5β) οι τρεις μαθητές την ερμηνεία την έδωσαν αυθόρμητα χωρίς κάποιον υπαινιγμό από την ερευνήτρια. Η στρατηγική που ακολουθήθηκε από τον Κοσμά ταυτίζεται με αυτήν που ακολούθησε στο προηγούμενο υποέργο. Χρησιμοποίησε τη χάρτινη λωρίδα και μέτρησε πόσα $\frac{2}{3}$ του αρχικού κομματιού χωράνε μέσα σε ολόκληρη τη λωρίδα. Οι εξηγήσεις των τεσσάρων παιδιών λαμβάνονται ως σωστές.

Ε6 («Επιλέγω τα πρόβλημα που λύνονται με την πράξη 5:$\frac{1}{2}$»)

Στη **Φάση Α**, όλοι οι μαθητές επέλεξαν ως σωστό λεκτικό πρόβλημα το «Μοιράζω το αλεύρι», το οποίο ήταν λανθασμένη επιλογή, ενώ κανείς δεν επέλεξε το «Φτιάχνω πετσέτες» και το «Μετράω πλακάκια» που ήταν σωστές επιλογές.

Το «Μετράω μισάωρα» το επέλεξε ως σωστό ο Θοδωρής και ο Μάριος, ενώ το «Μετράω μπουκάλια», η Δέσποινα και ο Μάριος, οι οποίοι έκαναν σωστή επιλογή και στο «Κόστος τυριού».

Αντίθετα, στην **φάση Γ** απάντησαν σωστά και οι τέσσερις μαθητές στο «Κόστος τυριού», στο «Μετράω μπουκάλια» και στο «Μετράω πλακάκια». Η Δέσποινα ήταν η μόνη που δεν απάντησε σωστά στο «Μοιράζω το αλεύρι», ενώ ο Μάριος ήταν ο μόνος που δεν απάντησε σωστά στο «Μετράω μισάωρα» σε αντίθεση με τον προέλεγχο που είχε δώσει σωστή απάντηση. Στο «Φτιάχνω πετσέτες» ο Μάριος και ο Κοσμάς έδωσαν σωστές απαντήσεις.

Ο Κοσμάς ήταν ο μόνος μαθητής που φανέρωσε τη στρατηγική που ακολούθησε για να επιλέξει τα σωστά προβλήματα. Σκέφτηκε το αποτέλεσμα της πράξης αυτής και με βάση αυτό, επέλεξε. Στην αρχική αξιολόγηση ήταν σίγουρος πως το αποτέλεσμα είναι 2,5, συνεπώς επέλεξε όλα τα λανθασμένα προβλήματα ως σωστά. Αντίθετα, στην τελική αξιολόγηση το αποτέλεσμα το σκέφτηκε 10 και επέλεξε όλα τα σωστά προβλήματα.

Επιπλέον, σε ένα λανθασμένο πρόβλημα έκανε στοχευμένη υπόδειξη για το πώς έπρεπε να ήταν γραμμένο για να είναι σωστό. Συγκεκριμένα, στο πρόβλημα «Μοιράζω το αλεύρι» είπε:

> *Εδώ όμως δεν πρέπει να πει πόσους κουβάδες θα χρειαστούμε για να είναι σωστό;*

Ήταν ο μόνος μαθητής που είχε 100% αποτυχία στην αρχική αξιολόγηση και 100% επιτυχία στην τελική αξιολόγηση.

Οι υπόλοιποι μαθητές δεν αναφέρθηκαν στον τρόπο που σκέφτηκαν για να επιλέξουν. Όλοι οι μαθητές παρουσίασαν βελτίωση στην τελική αξιολόγηση.

Ε7 (Ε7α: «Πώς βρίσκω το 5πλάσιο του 30», Ε7β: «Πώς βρίσκω το ένα πέμπτο του 30», Ε7γ: «Συμφωνείς με το συμμαθητή σου;»)

Στην **Φάση Α,** στο Ε7α, όλοι οι μαθητές απάντησαν με τον ίδιο τρόπο, συγκεκριμένα όλοι επέλεξαν τον πολλαπλασιασμό του 5 με το 30 ως την κατάλληλη πράξη για να βρεθεί το πενταπλάσιο και προφανώς συμφώνησαν με τον υποθετικό μαθητή του Ε7γi.

Αντίθετα, στο Ε7β οι απαντήσεις ποικίλλουν. Η Δέσποινα απευθείας απάντησε ότι θα έκανε πολλαπλασιασμό, το $\frac{1}{5}$ με το 30. Ο Μάριος αυθόρμητα πρότεινε τη διαίρεση του 30 με το $\frac{1}{5}$., αλλά αμέσως το ξανασκέφτηκε και κατέληξε στο 30:5.

Παρόμοια με τον Μάριο, ο Θοδωρής αρχικά πρότεινε τη διαίρεση του 30 με το $\frac{1}{5}$, αφού πρώτα ήθελε να μετατρέψει το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό. Αφού ρωτήθηκε τι σημαίνει το $\frac{1}{5}$ του 30, κατάλαβε ότι πρέπει να χωρίσει το 30 στα 5 και να πάρει το 1, άρα κατέληξε ότι θα έκανε 30:5.

Ο Κοσμάς προσπάθησε να φτιάξει ένα ισοδύναμο κλάσμα με το $\frac{1}{5}$ με παρονομαστή το 30, αφού του ξαναδιατυπώθηκε το ερώτημα κατέληξε μόνος του ότι θα έκανε 30:5.

Η απάντηση του Θοδωρή θεωρήθηκε μερικώς σωστή, γιατί χρειάστηκε υποστήριξη από την ερευνήτρια.

Τα τρία αγόρια που κατέληξαν ότι θα το έβρισκαν με διαίρεση ερωτήθηκαν αν θα μπορούσαν να εκφράσουν αυτή τη διαίρεση με πολλαπλασιασμό. Και οι τρεις αποκρίθηκαν αναφερόμενοι στο γινόμενο 6 x 5=30. Μόνο ο Θοδωρής το ξανασκέφτηκε και απάντησε 30 επί $\frac{1}{5}$.

Στο Ε7γii, ο Θοδωρής και η Δέσποινα, οι οποίοι το εξέφρασαν ως πολλαπλασιασμό στο προηγούμενο υποέργο, συμφώνησαν με τον υποθετικό μαθητή και δε θέλησαν να το ελέγξουν κάνοντας τις πράξεις. Ο Μάριος και ο Κοσμάς, από την άλλη μεριά, διαφώνησαν και χρειάστηκε να το ελέγξουν με πράξεις για να επιβεβαιωθούν.

Τέλος, τους έγινε η ερώτηση αν ξέρουν πώς λέγονται αυτοί δύο αριθμοί, το 5 και το $\frac{1}{5}$. Οι τρεις μαθητές απάντησαν φυσικός και κλάσμα, ενώ κανείς τους δεν ήξερε ότι λέγονται αντίστροφοι και όλοι είπαν ότι δεν το έχουν ακούσει ποτέ παλιότερα. Η

Δέσποινα απάντησε πως ξέρει ότι έχουν κάποια σχέση και κάπως λέγονται, αλλά δεν το θυμάται.

Συνοψίζοντας:

Στη Φάση Α, και τα τέσσερα παιδιά φάνηκε να έχουν λιγοστούς πόρους κατανόησης της διαίρεσης κλασμάτων. Καταρχάς, είναι φανερό ότι η διαίρεση μερισμού ως «δίκαιη μοιρασιά» ήταν το πρωταρχικό μοντέλο, μέσω του οποίου αποδίδουν νόημα στην πράξη, με τον Κοσμά να εκφράζει ρητά την κατάρρευση του νοήματος αυτού στην περίπτωση που ο διαιρέτης είναι μικρότερος από τη μονάδα (*δε γίνεται να μοιράσεις 8 καραμέλες σε μισό παιδί*). Επομένως, όλα δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν ή να κατασκευάσουν προβλήματα που αντιστοιχούν σε διαίρεση με διαιρέτη μικρότερο της μονάδας.

Για τον Μάριο και τον Θοδωρή, υπήρχαν ενδείξεις ότι ανατρέχουν στο μοντέλο της διαίρεσης μέτρησης, αλλά πολύ διστακτικά και με περιορισμούς. Συγκεκριμένα, ο Μάριος προτείνει το πρόβλημα «πόσες μισές σοκολάτες είναι οι 8 σοκολάτες;» και το αποσύρει άμεσα. Ο Θοδωρής, μετράει πόσες φορές χωράει το $\frac{1}{2}$ (ως 0,5) στο 8 με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, αλλά δεν επιχειρεί να εφαρμόσει την ίδια στρατηγική με διαιρέτη το $\frac{2}{3}$.

Όσον αφορά τους τυπικούς αλγορίθμους της διαίρεσης, κανένα από τα παιδιά δεν ανέφερε αυτόν του «κοινού παρονομαστή» (παρά το γεγονός ότι σε αυτόν δίνεται έμφαση στο εγχειρίδιο της Ε΄ Δημοτικού). Μόνο ο Μάριος θυμόταν και μπορούσε να εφαρμόσει τον «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» - ο Θοδωρής όχι, αν και τον είχε επαναλάβει στη Στ΄ Δημοτικού. Όπως ήταν αναμενόμενο, κανένα από τα παιδιά δεν ήταν σε θέση να τον εξηγήσει.

Κανένα παιδί δεν ανακάλεσε τον όρο «αντίστροφος» και μόνο η Δέσποινα ανακάλεσε ότι κάποια σχέση έχουν δυο αριθμοί της μορφής ν, $\frac{1}{\nu}$, χωρίς να μπορεί να προσδιορίσει ποια.

Η Δέσποινα ήταν και η μόνη που επικαλέστηκε τον πολλαπλασιασμό ως την πράξη με την οποία μπορεί να υπολογιστεί τόσο ένα πολλαπλάσιο, όσο και ένα υποπολλαπλάσιο ενός αριθμού. Τα τρία αγόρια επικαλέστηκαν τον πολλαπλασιασμό στην πρώτη και τη διαίρεση, στη δεύτερη. Αξίζει να επισημανθεί ότι για τον Θοδωρή και τον Κοσμά, ούτε αυτή η εναλλακτική της διαίρεσης ήταν διαθέσιμη άμεσα.

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι μετά την ολοκλήρωση της φάσης Γ οι μαθητές ερωτήθηκαν τι έχουν καταλάβει από την παρέμβαση. Των τριών μαθητών, εκτός του Κοσμά, συμπίπτουν οι απόψεις τους. Η απάντησή τους είναι ότι κατάλαβαν γιατί κάνουν πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο όταν εκτελούν μια διαίρεση με κλάσματα. Ο Κοσμάς αναφέρει ότι μετά την παρέμβαση έμαθε τον τρόπο που γίνεται η διαίρεση κλασμάτων και ότι δεν τον ήξερε από την προηγούμενη χρονιά. Όλοι οι μαθητές αναφέρουν ότι αυτά που έκαναν στην παρέμβαση τους δυσκόλεψαν λίγο.

Μόνο ένας μαθητής, ο Θοδωρής, αναφέρει ότι έμαθε πως σε μια διαίρεση μετριέται πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο. Ο ίδιος μαθητής αναγνωρίζει ότι ακόμα δεν έχει κατανοήσει πώς να δημιουργήσει ο ίδιος του ένα πρόβλημα που να λύνεται με διαίρεση κλασμάτων. Ο Κοσμάς είναι ο μοναδικός μαθητής, που σε αυτά που κατανόησε προσθέτει, την έννοια του αντίστροφου. Επίσης, τονίζει ότι οι χάρτινες λωρίδες είναι αυτές που τον βοήθησαν πολύ να κατανοήσει τη διαίρεση.

3.2 Φάση Β: Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης

Στην ενότητα αυτή θα περιγραφεί η πορεία της Φάσης Β, για κάθε μαθητή, με βάση τα δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά τη βιντεοσκόπηση,

Θοδωρής

1η δραστηριότητα. Ο Θοδωρής σκέφτηκε αμέσως πώς να χρησιμοποιήσει το υλικό για να απαντηθεί το πρώτο ερώτημα της δραστηριότητας. Βάζοντας το ένα κομμάτι δίπλα στο άλλο μέχρι να καλύψει όλη την κορδέλα βρήκε το αποτέλεσμα.

Ο μαθητής στην πρώτη δραστηριότητα προβλέπει άμεσα την κατεύθυνση της μεταβολής του αποτελέσματος καθώς μεταβάλλεται η μονάδα μέτρησης. Η πρόβλεψη του αποτελέσματος γίνεται σωστά οποιαδήποτε κατεύθυνση αν έχει η μεταβολή της μονάδας μέτρησης. Ο μαθητής δικαιολογεί την απάντησή του κάνοντας αντιστοιχία ένα προς πολλά. Παραδείγματος χάρη έχοντας το $\frac{1}{3}$ της αρχικής μονάδας μέτρησης, τοποθετεί κάτω από την αρχική μονάδα μέτρησης τρία κομμάτια από την καινούρια μονάδα μέτρησης, όπως φαίνεται στην Εικόνα 25 και λέει *«χρειάζομαι τρία για να κάνω ένα»* και πολλαπλασιάζει το αρχικό αποτέλεσμα με το τρία. Ακολουθεί την ίδια διαδικασία σε όλες τις μετρήσεις και παρατηρεί από την πρώτη μέτρηση την πολλαπλασιαστική σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα μεγέθη.

Εικόνα 25. Αντιστοιχία ένα προς πολλά για να δώσει δικαιολογήσει την απάντηση

Όσο μεγαλώνει η μονάδα μέτρησης ακολουθεί ακριβώς την ίδια διαδικασία. Για παράδειγμα η μονάδα μέτρησης γίνεται τριπλάσια και ο μαθητής βάζει 3 κομμάτια από την αρχική μονάδα μέτρησης κάτω από την καινούρια και λέει *«είναι τριπλάσια άρα το αποτέλεσμα δια 3, σίγουρα»*.

Ο Θοδωρής από την αρχική μέτρηση παρατηρεί την ταυτόχρονη μεταβολή της μονάδας μέτρησης και του αποτελέσματος. Χρησιμοποιώντας κατάλληλη διατύπωση εκφράζει την παρατήρησή του:

> *(...)Τη μίκρυνα τη μονάδα μέτρησης, την έκανα δια 2, ενώ το αποτέλεσμα μεγάλωσε επί 2. Σμικρύνθηκε 3 φορές πολλαπλασιάστηκε 3 φορές και μίκρυνε 4 και πολλαπλασίασα 4.*

Όταν του ζητείται να το εκφράσει με πολλαπλασιασμό παρατηρεί ότι το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με τον παρονομαστή του κλάσματος, με το οποίο πολλαπλασιάζεται η μονάδα μέτρησης. Δεν παρατηρεί ότι είναι ο αντίστροφος αριθμός γιατί δεν τον γνωρίζει. Δεν ήξερε ποιοι αριθμοί ονομάζονται αντίστροφοι ούτε πώς να βρει τον αντίστροφο. Παρατηρώντας την ταυτόχρονη μεταβολή της μονάδας μέτρησης και του αποτελέσματος εκφράζεται με παρόμοιο τρόπο όταν η μεταβολή της μονάδας μέτρησης είναι προς την αντίθετη κατεύθυνση.

> *(...)Όσες φορές πολλαπλασιάζω τη μονάδα, τόσες φορές διαιρώ το αποτέλεσμα.*

Μετά από παρότρυνση της ερευνήτριας ο μαθητής εξέφρασε την ίδια άποψη με πολλαπλασιασμό:

> *(...)Όσες φορές πολλαπλασιάζω τη μονάδα, πολλαπλασιάζω με το κλάσμα το αποτέλεσμα(...) πολλαπλασιάζω με τον αντίστροφο.*

Αφού είχε προηγηθεί παρέμβαση της ερευνήτριας ως προς την έννοια του αντίστροφου ο μαθητής καταφέρνει να τον αναγνωρίσει.

Ο Θοδωρής στις γενικές προβλέψεις παρουσιάζει μια δυσκολία λέγοντας «*δε μου δίνει αριθμούς για να το βρω*». Μετά από επισήμανση της ερευνήτριας ότι δεν του ζητάει να βρει το αποτέλεσμα αλλά πώς θα αλλάξει το αρχικό αποτέλεσμα κάνει σωστές προβλέψεις, αλλά με μεγαλύτερη μονάδα μέτρησης εκφράζεται με διαίρεση για το αποτέλεσμα. Μετά από παρότρυνση να εκφραστεί με πολλαπλασιασμό, το καταφέρνει χωρίς δυσκολία.

Ο μαθητής στο τέλος της δραστηριότητας καταλήγει στο συμπέρασμα ότι όταν η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφό του, αλλά δεν μπορεί να βρει ποιος είναι ο αντίστροφος του όταν ο αριθμός εκφράζεται στη γενική του μορφή.

2η δραστηριότητα. Σε αυτήν την δραστηριότητα ο Θοδωρής συνδέει απρόσκοπτα την πράξη της διαίρεσης με τη μέτρηση, τον διαιρετέο με όλη την κορδέλα, τον διαιρέτη με τη μονάδα μέτρησης και το αποτέλεσμα της μέτρησης με το πηλίκο.

Στη δεύτερη μέτρηση, ενώ ο μαθητής προβλέπει σωστά το αποτέλεσμα της μέτρησης, συμπληρώνει λανθασμένα τον πίνακα, τοποθετώντας τους αριθμούς έτσι ώστε αυτό που παθαίνει η μονάδα μέτρησης να το παθαίνει και το αποτέλεσμα. Δηλαδή, η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάζεται με το $\frac{1}{2}$ και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με το $\frac{1}{2}$. Παρουσιάζει ως σωστή μια παράλληλη μείωση της μονάδας μέτρησης και του αποτελέσματος παρόλο που σε όλες τις άλλες μετρήσεις παρατηρεί ότι υπάρχει αντίστροφη σχέση στα δύο αυτά μεγέθη.

Τέλος, ο Θοδωρής μέχρι και την τελευταία μέτρηση παρουσιάζει δυσκολία στη συμπλήρωση του πίνακα στα σημεία που απαιτείται πολλαπλασιασμός με κλάσμα. Δεν παρατηρήθηκε κάποια διαφορά αν ο πολλαπλασιασμός με το κλάσμα απαιτούταν στη μεταβολή της αρχικής μονάδας μέτρησης ή στη μεταβολή του αρχικού αποτελέσματος. Κάθε φορά κάνει την αντίστοιχη πράξη για να βεβαιωθεί. Παραδείγματος χάρη, έχοντας ως μονάδα μέτρησης τη μισή από την αρχική, η οποία είναι 4 δέκατα, όταν του ζητείται να συμπληρώσει στον πίνακα πώς μεταβάλλεται η αρχική μονάδα μέτρησης, αυτός γράφει $\frac{1}{2}$ x 4 και χρειάζεται να κάνει την πράξη για να βεβαιωθεί ότι το αριθμητικό αποτέλεσμα είναι όσο και η καινούρια μονάδα μέτρησης που του δόθηκε. Στην τελευταία μέτρηση κάνει τη σύνδεση του λεκτικού «μίκρυνε ν φορές» με το «πολλαπλασιάστηκε με το $\frac{1}{\nu}$» λέγοντας:

(…) η μονάδα μέτρησης μίκρυνε 4 φορές, άρα πολλαπλασιάστηκε με το $\frac{1}{4}$.

Στο τέλος της δραστηριότητας καταλήγει στο συμπέρασμα πως σε μια διαίρεση μετριέται πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο.

3η δραστηριότητα. Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα ο Θοδωρής ακολουθεί την αρχική του αντίληψη για τη διαίρεση. Συγκεκριμένα δίνει την ερμηνεία της διαίρεσης μερισμού στην αριθμητική παράσταση «4:7» αλλά προσαρμόζοντας τους όρους έτσι ώστε ο μεγαλύτερος αριθμός να έχει τον ρόλο του διαιρετέου και ο μικρότερος του διαιρέτη, *«χωρίζω το 7 σε 4 κομμάτια»*. Στη συνέχεια το διόρθωσε μόνος του.

Η ερευνήτρια του ζητάει αν μπορεί να το σκεφτεί με βάση το συμπέρασμα που έβγαλε παραπάνω, και τότε σκέφτεται και την ερμηνεία της μέτρησης λέγοντας «*σημαίνει πόσες φορές χωράει το 7 στο 4*».

Επίσης, ο μαθητής προτιμά να βρει το αριθμητικό αποτέλεσμα εκτελώντας τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης και όχι να χρησιμοποιήσει το υλικό που του δόθηκε. Ο μαθητής λέει ότι το αποτέλεσμα θα είναι δεκαδικός αριθμός και αυτόν προσπαθεί να βρει μέσω του αλγόριθμου της κάθετης διαίρεσης. Αφού του ζητείται να χρησιμοποιήσει το υλικό που του δόθηκε, βρίσκει το αποτέλεσμα $\frac{4}{7}$ και χαρακτηριστικά αναφέρει *«να το κάνω τώρα;»*, εννοώντας να κάνει κάθετη διαίρεση για να βρει δεκαδικό αριθμό. Δε θεωρεί το $\frac{4}{7}$ ότι θα μπορούσε να είναι το αριθμητικό αποτέλεσμα της πράξης αυτής.

