ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ ΜΕΣΙΑΚΑΡΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗΣ-ΕΥΑΓΓΕΛΙΑΣ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΤΙΤΛΟΥ

Στις «Θετικές Επιστήμες και Νέες Τεχνολογίες»

Με ειδίκευση «Διδακτική των Μαθηματικών»

ΦΛΩΡΙΝΑ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Φύλλο εξέτασης

1. Επόπτης: ____
   Βαθμός: _____________________
   Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: ____
   Βαθμός: _____________________
   Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος Βαθμολογητής: ____
   Βαθμός: _____________________
   Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός Βαθμός: ____________________________________

Η συγγραφέας Μεσιακάρη Αικατερίνη-Ευαγγελία βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά τον καθηγητή κ. Λεμονίδη Χαράλαμπο για τις συμβουλές του, την υπομονή που έδειξε και την καθοδήγηση που μου παρείχε. Επιπλέον, ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή του Πανεπιστημίου της Κύπρου κ. Γαγάτση Αθανάσιο και την Δρ. Μιχαήλ Παρασκευή για την υποστήριξη και τη βοήθεια κατά την επιλογή του θέματος και της επεξεργασίας του κατά τη διάρκεια παραμονής μου στην Κύπρο στα πλαίσια του προγράμματος Erasmus+.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ακόμη τον αναπληρωτή καθηγητή Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο και τον επίκουρο καθηγητή Χρήστου Κωνσταντίνο του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας για τη συμβολή τους στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους τους καθηγητές του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας για όλη την προσπάθειά τους κατά τη διάρκεια του προγράμματος και για τις γνώσεις που μου μετέδωσαν. Επίσης ευχαριστώ πολύ τον διευθυντή και τους δασκάλους του σχολείου για την πραγματοποίηση της έρευνας, για την προθυμία να συμμετάσχουν και για όλη τη βοήθεια και τη συμπαράσταση που μου παρείχαν.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους του οικογενειακού και φιλικού μου κύκλου που με τον έναν ή με τον άλλο τρόπο συνέβαλαν στην ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Έρευνες έχουν διαπιστώσει ότι η χωρική ικανότητα και η λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος μπορούν να βελτιωθούν με τη χρήση των κατάλληλων μέσων και δραστηριοτήτων. Σκοπός της έρευνας ήταν να διαπιστώσει εάν η λειτουργική κατανόηση μπορεί να βελτιωθεί μετά από μια μικρής διάρκειας διδακτική παρέμβαση με τη χρήση εικονικών χειραπτικών υλικών. Η έρευνα διεξήχθη σε 32 μαθητές Στ’ δημοτικού ενός δημοτικού σχολείου στα Τρίκαλα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η λειτουργική κατανόηση μπορεί να βελτιωθεί σε συγκεκριμένες πτυχές της και ότι οι μαθητές εμπλουτίζουν τις οπτικοποιήσεις, την ικανότητα χειρισμού των σχημάτων και τις «εικόνες» που έχουν στον νου τους για τα γεωμετρικά σχήματα.

Λέξεις – κλειδιά: χωρική ικανότητα, χωρική οπτικοποίηση, λειτουργική κατανόηση γεωμετρικού σχήματος, γεωμετρία, εικονικά χειραπτικά υλικά, τεχνολογία

Abstract

According to recent research spatial ability and operative apprehension of geometric shape can be improved using the appropriate tools and activities. Our research goal was to determine if the operative apprehension of the geometric shape can be improved after a short term educational intervention using virtual manipulatives. The research was conducted to 32 6^{th} grade students of a primary school in Trikala, Greece. The results revealed that the operational apprehension can be improved according to some aspects and that students enrich their visualizations, their ability to manipulate shapes and the "pictures" they have in their minds about the geometric shapes.