4η δραστηριότητα. Σε αυτήν τη δραστηριότητα ο Θοδωρής συνδέει τη μέτρηση με τη γενική μορφή της διαίρεσης χρησιμοποιώντας το υλικό που του δόθηκε. Βρίσκει σωστά την κατεύθυνση της μεταβολής του πηλίκου ανάλογα με τη μεταβολή του διαιρέτη. Εκφράζει σωστά όλες τις σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ του διαιρέτη και του πηλίκου, εκτός από τη δεύτερη μέτρηση.

Στη δεύτερη μέτρηση τού δίνεται ο διπλάσιος διαιρέτης και σωστά προβλέπει ότι το πηλίκο θα μικρύνει λέγοντας:

(…) το πηλίκο θα μικρύνει (…) θα γίνει μεγαλύτερος αριθμός ο διαιρέτης και θα χωράει λιγότερες φορές.

Αλλά στη σχέση που αναπτύσσεται λέει ότι ο διαιρέτης θα πολλαπλασιαστεί με το 2 και ότι και το πηλίκο θα πολλαπλασιαστεί με το 2. Θεωρεί σωστή, δηλαδή, μια παράλληλη αύξηση του διαιρέτη και του πηλίκου ενώ προηγουμένως έχει εκφράσει αντίστροφη σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών. Ύστερα από υποστήριξη της ερευνήτριας είπε:

(…)Ο διαιρέτης θα πολλαπλασιαστεί με το 2 και το πηλίκο με κλάσμα, με το $\frac{1}{2}$.

Στη συνέχεια της δραστηριότητας ο μαθητής επαληθεύει τον γενικό πίνακα της διαίρεσης με τον δεύτερο πίνακα της δεύτερης δραστηριότητας ο οποίος είναι ένας αριθμητικός πίνακας.

Ο Θοδωρής στη δεύτερη μέτρηση στην οποία ο διαιρέτης γίνεται διπλάσιος και το αρχικό πηλίκο πολλαπλασιάζεται με το $\frac{1}{2}$, επιλέγει να το επαληθεύσει κάνοντας γραπτά την πράξη αλλά πολλαπλασιάζοντας το αρχικό πηλίκο με το 0,5 και όχι με το $\frac{1}{2}$.

Στις επόμενες μετρήσεις δεν εκτέλεσε καμιά πράξη γραπτά αλλά τα αποτελέσματα τα επιβεβαίωνε με το μυαλό του. Κατέληξε στο συμπέρασμα πως σε μια διαίρεση αν πολλαπλασιάσει τον διαιρέτη με έναν αριθμό, τότε το πηλίκο πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφό του. Σε αυτό το συμπέρασμα μπόρεσε να βρει τον αντίστροφο του αριθμού εκφρασμένο στη γενική του μορφή.

5η δραστηριότητα. Ο μαθητής σε αυτήν την αριθμητική παράσταση «8: $\frac{1}{2}$» δίνει την ερμηνεία της διαίρεσης μέτρησης. Χαρακτηριστικά αναφέρει ότι σημαίνει *«πόσες φορές χωράει το* $\frac{1}{2}$ *στο 8».*

Για το αποτέλεσμα, αυθόρμητα, απαντάει ότι είναι 4, θεωρώντας ότι 8 δια $\frac{1}{2}$ είναι το μισό του 8. Στη συνέχεια θέλει να το επιβεβαιώσει κάνοντας το $\frac{1}{2}$ δεκαδικό αριθμό και εκτελώντας τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης.

Στην πορεία χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» βρίσκει το σωστό αποτέλεσμα χωρίς να μπορεί να δικαιολογήσει την απάντησή του.

Τέλος, η ερευνήτρια με υποστηρικτικές ερωτήσεις τον οδήγησε στο να δει την αριθμητική παράσταση «8: $\frac{1}{2}$» αρχικά ως «8:1» και στη συνέχεια ως «8: $\frac{1}{2}$». Ο μαθητής έτσι, εφάρμοσε το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε παραπάνω και μπόρεσε να δικαιολογήσει το «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω».

Ερ.: *Έχω το 8 και θέλω να δω πόσες φορές χωράει το 1 στο 8*

Θοδ.: *8:1; 8*

Ερ.: *Τώρα αν αλλάξω τον διαιρέτη μου, τώρα είχα το 1 διαιρέτη τον αλλάζω και παίρνω το $\frac{1}{2}$ (...) πώς τον άλλαξα; Με τι τον πολλαπλασίασα για να γίνει $\frac{1}{2}$;*

Θοδ.: *Με το $\frac{1}{2}$;*

Ερ: *Άρα, πολλαπλασίασα τον διαιρέτη με το $\frac{1}{2}$, πώς θα αλλάξει το πηλίκο;*

Ερ.: *Θα γίνει 2 φορές παραπάνω, άρα 8 επί 2.*

Δε χρησιμοποίησε το υλικό που του δόθηκε για να επαληθεύσει το αποτέλεσμα.

6η δραστηριότητα. Ο μαθητής στην αριθμητική παράσταση «8: $\frac{2}{3}$» δίνει την ερμηνεία της διαίρεσης μέτρησης λέγοντας ότι σημαίνει *«πόσες φορές χωράει το $\frac{2}{3}$ στο 8».* Για να βρει το αποτέλεσμα επιλέγει να διαιρέσει το 2 με το 3 για να βρει δεκαδικό αριθμό και μετά να μπορέσει να κάνει κάθετα τη διαίρεση. Μετά από παρότρυνση της ερευνήτριας εφαρμόζει το συμπέρασμα, που έβγαλε παραπάνω, στη συγκεκριμένη περίπτωση. Εξηγεί σωστά ότι:

Είχαμε τη διαίρεση 8:1=8 μετά αλλάξαμε τον διαιρέτη(...) πολλαπλασιάσαμε το 1 με το $\frac{2}{3}$ άρα το πηλίκο θα πολλαπλασιαστεί με τον αντίστροφο του $\frac{2}{3}$.

Δεν μπορεί να βρει, όμως, ποιος είναι ο αντίστροφος του $\frac{2}{3}$ λέγοντας ότι είναι το $\frac{1}{3}$ και το καταφέρνει μετά από επισήμανση της ερευνήτριας.

Ο μαθητής προσπάθησε να επαληθεύσει το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το υλικό που του δόθηκε. Αρχικά, αναφέρει ότι *«θα χωρίσω το 8 στα 3 και θα πάρω τα 2 κομμάτια»* επιβεβαιώνοντας ξανά την παρανόηση ότι 8 δια $\frac{2}{3}$ είναι τα $\frac{2}{3}$ του 8 όπως έκανε και στην προηγούμενη δραστηριότητα, θεωρώντας ότι 8 δια $\frac{1}{2}$ είναι το $\frac{1}{2}$ του 8. Στη συνέχεια χωρίζει σωστά τα κουτάκια της λωρίδας του, που αναπαριστά το 8, στα τρία όπως φαίνεται στην Εικόνα 26, αλλά ως μονάδα μέτρησης επιλέγει το $\frac{1}{3}$ και έτσι καταλήγει ότι το αποτέλεσμα είναι 24.

Εικόνα 26. Εικονική αναπαράσταση της αρχικής λύσης 8 : $\frac{2}{3}$ με λανθασμένη μονάδα μέτρησης

Μετά από νύξη της ερευνήτριας καταφέρνει να επιλέξει τη σωστή μονάδα μέτρησης αλλά δεν κάνει σωστά τη μέτρηση αφού αφήνει κάθε φορά $\frac{1}{3}$ χωρίς να το μετρήσει όπως φαίνεται στην Εικόνα 27 και έτσι βρίσκει αποτέλεσμα 8.

Εικόνα 27. Λανθασμένη εικονική αναπαράσταση της λύσης 8 : $\frac{2}{3}$

Ύστερα από επιπλέον διευκρινίσεις που δόθηκαν από την ερευνήτρια πραγματοποίησε σωστή μέτρηση όπως φαίνεται στην Εικόνα 28.

Εικόνα 28. Εικονική αναπαράσταση της λύσης 8 : $\frac{2}{3}$

7η δραστηριότητα. Ο μαθητής στην τελική δραστηριότητα «$\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$» δίνει την ερμηνεία της διαίρεσης μέτρησης λέγοντας ότι σημαίνει «πόσες φορές χωράει το $\frac{3}{4}$ στο $\frac{2}{5}$». Για τον υπολογισμό του και την εξήγησή του επιλέγει το συμπέρασμα που έβγαλε παραπάνω:

> *(…)πολλαπλασιάζω τον διαιρέτη με το $\frac{3}{4}$ (…) θα πολλαπλασιάσω το πηλίκο με το $\frac{1}{4}$.*

Εδώ παρατηρείται πάλι η δυσκολία του μαθητή να βρει τον αντίστροφο μη μοναδιαίου κλάσματος και εφαρμόζει το ίδιο που εφάρμοσε και στην εύρεση του αντίστροφου αριθμού μη μοναδιαίου κλάσματος στην προηγούμενη δραστηριότητα, 1 προς τον παρονομαστή του κλάσματος. Μετά από την παρέμβαση της ερευνήτριας μπόρεσε να βρει τον αντίστροφο του $\frac{3}{4}$.

Συνοψίζοντας, ο Θοδωρής από την αρχή της 1ης Δραστηριότητας αντιλαμβάνεται την κατάσταση της μεταβολής μονάδας / αποτελέσματος μέτρησης ως αλληλοσυνδεόμενες μεταβολές. Προβλέπει σωστά την κατεύθυνση της μεταβολής του αποτελέσματος, τόσο όταν ο συντελεστής της μεταβολής είναι φυσικός αριθμός, όσο και όταν είναι κλασματική μονάδα και έχει μια στρατηγική ώστε να υπολογίζει το αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, πραγματοποιεί με το υλικό μια αντιστοιχία ένα-προς-πολλά (αντ. πολλά-προς-ένα) την οποία εφαρμόζει με συνέπεια σε όλα τα μέρη της Δραστηριότητας, ερμηνεύοντάς την ως πολλαπλασιασμό και ως διαίρεση, αντίστοιχα. Ο Θοδωρής αναγνωρίζει γρήγορα την κανονικότητα που διέπει την κατάσταση και περιγράφει εξαρχής τις μεταβολές πολλαπλασιαστικά, χρησιμοποιώντας διαίρεση για τη μείωση και πολλαπλασιασμό για την αύξηση (π.χ. *έκανα τη μονάδα διά 2, το αποτέλεσμα μεγάλωσε επί 2*).

Η μεγαλύτερη δυσκολία που αντιμετώπισε ο Θοδωρής ήταν να εκφράσει τη μείωση με πολλαπλασιασμό, κάτι που δεν του ήταν οικείο, όπως είχε ήδη φανεί στη Φάση Α. Αρχικά, απέφυγε αυτό το εμπόδιο, παρατηρώντας τη σχέση ανάμεσα στους παρονομαστές των τελεστών επί της μονάδας (που ήταν ήδη ορατοί στον πίνακα) και στους τελεστές επί του αποτελέσματος. Η δεύτερη δυσκολία του ήταν να αναγνωρίσει τα ζεύγη των τελεστών ως αντίστροφους αριθμούς, ιδιαίτερα στην περίπτωση των μη μοναδιαίων κλασμάτων. Οι Δομημένοι Πίνακες Καταγραφής λειτούργησαν ως σκαλωσιά, αλλά σχεδόν κάθε φορά ήταν απαραίτητη η παρέμβαση της ερευνήτριας με σχετικό αίτημα και υποστηρικτικές ερωτήσεις.

Μια ακόμα δυσκολία που αντιμετώπισε ο Θοδωρής ήταν η μέτρηση αριθμού με μη μοναδιαίο κλάσμα (8: $\frac{2}{3}$). Στην κατάσταση αυτή εμπλέκονται διαφορετικού τύπου μονάδες (1, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 8) και απαιτείται ο συντονισμός τους. Είναι χαρακτηριστικό ότι ο μαθητής ξεκίνησε να μετρά με μονάδα το $\frac{1}{3}$, ενώ στη συνέχεια εντοπίζει το $\frac{2}{3}$ ως μέρος της κάθε μονάδας (1) ξεχωριστά και μετρά αυτό το μέρος σε όλες τις μονάδες.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ανάδυση διαισθητικών μοντέλων και κανόνων στην περίπτωση του Θοδωρή: Το μοντέλο της διαίρεσης ως «δίκαιη μοιρασιά» αναδύθηκε στην 3η Δραστηριότητα, οδηγώντας τον να προσαρμόσει το 4:7 σε 7:4. Στην περίπτωση αυτή αναγνώρισε το σφάλμα και αυτο-διορθώθηκε. Ο διαισθητικός κανόνας «μεγαλώνει το Α, μεγαλώνει και το Β» αναδύθηκε στη 2η και στην 4η Δραστηριότητα, οδηγώντας τον να συμπληρώσει τους ίδιους τελεστές στη στήλη των αποτελεσμάτων, με αυτούς της στήλης των μονάδων, παρά το γεγονός ότι είχε προβλέψει σωστά την κατεύθυνση της μεταβολής.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι ο Θοδωρής αισθάνεται ασφάλεια όταν μπορεί να καταφύγει στο αριθμητικό πλαίσιο, ιδιαίτερα με δεκαδικούς αριθμούς αντί κλασμάτων. Ορισμένες φορές, η διαδικαστική του γνώση τον βοηθά να επαληθεύσει (και να πιστέψει) σε σχέσεις που δεν έχει κατακτήσει εννοιολογικά.

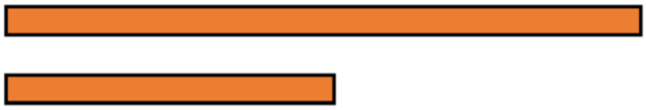
Δέσποινα

1η δραστηριότητα. Η Δέσποινα χρειάστηκε αρκετή ώρα σκέψης ώστε να βρει τον τρόπο να χρησιμοποιήσει το υλικό που της δόθηκε για να απαντήσει στο ερώτημα. Χρησιμοποίησε ένα κομμάτι ώστε να μετρήσει με αυτό όλη την κορδέλα.

Η μαθήτρια στην πρώτη δραστηριότητα προβλέπει άμεσα την κατεύθυνση της μεταβολής του αποτελέσματος καθώς μεταβάλλεται η μονάδα μέτρησης. Η πρόβλεψη του αποτελέσματος γίνεται σωστά οποιαδήποτε κατεύθυνση αν έχει η μεταβολή της μονάδας μέτρησης.

Στην πρώτη μέτρηση της δίνεται το $\frac{1}{2}$ της αρχικής μονάδας μέτρησης και προβλέπει ότι το αποτέλεσμα θα είναι μεγαλύτερο από το αρχικό. Όταν της ζητείται να το βρει αριθμητικά λέει *«θα πολλαπλασιάσουμε το 12 με το μισό».* Η μαθήτρια εκτελεί αυτήν την πράξη και έτσι αναιρεί την απάντησή της, επειδή το αποτέλεσμα είναι μικρότερο από το αρχικό λέγοντας *«όχι, γιατί βγήκαν λιγότεροι».*

Η ερευνήτρια τοποθετεί την καινούρια μονάδα κάτω από την αρχική μονάδα μέτρησης όπως φαίνεται στην Εικόνα 29 και τότε η μαθήτρια βρήκε το σωστό αποτέλεσμα.



Εικόνα 29. Τοποθέτηση των δυο μονάδων τη μία κάτω από την άλλη από την ερευνήτρια

Η μαθήτρια παρατηρεί τη μεταβολή στο αποτέλεσμα και την εκφράζει ως «*τα αποτελέσματα της προπαίδειας του 12*». Δεν παρατηρεί ταυτόχρονη μεταβολή της μονάδας μέτρησης και του αποτελέσματος. Όταν της ζητείται να το κάνει αυτό παρατηρεί ότι *«το αποτέλεσμα μεγάλωσε κατά 12»,* αλλά δεν το συνδυάζει με τη μεταβολή στη μονάδα μέτρησης. Η μαθήτρια εκφράζει προσθετικά τη σχέση ανάμεσα στα μεγέθη. Μετά από παρέμβαση της ερευνήτριας προσπαθεί να εκφράσει τη σχέση που δημιουργείται λέγοντας:

> *(…)όταν κάνω πολλαπλασιασμό(…) το αρχικό κομμάτι αν το πολλαπλασιάσω με κάτι, το αποτέλεσμα μεγαλώνει.*

Προς την αντίθετη μεταβολή της μονάδας μέτρησης η μαθήτρια και πάλι προβλέπει σωστά την κατεύθυνση της μεταβολής του αποτελέσματος. Παρατηρεί πως *«το αποτέλεσμα μικραίνει δια 2, 3, 4»* χωρίς να επισημαίνει την ταυτόχρονη μεταβολή της μονάδας μέτρησης.

Μετά από παρότρυνση της ερευνήτριας να παρατηρήσει τι συμβαίνει και στα δυο μεγέθη είπε:

> *(…)όταν διπλασιάζεται η μονάδα, το αποτέλεσμα μικραίνει.*

Η μαθήτρια δεν εκφράζει ολοκληρωμένα τη σχέση που αναπτύσσεται μεταξύ των δυο μεγεθών. Παρατηρεί ότι υπάρχει σχέση και τη σωστή κατεύθυνση των μεταβολών αλλά δεν τις ορίζει αριθμητικά.

Στις γενικές προβλέψεις η μαθήτρια δεν μπορεί να δώσει απαντήσεις επειδή δεν της δίνονται αριθμοί. Μετά από παρέμβαση της ερευνήτριας κατάλαβε τι της ζητείται να βρει. Με το $\frac{1}{10}$ της μονάδας μέτρησης προβλέπει ότι το αποτέλεσμα θα αυξάνεται κατά $\frac{1}{10}$. Εκφράζεται προσθετικά όπως και στην προηγούμενη δραστηριότητα αλλά δεν καταφέρνει να προβλέψει σωστά. Μετά από παρότρυνση της ερευνήτριας να παρατηρήσει ξανά τον πίνακα κατάφερε να προβλέψει σωστά. Στις υπόλοιπες προβλέψεις με το $\frac{1}{100}$ της κορδέλας, με τη 10πλάσια και την 100πλάσια δεν είχε δυσκολία.

Η μαθήτρια στο τέλος της δραστηριότητας καταλήγει στο συμπέρασμα ότι όταν η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με τον παρονομαστή. Μετά από ερώτηση της ερευνήτριας αν αυτοί οι δύο αριθμοί έχουν κάποια σχέση παρατήρησε ότι πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφό του. Η μαθήτρια δυσκολεύτηκε στο να βρει τον αντίστροφο του αριθμού εκφρασμένου στη γενική του μορφή. Χρειάστηκε ένα παράδειγμα με έναν συγκεκριμένο φυσικό αριθμό για να μπορέσει να το εκφράσει.

2η δραστηριότητα. Σε αυτήν την δραστηριότητα η Δέσποινα χωρίς πρόβλημα συνδέει την πράξη της διαίρεσης με την μέτρηση, τον διαιρετέο με όλη την κορδέλα, τον διαιρέτη με τη μονάδα μέτρησης και το αποτέλεσμα της μέτρησης με το πηλίκο.

Στην πρώτη μέτρηση αυτής της δραστηριότητας ενώ η μαθήτρια προβλέπει σωστά το αποτέλεσμα της μέτρησης, συμπληρώνει λανθασμένα τον πίνακα, τοποθετώντας τους ίδιους τελεστές στη στήλη των μονάδων και στη στήλη των αποτελεσμάτων. Δηλαδή, η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάζεται με το 3 και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με το 3. Παρουσιάζει ως σωστή μια παράλληλη αύξηση της μονάδας μέτρησης και του αποτελέσματος παρόλο που σε όλες τις άλλες μετρήσεις παρατηρεί ότι υπάρχει αντίστροφη σχέση στα δύο αυτά μεγέθη. Αφού της ζητείται να παρατηρήσει το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε παραπάνω μπόρεσε να συμπληρώσει σωστά με τι πολλαπλασιάστηκε το αποτέλεσμα.

Στη δεύτερη μέτρηση, της δίνεται η μισή μονάδα μέτρησης και η μαθήτρια προβλέπει σωστά το αποτέλεσμα. Η μαθήτρια παρατηρεί ότι η μονάδα μέτρησης έγινε μισή διαιρώντας την αρχική μονάδα μέτρησης με το 2. Ύστερα από παρότρυνση της ερευνήτριας εκφράστηκε με πολλαπλασιασμό λέγοντας *«η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάστηκε με το* $\frac{1}{2}$*, το αποτέλεσμα με το 2».*

Στην επόμενη μέτρηση δεν είχε καμία δυσκολία ούτε στην πρόβλεψη του αποτελέσματος αλλά ούτε στη συμπλήρωση του πίνακα.

Στην τελευταία μέτρηση, της δίνεται το $\frac{1}{4}$ της αρχικής μονάδας μέτρησης και της ζητείται να προβλέψει το αποτέλεσμα. Η μαθήτρια προβλέπει λανθασμένα το αποτέλεσμα, πολλαπλασιάζοντας το αρχικό αποτέλεσμα με το 3. Επαληθεύοντας με το υλικό που της δόθηκε βρίσκει άλλο αποτέλεσμα. Καταλαβαίνει το λάθος της κατά τη διάρκεια της συμπλήρωσης του πίνακα λέγοντας *«πολλαπλασίασα με το 3, ενώ έπρεπε με το 4»*.

Στο τέλος της δραστηριότητας καταλήγει στο συμπέρασμα πως σε μια διαίρεση μετριέται πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο. Της ζητείται να συγκρίνει το συμπέρασμα που έβγαλε για τη διαίρεση με την εξήγηση που έδωσε στην αρχική αξιολόγηση, του μερισμού. Η μαθήτρια αρχικά πιστεύει ότι είναι το ίδιο νόημα και όταν ερωτάται αν στο πρόβλημα που έφτιαξε η ίδια μετράει πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο απαντάει θετικά. Όταν ρωτήθηκε αν θα μπορούσε να το λύσει με δυο λωρίδες και μετρώντας πόσες φορές χωράει η μία στην άλλη λέει χαρακτηριστικά *«όχι, τότε θα έκανα τη διαίρεση»*. Μετά από υποστηρικτικές ερωτήσεις κατέληξε στο ότι είναι διαφορετικά τα νοήματα και ότι στη μία περίπτωση μοιράζει ενώ στην άλλη μετράει.

3η δραστηριότητα. Η μαθήτρια σε αυτήν τη δραστηριότητα δίνει στην αριθμητική παράσταση «4:7» την ερμηνεία της διαίρεσης μέτρησης λέγοντας:

(..)είναι μια διαίρεση στην οποία βλέπουμε πόσες φορές χωράει το 7 στο 4.

Τονίζει πως γίνεται να χωράει το 7 στο 4 αλλά ότι το αποτέλεσμα θα είναι μικρότερο του 1. Όταν της δίνεται το υλικό για να βρει το αποτέλεσμα δεν μπορεί να το χρησιμοποιήσει. Μετά από υπενθύμιση της ερευνήτριας για το τι είπε η μαθήτρια ότι ψάχνει σε αυτήν τη διαίρεση η μαθήτρια κατάλαβέ πώς να χρησιμοποιήσει το υλικό. Βάζοντας τη διάφανη λωρίδα πάνω από την άλλη λέει *«χωράνε τα τέσσερα πρώτα»* φτιάχνοντας μια δική της «μονάδα» αφού δεν μπορεί να συντονίσει την αρχική με την υποδιαίρεση. Μετά από παρότρυνση της ερευνήτριας να δει στα πόσα είναι χωρισμένη η μονάδα της και πόσα χωράνε, βρήκε $\frac{4}{7}$.

4η δραστηριότητα. Σε αυτήν τη δραστηριότητα η Δέσποινα συνδέει τη μέτρηση με τη γενική μορφή της διαίρεσης χρησιμοποιώντας το υλικό που της δόθηκε.

Στην πρώτη μέτρηση δε βρίσκει σωστά την κατεύθυνση της μεταβολής του πηλίκου ανάλογα με τη μεταβολή του διαιρέτη. Εκφράζει μια παράλληλη μεταβολή του διαιρέτη και του πηλίκου. Συγκεκριμένα λέει *«με μισό διαιρέτη θα έχω μισό πηλίκο»,* δηλαδή παράλληλη μείωση του διαιρέτη και του πηλίκου. Στη συνέχεια αντιλαμβάνεται ότι το πηλίκο θα είναι μεγαλύτερο και συμπληρώνει σωστά τον πίνακα. Σε όλες τις υπόλοιπες μετρήσεις προβλέπει και εκφράζει σωστά όλες τις σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ του διαιρέτη και του πηλίκου.

Στη συνέχεια της δραστηριότητας η μαθήτρια επαληθεύει τον γενικό πίνακα της διαίρεσης με τον δεύτερο πίνακα της δεύτερης δραστηριότητας ο οποίος είναι ένας αριθμητικός πίνακας. Δεν κάνει κάποια γραπτή πράξη για την επαλήθευση των δυο πινάκων.

Κατέληξε στο συμπέρασμα πως σε μια διαίρεση αν πολλαπλασιάσει τον διαιρέτη με έναν αριθμό, τότε το πηλίκο πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφό του. Σε αυτό το συμπέρασμα μπόρεσε να βρει τον αντίστροφο του αριθμού εκφρασμένο στη γενική του μορφή.

5η δραστηριότητα. Η μαθήτρια σε αυτήν την αριθμητική παράσταση «8: $\frac{1}{2}$» δίνει την ερμηνεία της διαίρεσης μέτρησης. Χαρακτηριστικά αναφέρει ότι σημαίνει *«πόσες φορές χωράει το $\frac{1}{2}$ στο 8».*

Για το αποτέλεσμα λέει αυθόρμητα 16. Γράφει $\frac{8}{1}\ x\frac{2}{1} = 16$, εξηγώντας ότι αντέστρεψε το $\frac{1}{2}$ και έκανε πολλαπλασιασμό, αναπαράγοντας το σχολικό κανόνα που μάλλον θυμήθηκε εκείνη τη στιγμή. Δεν μπόρεσε να δώσει κάποια εξήγηση γιατί το έκανε αυτό. Δεν μπόρεσε να χρησιμοποιήσει το υλικό που της δόθηκε για να κάνει επαλήθευση. Ακόμα και μετά από υποστήριξη της ερευνήτριας δεν μπόρεσε να το χρησιμοποιήσει.

Τέλος, η ερευνήτρια με υποστηρικτικές ερωτήσεις την οδήγησε στο να δει την αριθμητική παράσταση «8: $\frac{1}{2}$» αρχικά ως «8:1» και στη συνέχεια ως «8: $\frac{1}{2}$». Η μαθήτρια εφάρμοσε το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε παραπάνω και μπόρεσε να δικαιολογήσει το «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Είπε:

> *(...)Πολλαπλασίασα τον διαιρέτη με το $\frac{1}{2}$, το αποτέλεσμα θα πολλαπλασιαστεί με το 2.*

6η δραστηριότητα. Η Δέσποινα αποδίδει στην αριθμητική παράσταση «8: $\frac{2}{3}$» το νόημα της διαίρεσης μέτρησης λέγοντας ότι σημαίνει *«πόσες φορές χωράει το $\frac{2}{3}$ στο*

8». Για να βρει το αποτέλεσμα, καταφεύγει ξανά στον σχολικό κανόνα «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» χωρίς να μπορεί να δώσει κάποια εξήγηση, λέγοντας χαρακτηριστικά:

(…)να σας πω την αλήθεια δεν πολυκατάλαβα(…) έχω μάθει τον «νόμο» και το κάνω έτσι.

Μετά από παρότρυνση της ερευνήτριας εφαρμόζει το συμπέρασμα, που έβγαλε παραπάνω, στη συγκεκριμένη περίπτωση. Εξηγεί σωστά ότι:

Είχαμε τη διαίρεση 8:1=8 μετά αλλάξαμε τον διαιρέτη(…) πολλαπλασίασα με το $\frac{2}{3}$ τον διαιρέτη, άρα το πηλίκο θα πολλαπλασιαστεί με το 3 (…) $\frac{3}{2}$.

Δυσκολεύεται στο να βρει τον αντίστροφο μη μοναδιαίου κλάσματος και το κάνει μετά από βοήθεια.

Στο χαρτί έγραψε $\frac{8}{1} x \frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12$. Στην προηγούμενη δραστηριότητα, όπως και σε αυτήν, ακολουθεί την ίδια διαδικασία όταν πρέπει να πολλαπλασιάσει φυσικό αριθμό με κλάσμα. Μετατρέπει τον φυσικό αριθμό σε κλασματικό βάζοντας παρονομαστή το 1.

Η μαθήτρια προσπάθησε να επαληθεύσει το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το υλικό που της δόθηκε. Αρχικά, αναφέρει ότι:

θα χωρίσω το κάθε κουτάκι στα 3 (..)θα πολλαπλασιάσω το 8 με το 3 που κάνει 24

Στη συνέχεια σκέφτηκε αρκετά πώς θα μετρήσει, λέγοντας αρχικά ένα-ένα, τρία- τρία και μετά από παρότρυνση της ερευνήτριας να δει ξανά τι έγραψε παραπάνω ότι ψάχνει κατέληξε στη σωστή μέτρηση όπως φαίνεται στην Εικόνα 30.

Εικόνα 30. Εικονική αναπαράσταση της λύσης 8 : $\frac{2}{3}$

$7^{η}$ δραστηριότητα. Η μαθήτρια στην τελική δραστηριότητα «$\frac{2}{5}$: $\frac{3}{4}$» δίνει την ερμηνεία της διαίρεσης μέτρησης λέγοντας ότι σημαίνει «πόσες φορές χωράει το $\frac{3}{4}$ στο $\frac{2}{5}$».

Για τον υπολογισμό του και την εξήγησή του επιλέγει το συμπέρασμα που έβγαλε παραπάνω:

> *(...)άλλαξα τον διαιρέτη και τον έκανα* $\frac{3}{4}$ *πολλαπλασιάζοντας με το* $\frac{3}{4}$ *(...)άρα το πηλίκο θα πολλαπλασιαστεί με το 4.*

Εδώ παρατηρείται πάλι η δυσκολία της μαθήτριας να βρει τον αντίστροφο μη μοναδιαίου κλάσματος και εφαρμόζει το ίδιο που εφάρμοσε και στην εύρεση του αντίστροφου αριθμού μη μοναδιαίου κλάσματος στην προηγούμενη δραστηριότητα. Θεωρεί ότι ο αντίστροφος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος.

Μετά από την υποστήριξη της ερευνήτριας μπόρεσε να βρει τον αντίστροφο του $\frac{3}{4}$.

Συνοψίζοντας, η Δέσποινα ξεκίνησε την $1^{η}$ δραστηριότητα εστιάζοντας σε μία μόνο εκ των δύο μεταβολών, αυτή του αποτελέσματος. Ενώ προέβλεψε σωστά την κατεύθυνση αυτής της μεταβολής, δυσκολεύτηκε να υπολογίσει τις αρχικές τιμές. Στις πρώτες της απόπειρες, λειτούργησε μάλλον με βάση την πεποίθηση ότι «ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει», ή, εναλλακτικά, με το διαισθητικό κανόνα «ό,τι παθαίνει το Α, παθαίνει και το Β» (παρόμοια λειτούργησε και στη $2^{η}$, και ξανά στην $4^{η}$ Δραστηριότητα). Η διαδικαστική της ευχέρεια (υπολόγισε σωστά, γραπτώς, το αποτέλεσμα) την οδήγησε στη διαπίστωση ότι έχει κάνει λάθος. Ωστόσο, αντίθετα από το Θοδωρή, δεν είχε στη διάθεσή της κάποια στρατηγική, ούτε επιχείρησε να μετρήσει με το υλικό. Τη βοήθησε η παρέμβαση της ερευνήτριας με την αντιπαράθεση της αρχικής και της δεύτερης μονάδας, ενδεχομένως οδηγώντας την στη στρατηγική του Θοδωρή.

Η Δέσποινα δυσκολεύτηκε να εντοπίσει κανονικότητες στην κατάσταση της $1^{ης}$ Δραστηριότητας, καθώς συνέχισε να εστιάζει μόνο στη στήλη των αποτελεσμάτων, τα οποία αρχικά βλέπει «στατικά» (*είναι πολλαπλάσια του 12*). Στη συνέχεια, και με παρότρυνση της ερευνήτριας, περιγράφει τη μεταβολή προσθετικά (*μεγάλωσε κατά 12*). Απαιτείται ρητό αίτημα για να εκφράσει τη μεταβολή πολλαπλασιαστικά, καθώς υποστηρικτικές ερωτήσεις για να λάβει υπόψη και τις δύο μεταβολές ταυτόχρονα. Όταν αρχίζει να το κάνει, η περιγραφή της μιας μεταβολής υπολείπεται σε ακρίβεια της άλλης (π.χ., *το ένα διπλασιάζεται, το άλλο μικραίνει*). Επίσης, η μαθήτρια, αντίθετα με το Θοδωρή, δεν ξεχώρισε τους τελεστές των μεταβολών αυθόρμητα. Και εδώ, ο Δομημένος Πίνακας Καταγραφής ήταν υποστηρικτικός. Η πρώτη συσχετιστική κανονικότητα που διέκρινε η Δέσποινα ήταν η σχέση μεταξύ των τελεστών της μιας μεταβολής, και των παρονομαστών των τελεστών της άλλης και χρειάστηκε τις επιπλέον ειδικές περιπτώσεις για να το πράξει ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$). Από τη στιγμή που το έκανε, το δεύτερο μέρος της 1ης Δραστηριότητας δεν τη δυσκόλεψε.

Και η Δέσποινα δυσκολεύτηκε στη μετατροπή της διαίρεσης με το ν, σε πολλαπλασιασμό με το $\frac{1}{\nu}$, αλλά και την αναγνώριση των αντίστροφων, ιδιαίτερα στα μη μοναδιαία κλάσματα. Επίσης, το πρόβλημα του συντονισμού των διαφορετικών μονάδων εμφανίστηκε, τόσο στην 6η Δραστηριότητα (παρόμοια με τον Θοδωρή), όσο και στην 3η Δραστηριότητα.

Η Δέσποινα γενικά δεν έδειξε προθυμία να αξιοποιήσει τα διαθέσιμα υλικά, ενώ αρκετές φορές φάνηκε να δυσκολεύεται να καταλάβει πώς θα μπορούσε να τα αξιοποιήσει. Από την άλλη μεριά, αντιμετώπισε την 4η Δραστηριότητα (με τους γενικευμένους αριθμούς) με σχετική ευκολία, και οικειοποιήθηκε σχετικά γρήγορα την καινούργια μέθοδο για τη διαίρεση κλασμάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ανάκληση του σχολικού κανόνα (5η Δραστηριότητα) είχε μια ελαφρώς δυσμενή επίδραση στην πορεία αυτής και της επόμενης (6ης) δραστηριότητας, καθώς η Δέσποινα κατέφυγε σε αυτή τη διαδικασία, παρότι δεν την κατανοούσε.

Μάριος

1η δραστηριότητα. Ο Μάριος σε αυτή τη δραστηριότητα δυσκολεύεται να βρει πώς θα χρησιμοποιήσει το υλικό που του δίνεται για να δώσει απάντηση στο ερώτημα που του τέθηκε. Θέλει να μετρήσει το μήκος της κορδέλας για να κάνει πράξεις. Παρουσιάζει δυσκολία επειδή δεν υπάρχουν αριθμοί ώστε να μπορέσει να κάνει πράξεις. Στη συνέχεια σκέφτεται ότι θα μπορούσε να κόψει την κορδέλα, αν είχε ψαλίδι σε κομμάτια μεγέθους όσο και το αρχικό κομμάτι και να τα μετρήσει. Δεν του ήταν εύκολο να καταλήξει, τελικά, στο να βάλει όλα τα κομμάτια πάνω στην κορδέλα μέχρι να την καλύψει ολόκληρη.

Ο μαθητής προβλέπει άμεσα την κατεύθυνση της μεταβολής του αποτελέσματος καθώς μεταβάλλεται η μονάδα μέτρησης. Η πρόβλεψη του αποτελέσματος γίνεται σωστά οποιαδήποτε κατεύθυνση αν έχει η μεταβολή της μονάδας μέτρησης.

Ο μαθητής παρατηρεί τη μεταβολή μόνο του αποτελέσματος και δεν κάνει συσχέτιση με τη μεταβολή της μονάδας μέτρησης λέγοντας:

Διπλασιάστηκε, τριπλασιάστηκε, τετραπλασιάστηκε από το 12(…)είναι ο πολλαπλασιασμός του 12 απλά όχι όλος.

Αφού του ζητείται να παρατηρήσει την ταυτόχρονη μεταβολή των δυο μεγεθών, αυτός παρατηρεί και πάλι τη μεταβολή μόνο στη μονάδα μέτρησης λέγοντας *«η μονάδα μέτρησης γίνεται κλάσμα το* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$*»* αλλά δεν τη συνδυάζει με τη μεταβολή στο αποτέλεσμα. Στη συνέχεια παρατηρεί πως το γινόμενο μονάδα μέτρησης επί αποτέλεσμα παραμένει σταθερό λέγοντας:

Αν πολλαπλασιάσω αυτό (μονάδα μέτρησης) με αυτό (αποτέλεσμα) βγαίνει 12.

Στο τέλος του πρώτου μέρους αυτής της δραστηριότητας αφού ο μαθητής συμπλήρωσε τον Δομημένο Πίνακα κατάφερε να παρατηρήσει την ταυτόχρονη μεταβολή της μονάδας μέτρησης και του αποτελέσματος τονίζοντας πως:

Όσο πιο μικρή γίνεται η μονάδα μέτρησης τόσο πιο μεγάλο γίνεται το αποτέλεσμα.

Αφού του ζητήθηκε να ορίσει πόσο μικρή γίνεται η μονάδα μέτρησης και πόσο μεγάλο το αποτέλεσμα παρατήρησε ότι:

Έχει σχέση ο παρονομαστής, δηλαδή αν ήταν $\frac{1}{5}$ *(…) το αποτέλεσμα θα ήταν 5 επί 12.*

Στη συνέχεια σχολιάζει ότι αυτό ισχύει *«μόνο αν είναι ο αριθμητής το 1»* αλλά δεν μπορεί να εκφράσει κάτι πιο ολοκληρωμένο.

Προς την αντίθετη μεταβολή της μονάδας μέτρησης ο μαθητής και πάλι προβλέπει σωστά την κατεύθυνση της μεταβολής του αποτελέσματος και τις τιμές του. Ωστόσο, δυσκολεύεται να συσχετίσει τις δυο μεταβολές. Παρατηρώντας τον Ημιδομημένο Πίνακα, σχολιάζει ότι *«το αποτέλεσμα μικραίνει, γίνεται μισό»* για την πρώτη μεταβολή. Στη συνέχεια, παρατηρεί τη δεύτερη μεταβολή και σχολιάζει «*όμως εδώ δε γίνεται μισό!*». Αυτό φαίνεται να του προκαλεί σύγχυση και δεν προτείνει τίποτε άλλο.

Περνώντας στον Δομημένο Πίνακα, εκφράζει με πολλαπλασιασμό τι παθαίνει το αποτέλεσμα όταν διπλασιάζεται η μονάδα μέτρησης με μεγάλη ευκολία και αυτή τη φορά αναγνωρίζει και τους υπόλοιπους τελεστές, αν και όχι με την ίδια ευχέρεια.

Με συμπληρωμένο τον πίνακα αυτό και τις σχέσεις ορατές, εκφρασμένες ως γινόμενο, ο Μάριος εκφράζει τη μείωση μέσω της διαίρεσης («*το αποτέλεσμα διαιρείται με το 2, 3, 4*») αναφερόμενος μόνο στη στήλη των αποτελεσμάτων.

Προσπαθώντας να γενικεύσει στην περίπτωση που η αρχική μονάδα πολλαπλασιάζεται με το 10, ο Μάριος αρχικά προβλέπει την ίδια μεταβολή στο αποτέλεσμα («*θα πολλαπλασιαστεί με το 10*») και αναιρεί την απάντησή του άμεσα («*όχι, όχι, με το μισό*»). Με την προτροπή της ερευνήτριας να επιστρέψει στον Δομημένο Πίνακα και να εξετάσει αν ισχύει πάντα ότι το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με το μισό, διορθώνει την απάντησή του και απαντά σωστά και στην περίπτωση που η μονάδα πολλαπλασιάζεται με το 100.

Επιστρέφει όμως, στο «μισό», προσπαθώντας να συμπληρώσει το συμπέρασμα της δραστηριότητας .

Όταν η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με το μισό.

Απαιτείται ξανά παρόμοια παρέμβαση της ερευνήτριας, ώστε να διατυπώσει το συμπέρασμα:

Όταν η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάζεται με ένα αριθμό, το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με τον παρονομαστή (...)αντίστροφο

Ο μαθητής δυσκολεύτηκε στο να βρει τον αντίστροφο του αριθμού εκφρασμένου στη γενική του μορφή. Χρειάστηκε ένα παράδειγμα με έναν συγκεκριμένο φυσικό αριθμό για να μπορέσει να το εκφράσει.

2η δραστηριότητα. Σε αυτήν την δραστηριότητα ο μαθητής συνδέει χωρίς πρόβλημα την πράξη της διαίρεσης με την μέτρηση, τον διαιρετέο με όλη την κορδέλα, τον διαιρέτη με τη μονάδα μέτρησης και το αποτέλεσμα της μέτρησης με το πηλίκο.

Στην πρώτη μέτρηση αυτής της δραστηριότητας ο μαθητής ενώ προβλέπει σωστά το αποτέλεσμα της μέτρησης, συμπληρώνει λανθασμένα τον πίνακα. Δηλαδή, η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάζεται με το 3 και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με το $\frac{1}{2}$.

Παρατηρείται και σε αυτή την περίπτωση η γενίκευση του μαθητή με το $\frac{1}{2}$.