Key words: spatial ability, spatial visualization, operative apprehension, geometry, virtual manipulatives, technology

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εξετάσει την επίδραση που έχει η τεχνολογία και συγκεκριμένα τα εικονικά χειραπτικά υλικά στην ικανότητα λειτουργικής κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος.

Αρχικά θα αναφερθούμε στη χωρική ικανότητα καθώς και στους παράγοντες που την αποτελούν και την επηρεάζουν. Έπειτα θα παρουσιάσουμε τα εργαλεία που έχουν κατασκευαστεί για την αξιολόγηση της χωρικής ικανότητας και με ποιο τρόπο αυτή μπορεί να αναπτυχθεί σύμφωνα με αποτελέσματα ερευνών που μελετήθηκαν.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη γεωμετρική σκέψη και πιο συγκεκριμένα με τη θεωρία γεωμετρικής σκέψης που προτείνεται από τον Duval. Ειδικότερα θα παρουσιαστούν τα επίπεδα της εννοιολογικής κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος και θα δοθεί έμφαση στη λειτουργική κατανόηση, η οποία είναι η μελετώμενη έννοια.

Έπειτα, θα γίνει μία συγκριτική παρουσίαση των αναλυτικών προγραμμάτων της Ελλάδας και των Ηνωμένων Πολιτειών ως προς την έμφαση, τους στόχους και τις δραστηριότητες που περιέχουν σχετικά με τη λειτουργική κατανόηση, την ανάλυση, τη σύνθεση και τους μετασχηματισμούς γεωμετρικών σχημάτων.

Θα παρουσιαστούν επίσης αποτελέσματα ερευνών σχετικά με τη συμβολή διάφορων τεχνολογικών μέσων στη χωρική ικανότητα, τη χωρική οπτικοποίηση και τη λειτουργική κατανόηση των μαθητών, όπως και οι τομείς αυτών των ικανοτήτων που μπορούν να βελτιωθούν με τη χρήση της τεχνολογίας.

Τέλος, θα διατυπωθούν τα ερευνητικά ερωτήματα και οι αντίστοιχες υποθέσεις της παρούσας έρευνας.

Στο εμπειρικό μέρος θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο που ακολουθήθηκε, δηλαδή τους συμμετέχοντες, τα μέσα με τα οποία συλλέξαμε τα δεδομένα μας, τη διαδικασία συλλογής των δεδομένων, τη διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε καθώς και με ποιο τρόπο κωδικοποιήθηκαν τα δεδομένα.

Θα ακολουθήσει η παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας τόσο με ποιοτικό τρόπο όσο και με ποσοτικό, ξεχωριστά για κάθε άσκηση αλλά και συνολικά. Θα διατυπώσουμε ορισμένα συμπεράσματα με βάση την ερμηνεία των αποτελεσμάτων και θα συζητήσουμε τη σχέση των αποτελεσμάτων μας με τα ερευνητικά μας ερωτήματα και με τις προηγούμενες έρευνες που πραγματοποιήθηκαν. Στο τέλος θα αναφερθούμε στους περιορισμούς της έρευνας, στις εκπαιδευτικές εφαρμογές που απορρέουν από τη συγκεκριμένη έρευνα και σε προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

1. Χωρική ικανότητα

Η διατύπωση ενός ορισμού για τη χωρική ικανότητα έχει απασχολήσει τους ερευνητές για πολλές δεκαετίες καθώς είναι δύσκολο να οριστεί με ακρίβεια. Έτσι λοιπόν ο κάθε ερευνητής διατυπώνει τη δική του εκδοχή για την έννοια της χωρικής ικανότητας.