Στη συνέχεια διόρθωσε το λάθος του λέγοντας:

Το αποτέλεσμα θα πολλαπλασιαστεί με το $\frac{1}{3}$ *αφού η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάστηκε με το 3.*

Στη δεύτερη και στην τρίτη μέτρηση δεν είχε καμία δυσκολία ούτε στις προβλέψεις αλλά ούτε και στο να εκφράσει τις σχέσεις σωστά.

Στην τελευταία μέτρηση, του δίνεται το $\frac{1}{4}$ της αρχικής μονάδας μέτρησης και του ζητείται να προβλέψει το αποτέλεσμα. Δυσκολεύεται να εκφράσει τι έπαθε η μονάδα μέτρησης και έτσι δεν μπορεί να εκφράσει την πρόβλεψή του. Μόλις κατάφερε να το εκφράσει σωστά πρόβλεψε ότι το αποτέλεσμα θα πολλαπλασιαστεί με το 4.

Στο τέλος της δραστηριότητας καταλήγει στο συμπέρασμα πως σε μια διαίρεση μετριέται πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο.

Του ζητείται να συγκρίνει το συμπέρασμα που έβγαλε για τη διαίρεση με την εξήγηση που έδωσε στην αρχική αξιολόγηση, του μερισμού. Ο μαθητής αρχικά πιστεύει ότι είναι το ίδιο νόημα και όταν ερωτάται αν στο πρόβλημα που έφτιαξε ο ίδιος μετράει πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο απαντάει θετικά. Όταν ρωτήθηκε αν θα μπορούσε να το λύσει με δυο λωρίδες και μετρώντας πόσες φορές χωράει η μία στην άλλη λέει χαρακτηριστικά *«όχι, εδώ τώρα μετράω ενώ στο παράδειγμά μου διαιρώ»*. Μετά από υποστηρικτικές ερωτήσεις κατέληξε στο ότι είναι διαφορετικά τα νοήματα και ότι στη μία περίπτωση μοιράζει ενώ στην άλλη μετράει.

3η δραστηριότητα. Ο μαθητής σε αυτήν τη δραστηριότητα δίνει στην αριθμητική παράσταση «4:7» την αρχική του ερμηνεία για τη διαίρεση, του μερισμού λέγοντας «*έχω 4 πίτσες και 7 παιδιά».*

Μετά από παρότρυνση της ερευνήτριας να δώσει και το νόημα του συμπεράσματος που έβγαλε παραπάνω, δίνει και την ερμηνεία της μέτρησης.

Αφού του ζητήθηκε να σκεφτεί αν μπορεί να χωράει το 7 στο 4 απάντησε:

Αφού είναι μεγαλύτερο το 7 δε χωράει (…) όμως υπάρχει τρόπος να το κάνεις, δε χωράει με ακέραιους αριθμούς πρέπει να το κάνεις δεκαδικό για να χωρέσει, δηλαδή το αποτέλεσμα θα βγει δεκαδικό. Πάντα όταν είναι μεγαλύτερος ο διαιρέτης από τον διαιρετέο πάντα θα βγαίνει δεκαδικός.

Όταν του δίνεται το υλικό για να βρει το αποτέλεσμα τοποθετεί το 4 πάνω στο 7. Μετά από υπενθύμιση της ερευνήτριας για το τι είπε ο μαθητής ότι ψάχνει σε αυτήν τη διαίρεση ο μαθητής κατάλαβε πώς να χρησιμοποιήσει το υλικό.

Βάζοντας τη διάφανη λωρίδα πάνω από την άλλη λέει *«χωράνε τα τέσσερα από τα εφτά»*. Δεν το έγραψε σαν κλάσμα $\frac{4}{7}$ αλλά ήθελε να κάνει τη διαίρεση για να βρει δεκαδικό αριθμό. Απέρριψε το $\frac{4}{7}$ ως απάντηση επειδή όπως είπε:

δεν είναι αριθμός, είναι κλάσμα(...) δηλαδή είναι αριθμός αλλά όχι ακέραιος(...) ναι, το αποτέλεσμα δε θα είναι ακέραιος, θα είναι δεκαδικός.

4η δραστηριότητα. Σε αυτήν τη δραστηριότητα ο Μάριος συνδέει τη μέτρηση με τη γενική μορφή της διαίρεσης χρησιμοποιώντας το υλικό που του δόθηκε.

Στην πρώτη μέτρηση βρίσκει σωστά την κατεύθυνση της μεταβολής του πηλίκου ανάλογα με τη μεταβολή του διαιρέτη αλλά και την ακριβή αριθμητική σχέση.

Στη δεύτερη μέτρηση, με τον διπλάσιο διαιρέτη, δυσκολεύτηκε να βρει με τι πολλαπλασιάστηκε ο διαιρέτης αλλά και να προβλέψει την κατεύθυνση της μεταβολής του πηλίκου. Εξέφρασε μια ταυτόχρονη αύξηση του διαιρέτη και του πηλίκου. Μετά από παρέμβαση της ερευνήτριας, είπε ότι «*το αποτέλεσμα θα πολλαπλασιαστεί με τον αντίστροφο»*.

Σε όλες τις υπόλοιπες μετρήσεις προβλέπει και εκφράζει σωστά όλες τις σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ του διαιρέτη και του πηλίκου.

Στη συνέχεια της δραστηριότητας ο μαθητής επαληθεύει τον γενικό πίνακα της διαίρεσης με τον δεύτερο πίνακα της δεύτερης δραστηριότητας ο οποίος είναι ένας αριθμητικός πίνακας. Δεν κάνει κάποια γραπτή πράξη για την επαλήθευση των δυο πινάκων.

Κατέληξε στο συμπέρασμα πως σε μια διαίρεση αν πολλαπλασιάσει τον διαιρέτη με έναν αριθμό, τότε το πηλίκο πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφό του. Σε αυτό το συμπέρασμα μπόρεσε να βρει τον αντίστροφο του αριθμού εκφρασμένο στη γενική του μορφή.

5η δραστηριότητα. Ο μαθητής σε αυτή τη δραστηριότητα δεν προσπαθεί να εξηγήσει τι σημαίνει η αριθμητική παράσταση απλώς ξαναδιαβάζει την παράσταση λέγοντας

«8 δια το μισό». Μετά από υποστηρικτικές ερωτήσεις έδωσε την ερμηνεία της μέτρησης *«πόσες φορές χωράει το μισό στο 8».*

Για το αποτέλεσμα λέει αυθόρμητα 4. Μετά από αναδιατύπωση της ερευνήτριας, «*δηλαδή χωράει 4 φορές το μισό στο 8*» απορρίπτει την απάντησή του και αναρωτιέται αν πρέπει να κάνει τη διαίρεση. Τελικά εκτελεί την πράξη ως εξής $\frac{8}{1}\ x\frac{2}{1} = 16$, εφαρμόζοντας τον σχολικό κανόνα για τον αλγόριθμο. Δεν μπόρεσε να δώσει κάποια εξήγηση γιατί το έκανε αυτό.

Τέλος, η ερευνήτρια με υποστηρικτικές ερωτήσεις τον οδήγησε στο να δει την αριθμητική παράσταση «8: $\frac{1}{2}$» αρχικά ως «8:1» και στη συνέχεια ως «8: $\frac{1}{2}$». Ο μαθητής έτσι, εφάρμοσε το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε παραπάνω και μπόρεσε να δικαιολογήσει το «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Είπε:

> *(...)Πολλαπλασίασα τον διαιρέτη με το $\frac{1}{2}$, το αποτέλεσμα θα πολλαπλασιαστεί με τον αντίστροφο, με το $\frac{2}{1}$.*

Ο μαθητής χρησιμοποίησε το υλικό για να επαληθεύσει το αποτέλεσμά του χωρίζοντας τη λωρίδα όπως φαίνεται στην Εικόνα 31 και κάνοντας σωστά τη μέτρηση.

Εικόνα 31. Εικονική αναπαράσταση της λύσης 8 : $\frac{1}{2}$

6η δραστηριότητα. Ο μαθητής αρχικά δεν καταλαβαίνει τι του ζητείται να εξηγήσει. Θέλει να λύσει την αριθμητική παράσταση και να βρει αριθμητικό αποτέλεσμα. Μετά από υποστήριξη της ερευνήτριας στην αριθμητική παράσταση «8: $\frac{2}{3}$» δίνει την ερμηνεία της διαίρεσης μέτρησης λέγοντας ότι σημαίνει *«πόσες φορές χωράει το $\frac{2}{3}$ στο 8».*

Για να βρει το αποτέλεσμα επιλέγει να εφαρμόσει τον σχολικό κανόνα «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» χωρίς να μπορεί να δώσει κάποια εξήγηση λέγοντας χαρακτηριστικά:

(...)γιατί έτσι είναι(...) δεν ξέρω να τα εξηγήσω(...) δε μας τα έχει κάνει(...) δε μας τα έχει εξηγήσει απλώς μας έδειξε τον τρόπο .

Στο χαρτί έγραψε $\frac{8}{1} x \frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12.$ Στην προηγούμενη δραστηριότητα, όπως και σε αυτήν, ακολουθεί την ίδια διαδικασία όταν πρέπει να πολλαπλασιάσει φυσικό αριθμό με κλάσμα. Μετατρέπει τον φυσικό αριθμό σε κλασματικό βάζοντας παρονομαστή το 1.

Μετά από παρότρυνση της ερευνήτριας να εφαρμόσει το συμπέρασμα, που έβγαλε παραπάνω, στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν τα κατάφερε.

Τέλος, η ερευνήτρια με υποστηρικτικές ερωτήσεις τον οδήγησε στο να δει τη διαίρεση «8: $\frac{2}{3}$» στο πλαίσιο της αλλαγής μονάδας, με αρχική μονάδα το 1 και επόμενη μονάδα το 1 x $\frac{2}{3}$. Ο μαθητής και πάλι δεν μπόρεσε να εξηγήσει κάτι και έδειχνε αρκετά εκνευρισμένος, ενώ δεν προσπάθησε να επαληθεύσει το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το υλικό που του δόθηκε.

7η δραστηριότητα. Ο μαθητής στην τελική δραστηριότητα «$\frac{2}{5}$: $\frac{3}{4}$» πάλι δείχνει να μην καταλαβαίνει τι του ζητείται να εξηγήσει. Λέει χαρακτηριστικά:

(...)τι να σημαίνει; Δύο κλάσματα είναι(...) δεν την καταλαβαίνω τη διαίρεση(...) πριν δεν ήταν και τα δύο κλάσματα ήταν διαφορετικά(...) δε θέλω να το εξηγήσω, να το υπολογίσω θέλω.

Για τον υπολογισμό του καταφεύγει στο σχολικό κανόνα «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω».

Στην εξήγηση λέει:

(...)αυτό που βγαίνει από δω το πολλαπλασιάζω με τον αντίστροφο, αυτό που είπαμε πριν.

Δεν του ζητήθηκαν περισσότερες εξηγήσεις γιατί ήταν απρόθυμος να συνεργαστεί και να εξηγήσει.

Συνοψίζοντας, ο Μάριος, στο πρώτο μέρος της $1^{ης}$ Δραστηριότητας (μείωση της μονάδας) προέβλεψε σωστά τις κατευθύνσεις των ζητούμενων μεταβολών και τις τιμές τους, αλλά δεν εστίαζε αυθόρμητα και στις δύο μεταβολές ταυτόχρονα: Εξέταζε κάθε μεταβολή ξεχωριστά και την περιέγραφε πολλαπλασιαστικά, χωρίς να ξεχωρίζει ρητά τους τελεστές (π.χ., *διπλασιάστηκε, τριπλασιάστηκε / έγινε μισό, ένα τρίτο, ένα τέταρτο*). Ωστόσο, την πρώτη φορά που ο Μάριος συσχέτισε τις τιμές των δυο στηλών, στον Ημιδομημένο Πίνακα, παρατήρησε ότι το γινόμενό τους είναι σταθερό, μια σχέση που παραπέμπει στον ορισμό των αντιστρόφων ανάλογων ποσών. Η σημασία της παρατήρησης του Μάριου δεν αναγνωρίστηκε τη δεδομένη στιγμή από την ερευνήτρια. Ο Δομημένος Πίνακας Καταγραφής βοήθησε τον Μάριο να ξεχωρίσει τους τελεστές των μεταβολών, ενώ προέβη αυθόρμητα και σε μια γενίκευση (*αν ήταν ένα πέμπτο, τότε θα πολλαπλασιαζόταν με το 5*), προσπαθώντας να επεξεργαστεί τη σχέση που διακρίνει ανάμεσα στον παρονομαστή των τελεστών της μονάδας, και τον τελεστή επί του αποτελέσματος.

Ωστόσο, στο δεύτερο μέρος της 1ης Δραστηριότητας (αύξηση της μονάδας), ο Μάριος δυσκολεύτηκε σημαντικά, καθώς φαίνεται να λειτουργεί με την υπόθεση ότι, ανεξάρτητα από το πώς μεταβάλλεται η αρχική μονάδα, το αποτέλεσμα «γίνεται μισό». Η υπόθεση αυτή επανέρχεται και στην αρχή της 2ης Δραστηριότητας, ενώ εναλλάσσεται και με το διαισθητικό κανόνα «ό,τι παθαίνει το Α, παθαίνει και το Β» (1η Δραστηριότητα, 4η Δραστηριότητα). Παρά το γεγονός ότι οι Δομημένοι Πίνακες και οι παρεμβάσεις της ερευνήτριας τον βοηθούν να εστιάζει στις υποδεικνυόμενες σχέσεις και να τις εκφράζει με το ζητούμενο τρόπο, φαίνεται ότι δεν οικειοποιείται το σκεπτικό (6η Δραστηριότητα), κάτι που ίσως συνδέεται με τον εκνευρισμό του και την απροθυμία του να δώσει εξηγήσεις (6η Δραστηριότητα, 7η Δραστηριότητα). Ενδεχομένως, αν είχε αξιοποιηθεί η δική του ανάγνωση της σχέσης μεταξύ των τιμών των μονάδων και των αποτελεσμάτων, η συνέχεια να ήταν πιο παραγωγική για τον μαθητή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, η ανάκληση του σχολικού κανόνα για τον αλγόριθμο, όπως και στην περίπτωση της Δέσποινας, δε λειτουργεί ευνοϊκά, καθώς ο Μάριος καταφεύγει σε αυτόν και, αντίθετα, με τη Δέσποινα, τον χρησιμοποιεί για να απεμπλακεί από τη διαδικασία.

Κοσμάς

1η δραστηριότητα. Ο Κοσμάς σε αυτή τη δραστηριότητα χρησιμοποιεί με ευκολία το υλικό που του δίνεται ώστε να απαντήσει στα ερωτήματα που του τέθηκαν. Στο πρώτο μέρος προβλέπει άμεσα την κατεύθυνση της μεταβολής του αποτελέσματος καθώς μεταβάλλεται η μονάδα μέτρησης. Καθώς του δίνονται μικρότερες μονάδες μέτρησης, προβλέπει κάθε φορά ότι «*θα προσθέσουμε άλλα 12*», εκφράζοντας τη μεταβολή προσθετικά.

Στη συνέχεια παρατηρεί μια ταυτόχρονη μεταβολή στη μονάδα μέτρησης και στο αποτέλεσμα, την οποία δεν ορίζει αριθμητικά ολοκληρωμένα. Δεν παρατηρεί τι παθαίνει η μονάδα μέτρησης αριθμητικά, παρά μόνο ότι μικραίνει και αναφέρεται στους αριθμούς που βλέπει στους παρονομαστές. Εκφράζεται πολλαπλασιαστικά μόνο για την πρώτη μέτρηση και συνεχίζει προσθετικά:

> *Το αρχικό είναι το 12(...) επειδή είναι το μισό πιο μικρό, το πολλαπλασίασα με το 2 και βγήκε 24, μετά επειδή είναι ακόμα πιο μικρό το πολλαπλασίασα με το(...) όχι(...)εε έβαλα συν 12(...)36 και στο 48 το ίδιο, στο 36 έβαλα συν 12. Κάθε φορά που γίνεται πιο μεγάλος ο παρονομαστής τόσο πιο μικρό το(...) τόσο ανεβαίνουν τα κομμάτια(...) κάθε φορά που μεγαλώνει ο παρονομαστής γίνεται συν 12.*

Στο τέλος του πρώτου μέρους αυτής της δραστηριότητας αφού ο μαθητής συμπλήρωσε τον Δομημένο Πίνακα κατάφερε να παρατηρήσει μια σχέση στη μονάδα μέτρησης και στο αποτέλεσμα εστιάζοντας στον παρονομαστή και να την εκφράσει πολλαπλασιαστικά ως εξής:

> *Όταν έχουμε ένα κομμάτι και το κάνουμε κλάσμα, το μισό, θα πολλαπλασιάσουμε το 12 επί 2, όταν έχουμε $\frac{1}{3}$ θα το πολλαπλασιάσουμε με το 3. Δηλαδή, όσο πάει και μεγαλώνει ο παρονομαστής τόσο μεγαλώνει και το πόσες φορές χρειάζεται η κορδέλα.*

Στο δεύτερο μέρος της δραστηριότητα, με μείωση της μονάδας μέτρησης, ο Κοσμάς και πάλι προβλέπει σωστά την κατεύθυνση της μεταβολής του αποτελέσματος και τις τιμές του. Παρατηρεί ταυτόχρονη μεταβολή στη μονάδα μέτρησης και στο αποτέλεσμα, την οποία δεν ορίζει αριθμητικά λέγοντας «*όσο μεγαλώνει το κομμάτι τόσο μειώνεται ο αριθμός*».

Σε αίτημα της ερευνήτριας να επεξεργαστεί τις σχέσεις, ο μαθητής παρατήρησε στον πίνακα ότι οι τελεστές στη στήλη των μονάδων είναι ίδιοι με τους παρονομαστές των τελεστών στη στήλη των αποτελεσμάτων, χωρίς να αποπειραθεί να περιγράψει τις μεταβολές.

(...)το 2 που είναι εδώ (μονάδα μέτρησης) *είναι και στον παρονομαστή, το 3 εδώ και εδώ και το 4 εδώ και εδώ.*

Στη συνέχεια, συμπληρώνει τον Δομημένο Πίνακα με ευκολία και εκφράζει με διαίρεση τι παθαίνει το αποτέλεσμα όταν μεγαλώνει η μονάδα μέτρησης.

(...)θα πάρω το διπλάσιο και τότε θα διαιρέσω το 12 με το 2, το τριπλάσιο και τότε με το 3 και στο τετραπλάσιο με το 4.

Ωστόσο, μετά από αίτημα της ερευνήτριας εκφράζεται με πολλαπλασιασμό, κάτι που διατηρεί και στις γενικεύσεις.

Ο μαθητής στο τέλος της δραστηριότητας καταλήγει στο συμπέρασμα ότι όταν η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, τον οποίο όρισε 10 γιατί δεν κατάλαβε τι σημαίνει το «α» το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με το $\frac{1}{10}$. Έτσι εύκολα, κατέληξε στο ότι όταν η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφο του αριθμού αυτού.

2η δραστηριότητα. Σε αυτήν την δραστηριότητα ο μαθητής συνδέει την πράξη της διαίρεσης με τη μέτρηση, τον διαιρετέο με όλη την κορδέλα, τον διαιρέτη με τη μονάδα μέτρησης και το αποτέλεσμα της μέτρησης με το πηλίκο.

Στην πρώτη μέτρηση αυτής της δραστηριότητας ο μαθητής ενώ προβλέπει σωστά το αποτέλεσμα της μέτρησης, δεν μπορεί να συμπληρώσει τον πίνακα. Δεν του είναι ξεκάθαρο τι του ζητείται να κάνει και μπερδεύεται και ως προς το τι παθαίνει η μονάδα μέτρησης και ως προς το τι παθαίνει το αποτέλεσμα. Μετά από υποστήριξη της ερευνήτριας καταλαβαίνει τι παθαίνει η μονάδα μέτρησης και τι θα πάθει το αποτέλεσμα, αλλά δεν μπορεί να βρει τον αντίστροφο. Αφού, τελικά, συμπληρώνει σωστά αυτή τη μέτρηση εκτέλεσε γραπτά την πράξη για να επιβεβαιώσει ότι το αποτέλεσμα που είχε προβλέψει είναι σωστό.

Στη δεύτερη μέτρηση προβλέπει σωστά το αποτέλεσμα. Η μονάδα μέτρησης μικραίνει και το εκφράζει ως διαίρεση. Δυσκολεύεται να εκφράσει τη διαίρεση ως πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο. Όταν τελικά συμπληρώνει σωστά τι παθαίνει η μονάδα μέτρησης και το αποτέλεσμα απαντάει με ενθουσιασμό:

(...)τώρα το κατάλαβα ότι είναι ο αντίστροφος, εδώ είχαμε 3 και $\frac{1}{3}$*, εδώ* $\frac{1}{2}$ *και 2.*

Στις υπόλοιπες μετρήσεις δεν είχε δυσκολία στο να προβλέψει το αποτέλεσμα αλλά ούτε και στις σχέσεις μεταξύ μονάδας μέτρησης και αποτελέσματος.

Στο τέλος της δραστηριότητας καταλήγει στο συμπέρασμα πως σε μια διαίρεση μετριέται πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο.

Του ζητείται να συγκρίνει το συμπέρασμα που έβγαλε για τη διαίρεση με την εξήγηση που έδωσε στην αρχική αξιολόγηση, του μερισμού. Ο μαθητής αρχικά πιστεύει ότι δεν είναι το ίδιο νόημα και ότι το αρχικό που είχε δώσει είναι λανθασμένο. Στη συνέχεια τα παρατηρεί ξανά και αλλάζει γνώμη λέγοντας «*είναι ίδια, αφού 8 δια 2 το ένα και 8 δια 2 το άλλο»*. Δεν του είναι ξεκάθαρο ότι του ζητείται να συγκρίνει την ερμηνεία που δίνει στην πράξη αυτή και όχι την πράξη και το αποτέλεσμα. Μετά από υποστήριξη της ερευνήτριας καταλήγει στο ότι δεν είναι ίδιο το νόημα.

3η δραστηριότητα. Ο Κοσμάς σε αυτήν τη δραστηριότητα δίνει στην αριθμητική παράσταση «4:7» την αρχική του ερμηνεία για τη διαίρεση, του μερισμού. Μετά από την προτροπή της ερευνήτριας να δώσει το νόημα που έβγαλε στο παραπάνω συμπέρασμα, δίνει και την ερμηνεία της μέτρησης λέγοντας σημαίνει «*πόσες φορές χωράει το 7 στο 4*». Αφού του ζητήθηκε να σκεφτεί αν μπορεί να χωράει το 7 στο 4 απάντησε ότι «*μπορεί να χωράει πιο λίγες φορές από 1*». Δεν μπόρεσε, όμως, να βρει πώς να χρησιμοποιήσει το υλικό που του δόθηκε. Μετά από παρέμβαση της ερευνήτριας τοποθέτησε σωστά τις λωρίδες τη μία πάνω από την άλλη και έκανε τη μέτρηση. Βρήκε ότι «*χωράνε τα 4 από τα 7*» και έδωσε ως απάντηση το $\frac{4}{7}$.

4η δραστηριότητα. Σε αυτήν τη δραστηριότητα ο Κοσμάς συνδέει τη μέτρηση με τη γενική μορφή της διαίρεσης χρησιμοποιώντας το υλικό που του δόθηκε. Στην πρώτη μέτρηση δε βρίσκει σωστά την κατεύθυνση της μεταβολής του πηλίκου ανάλογα με τη μεταβολή του διαιρέτη, αντίθετα προβλέπει μια παράλληλη μείωση στον διαιρέτη και στο πηλίκο. Χρησιμοποιώντας το υλικό που του δόθηκε βρήκε τελικά τη σωστή σχέση ανάμεσα στον διαιρέτη και το πηλίκο. Σε όλες τις υπόλοιπες μετρήσεις προβλέπει και εκφράζει σωστά όλες τις σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ του διαιρέτη και του πηλίκου.

Στη συνέχεια της δραστηριότητας ο μαθητής επαληθεύει τον γενικό πίνακα της διαίρεσης με τον δεύτερο πίνακα της δεύτερης δραστηριότητας ο οποίος είναι ένας αριθμητικός πίνακας. Δεν κάνει κάποια γραπτή πράξη για την επαλήθευση των δυο πινάκων.

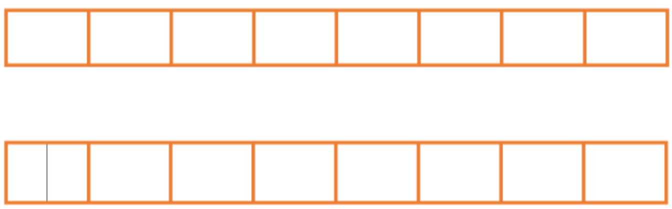
Ο μαθητής αφού παρατήρησε προσεκτικά τον πίνακα κατέληξε στο συμπέρασμα πως σε μια διαίρεση αν πολλαπλασιάσει τον διαιρέτη με έναν αριθμό, τότε το πηλίκο πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφό του. Σε αυτό το συμπέρασμα μπόρεσε να βρει τον αντίστροφο του αριθμού εκφρασμένο στη γενική του μορφή.

$5^{η}$ δραστηριότητα. Ο μαθητής σε αυτή τη δραστηριότητα δεν προσπαθεί να εξηγήσει τι σημαίνει η αριθμητική παράσταση «8 : $\frac{1}{2}$» απλώς διαβάζει την παράσταση λέγοντας αυθόρμητα 4. Θεωρώντας ότι «8: $\frac{1}{2}$» είναι το μισό του 8. Όταν του τονίζεται ότι του ζητείται να εξηγήσει και όχι να υπολογίσει λέει:

> *(...)σημαίνει ότι έχουμε το 8 δια το $\frac{1}{2}$, το οποίο σημαίνει μισό, άρα 8 δια το μισό του, το οποίο είναι το 4(...) 8 δια 4 ίσον 2.*

Εδώ παρατηρούνται δυο διαφορετικές παρανοήσεις του μαθητή, πρώτον ότι 8:$\frac{1}{2}$ ισούται με 8 x $\frac{1}{2}$ και δεύτερον 8 : $\frac{1}{2}$ ισούται με 8 : ($\frac{1}{2}$ x 8).

Του δόθηκε το υλικό στην αρχική του μορφή, όπως φαίνεται στην εικόνα και στη συνέχεια του δόθηκαν εξηγήσεις για το τι σημαίνει μισό χωρίζοντας ένα κουτάκι στη μέση όπως φαίνεται στην Εικόνα 32.



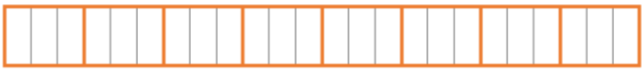
Εικόνα 32. Εικονική αναπαράσταση του μισού πάνω στη λωρίδα

Ο μαθητής τότε κατάλαβε και είπε «*ααα επί 2, θα γίνει 16*». Χρησιμοποίησε τη λωρίδα όπως φαίνεται στην Εικόνα 33 για να εξηγήσει τη σκέψη του και πώς το υπολόγισε, λέγοντας:

(…)έχουμε το 8 και τα κομματάκια τα χωρίζουμε(…) βάζουμε μια γραμμή και τα χωρίζουμε στο μισό (…)και μετράμε πόσα το κάναμε (…)ήταν 8 και έγιναν 16 δηλαδή πολλαπλασιάστηκε με το 2.

Εικόνα 33. Εικονική αναπαράσταση της λύσης 8 : $\frac{1}{2}$

6^{η} δραστηριότητα. Ο μαθητής σε αυτή τη δραστηριότητα εξηγεί τη διαίρεση με την ερμηνεία της μέτρησης λέγοντας «*πόσες φορές χωράει το* $\frac{2}{3}$ *στο 8*». Για να υπολογίσει το αποτέλεσμα χρησιμοποιεί το υλικό που του δόθηκε. Χωρίζει το κάθε κουτάκι της λωρίδας στα 3 όπως φαίνεται στην Εικόνα 34 λέγοντας «*θα πολλαπλασιαστεί με το 3*».



Εικόνα 34. Εικονική αναπαράσταση της κάθε μονάδας στα 3

Στη συνέχεια λέει ότι πρέπει να μετρηθούν δυο-δυο αλλά δεν κάνει σωστά τη μέτρηση αφού κάθε φορά αφήνει $\frac{1}{3}$ χωρίς να το μετρήσει όπως φαίνεται στην Εικόνα 35.

Εικόνα 35. Λανθασμένη εικονική αναπαράσταση της λύσης 8 : $\frac{2}{3}$

Μετά μετράει με μονάδα μέτρησης το $\frac{1}{3}$ και αφού η ερευνήτρια τον προτρέπει να δει ξανά τι έγραψε ότι ψάχνει να βρει σε αυτή τη διαίρεση καταλήγει στη σωστή μονάδα μέτρησης και στη σωστή μέτρηση όπως φαίνεται στην Εικόνα 36.

Εικόνα 36. Εικονική αναπαράσταση της λύσης 8 : $\frac{2}{3}$

Τέλος, η ερευνήτρια με υποστηρικτικές ερωτήσεις τον οδήγησε στο να δει την αριθμητική παράσταση «8: $\frac{2}{3}$» αρχικά ως «8:1» και στη συνέχεια ως «8: $\frac{2}{3}$». Ο μαθητής εδώ περιγράφει μια παράλληλη μεταβολή του διαιρέτη και του πηλίκου λέγοντας:

> *(…)ο διαιρέτης πολλαπλασιάστηκε με το $\frac{2}{3}$, το πηλίκο θα πολλαπλασιαστεί με το $\frac{2}{3}$.*

Μετά από επισήμανση της ερευνήτριας «*το πηλίκο δηλαδή θα πάθει ότι και ο διαιρέτης*» λέει σωστά ότι θα πολλαπλασιαστεί με τον αντίστροφο αλλά δυσκολεύεται να βρει τον αντίστροφο του μη μοναδιαίου κλάσματος. Στο τέλος έκανε γραπτά τον πολλαπλασιασμό για να επαληθεύσει το αποτέλεσμα που είχε βρει με τη λωρίδα.

$7^{η}$ δραστηριότητα. Ο μαθητής στην τελική δραστηριότητα «$\frac{2}{5}$: $\frac{3}{4}$» πάλι δείχνει να μην καταλαβαίνει τι του ζητείται να εξηγήσει. Αφού του ζητήθηκε να παρατήσει την προηγούμενη δραστηριότητα και πώς το εξήγησε εκεί λέει χαρακτηριστικά:

> *(…)εκεί ήταν φυσικός και κλάσμα, εδώ είναι δύο κλάσματα και υπάρχει πρόβλημα(…) δεν μπορώ να πάρω στη λωρίδα τα $\frac{3}{4}$.*

Στη συνέχεια παρατήρησε ξανά τι έγραψε στην προηγούμενη δραστηριότητα και απάντησε ότι σημαίνει «πόσες φορές χωράει το $\frac{3}{4}$ στο $\frac{2}{5}$».

Για τον υπολογισμό και πάλι λέει ότι «*θα πολλαπλασιάσουμε με το $\frac{3}{4}$ (…)ααα όχι με το $\frac{4}{3}$*». Δεν μπόρεσε να δώσει κάποια εξήγηση λέγοντας «*δεν ξέρω γιατί, επειδή το λέει ο κανόνας*».

Συνοψίζοντας, ο Κοσμάς από την $1^{η}$ Δραστηριότητα επέδειξε ευχέρεια στο να εντοπίζει κανονικότητες, ιδίως σε αριθμητικό πλαίσιο. Προέβλεψε την κατεύθυνση της μεταβολής των αποτελεσμάτων και τις τιμές τους με ευκολία. Ξεκίνησε εστιάζοντας στη μεταβολή του αποτελέσματος, την οποία περιέγραψε προσθετικά. Ωστόσο, πολύ γρήγορα άρχισε να λαμβάνει υπόψη τους και τις δύο μεταβολές ταυτόχρονα, ενώ σύντομα άρχισε να ξεχωρίζει και τελεστές στις μεταβολές. Παρόμοια με τον Θοδωρή και τον Μάριο, παρατήρησε πρώτα ότι οι τελεστές της μιας μεταβολής, και οι παρονομαστές των τελεστών της άλλης είναι ίδιοι. Η ευχέρειά του να παρατηρεί κανονικότητες στους αριθμούς ενδεχομένως τον υποστήριξε να αρχίσει να αναγνωρίζει και να αναφέρεται στους αντίστροφους αριθμούς στην περίπτωση φυσικού-μοναδιαίου κλάσματος σχετικά γρήγορα (1^η Δραστηριότητα, 2^η Δραστηριότητα), όχι όμως και στην περίπτωση των μη μοναδιαίων κλασμάτων. Η ίδια ευχέρεια φαίνεται να τον μπερδεύει στο να υπολογίσει τις τιμές των αποτελεσμάτων στη 2^η Δραστηριότητα, καθώς αυτές δεν ήταν με τη σειρά που περίμενε.

Το μοντέλο της διαίρεσης ως «δίκαιη μοιρασιά» (3^η Δραστηριότητα), αλλά και οι λανθασμένες αρχικές ερμηνείες του Κοσμά για τη διαίρεση κλασμάτων (5^η Δραστηριότητα), επανεμφανίζονται στην πορεία της παρέμβασης. Το τελευταίο έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς ο μαθητής φάνηκε να αισθάνεται αρκετά ασφαλής με την ερμηνεία «8: $\frac{1}{2}$ είναι το μισό του 8», ώστε να χρειαστεί η παρέμβαση της ερευνήτριας για να ενεργοποιήσει το μοντέλο της διαίρεσης ως μέτρηση και να προθυμοποιηθεί να αξιοποιήσει το διαθέσιμο υλικό.

Ο διαισθητικός κανόνας «μεγαλώνει το Α, μεγαλώνει και το Β», εμφανίστηκε και στην περίπτωση του Κοσμά (4^η Δραστηριότητα, 6^η Δραστηριότητα). Επίσης, το πρόβλημα συντονισμού των μονάδων που παρατηρήθηκε και στα άλλα παιδιά, παρουσιάστηκε και στον Κοσμά (6^η Δραστηριότητα).

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Κοσμάς έδειξε ενδιαφέρον για τα διαθέσιμα υλικά και προθυμία να τα χρησιμοποιήσει, κάτι που διαφαίνεται και από την συμπεριφορά του στη Φάση Γ.

3.3 Κεντρικά θέματα – Αναστοχασμός

Από τη μελέτη των δεδομένων που συλλέχθηκαν κατά τη διδακτική παρέμβαση προέκυψαν ορισμένα κεντρικά ζητήματα, τα οποία θα πρέπει να ληφθούν υπόψη για τον επανασχεδιασμό του προγράμματος δραστηριοτήτων. Θα ξεκινήσουμε με ένα γενικό και θα εστιάσουμε σε ειδικότερα

3.3.1 «Δε θέλω να εξηγήσω, να υπολογίσω θέλω»

Σε διάφορες στιγμές της παρέμβασης, υπήρχαν ενδείξεις ότι οι μαθητές έχουν εκτεθεί σε διδασκαλία που ευνοεί και αποδίδει αξία στη διαδικαστική ευχέρεια σε σχέση με την εννοιολογική κατανόηση τόσο όσον αφορά τα κλάσματα, όσο και γενικότερα. Η χρήση μοντέλων, ιδιαίτερα εμπράγματων, για την άντληση νοήματος για τους αριθμούς και τις πράξεις δεν φάνηκε να τους είναι οικεία πρακτική, σε αντίθεση με την αποστήθιση κανόνων και διαδικασιών χωρίς κατανόηση.

Πράγματι, φάνηκε ότι τα παιδιά θεωρούσαν ότι το ζητούμενο στα προβλήματα που τους τέθηκαν στη Φάση Β, αλλά και κατά τη Φάση Α, ήταν να υπολογίσουν ένα αριθμητικό αποτέλεσμα και απορούσαν, ή ακόμα και δυσανασχετούσαν, με το αίτημα της ερευνήτριας για εξήγηση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα οι αποστροφές του Μάριου «*τι να εξηγήσω; δύο κλάσματα είναι*» (Δραστηριότητα 7) και «*δε θέλω να εξηγήσω, να το υπολογίσω θέλω*» (Δραστηριότητα 7).

Επίσης, έδειξαν αμηχανία σε καταστάσεις προβλήματος χωρίς αριθμούς. Αναφέρουν, για παράδειγμα, «*δεν μπορώ να το βρω αφού δεν έχει αριθμούς*» (Θοδωρής, Δραστηριότητα 1) ή «*χρειάζομαι έναν χάρακα για να το μετρήσω*» (Μάριος, Δραστηριότητα 1).

Όταν είχαν ή θεωρούσαν ότι είχαν διαθέσιμο έναν τρόπο να υπολογίσουν ένα αριθμητικό αποτέλεσμα, τα παιδιά κατέφευγαν σε αυτόν, ακόμα και όταν αναγνώριζαν ότι δεν είχαν καμιά κατανόηση για τη διαδικασία. Για παράδειγμα, ο Μάριος που θυμόταν εξαρχής τον σχολικό κανόνα «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», καθώς και η Δέσποινα, που τον ανακάλεσε στην πορεία, τον χρησιμοποίησαν λέγοντας «*δεν καταλαβαίνω γιατί το κάνω, έμαθα τον νόμο και το κάνω*» (Δέσποινα, Δραστηριότητα 6), «*δεν ξέρω να το εξηγήσω…δε μας το έχει κάνει απλώς μας έδειξε τον τρόπο*» (Μάριος, Δραστηριότητα 6).

Επιπλέον, είχαν μεγαλύτερη εμπιστοσύνη στα αποτελέσματα που έβρισκαν με αριθμητικούς υπολογισμούς και αισθάνονταν μεγαλύτερη ασφάλεια σε αριθμητικό πλαίσιο, παρά σε μη αριθμητικό. Όλα τα παιδιά, για παράδειγμα, κατέφυγαν σε διάφορες στιγμές σε υπολογισμούς για να ελέγξουν την ορθότητα των προβλέψεών τους, ενώ αν υπήρχε σύγκρουση, δυσκολεύονταν να απορρίψουν το αποτέλεσμα που είχαν βρει υπολογιστικά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο Κοσμάς (Ε4α, Φάση

Γ), ο οποίος αρχικά έχει υπολογίσει το 8: $\frac{1}{2}$ ως 8:2. Στη συνέχεια έχει βρει το αποτέλεσμα μέσω του υλικού, έχει εξηγήσει πώς το βρήκε, και τελικά ρωτάει «*ναι, αλλά δεν κάνει και 4;*». Το συγκεκριμένο παράδειγμα, βέβαια, αντανακλά και την ανθεκτικότητα της συγκεκριμένης παρανόησης, ένα σημείο στο οποίο θα επιστρέψουμε στη συνέχεια.

Οι συγκεκριμένες επισημάνσεις γίνονται για να τονιστεί ότι μια παρέμβαση που στοχεύει στην κατασκευή νοήματος, τόσο για την πράξη, όσο και τον αλγόριθμο της διαίρεσης κλασμάτων, στηριζόμενη στη χρήση μοντέλων, μπορεί να είναι πιο παραγωγική αν απευθύνεται σε μαθητές που είναι εξοικειωμένοι με τέτοιες προσεγγίσεις και αποδίδουν αξία στον συγκεκριμένο στόχο. Αυτό είναι, φυσικά, ένα πολύ ευρύτερο ζήτημα. Κατά ελάχιστο, η διδακτική αξιοποίηση αυτής της ακολουθίας δραστηριοτήτων θα απαιτούσε να γίνει πριν να έχουν εκτεθεί τα παιδιά στον τυπικό σχολικό αλγόριθμο.

3.3.2 Ελλιπείς γνώσεις, παρανοήσεις και εννοιολογικές δυσκολίες για τα κλάσματα.

Στη Φάση Α και στη Φάση Β έγινε προφανές ότι γνώσεις για τα κλάσματα που περιλαμβάνονται στη σχολική διδακτέα ύλη και πραγματεύονται στα εγχειρίδια της Ε΄ και της Στ΄ Δημοτικού, δεν ήταν διαθέσιμες στα παιδιά, ούτε ως διαδικασίες. Πράγματι, με την εξαίρεση του Μάριου, ο οποίος θυμόταν και μπορούσε να εκτελέσει τον αλγόριθμό «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», κανένα άλλο παιδί δε φάνηκε να γνωρίζει οτιδήποτε σχετικό με τη διαίρεση κλασμάτων στη Φάση Α, με τη Δέσποινα να ανακαλεί το σχολικό κανόνα κατά τη Φάση Β. Ο αλγόριθμος του «κοινού παρονομαστή», παρά το γεγονός ότι παρουσιάζεται και εξηγείται με αρκετή λεπτομέρεια στο εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης, δεν αναφέρθηκε από κανένα παιδί. Κανένα παιδί δεν αναγνώριζε τους αντίστροφους αριθμούς, ούτε σαν όρο. Επιπλέον, τα τρία αγόρια δυσκολεύτηκαν αρχικά να υπολογίσουν το κλασματικό μέρος ενός αριθμού, πόσο μάλλον να το εκφράσουν με πολλαπλασιασμό, αντί διαίρεσης.

Το νόημα της διαίρεσης ως μέτρηση δεν ήταν αρχικά διαθέσιμο στα παιδιά. Μόνο ο Μάριος και ο Θοδωρής, σε μία περίπτωση ο καθένας, φάνηκε να το ενεργοποιούν (ο πρώτος διατυπώνοντας, αλλά αποσύροντας άμεσα το πρόβλημα «πόσες μισές σοκολάτες στις 8 σοκολάτες;» και ο δεύτερος μετρώντας με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση πόσες φορές χωράει το 0,5 στο 8 για να υπολογίσει το 8: $\frac{1}{2}$, χωρίς να το γενικεύσει στην περίπτωση του μη μοναδιαίου διαιρέτη). Κανένα παιδί δεν μπορούσε να αποδώσει νόημα στη διαίρεση με διαιρέτη μικρότερο της μονάδας, και κανένα δεν επέλεξε όλα τα σωστά προβλήματα μέτρησης που δόθηκαν. Αντίθετα, όλοι οι μαθητές επιλέγουν ως σωστά, προβλήματα που λύνονται με διαίρεση με τον παρονομαστή του διαιρέτη ή με πολλαπλασιασμό με τον διαιρέτη. Ο Κοσμάς, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, εξέφρασε και ρητά την αντίληψη ότι το 8: $\frac{1}{2}$ είναι «το μισό του 8».