Σύμφωνα με τους Piaget & Inhelder (1967) η χωρική ικανότητα αφορά στην αιτιολόγηση για τη φύση του χώρου, ενώ οι Witkin, Moore, Goodenough, & Cox (1977) πιστεύουν ότι είναι ο διαχωρισμός και η αναδόμηση των πληροφοριών που προέρχονται από οπτικά ερεθίσματα. Οι Shepard & Metzler (1971) αναφέρονται στη χωρική ικανότητα ως ικανότητα αναγνώρισης των περιστρεφόμενων σχημάτων και αργότερα ο Shepard (1978) χρησιμοποιεί τον όρο της νοερής απεικόνισης για να περιγράψει τη χωρική ικανότητα. Η χωρική ικανότητα είναι η ικανότητα παραγωγής, διατήρησης και χειρισμού αφηρημένων οπτικών εικόνων (Lohman, 1979).

Οι Lean & Clements (1981) όρισαν τη χωρική ικανότητα ως την ικανότητα διαμόρφωσης και χειρισμού νοερών εικόνων στον νου και αργότερα οι Linn & Petersen (1985) ως την ικανότητα αναπαράστασης, μετασχηματισμού, παραγωγής και ανάκλησης συμβολικών, μη λεκτικών πληροφοριών. Δηλαδή είναι νοερές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται για την αντίληψη, την αποθήκευση, την ανάκληση, τη διάταξη και τη δημιουργία σχετικών νοερών εικόνων (Linn & Petersen, 1985).

Η χωρική ικανότητα είναι οι νοερές ικανότητες που σχετίζονται με την κατανόηση, το χειρισμό, την αναδιοργάνωση και την ερμηνεία σχέσεων οπτικά (Tartre, 1990). Ο Halpern (1992) αναφέρει ότι η χωρική ικανότητα είναι η ικανότητα να φανταστεί κάποιος πώς θα έμοιαζε ένα ακανόνιστο σχήμα αν περιστρεφόταν στο χώρο ή η ικανότητα διάκρισης των σχέσεων ανάμεσα στα σχήματα και τα αντικείμενα.

Η χωρική ικανότητα είναι ο νοερός χειρισμός αντικειμένων και των μερών τους στον δισδιάστατο και τρισδιάστατο χώρο (Olkun, 2003). Η χωρική σκέψη επιτρέπει στον μαθητή να σχεδιάσει σχήματα κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος μαθηματικής σκέψης, να οπτικοποιήσει λεκτικά προβλήματα στον νου, να κατηγοριοποιήσει δεδομένα σε πίνακες και να ανακαλύψει τις σχέσεις ανάμεσα στα σχήματα (Kurtulus & Uygan, 2010).

1.1. Παράγοντες της χωρικής ικανότητας

Η ερευνητική κοινότητα συμφωνεί στο γεγονός ότι η χωρική ικανότητα δεν είναι μια συγκεκριμένη μεμονωμένη ικανότητα αλλά συντίθεται από μία ομάδα ικανοτήτων. (Linn & Petersen, 1985). Για την κατηγοριοποίηση λοιπόν της χωρικής ικανότητας σε υποκατηγορίες και για τον καθορισμό των παραγόντων που την αποτελούν, οι απόψεις των ερευνητών διαφοροποιούνται.

Η πιο χαρακτηριστική άποψη είναι αυτή που χωρίζει τη χωρική ικανότητα σε δύο κατηγορίες: τον χωρικό προσανατολισμό και τη χωρική οπτικοποίηση (Guilford, Fruchter, & Zimmerman, 1952; Ekstrom, French, Harman, & Dermen, 1976; McGee, 1979; Clements, & Sarama, 2009).

Σύμφωνα με τους Guilford, Fruchter, & Zimmerman (1952), ο χωρικός προσανατολισμός είναι η επίγνωση ενός ατόμου για τον προσανατολισμό στο περιβάλλον ακόμα κι αν αλλάξει ο προσανατολισμός του, ενώ για τους Ekstrom, French, Harman, & Derman (1976) είναι η ικανότητα αντίληψης χωρικών μοτίβων ή η διατήρηση του προσανατολισμού σύμφωνα με τα αντικείμενα στο χώρο. Ο McGee (1979) τον ορίζει ως την ικανότητα κατανόησης της διάταξης των στοιχείων σε ένα πολύπλοκο μοτίβο ακόμα και μετά τη μεταβολή του προσανατολισμού του αντικειμένου.