Εννοιολογικές δυσκολίες εμφανίστηκαν και με την έννοια του κλάσματος αυτή καθαυτή. Σε όλη την πορεία ήταν προφανές ότι μια κυρίαρχη ερμηνεία που απέδιδαν τα παιδιά στο κλάσμα ήταν «το κλάσμα είναι μια διαίρεση», με εξαίρεση ίσως τη Δέσποινα, η οποία συχνά αναφέρθηκε στο κλάσμα ως πηλίκο. Πράγματι, στην περίπτωση που ένα αριθμητικό αποτέλεσμα ήταν κλάσμα, οι μαθητές ήθελαν να εκτελέσουν τη διαίρεση ώστε το αποτέλεσμά τους να είναι δεκαδικός αριθμός, πιθανώς γιατί δε θεωρούσαν το κλάσμα αριθμό και ότι αυτό θα μπορούσε να είναι το αποτέλεσμα μιας πράξης. Για παράδειγμα, ο Θοδωρής (Δραστηριότητα 3) αφού βρήκε ένα κλασματικό αριθμητικό αποτέλεσμα, μέσα από τη χρήση του υλικού, είπε χαρακτηριστικά «να το κάνω τώρα;», εννοώντας να κάνει την κάθετη διαίρεση για να βρει δεκαδικό αριθμό.

Η δυσκολία που επηρέασε πιο άμεσα την πορεία της διαδικασίας προέκυψε όταν τα παιδιά έπρεπε να μετρήσουν έναν αριθμό με ένα μη μοναδιαίο κλάσμα, μια κατάσταση που απαιτεί την αναγνώριση και το συντονισμό διαφορετικών μονάδων. Εκεί φάνηκε τα παιδιά αρχικά να βασίζονται στην αντίληψη του κλάσματος ως «μέρος-όλο», χωρίζοντας κάθε μονάδα σε ίσα μέρη και στη συνέχεια ή να μετράνε με μονάδα μέτρησης την κλασματική μονάδα, ή να μετράνε ένα «μέρος» για κάθε μία μονάδα, παραβλέποντας το συμπλήρωμά του.

Επισημαίνεται ότι το υλικό που είχε προβλεφθεί στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν περιλάμβανε πολλαπλά αντίγραφα του κλάσματος που λειτουργούσε ως μονάδα μέτρησης, κάτι που θα λειτουργούσε υποστηρικτικά και πρέπει να ληφθεί υπόψη στον επανασχεδιασμό της ακολουθίας.

Μια πιο ουσιαστική συνιστώσα του επανασχεδιασμού θα ήταν η επέκταση, ώστε να προηγηθούν δραστηριότητες με στόχο το νόημα του κλάσματος ως «μέτρο», που μπορεί να μετρηθεί από την κλασματική μονάδα ή άλλα κλάσματα και, με τη σειρά του, να μετρήσει άλλους αριθμούς. Η κεντρική ιδέα του σχεδιασμού, δηλαδή, η σύνδεση της διαίρεσης μέτρησης με τη μέτρηση ποσοτήτων είναι απολύτως συμβατή με αυτό το νόημα και μπορεί να αξιοποιηθεί παραγωγικά.

3.3.3 Ομοιότητες και διαφορές των παιδιών

Όλοι οι μαθητές, από την πρώτη κιόλας δραστηριότητα προβλέπουν την κατεύθυνση της μεταβολής του αποτελέσματος ανάλογα με τη μεταβολή στη μονάδα μέτρησης, και προς τις δύο κατευθύνσεις. Όλοι μπόρεσαν να εκφράσουν ότι όσο μεγαλώνει η μονάδα μέτρησης μικραίνει το αποτέλεσμα και το αντίστροφο. Επίσης, όλοι εντόπισαν κάποιου είδους κανονικότητα στην κατάσταση αυτή. Ωστόσο, υπάρχουν διαφορές, ως προς το αν συσχετίζουν τις δύο μεταβολές, καθώς και ως προς τον τρόπο που τις περιγράφουν: εστιάζουν στη μεταβολή μόνο του αποτελέσματος της μέτρησης, ή μόνο στη μεταβολή της μονάδας. Ή, εστιάζουν ταυτόχρονα στη μεταβολή και των δύο; Με ποιον τρόπο εκφράζουν με περισσότερη ακρίβεια το πόσο ακριβώς «μεγαλώνει» (π.χ. προσθετικά, πολλαπλασιαστικά) ή «μικραίνει» η μονάδα ή το αποτέλεσμα (π.χ., με πολλαπλασιασμό ή με διαίρεση;). Ο Θοδωρής και ο Κοσμάς συσχετίζουν γρήγορα τις δύο μεταβολές, σε αντίθεση με τη Δέσποινα και τον Μάριο. Από την άλλη μεριά, ο Θοδωρής και ο Μάριος εκκινούν εκφράζοντας πολλαπλασιαστικά τις μεταβολές, ενώ ο Κοσμάς και η Δέσποινα προσθετικά.

Τα παιδιά διαφέρουν και ως προς την ευχέρεια που δείχνουν στον εντοπισμό κανονικοτήτων: Ο Θοδωρής και ο Κοσμάς δείχνουν μεγαλύτερη ευχέρεια, ενώ η Δέσποινα δυσκολεύεται αρκετά στην αρχή. Από την άλλη μεριά, ο Μάριος παρατηρεί από μόνος του μια σημαντική σχέση που συνδέει τις τιμές των αποτελεσμάτων με τις τιμές των μονάδων, συγκεκριμένα, ότι το γινόμενό τους είναι σταθερό. Ωστόσο, η παρατήρησή του δεν είχε προβλεφθεί και δεν αξιοποιήθηκε τη δεδομένη στιγμή. Ο Μάριος, από το σημείο αυτό και μετά, δυσκολεύτηκε πολύ στο να διακρίνει εναλλακτικές κανονικότητες.

Διαφορές παρατηρήθηκαν και ως προς την προθυμία των παιδιών να αξιοποιήσουν τα διαθέσιμα υλικά. Ο Κοσμάς ήταν με διαφορά αυτός που έδειξε τη μεγαλύτερη διάθεση να χρησιμοποιήσει τα υλικά, και τα αξιοποίησε και στη Φάση Γ, για να εξηγήσει πώς υπολογίζει τα ζητούμενα πηλίκα (σε αντίθεση με τα άλλα τρία παιδιά, τα οποία εφάρμοσαν τη νέα μέθοδο σε αριθμητικό πλαίσιο). Ήταν επίσης το μόνο παιδί που, μετά το πέρας της παρέμβασης, αναφέρθηκε στον βοηθητικό ρόλο «των λωρίδων» για να καταλάβει τη διαίρεση. Το γεγονός ότι ο Κοσμάς αποκόμισε τα μεγαλύτερα οφέλη από την παρέμβαση σχετίζεται ενδεχομένως με το χαρακτηριστικό αυτό.

Κάποια από αυτά τα στοιχεία πρέπει να ληφθούν υπόψη στον επανασχεδιασμό της ακολουθίας, αλλά και για την προετοιμασία της διαχείρισής της. Συγκεκριμένα, περισσότερες ειδικές περιπτώσεις μεταβολών χρειάζονται, πριν ζητηθούν γενικότερα (επαγωγικά) συμπεράσματα, για παιδιά που δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν κανονικότητες που διέπουν την κατάσταση. Απαιτείται πρόνοια ώστε και η πρόταση του Μάριου, ενδεχομένως και άλλες προτάσεις παιδιών που μπορεί να προκύψουν κατά την εφαρμογή, να είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν παραγωγικά στη συνέχεια.

3.3.4 Ευνοϊκές και μη ευνοϊκές συνιστώσες του σχεδιασμού

Όπως έχει αναφερθεί, ένα βασικό στοιχείο του σχεδιασμού του προγράμματος ήταν η υποστήριξη των παιδιών να διακρίνουν τους τελεστές των μεταβολών και να τους χρησιμοποιήσουν για να τις εκφράσουν πολλαπλασιαστικά. Προς αυτή την κατεύθυνση, χρησιμοποιήθηκαν α) οι πίνακες καταγραφής και β) υποστήριξη από την ερευνήτρια.

Οι δομημένοι πίνακες καταγραφής πράγματι λειτούργησαν υποστηρικτικά, αφενός παρουσιάζοντας με τον επιθυμητό τρόπο τις μεταβολές της μονάδας, αφετέρου «παρακινώντας» τους μαθητές να τον υιοθετήσουν. Όπως φαίνεται και από τις περιγραφές της Β΄ φάσης, τα παιδιά εν γένει βελτίωναν τις περιγραφές τους μετά την παρουσίαση των δομημένων πινάκων καταγραφής. Επιπλέον, οι πίνακες λειτούργησαν ως σημείο αναφοράς για τη διατύπωση των πιο γενικών συμπερασμάτων.

Από την άλλη μεριά, ο δομημένος πίνακας έχει τον περιορισμό ότι «επιβάλλει» μια συγκεκριμένη οπτική στην κατάσταση που, αν είναι μακριά από την οπτική του παιδιού, μπορεί να δυσχεράνει τη διαδικασία. Το παράδειγμα του Μάριου είναι διαφωτιστικό, από αυτήν την άποψη. Η μορφή και η στιγμή παρουσίασης αυτού του πίνακα θα πρέπει να εξεταστεί κατά τον επανασχεδιασμό, ώστε να αφήνεται μεγαλύτερος χώρος για την έκφραση των προσωπικών κατανοήσεων των παιδιών και μεγαλύτερη ευελιξία για τη διαμόρφωση της συνέχειας στον διδάσκοντα.

Ακόμη πιο καθοριστικός ήταν ο υποστηρικτικός ρόλος της ερευνήτριας, με ερωτήσεις, αναδιατυπώσεις των εκφράσεων των παιδιών, ρητά αιτήματα για εξηγήσεις και αναδιατυπώσεις στα παιδιά, αλλά και προτροπές προς τα παιδιά να επιστρέψουν σε προηγούμενα συμπεράσματα και να τα αξιοποιήσουν. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι, όπως έχει φανεί από τις περιγραφές της Φάσης Β, η υποστήριξη της ερευνήτριας ήταν απαραίτητη μέχρι το τέλος.

Σε μια διδακτική αξιοποίηση αυτού του σχεδιασμού, περισσότερο εκτεταμένη χρονικά, η υποστήριξη θα πρέπει να μειώνεται σταδιακά. Θα πρέπει, όμως να επισημανθεί ότι τα ζητήματα που πραγματεύονται στο πλαίσιο αυτού του σχεδιασμού είναι πολλά και σύνθετα και ίσως θα ήταν ωφέλιμο να επεκταθεί με σύνδεση. Μια άμεση επέκταση μπορεί να γίνει σε σύνδεση με το περιεχόμενο που αφορά τις αναλογίες (ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά), το οποίο είναι στη διδακτέα ύλη της Στ΄ Δημοτικού.

3.3.5 Στοιχεία της μαθησιακής πορείας των μαθητών

Στη Φάση Β, όλα τα παιδιά από κάποιο σημείο και μετά συσχετίζουν τις δύο μεταβολές (μονάδα μέτρησης / αποτέλεσμα μέτρησης ή διαιρέτης / πηλίκο) και τις περιγράφουν πολλαπλασιαστικά. Στη Φάση Γ, τα παιδιά εμφανίζονται να χρησιμοποιούν το νόημα της διαίρεσης ως μέτρηση για να αποδώσουν νόημα στη διαίρεση με κλασματικό διαιρέτη. Να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν τον τυπικό αλγόριθμο της διαίρεσης κλασμάτων και να τον εξηγούν, είτε με βάση τη μέθοδο της αλλαγής στον διαιρέτη (Μάριος, Δέσποινα, Θοδωρής), είτε με τη βοήθεια του υλικού (Κοσμάς). Σημειώνεται ότι τα τρία πρώτα παιδιά περιγράφουν τη διαδικασία όχι μέσω του σχολικού κανόνα «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», αλλά χρησιμοποιώντας τον όρο «αντίστροφος» (του διαιρέτη). Επιπλέον, αναγνωρίζουν περισσότερα προβλήματα διαίρεσης κλασμάτων, σε σχέση με τη Φάση Α.

Αυτές οι βελτιώσεις δε σημαίνουν, φυσικά, ότι τα παιδιά έχουν κατακτήσει πλήρως τα νέα νοήματα και τους νέους όρους που πραγματεύθηκαν στη διάρκεια της διερευνητικής παρέμβασης και δε θα ήταν και αναμενόμενο, δεδομένης της μικρής χρονικής της διάρκειας.

Δύο σημεία φαίνεται να δυσκολεύουν όλους τους μαθητές μέχρι το τέλος: α) να αναγνωρίσουν ή να βρουν τον αντίστροφο αριθμό, ιδιαίτερα μη μοναδιαίου κλάσματος και β) να εκφράσουν μια μείωση μέσω πολλαπλασιασμού με κλασματικό τελεστή.

Το πρώτο οφείλεται στο γεγονός ότι οι τέσσερις μαθητές δεν είχαν καμία εξοικείωση με την έννοια των «αντίστροφων αριθμών», ούτε ως όρο, ούτε στο σχετικά απλό επίπεδο της αναγνώρισης και εύρεσης αντίστροφου, που θα ήταν αρκετό για τις ανάγκες της συγκεκριμένης παρέμβασης. Το γεγονός αυτό προκάλεσε πολλές παρεμβάσεις από τη μεριά της ερευνήτριας, με παροχή των σχετικών πληροφοριών στην αρχή της παρέμβασης, υπενθυμίσεις κατά τη διάρκεια, και προτροπές προς τα παιδιά να παρατηρήσουν και να περιγράψουν ως «αντίστροφους» τους τελεστές των μεταβολών. Σημειώθηκε βελτίωση στην περίπτωση φυσικού-μοναδιαίου κλάσματος, αλλά παρέμεινε δυσκολία στην περίπτωση των μη μοναδιαίων κλασμάτων. Παράδειγμα, ο Κοσμάς, στην πρώτη απόπειρα εύρεσης του αντίστροφου μη μοναδιαίου κλάσματος: «*ο αντίστροφος του δυο τρίτα; 3; 2,3; 23;*». Θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι τα παιδιά εκτέθηκαν σε πολύ περισσότερα παραδείγματα για την πιο απλή περίπτωση και ενδεχομένως, αυτό θα πρέπει να ληφθεί υπόψη στην επιλογή των ειδικών περιπτώσεων μεταβολής που επεξεργάζονται τα παιδιά.

Το δεύτερο ζήτημα είναι πιο σύνθετο. Η έκφραση της μείωσης μέσω της διαίρεσης είναι συμβατή με την αντίληψη «η διαίρεση μικραίνει». Επιπλέον, εμπλέκει τον μετασχηματισμό α : β = $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \; x \, \frac{1}{\beta}$. Από τα ευρήματα φαίνεται ότι οι εκφράσεις αυτές δεν είναι νοηματικά ισοδύναμες για τα παιδιά. Ήδη αναφέρθηκε ότι η κατεύθυνση $\frac{\alpha}{\beta}$ -> α:β είναι κυρίαρχη, μέσω της ερμηνείας «το κλάσμα είναι μια διαίρεση» σε σχέση με την αντίθετη, αφού τα παιδιά φαίνεται να θεωρούν ότι «το πηλίκο της διαίρεσης α:β είναι ο δεκαδικός που προκύπτει από τη διαίρεση». Επίσης, από τη Φάση Α φάνηκε ότι για τα τρία αγόρια, το πέρασμα από το $\frac{1}{\beta} \; x \; \alpha$ -> α : β δεν ήταν άμεσα διαθέσιμο, ακόμα και στο πλαίσιο της εύρεσης του μέρους ενός αριθμού. Η αντίθετη κατεύθυνση ήταν απαιτητική για όλα, και για τη Δέσποινα, που εξαρχής ήταν σε θέση να εκφράσει το μέρος ενός αριθμού $\frac{1}{\beta} x \; \alpha$.

Η αναδιατύπωση του α : β ως $\frac{1}{\beta} \; x \; \alpha$ ήταν το ζήτημα που προκάλεσε τις περισσότερες παρεμβάσεις από την ερευνήτρια, από την αρχή και μέχρι το τέλος της διερευνητικής παρέμβασης. Ήταν επίσης ένα θέμα για το οποίο τα παιδιά αναζήτησαν επιβεβαίωση μέσω υπολογισμών, ελέγχοντας αν οδηγούνται στο ίδιο αποτέλεσμα. Η στρατηγική των παιδιών θα μπορούσε να αξιοποιηθεί στον επανασχεδιασμό, ίσως επικουρικά.

Το συγκεκριμένο ζήτημα, όμως, αξίζει βαθύτερη επεξεργασία, Ένα πλαίσιο το οποίο θα μπορούσε να αξιοποιηθεί είναι η «κυκλικότητα» που διέπει τις σχέσεις μέρους-όλου. Για παράδειγμα, αν το x είναι το ένα πέμπτο του y, τότε το y είναι το πενταπλάσιο του x. Οι σχέσεις μέρους-όλου είναι οικείες στα παιδιά και είναι στη βάση της κατανόησής τους για το κλάσμα. Η «κυκλικότητα» αυτή μπορεί να αναπαρασταθεί με μοντέλα, να εκφραστεί λεκτικά, και να αναπαρασταθεί με κυκλικά διαγράμματα. Μπορεί έτσι να αποτελέσει τη μετεξέλιξη μιας βασικής εκδοχής της αντίστροφης σχέσης μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης που συζητήθηκε στην ενότητα 1.1.1. («αν ένας αριθμός α πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό β και στη συνέχεια διαιρεθεί με τον αριθμό β, ο α δεν αλλάζει»).

Αξίζει να επισημανθεί ότι η πορεία των παιδιών στη διάρκεια της διερευνητικής παρέμβασης δεν ήταν γραμμική. Όπως φαίνεται και από τις περιγραφές της Φάσης Β, τα παιδιά υπαναχωρούσαν σε λιγότερο ακριβείς περιγραφές των μεταβολών σε στιγμές όπου αντιμετώπιζαν την ίδια κατάσταση σε ένα πιο απαιτητικό πλαίσιο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η εμφάνιση «διαισθητικών κανόνων» του τύπου «όταν μεγαλώνει το Α, μεγαλώνει και το Β» ή «ό,τι παθαίνει το Α, παθαίνει και το Β», σε μια κατάσταση στην οποία τα παιδιά συσχέτιζαν εν γένει σωστά τις κατευθύνσεις των μεταβολών, όταν η κατάσταση μεταφερόταν σε ένα πιο απαιτητικό πλαίσιο. Για παράδειγμα, όλα τα παιδιά λειτούργησαν με έναν τέτοιο κανόνα στην 4η Δραστηριότητα.

Παρόμοια, αρχικές τους αντιλήψεις επανεμφανίζονταν σε ανταγωνισμό με τις υπό διαμόρφωση καινούργιες τους κατανοήσεις. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του Κοσμά που αναφέρθηκε παραπάνω, με την αρχική του ερμηνεία «το 8 διά ένα δεύτερο είναι το μισό του 8» να συγκρούεται με την ερμηνεία «το 8 δια ένα δεύτερο είναι πόσες φορές χωράει το ένα δεύτερο στο οχτώ». Ο Θοδωρής (3η Δραστηριότητα) προσάρμοσε το 4:7 σε 7:4, για να ταιριάζει με τη διαίρεση ως «δίκαιη μοιρασιά», πριν ενεργοποιήσει το μοντέλο της μέτρησης.

Η αλληλεπίδραση του εδραιωμένου μοντέλου της διαίρεσης μερισμού ως «δίκαιη μοιρασιά» και του νεοεισερχόμενου μοντέλου της διαίρεσης ως μέτρηση έχει επίσης ενδιαφέρον: Τα παιδιά ξεκίνησαν μόνο με το πρώτο. Στη συνέχεια άρχισαν να χρησιμοποιούν το δεύτερο, χωρίς να έχουν απαραίτητα επίγνωση του διαφορετικού νοήματος. Για παράδειγμα ο/η (Δέσποινα, Μάριος, Κοσμάς, Δραστηριότητα 2), όταν τους ζητήθηκε να συγκρίνουν την αρχική με τη νέα ερμηνεία για τη διαίρεση, θεώρησαν ότι δεν υπάρχει διαφορά, γιατί το αποτέλεσμα είναι ίδιο. Στην πορεία τα παιδιά επικαλούνται το δεύτερο, είτε εξαρχής, είτε κάνοντας εναλλαγή των μοντέλων, με ή χωρίς την προτροπή της ερευνήτριας. Ο Μάριος, για παράδειγμα, σε μια διαίρεση φυσικών αριθμών με μεγαλύτερο διαιρέτη από τον διαιρετέο έδωσε αρχικά την ερμηνεία του μερισμού και μετά της μέτρησης λέγοντας «*μοιράζω το 4 σε 7*» και «*μετράω πόσες φορές χωράει το 7 στο 4*».