Σχετικά με τη χωρική οπτικοποίηση, οι Guilford, Fruchter, & Zimmerman (1952) αναφέρουν ότι πρόκειται για την ικανότητα χειρισμού εικονικών πληροφοριών μέσω της αναγνώρισης, της διατήρησης και της ανάκλησης σχηματισμών μέσα στους οποίους γίνεται κάποια κίνηση των μερών τους. Επιπλέον είναι η ικανότητα χειρισμού ή τροποποίησης της εικόνας του χωρικού μοτίβου σε άλλες διατάξεις (Ekstrom, French, Harman, & Dermen, 1976) αλλά και η νοερή περιστροφή δισδιάστατων και τρισδιάστατων αντικειμένων, η οπτικοποίηση της σύνθεσής τους, ο μετασχηματισμός σε ένα άλλο σχήμα και ο νοερός χειρισμός του (McGee, 1979). Κατά το NCTM (2000) η χωρική οπτικοποίηση είναι η κατασκευή και ο χειρισμός νοερών αναπαραστάσεων δισδιάστατων και τρισδιάστατων σχημάτων και η αντίληψη ενός σχήματος από διαφορετικές οπτικές. Δηλαδή, εμπεριέχει ικανότητες όπως χειρισμός αντικειμένων στον νου, οπτικοποίηση, περιστροφή, ένωση και διαχωρισμός και νοερές μετατροπές, όπως η αντιστοίχιση και ο συνδυασμός (Clements & Sarama, 2009).

Διαχωρίζοντας τις δύο κατηγορίες συμπεραίνουμε ότι η χωρική οπτικοποίηση απαιτεί τη νοερή ανασύσταση ενός σχήματος μέσω χειρισμού ή νοερής περιστροφής των μερών του, ενώ ο χωρικός προσανατολισμός απαιτεί την αποδοχή του αντικειμένου ως σύνολο (Cakmak, Isiksal, & Koc, 2014). Επιπλέον, η διαφοροποίηση ανάμεσα στον χωρικό προσανατολισμό και την περιστροφή σχετίζεται με τη θέση του αντικειμένου ή του παρατηρητή (Xistouri & Pitta-Pantazi, 2006).

Προχωρώντας σε μία διαφορετική κατηγοριοποίηση, ο Thurstone (1938) αναγνώρισε τρεις πτυχές της χωρικής ικανότητας. Αυτές ήταν η ικανότητα αναγνώρισης της ταυτότητας ενός αντικειμένου από διαφορετικές οπτικές, η ικανότητα νοερής απεικόνισης της κίνησης ή της εσωτερικής μετατόπισης των μερών ενός σχήματος, και η ικανότητα σκέψης για τις χωρικές σχέσεις στις οποίες ο προσανατολισμός του σώματος του παρατηρητή παίζει σημαντικό ρόλο.

Κατά τον Olkun (2003), υπάρχουν δύο κατηγορίες για την περιγραφή της χωρικής ικανότητας: οι χωρικές σχέσεις και η χωρική οπτικοποίηση. Οι χωρικές σχέσεις αφορούν στη νοερή απεικόνιση των περιστροφών των αντικειμένων σαν σύνολο στον δισδιάστατο και τρισδιάστατο χώρο, ενώ η χωρική οπτικοποίηση αναφέρεται στη νοερή απεικόνιση των περιστροφών των αντικειμένων και των μερών τους στον τρισδιάστατο χώρο.

Οι Eliot and Smith (1983) και ο Lohman (1988) χώρισαν τη χωρική ικανότητα σε όρους όπως: οπτικοποίηση, χωρικές σχέσεις και χωρικός προσανατολισμός. Η χωρική οπτικοποίηση είναι η ικανότητα κατανόησης νοερών κινήσεων στον τρισδιάστατο χώρο ή ικανότητα χειρισμού αντικειμένων στον νου. Ο χωρικός προσανατολισμός είναι η ικανότητα διατήρησης παρά τις αλλαγές στον προσανατολισμό του οπτικού αντικειμένου που απαιτεί μόνο μια νοερή περιστροφή. Οι χωρικές σχέσεις είναι η ικανότητα νοερής περιστροφής ενός χωρικού αντικειμένου γρήγορα και σωστά (Lohman, 1988).

Οι Linn & Petersen (1985) διαχώρισαν τη χωρική ικανότητα σε τρεις ποιοτικές κατηγορίες: τη χωρική αντίληψη, τη νοερή περιστροφή και τη χωρική οπτικοποίηση. Η χωρική αντίληψη αποτελείται από ικανότητες κατανόησης των σχέσεων μεταξύ των σχημάτων μέσω του προσανατολισμού του σώματος. Η νοερή περιστροφή είναι η νοερή και γρήγορη περιστροφή σχημάτων νοερά. Η χωρική οπτικοποίηση περιέχει χειρισμό των σχημάτων σε πολλά βήματα, όπως το κλείσιμο των επιφανειών, την προβολή, τη μετατροπή και την ανάμειξη.

Η χωρική ικανότητα σύμφωνα με τους Maccoby & Jacklin (1974) αποτελείται από δύο παράγοντες: τους αναλυτικούς και τους μη αναλυτικούς. Ο αναλυτικός παράγοντας περιέχει πολύπλοκες διαδικασίες όπως την εκτίμηση τους κλεισίματος ενός ανοιχτού αντικειμένου, ενώ ο μη αναλυτικός παράγοντας περιέχει την περιστροφή ενός αντικειμένου.

Ο Maier (1996) εξέτασε τη χωρική ικανότητα χωρίζοντάς την σε πέντε παράγοντες: χωρική αντίληψη, οπτικοποίηση, νοερή περιστροφή, χωρικές σχέσεις και χωρικός προσανατολισμός.

Πέρα όμως από το διαχωρισμό, την κατηγοριοποίηση και τις ονομασίες που δίνουν οι ερευνητές, η χωρική ικανότητα φαίνεται ότι περιλαμβάνει συγκεκριμένες ικανότητες. Θα μπορούσαμε να πούμε πως είναι αυτές που αφορούν στον προσανατολισμό και στην επίγνωση της θέσης του ατόμου σε σχέση με το αντικείμενο, και στον νοερό χειρισμό των αντικειμένων, όπως νοερή περιστροφή και νοερός μετασχηματισμός.

1.2. Ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας

Η χωρική ικανότητα παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην ανθρώπινη σκέψη (Güven & Kosa, 2008) και συσχετίζεται θετικά με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος και με την επίδοση στα μαθηματικά και τη γεωμετρία (Fennema & Sherman, 1977; Battista, Wheatley & Talsma, 1982; Fennema & Tartre, 1985; Moses, 1977).

Οι Clements, Battista, Sarama & Swaminathon (1997) ισχυρίζονται ότι επιχειρούν να αναπτύξουν τις χωρικές ικανότητες των μαθητών επειδή είναι πολύτιμες αλλά και επειδή ορισμένες εξ αυτών σχετίζονται με μαθηματικές ικανότητες. Πραγματικά, η χωρική ικανότητα συσχετίζεται σε υψηλά ποσοστά με την επίδοση στα μαθηματικά (Battista, 1990) και η χωρική οπτικοποίηση είναι σημαντικό κομμάτι της γεωμετρικής σκέψης (NCTM, 2000). Η χωρική ικανότητα συνδέεται με δεξιότητες δημιουργικής και υψηλότερης τάξης σκέψης στα μαθηματικά και στις επιστήμες (Shepard, 1978) αλλά και με τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων στα μαθηματικά και τη γεωμετρία (Battista, Wheatley & Talsma, 1982; Fennema & Tartre, 1985; Moses,1977).