Στο τέλος, μόνο ο Θοδωρής αναφέρει ότι ένα από τα καινούργια πράγματα που έμαθε είναι πως «σε μια διαίρεση μετριέται πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο». Ενδεχομένως, μια ρητή αντιπαράθεση των δύο νοημάτων για τη διαίρεση θα ήταν χρήσιμο να ενταχθεί στον επανασχεδιασμό.

4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή σχεδιάστηκε μια ακολουθία δραστηριοτήτων με στόχο τη διαίρεση κλασμάτων, η οποία βασίστηκε στην άμεση σύνδεση της πράξης της διαίρεσης με τη μέτρηση μεγεθών, έτσι ώστε α) να υποστηριχτεί το μοντέλο της διαίρεσης μέτρησης και β) να αξιοποιηθεί η «αρχή της αντιστάθμισης» στη μέτρηση μεγεθών (Lamon, 2008) για την απόδοση νοήματος στον αλγόριθμο της διαίρεσης που είναι γνωστός ως «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Πραγματοποιήθηκε μια διερευνητική διδασκαλία (Steffe & Thompson, 2000) σε τέσσερα παιδιά της Στ΄ Δημοτικού, προκειμένου να αντληθούν στοιχεία χρήσιμα ως πρώτη αξιολόγηση της ακολουθίας και να χρησιμοποιηθούν στον επανασχεδιασμό της για ενδεχόμενο δεύτερο κύκλο εφαρμογής. Η μεθοδολογία αυτή εντάσσεται στο παράδειγμα της έρευνας σχεδιασμού με εστίαση σε συγκεκριμένο θέμα (topic-specific design research, Gravemeijer & Prediger, 2019).

Τα ερευνητικά μας ερωτήματα εστιάζουν σε τέσσερα σημεία. Το πρώτο σημείο αναφέρεται στην προϋπάρχουσα γνώση για τη διαίρεση κλασμάτων που φέρουν οι μαθητές. Συγκεκριμένα, τι νόημα αποδίδουν στη διαίρεση κλασμάτων, αν αναγνωρίζουν τις καταστάσεις που συνδέονται με τη διαίρεση μέτρησης στα κλάσματα, αν είναι σε θέση να εκτελέσουν τον αλγόριθμο της διαίρεσης κλασμάτων και αν είναι σε θέση να εξηγήσουν πώς και γιατί λειτουργεί. Το δεύτερο σημείο εστιάζει στο πώς εμπλέκονται οι μαθητές με το συγκεκριμένο πρόγραμμα δραστηριοτήτων και συγκεκριμένα αν αντιμετωπίζουν δυσκολίες και αν ναι, τι είδους και ποιες. Το τρίτο σημείο αφορά την επίδραση που έχει η συμμετοχή των μαθητών στο συγκεκριμένο πρόγραμμα δραστηριοτήτων στην κατανόησή τους για τη διαίρεση κλασμάτων. Το τελευταίο σημείο αναφέρεται σε τι από όλα αυτά μπορούν να αξιοποιηθούν για τον επανασχεδιασμό του προγράμματος δραστηριοτήτων.

Όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, τα ευρήματα που προέκυψαν από την Φάση Α, αλλά και τη Φάση Β της έρευνας, έδειξαν ότι τα παιδιά έχουν εξαιρετικά περιορισμένη γνώση για τη διαίρεση των κλασμάτων, αλλά και για άλλες πτυχές της γνώσης για τα κλάσματα.

Όλοι οι μαθητές λειτουργούσαν κατά κύριο λόγο με το μοντέλο του μερισμού στους φυσικούς αριθμούς, το οποίο είναι το πρωταρχικό διαισθητικό μοντέλο για τη διαίρεση σύμφωνα με τον Fischbein και τους συνεργάτες του (1985) αλλά κανένας από αυτούς δεν έχει στο ρεπερτόριο του το μοντέλο της μέτρησης ώστε να περνάει από το ένα μοντέλο στο άλλο με ευκολία όταν αυτό χρειάζεται, όπως στην περίπτωση των κλασματικών αριθμών. Ο Μάριος και ο Θοδωρής, οι οποίοι είχαν επαναλάβει τη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων στη Στ΄, σε μία περίπτωση ο καθένας, δίνουν ενδείξεις ότι χρησιμοποιούν το μοντέλο αυτό, αλλά πολύ διστακτικά (Ο Μάριος αποσύρει το σωστό πρόβλημα διαίρεσης κλασμάτων που είχε διατυπώσει) και χωρίς γενίκευση (ο Θοδωρής μετράει πόσες φορές χωράει το $\frac{1}{2}$ ως 0,5 σε ένα φυσικό αριθμό, με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση μέχρι να φτάσει στον αριθμό στόχο, αλλά δεν εφαρμόζει το ίδιο και με άλλα κλάσματα).

Η ίδια δυσκολία που αφορά το νόημα που δίνουν στη διαίρεση κλασμάτων επιβεβαιώνεται και από την επιλογή των προβλημάτων που κάνουν. Κανένας μαθητής δεν επιλέγει όλα τα σωστά προβλήματα μέτρησης που δόθηκαν επιβεβαιώνοντας ότι η μέτρηση δεν είναι μοντέλο διαίρεσης το οποίο κατέχουν. Αντίθετα, όλοι οι μαθητές επιλέγουν ως σωστά, προβλήματα που λύνονται με διαίρεση με τον παρονομαστή του διαιρέτη ή με πολλαπλασιασμό με τον διαιρέτη. Την ίδια δυσκολία παρουσιάζουν και οι εκπαιδευτικοί σύμφωνα με τη Ma (1999) και τον Simon (1993, στο Lo & Luo, 2018).

Σύμφωνα με τους Fischbein και συνεργάτες (1985), το μοντέλο της μέτρησης είναι επίσης ένα διαισθητικό μοντέλο για την πράξη της διαίρεσης, αλλά αναπτύσσεται κατά κύριο στο πλαίσιο της τυπικής εκπαίδευσης (Tirosh, 2000). Κατά τα φαινόμενα, η σχολική εμπειρία των συγκεκριμένων παιδιών δεν ευνόησε την ανάπτυξη του μοντέλου της μέτρησης.

Οι μαθητές δεν μπορούν να δώσουν κάποιο νόημα στον αλγόριθμο αλλά ούτε και να εκτελέσουν μια διαίρεση με κλασματικό διαιρέτη αφού δε θυμούνται τον αλγόριθμο της διαίρεσης κλασμάτων, γεγονός που φανερώνει ότι τον απομνημονεύουν, τον εκτελούν μηχανιστικά και τον ξεχνάνε αφού δεν έχει κάποιο νόημα για αυτούς, όπως αναφέρει η Tirosh (2000). Μόνο ένας μαθητής στους τέσσερις θυμάται τα βήματα, ο Μάριος, ο οποίος έχει διδαχθεί πρόσφατα τη διαίρεση κλασμάτων, αλλά δεν μπορεί να τον εξηγήσει. Σύμφωνα με τη Ma (1999) ακόμα και οι εκπαιδευτικοί έχουν τις ίδιες ακριβώς δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές αυτοί.

Τα τρία αγόρια δε γνωρίζουν ότι για να βρουν το μέρος μιας ποσότητας μπορούν να πολλαπλασιάσουν την ποσότητα με το μέρος αυτό, αλλά και δεν επιλέγουν άμεσα να διαιρέσουν με τον παρονομαστή του μέρους.

Τέλος, όλοι οι μαθητές έχουν άγνοια για τους αντίστροφους αριθμούς. Αυτό το γεγονός είναι, ίσως, αναμενόμενο, αν ληφθεί υπόψη η πολύ μικρή βαρύτητα που δίνεται σε αυτή την έννοια από το σχολικό τους εγχειρίδιο. Σύμφωνα με αυτά που αναφέρθηκαν στην ενότητα 1.6.1, στο εγχειρίδιο της Ε΄ Δημοτικού περιλαμβάνεται μόνο μια αναφορά στο ότι «αντίστροφοι είναι οι αριθμοί που έχουν γινόμενο ένα» και δεν εξηγείται παραπάνω πώς να βρουν τον αντίστροφο ενός φυσικού ή κλασματικού αριθμού. Κρίνοντας από τα εγχειρίδια, αλλά και από την άγνοια των παιδιών, θα μπορούσε κανείς να υποθέσει ότι δεν έχει δοθεί έμφαση στη διδασκαλία στην έννοια του αντίστροφου αριθμού ενώ είναι μία τόσο κρίσιμη έννοια για τη διαίρεση κλασμάτων (Chabe, 1963 στο Li, 2008; Ma, 1999).

Από την άλλη μεριά, θα πρέπει να σημειωθεί ότι στο εγχειρίδιο της Ε΄ Δημοτικού παρουσιάζεται η διαίρεση κλασμάτων ως μέτρηση, αν και όχι σε σχέση με τον αλγόριθμο «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω», αλλά με αυτόν του «κοινού παρονομαστή». Κάτι που εγείρει ερωτήματα σχετικά με το κατά πόσο έχει αξιοποιηθεί το συγκεκριμένο ευνοϊκό στοιχείο κατά τη διδασκαλία στη σχολική εμπειρία αυτών των παιδιών.

Συναφές με την τελευταία παρατήρηση είναι το εύρημα ότι οι μαθητές έδειξαν μεγάλη δυσκολία στο να «μετρήσουν» έναν αριθμό με μονάδα μέτρησης μη μοναδιαίο κλάσμα που οδηγεί στο συμπέρασμα πως υπάρχουν ελλείψεις στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και ιδιαίτερα της έννοιας του κλάσματος ως «μέτρο». Η κατανόηση ότι ένα κλάσμα μπορεί να «μετρηθεί» από ένα άλλο και με τη σειρά του, να «μετρήσει» έναν αριθμό, προϋποθέτει ότι τα παιδιά αναγνωρίζουν και μπορούν να συντονίσουν τις διαφορετικές μονάδες που ενυπάρχουν στις σχετικές καταστάσεις. Η σημασία της ικανότητας αυτής αναδεικνύεται στο «πακέτο γνώσης» της Ma (1999), που αναφέρει ως βασική προϋπόθεση για την κατανόηση της διαίρεσης κλασμάτων, την βαθιά κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και της έννοιας της μονάδας, αλλά και από πολλούς άλλους ερευνητές (Gregg & Gregg, 2007; Kribs-Zaleta, 2006; Ma, 1999; Steffe, 2003).

Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα εξετάζει το πώς εμπλέκονται οι μαθητές με το συγκεκριμένο πρόγραμμα δραστηριοτήτων, αν παρουσιάζουν δυσκολίες και τι είδους δυσκολίες. Στην ενότητα 3.3.4, εντοπίσαμε διαφορές μεταξύ των μαθητών όσον αφορά το υπόβαθρό τους στην εκκίνηση της διερευνητικής παρέμβασης, συγκεκριμένα, διαφορές ως προς το αν συσχετίζουν ή όχι τις δύο μεταβολές, με ποιο τρόπο τις περιγράφουν (προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά), την ευχέρεια στον εντοπισμό κανονικοτήτων, καθώς και στην αναγνώριση τελεστών στις μεταβολές. Με αυτό το μικρό δείγμα δεν είναι δυνατόν να αποσαφηνιστεί αν και κατά πόσο κάποια από τα χαρακτηριστικά αυτά έχει πιο σημαντικό ρόλο για τη μετέπειτα πορεία του παιδιού στην εξέλιξη της διαδικασίας. Ωστόσο, από την περίπτωση της Δέσποινας φαίνεται ότι ένας συνδυασμός εστίασης στη μία εκ των δύο μεταβολών, αρχικής προσθετικής περιγραφής, και όχι τάσης αναζήτησης κανονικοτήτων μπορεί να δυσκολέψει αρκετά κατά την εκκίνηση. Θα πρέπει, όμως, να σημειωθεί ότι η δυσκολία αυτή δεν ήταν ανυπέρβλητη για τη Δέσποινα.

Διαφορές εντοπίστηκαν και ως προς την αξιοποίηση ή μη των διαθέσιμων υλικών. Επισημαίνεται ξανά η αρχική δυσκολία που έδειξαν τα παιδιά ως προς τον τρόπο που θα το χρησιμοποιούσαν και μια επιφυλακτικότητα ως προς το να δώσουν απαντήσεις οι οποίες προκύπτουν μόνο από τη χρήση του. Στη διάρκεια της Φάσης Β εμφάνισαν μεγαλύτερη ευχέρεια στη χρήση του, με τον Κοσμά να δείχνει τη μεγαλύτερη προθυμία να το αξιοποιήσει και τον Θοδωρή τη λιγότερη, αφού δε θεωρούσε απαντήσεις αυτές που προκύπταν από τη χρήση των υλικών αλλά μόνο από πράξεις. Και οι άλλοι δύο μαθητές έδειξαν περισσότερη εμπιστοσύνη στις πράξεις παρά στη χρήση του υλικού. Αυτό είναι ενδεχομένως συμβατό με τη σχολική εμπειρία των παιδιών, η οποία διαφαίνεται να προωθεί τη διαδικαστική γνώση χωρίς να αποδίδει ισότιμη αξία στην κατασκευή νοήματος. Σε αυτό πιθανόν να οφείλεται η αμηχανία των παιδιών, ή ακόμα και η άρνηση, όταν τους ζητήθηκαν εξηγήσεις. Παρόμοια φαινόμενα, σε παρόμοιο πλαίσιο, αναφέρουν οι Cavey & Kinzel (2014) για μελλοντικούς εκπαιδευτικούς και τα αποδίδουν επίσης στη σχολική εμπειρία των συμμετεχόντων τους.

Η κεντρική εννοιολογική δυσκολία που συνάντησαν τα παιδιά στη διάρκεια της διαδικασίας ήταν η έκφραση της μείωσης μέσω του πολλαπλασιασμού με κλασματικό τελεστή και ήταν αυτή που προκάλεσε τις περισσότερες παρεμβάσεις από την ερευνήτρια. Στην ενότητα 1.3 αναλύσαμε γιατί αυτό είναι δύσκολο, με βάση τους περιορισμούς του πρωταρχικών διαισθητικών μοντέλων για τη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό («η διαίρεση μικραίνει – ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει», Fischbein et al., 1985), αλλά και τις αντιλήψεις για το κλάσμα που εξέφρασαν τα παιδιά σε διάφορες φάσεις της διερευνητικής παρέμβασης (π.χ. «το κλάσμα είναι μια διαίρεση», «το πηλίκο της διαίρεσης α:β είναι δεκαδικός αριθμός (και όχι το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$)»). Θα επανέλθουμε στο ζήτημα αυτό στη συνέχεια.

Θα πρέπει, τέλος, να σημειωθεί ότι η διαδικασία θα είχε διευκολυνθεί σημαντικά, αν τα παιδιά είχαν έστω και στοιχειώδεις γνώσεις για τους αντίστροφους αριθμούς. Για τις ανάγκες της παρέμβασης, η γνώση του όρου και η ικανότητα αναγνώρισης και εύρεσης αντίστροφων αριθμών, έστω και μηχανιστικά, θα ήταν αρκετή.

Το τρίτο ερευνητικό ερώτημα εξετάζει το πώς μεταβάλλεται η κατανόηση των μαθητών για τη διαίρεση κλασμάτων μετά από τη συμμετοχή τους στο πρόγραμμα. Τα αποτελέσματα της Φάσης Γ δείχνουν βελτίωση όλων των μαθητών.

Συγκεκριμένα, όλοι οι μαθητές στη Φάση Γ μπορούν να ερμηνεύσουν μια διαίρεση κλασμάτων με το μοντέλο της μέτρησης και δύο από αυτούς μπορούν να φτιάξουν ένα λεκτικό πρόβλημα που να λύνεται με διαίρεση κλασμάτων, κάτι που είναι αρκετά δύσκολο για τους εκπαιδευτικούς σύμφωνα με τους Koichu και τους συνεργάτες του (2012), Lo & Luo (2012) και τη Ma (1999), επομένως και για τους μαθητές.

Επίσης, όλοι οι μαθητές μπορούν να εκτελέσουν μια διαίρεση κλασμάτων είτε με τον αλγόριθμο είτε με το υλικό που τους δόθηκε. Επιπλέον, όλοι μπόρεσαν να εξηγήσουν τον αλγόριθμο. Τρεις μαθητές με βάση τα συμπεράσματα που έβγαλαν μετά από τη Φάση Β, δηλαδή ότι όταν ο διαιρέτης πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό το πηλίκο πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφό του και ο Κοσμάς με τη βοήθεια του υλικού. Συγκεκριμένα, ο Κοσμάς χρησιμοποίησε το υλικό που του δόθηκε και εξήγησε τον αλγόριθμο με τον τρόπο που δούλεψαν οι Ervin (2017) και Kribs-Zaleta (2006) στις έρευνές τους. Δηλαδή, πολλαπλασιάζοντας τον διαιρετέο με ό,τι ορίζει ο παρονομαστής του διαιρέτη και διαιρώντας με ό,τι ορίζει ο αριθμητής του διαιρέτη ώστε να φτιάξει ομάδες και να μπορέσει να τις μετρήσει.

Τέλος, όλοι οι μαθητές κατάφεραν να διαλέξουν σωστά περισσότερα προβλήματα που να μοντελοποιούν μια διαίρεση με κλάσμα, παρά το γεγονός ότι στη διάρκεια της Φάσης Β δεν υπήρξε καμία σχετική παρέμβαση. Ο Θοδωρής και ο Μάριος έκαναν μόνο μια λανθασμένη επιλογή, η Δέσποινα δύο και ο Κοσμάς καμία, σε συνολικά 6 επιλογές. Ο Κοσμάς είχε τη μεγαλύτερη βελτίωση αφού στην Φάση Α όλες οι επιλογές του ήταν λανθασμένες και στη Φάση Γ όλες σωστές.

Με δεδομένη τη μικρή διάρκεια της παρέμβασης, την εξαιρετικά περιορισμένη σχετική γνώση των παιδιών πριν την παρέμβαση, αλλά και τη δυσκολία του συγκεκριμένου περιεχομένου, οι βελτιώσεις αυτές είναι αρκετά σημαντικές. Φυσικά, δεν μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι τα παιδιά κατανόησαν πλήρως και σε βάθος τα θέματα που πραγματεύτηκαν στη Φάση Β. Όπως συζητήθηκε στην ενότητα 1.3, οι αρχικές κατανοήσεις των παιδιών για τη διαίρεση ως «δίκαιη μοιρασιά», αλλά και σχετικές λανθασμένες ερμηνείες της αριθμητικής έκφρασης της διαίρεσης με κλασματικό διαιρέτη ή με διαιρέτη μεγαλύτερο από το διαιρετέο, επανεμφανίστηκαν στη διάρκεια της παρέμβασης και είναι πιθανόν να επανεμφανιστούν και στο μέλλον. Όπως ισχυρίζονται ο Fischbein και συνεργάτες (1985), το πρωταρχικό διαισθητικό μοντέλο της διαίρεσης μπορεί να υποβόσκει και να επηρεάζει τη συμπεριφορά ακόμα και μετά την έκθεση σε άλλα μοντέλα, και μετά την ενηλικίωση (Greer, 1992; Tirosh, 2000).

Το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα εξετάζει τι από όλα που προέκυψαν από τα τρία προηγούμενα ερωτήματα μπορεί να αξιοποιηθεί για τον επανασχεδιασμό της ακολουθίας δραστηριοτήτων. Στην ενότητα 3.3.5 , η οποία περιλαμβάνει και τον αναστοχασμό επί του σχεδιασμού (Gravemeijer & Prediger, 2019), αναφερθήκαν οι περιορισμοί της ακολουθίας δραστηριοτήτων, καθώς και δυνατότητες βελτίωσης και επέκτασής της. Ίσως ο πιο σημαντικός περιορισμός που πρέπει να επισημανθεί είναι ότι το στήσιμο της ακολουθίας, οι δομημένοι πίνακες ως υποστηρικτικό υλικό, αλλά και ο προσανατολισμός της ερευνήτριας, είχαν μια πολύ συγκεκριμένη κατεύθυνση, που δεν άφησε πολλά περιθώρια για εναλλακτικές διαδρομές των παιδιών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κανονικότητα που παρατήρησε ο Μάριος στην πρώτη δραστηριότητα της Φάσης Β, ότι το γινόμενο της μονάδας μέτρησης και του αποτελέσματος είναι πάντα σταθερό. Πρόκειται για κάτι που παραπέμπει στον ορισμό των αντιστρόφως ανάλογων ποσών, αλλά δεν είχε προβλεφθεί, δεν αναγνωρίστηκε τη δεδομένη στιγμή και δεν αξιοποιήθηκε. Η δυσκολία που αντιμετώπισε ο Μάριος μπορεί ενδεχομένως να αποδοθεί και στο γεγονός ότι «εξαναγκάστηκε» να προσαρμοστεί σε ένα διαφορετικό τρόπο ανάγνωσης της συγκεκριμένης κατάστασης, πολύ διαφορετικό από τον δικό του, ο οποίος αγνοήθηκε. Σε έναν επανασχεδιασμό της ακολουθίας των δραστηριοτήτων θα πρέπει να προβλεφθεί μεγαλύτερη δυνατότητα να αξιοποιηθούν παραγωγικά εναλλακτικές διαδρομές των παιδιών.