Στην έρευνα του Sexton (1992) η χρήση ενός τρισδιάστατου μοντέλου στη διδασκαλία δεν φάνηκε να βελτιώνει τις ικανότητες χωρικής οπτικοποίησης. Επιπλέον ο Ferrini-Mundy (1987) δεν βρήκε θετικά αποτελέσματα από τη διδασκαλία με ενότητες χωρικής εξάσκησης. Ούτε η έρευνα της Zavotka (1987) με κινούμενα γραφικά στον υπολογιστή είχε κάποια θετική επίδραση στις ικανότητες οπτικοποίησης.

Ωστόσο, σε έρευνα του Miller (1996) διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές βελτίωσαν τις χωρικές τους ικανότητες όταν χρησιμοποίησαν αληθινά μοντέλα και υπολογιστή στη διδασκαλία. Στα ίδια συμπεράσματα κατέληξαν και οι Ullman and Sorby (1990) που χρησιμοποίησαν φυσικά μοντέλα και δισδιάστατες προσομοιώσεις στον υπολογιστή. Ο Clements (1998) ανέπτυξε τη γεωμετρική και τη χωρική σκέψη μέσω διάφορων διδακτικών υλικών και οι Travis & Lenon (1997) βρήκαν ότι με τη χρήση του MAPPLE (ενός λογισμικού με εξελιγμένες γραφικές δυνατότητες) οι μαθητές είχαν καλύτερες επιδόσεις στις χωρικές ικανότητες.

Άρα οι χωρικές ικανότητες δεν είναι κληρονομικές και μπορούν να διδαχθούν στους μαθητές και να βελτιωθούν μέσω της κατάλληλης διδασκαλίας (Battista, Wheatley, & Talsma, 1982; Ben-Chaim, Lappan, & Houang, 1988; Bishop, 1980; Braukmann & Pedras, 1993; De Lisi & Wolford, 2002; Dixon, 1995; Lappan & Houang, 1989; McGee, 1979; Olkun, 2003; Travis & Lennon,1997; Ullman & Sorby, 1990).

Η σχεδίαση, η οπτικοποίηση και η σύγκριση γεωμετρικών σχημάτων είναι οι πιο κατάλληλες δραστηριότητες για την ανάπτυξη των χωρικών ικανοτήτων (NCTM, 2000). Επιπλέον, η χρήση των origami αποδείχθηκε ότι βελτιώνει τις χωρικές δεξιότητες στον χειρισμό αντικειμένων (Cakmak , Isiksal & Koc, 2014).

Και η χωρική οπτικοποίηση μπορεί να βελτιωθεί με την εξάσκηση (Battista, Wheatley, & Talsma, 1982; Ben-Chaim, Lappan, & Houang, 1988; Brinkmann, 1966; Connor, Schackman, & Serbin, 1978; Iben, 1988; Miller & Miller, 1977). Βέβαια ο τύπος της διδασκαλίας που θα χρησιμοποιηθεί θα καθορίσει το μέγεθος της βελτίωσής της. Τα πιο αποτελεσματικά περιβάλλοντα μάθησης φάνηκε να είναι αυτά που παρέχουν αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών ή μεταξύ δασκάλου και μαθητών καθώς και οι απτές δραστηριότητες (Dixon, 1997).

Εκτός της διδασκαλίας η χωρική οπτικοποίηση αναπτύσσεται μακροπρόθεσμα μέσω καταστάσεων του πραγματικού κόσμου (Robichaux & Guarino, 2000). Τα παιδιά μπορούν να αναπτύξουν τις χωρικές ικανότητες μέσω της εμπειρίας, του παιχνιδιού, της ζωγραφικής, των γρίφων που απαιτούν οπτική φαντασία, των ηλεκτρονικών παιχνιδιών και του αλληλεπιδραστικού λογισμικού. (Clements, 1998; Deno, 1995; Smith, Gerretson, Olkun, Yuan, Dogbey, & Erdem, 2009).