Σε συναφές πλαίσιο, η υποστήριξη που παρείχε η ερευνήτρια, η οποία ήταν απαραίτητη μέχρι το τέλος της Φάσης Β, σε μια εφαρμογή σε τάξη ή σε ζεύγη μαθητών με περισσότερο χρόνο και αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών, θα μπορούσε να είναι πιο περιορισμένη και η διαδικασία πιο διερευνητική. Η αλληλεπίδραση ένας-προς έναν, και σε περιορισμένο χρόνο, είναι ένας περιορισμός της έρευνας που επιβλήθηκε λόγω των συνθηκών της πανδημίας και της επικείμενης καραντίνας.

Από τις προτάσεις για τον επανασχεδιασμό που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 3.3, αξίζει να σημειωθεί ότι η αξιοποίηση της «κυκλικότητας» των σχέσεων μέρος-όλου για τη διευκόλυνση του περάσματος από το α : β στο α x $\frac{1}{\beta}$ (κεντρική εννοιολογική δυσκολία των παιδιών στην διάρκεια της παρέμβασης), είναι συμβατή με την οπτική της επέκτασης και, ταυτόχρονα, αναθεώρησης, της αντίστροφης σχέσης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης από το πλαίσιο των φυσικών στο πλαίσιο των ρητών (Ma, 1999) και ταυτόχρονα της «διπλής αντιστροφής» που απαιτείται στον τυπικό αλγόριθμο της διαίρεσης (Chabe, στο Li, 2008).

Με όλους τους περιορισμούς και τις προτάσεις για βελτιώσεις, οι κεντρικές ιδέες που αξιοποιήθηκαν σε αυτή την ακολουθία δραστηριοτήτων φαίνεται να είναι παραγωγικές. Συγκεκριμένα, η άμεση και ρητή σύνδεση της διαίρεσης με τη μέτρηση μεγεθών, η οικοδόμηση της «αντισταθμιστικής αρχής» στο πλαίσιο της μέτρησης μεγεθών και η μεταφορά της σε αριθμητικό πλαίσιο φαίνεται να είναι ωφέλιμες για τους μαθητές. Επιπλέον έμφαση στη σχέση μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης καθώς και την έννοια του αντίστροφου αριθμού αξίζει να διερευνηθούν σε δεύτερο κύκλο εφαρμογής της ακολουθίας δραστηριοτήτων. Τέλος, επισημαίνεται ότι αν θέλουμε οι μαθητές να κατανοήσουν τη διαίρεση κλασμάτων και τον αλγόριθμό της, τότε πρέπει να κάνουμε μακροπρόθεσμο σχεδιασμό της διδασκαλίας με αυτό τον στόχο, κάτι που σημαίνει επεξεργασία των παραπάνω κεντρικών ιδεών από μικρότερες ηλικίες, ήδη από το πλαίσιο των φυσικών και σε βάθος χρόνου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Adu-Gyamfi, K., & Bossé, M. J. (2014). Processes and reasoning in representations of linear functions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(1), 167-192.

Adu-Gyamfi, K., Schwartz, C. S., Sinicrope, R., & Bossé, M. J. (2019). Making sense of fraction division: domain and representation knowledge of preservice elementary teachers on a fraction division task. *Mathematics Education Research Journal*, *31*(4), 507-528

Baturo, A. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. In *Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 95-102). Bergen University College.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily?. *Journal for research in mathematics education*, *23*(3), 194-222.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction* (Vol. 59). Harvard University Press.

Bulgar, S. (2003). Children's sense-making of division of fractions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 319-334.

Bulgar, S. (2009). A longitudinal study of student's representations for division of fractions. *The Mathematics Enthusiast*, *6*(1), 165-200.

Cavey, L. O., & Kinzel, M. T. (2014). From whole numbers to invert and multiply. *Teaching children mathematics*, *20*(6), 374-383.

Chabe, A. M. (1963). Rationalizing "inverting and multiplying". *The Arithmetic Teacher*, *10*(5), 272-273.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational studies in mathematics*, *64*(3), 293-316.

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 1-21.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics teaching in the middle school*, *13*(8), 490-496.

Davis, R. B., Maher, C. A., & Martino, A. M. (1992). Using videotapes to study the construction of mathematical knowledge by individual children working in groups. *Journal of Science Education and Technology*, *1*(3), 177-189.

Ervin, H. K. (2017). Fraction Multiplication and Division Models: A Practitioner Reference Paper. *International Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 258-279.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, 3-17.

Fredua-Kwarteng, E., & Ahia, F. (2006). Understanding division of fractions: an alternative view. (12pp) (ERIC Document Reproduction Service No. ED 493746) Retrieved from https://eric.ed.gov/?id=ED493746

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.

Graeber, A. O., Tirosh, D., & Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 95-102.

Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). Topic-specific design research: An introduction. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 33-58). Cham, Switzerland: Springer Open.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(3), 429-438.

Gregg, J., & Gregg, D. U. (2007). Measurement and fair-sharing models for dividing fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(9), 490-496.

Hart, K. M. (Ed.). (1981). *Children's understanding of mathematics*. London: John Murray.

Huang, R., Ozel, Z. E. Y., Li, Y., & Osborne, R. V. (2014). Does classroom instruction stick to textbooks? A case study of fraction division. In *Mathematics curriculum in school education* (pp. 443-464). Springer, Dordrecht.

Kribs-Zaleta, C. (2006). Invented strategies for division of fractions. In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 371-376).

Koichu, B., Harel, G., & Manaster, A. (2013). Ways of thinking associated with mathematics teachers' problem posing in the context of division of fractions. *Instructional Science*, *41*(4), 681-698.

Lamon, S.J. (2008). *Teaching fractions and ratios for understanding* (2nd edition). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamberg, T., & Wiest, L. R. (2015). Dividing fractions using an area model: a look at in-service teachers' understanding. *Mathematics Teacher Education and Development*, *17*(1), 30-43.

Li, Y. (2008). What do students need to learn about division of fractions? *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(9), 546-552.

Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009a). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and U.S mathematics textbooks: the case of fraction division. *The International Journal on Mathematics Education*, *41*, 809-826.

Lo, J. J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(6), 481-500.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Noparit, T., & Saengpun, J. (2013). How student teachers use proportional number line to teach multiplication and division of fraction: Professional learning in context of lesson study and open approach. *Creative Education*, *4*(08), 19-24.

Novillis, C. F. (1979). Why teach elementary school students the division meaning of fractions?. *School Science and Mathematics*, *79*(8), 705-708.

Nowlin, D. (1996). Division with fractions. *Mathematics teaching in the middle school*, *2*(2), 116-119.

Ott, J. M., Snook, D. L., & Gibson, D. L. (1991). Understanding partitive division of fractions. *The Arithmetic Teacher*, *39*(2), 7-11.

Petit, M. M., Laird, R., & Marsden, E. (2010). Informing practice: They "get" fractions as pies; now what? *Mathematics Teaching in the Middle school*, *16*(1), 5-10.

Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., & Smith, N. (2012). *Helping children learn mathematics* (10th ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

Robinson, K. M., & LeFevre, J. A. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational Studies in Mathematics, 79*(3), 409-428.

Roche, A., & Clarke, D. M. (2013). Primary teachers' representations of division: Assessing mathematical knowledge that has pedagogical potential. *Mathematics Education Research Journal*, *25*(2), 257-278.

Roni, A., Zulkardi, Z., Putri, I., & Ilma, R. (2017). Learning Divisions of Fractions Through Sprint Running Pictures. *Journal of Education and Learning*, *11*(4), 381-393.

Sharp, J., & Adams, B. (2002). Children's constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. *The Journal of Educational Research*, 95(6), 333-347.

Siebert, D. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fractions. *Making sense of fractions, ratios, and proportions*, 247-256.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics education*, *24*(3), 233-253.

Sinicrope, R., Mick, H., & Kolb, J. (2002). Fraction division interpretations. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.) *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153-161). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Squire, S., & Bryant, P. (2002). From sharing to dividing: young children’s understanding of division. *Developmental Science*, *5*(4), 452-466.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes: Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 237-295.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stohlman, K. (2006). Why do we flip and multiply?. *The Mathematics Teacher*, *100*(4), 237-237.

Sun, X. (2011). “Variation problems” and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 65-85.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for research in Mathematics Education*, 5-25.

Van de Walle, A. J. (2005). *Μαθηματικά για το δημοτικό και το γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία*. Τ. Α. Τριανταφυλλίδης (επιμ.), Α. Αλεξανδροπούλου, Β. Κομπορόζος (μεταφρ.). Αθήνα: Τυπωθήτω – ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΑΡΔΑΝΟΣ.

Wahyu, K., Amin, S. M., & Lukito, A. (2017). Motivation cards to support students' understanding on fraction division. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, *1*(1), 99-120.

Yim, J. (2010). Children's strategies for division by fractions in the context of the area of a rectangle. *Educational Studies in Mathematics, 73*(2), 105-120.

Zembat, İ. Ö. (2017). An alternative route to teaching fraction division: Abstraction of common denominator algorithm. *International Electronic Journal of Elementary Education, 7*(3), 399-422.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003). Προδιαγραφές σχολικών βιβλίων. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Ανακτήθηκε στις 26 Μαΐου 2021 από http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΡΧΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Εισαγωγική δραστηριότητα

1.

α. Εξήγησε σε έναν μικρότερο μαθητή τι σημαίνει 8 : 2 με λόγια.

β. Φτιάξε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την πράξη 8 : 2.

……

……

2.

α. Εξήγησε σε έναν μικρότερο μαθητή τι σημαίνει $8 : \frac{1}{2}$ με λόγια.

β. Φτιάξε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την πράξη $8 : \frac{1}{2}$.

……

……

3. Εξήγησε σε έναν μικρότερο μαθητή τι σημαίνει 3 : 5.

……

……

4.

α. Ξέρεις πώς να υπολογίσεις το αποτέλεσμα $8 : \frac{1}{2}$; Πώς το υπολόγισες;

β. Ξέρεις πώς να υπολογίσεις το αποτέλεσμα $8 : \frac{2}{3}$; Πώς το υπολόγισες;

……

……

5. Μπορείς να εξηγήσεις γιατί όταν διαιρείς με ένα κλάσμα αντιστρέφεις τους όρους του κλάσματος και πολλαπλασιάζεις; Δηλαδή, γιατί $8 : \frac{2}{3} = 8 \times \frac{3}{2}$;

……

……

6. Επίλεξε ποια προβλήματα λύνονται με την πράξη $5 : \frac{1}{2}$:

Έχετε 5 κιλά αλεύρι και θέλετε να βάλετε το μισό σε έναν κουβά, πόσο αλεύρι θα μπει στον κουβά;	
Έχετε ένα ύφασμα μήκους 5 μέτρων και θέλετε να φτιάξετε πετσέτες μήκους $\frac{1}{2}$ μέτρου. Πόσες πετσέτες θα φτιάξετε;	
Πόσα μισάωρα έχουν οι 5 ώρες;	
Το 1 κιλό τυρί κοστίζει 5 ευρώ, πόσο κοστίζει το μισό κιλό;	
Έχετε 5 λίτρα νερό και θέλετε να τα αδειάσετε σε μπουκαλάκια του μισού λίτρου. Πόσα μπουκαλάκια θα χρειαστείτε;	
Ένας τοίχος είναι 5 μέτρα ψηλός και θέλετε να τον καλύψετε με πλακάκι που έχει ύψος $\frac{1}{2}$ μέτρα. Πόσα πλακάκια θα χρησιμοποιήσετε;	

7.

α. Αν θέλεις να βρεις το πενταπλάσιο του αριθμού 30, τι πράξη θα κάνεις; Με ποιους αριθμούς;……………………………………………………

β. Αν θέλεις να βρεις το ένα πέμπτο του 30, τι πράξη θα κάνεις; Με ποιους αριθμούς;…………………………………………………………………

γ. Ένας συμμαθητής σου μου είπε το εξής: «Για να βρω το πενταπλάσιο του 30, το πολλαπλασιάζω με το 5. Για να βρω το ένα πέμπτο του 30, το πολλαπλασιάζω με το $\frac{1}{5}$». Συμφωνείς με τον συμμαθητή σου;

………

………

ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τελική δραστηριότητα

1.

α. Εξήγησε σε έναν μικρότερο μαθητή τι σημαίνει 8 : $\frac{1}{2}$ με λόγια.

………

………

β. Φτιάξε ένα πρόβλημα που να λύνεται με την πράξη 8 : $\frac{1}{2}$.

………

………

2. Εξήγησε έναν μικρότερο μαθητή τι σημαίνει 3:5.

………

………

3.

α. Πώς υπολογίζεις το αποτέλεσμα 8 : $\frac{1}{2}$;

………

………

β. Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα μικρότερο μαθητή γιατί «αντιστρέφουμε το $\frac{1}{2}$ και κάνουμε πολλαπλασιασμό»;

………

………

4.

α. Πώς υπολογίζεις το αποτέλεσμα 8 : $\frac{2}{3}$;

………

………

β. Μπορείς να εξηγήσεις σε ένα μικρότερο μαθητή γιατί «αντιστρέφουμε το $\frac{2}{3}$ και κάνουμε πολλαπλασιασμό»;

....

....

5. Επιλέξτε ποια προβλήματα λύνονται με την πράξη $5 : \frac{1}{2}$

α. Έχετε 5 κιλά αλεύρι και θέλετε να βάλετε το μισό σε έναν κουβά, πόσο αλεύρι θα μπει στον κουβά;

β. Έχετε ένα ύφασμα μήκους 5 μέτρων και θέλετε να φτιάξετε πετσέτες μήκους $\frac{1}{2}$ μέτρου. Πόσες πετσέτες θα φτιάξετε;

γ. Πόσα μισάωρα έχουν οι 5 ώρες;

δ. Το 1 κιλό τυρί κοστίζει 5 ευρώ, πόσο κοστίζει το μισό κιλό;

ε. Έχετε 5 λίτρα νερό και θέλετε να τα αδειάσετε σε μπουκαλάκια του μισού λίτρου. Πόσα μπουκαλάκια θα χρειαστείτε;

στ. Ένας τοίχος είναι 5 μέτρα ψηλός και θέλετε να τον καλύψετε με πλακάκι που έχει ύψος $\frac{1}{2}$ μέτρα. Πόσα πλακάκια θα χρησιμοποιήσετε;

Ακολουθία δραστηριοτήτων

Δραστηριότητα $1^{η}$

α. **Πόσους φιόγκους μπορείς να φτιάξεις με όλη την κορδέλα; …………….**

β. **Μέτρησε την ίδια κορδέλα με διαφορετικές μονάδες μέτρησης και συμπλήρωσε τους πίνακες:**

Τι μετράω	**Μέτρηση**	**Μονάδα Μέτρησης**	**Αποτέλεσμα Μέτρησης**
	**$1^{η}$**	**1 κομμάτι**	
	$2^{η}$	**$\frac{1}{2}$ κομμάτι**	
	$3^{η}$	**$\frac{1}{3}$ κομμάτι**	
	$4^{η}$	**$\frac{1}{4}$ κομμάτι**	

Τι μετράω	**Μέτρηση**	**Μονάδα μέτρησης**	**Αποτέλεσμα Μέτρησης** (Πόσες φορές χωράει;)	**Παρατηρώ πώς αλλάζει το αποτέλεσμα**
	$1^{η}$	1 κομμάτι	……..	……..
	$2^{η}$	$\frac{1}{2}$ **x** 1 κομμάτι		**……x** ……..
	$3^{η}$	$\frac{1}{3}$ **x** 1 κομμάτι		**……x** ……..
	$4^{η}$	$\frac{1}{4}$ **x** 1 κομμάτι		**……x** ……..

Μπορείς να προβλέψεις τι θα συμβεί;

- Αν πολλαπλασιάσω τη μονάδα μέτρησης με το $\frac{1}{10}$ τότε το αποτέλεσμα της μέτρησης θα……………………………….με το …………. .
- Αν πολλαπλασιάσω τη μονάδα μέτρησης με το $\frac{1}{100}$, τότε το αποτέλεσμα της μέτρησης θα………………………………. με το …………. .

γ. Μέτρησε την ίδια κορδέλα με διαφορετικές μονάδες μέτρησης και συμπλήρωσε τους πίνακες:

Τι μετράω	**Μέτρηση**	Μονάδα Μέτρησης	**Αποτέλεσμα Μέτρησης**
	**$1^{η}$**	**1 κομμάτι**	
	$2^{η}$	**2-πλάσιο κομμάτι**	
	$3^{η}$	**3-πλάσιο κομμάτι**	
	$4^{η}$	**4-πλάσιο κομμάτι**	

Τι μετράω	**Μέτρηση**	**Μονάδα μέτρησης**	**Αποτέλεσμα Μέτρησης** (Πόσες φορές χωράει;)	**Παρατηρώ πώς αλλάζει το αποτέλεσμα**
	$1^{η}$	1 κομμάτι	……..	……..
	$2^{η}$	**2x** 1 κομμάτι		**……x** ……..
	$3^{η}$	**3x** 1 κομμάτι		**……x** ……..
	$4^{η}$	**4x** 1 κομμάτι		**……x** ……..

Μπορείς να προβλέψεις τι θα συμβεί;

- Αν πολλαπλασιάσω τη μονάδα μέτρησης με το 10, τότε το αποτέλεσμα της μέτρησης θα ……………………………….με το …………………… .
- Αν πολλαπλασιάσω τη μονάδα μέτρησης με το 100, τότε το αποτέλεσμα της μέτρησης θα ………………………………. με το …………………… .

Συμπέρασμα

Όταν η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό **α**, το αποτέλεσμα της μέτρησης πολλαπλασιάζεται με τον ……………, δηλαδή με τον …………………………… του**.**

Δραστηριότητα $2^{η}$

α. Έστω ότι η κορδέλα έχει μήκος 24 δεκ. και το αρχικό κομμάτι κορδέλας για να φτιάξεις τον φιόγκο 4 δεκ. . Πόσους τέτοιους φιόγκους θα μπορούσες να φτιάξεις με αυτή την κορδέλα;…………………
Με τι πράξη θα έλυνες το πρόβλημα;…………………………………

β. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Τι μετράω	**Μονάδα μέτρησης**	**Αποτέλεσμα Μέτρησης**	**Με πράξη**
 **24 δεκ.**	4 δεκ.	…….	
	12 δεκ. …… x 4 δεκ.	……. …… x …….	
	2 δεκ …… x 4 δεκ.	……. …… x …….	
	8 δεκ …… x 4 δεκ.	……. …… x …….	
	1 δεκ. …… x 4 δεκ.	……. …… x …….	

γ. Συμπλήρωσε τον πίνακα χρησιμοποιώντας το υλικό που σου δίνεται:

Διαιρετέος	Διαιρέτης	Πηλίκο

Συμπέρασμα

Όταν διαιρώ έναν αριθμό (**Διαιρετέος –Δ)** με έναν άλλο αριθμό (**διαιρέτης-δ)** τότε **μετρώ** πόσες φορές χωράει ο …………………… στον ………………………. .Το αποτέλεσμα της διαίρεσης **(πηλίκο –π)** μού δείχνει πόσες φορές χωράει ο ……………………… στον …………………………… .

Δραστηριότητα 3^{η}

Μπορείς να εξηγήσεις τι σημαίνει 4 : 7; Βρες το αποτέλεσμα με τα υλικά που σου δίνονται.

……

Δραστηριότητα 4η

Συμπλήρωσε τον πίνακα με το υλικό που σου δίνεται και επαλήθευσε χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο πίνακα.

Διαιρετέος	Διαιρέτης	Πηλίκο
Δ	δ	π
	$\frac{1}{2}$ x δ	….x π
	…. x δ	….x π
	…. x δ	….x π
	…. x δ	….x π

Συμπέρασμα

Αν διαιρέσω έναν αριθμό Δ με τον αριθμό δ, τότε βρίσκω ένα πηλίκο π.

Αν πολλαπλασιάσω τον ……………………….. με έναν αριθμό **α**, τότε το ………………… πολλαπλασιάζεται με τον ……………………….. του , δηλαδή το ………………… .

Δραστηριότητα 5η

Τώρα μπορείς να εξηγήσεις τι σημαίνει 8 : $\frac{1}{2}$; Ποιο είναι το αποτέλεσμα;

………

………

Δραστηριότητα 6η

Μπορείς να εξηγήσεις τι σημαίνει 8 : $\frac{2}{3}$; Ποιο είναι το αποτέλεσμα;

………

……..

Δραστηριότητα 7η

Μπορείς να εξηγήσεις τι σημαίνει $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$; Υπολόγισέ το και δώσε μια εξήγηση για τον τρόπο που το υπολόγισες.

………

………

……...........................