1.3. Αξιολόγηση της χωρικής ικανότητας

Για την εξέταση των χωρικών ικανοτήτων έχουν αναπτυχθεί αρκετά τεστ που καλύπτουν κάθε κατηγορία τους.

Η Sjolinder (1998) κατηγοριοποίησε τα χωρικά τεστ με βάση τις χωρικές ικανότητες των Linn and Petersen (1985): χωρική αντίληψη, νοερή περιστροφή και χωρική οπτικοποίηση.

- Τα τεστ της χωρικής αντίληψης μετρούν τις ικανότητες των συμμετεχόντων να καθορίσουν χωρικές σχέσεις με βάση τον προσανατολισμό των σωμάτων τους (Linn & Petersen, 1985). Παραδείγματα τέτοιων τεστ είναι: το τεστ Γραμμής και Πλαισίου (Rod and Frame Test των Witkin και Asch) και το τεστ της Στάθμης του Νερού (Water Level Test των Piaget και Inhelder).
- Τα τεστ νοερής περιστροφής μετρούν την ικανότητα των συμμετεχόντων να περιστρέψουν γρήγορα και με ακρίβεια μια δισδιάστατη ή τρισδιάστατη εικόνα. (Shepard & Metzler, 1971). Παραδείγματα τέτοιων τεστ είναι: το τεστ Περιστροφής Καρτών (Cards Rotations Test των Ekstrom, French, & Harman, Dermen, 1976), το τεστ Γενικών Νοερών Περιστροφών (Generic Mental Rotations Test των Voyer, Voyer, και Bryden) και το τεστ Νοερών Περιστροφών (Mental Rotations Test των Vandenberg και Kuse).
- Τα τεστ χωρικής οπτικοποίησης απαιτούν αναλυτική σκέψη πολλών βημάτων. Παραδείγματα τέτοιων τεστ είναι: το Αναθεωρημένο τεστ της Μινεσότα (Revised Minnesota Paper Form Board Test – RMPFBT των Likert και Quasha),

το τεστ Όμοιων Κύβων (Identical Blocks Test του Stafford, 1961), το τεστ Διπλώματος Χαρτιού (Paper Folding Test των Ekstrom, French, & Harman, Dermen, 1976) και το τεστ Διαφορικής Ικανότητας (Differential Aptitude Test των Bennett, Seashore και Wesman).

Οι Stumpf and Eliot (1995, 1999) κατηγοριοποίησαν τα χωρικά τεστ σε 2 κατηγορίες: αναγνώριση και χειρισμός, που χωρίζονταν σε 16 υποκατηγορίες. Τα τεστ αναγνώρισης απαιτούν την αντίληψη, τη διατήρηση και τη μετατροπή των οπτικών μορφών στον δισδιάστατο χώρο και περιλαμβάνουν έργα αντιληπτικής ταχύτητας, αντιγραφής, λαβύρινθου, απομόνωσης σχήματος, οπτικής μνήμης, ανάλυσης μερών, μορφής σχημάτων και περιστροφής. Τα τεστ χειρισμού απαιτούν τον νοερό χειρισμό των οπτικών σχημάτων στο χώρο και περιλαμβάνουν έργα κύβων, διασταυρώσεων, εξωτερικής περιστροφής κύβων, εσωτερικής περιστροφής κύβων, διπλώματος χαρτιού, συναρμολόγησης μοτίβων, ανάπτυξης επιφάνειας και προοπτικής (Chan, 2007).

Τα έργα χωρικής οπτικοποίησης διαφέρουν από τα έργα χωρικού προσανατολισμού. Τα έργα χωρικής οπτικοποίησης περιλαμβάνουν νοερές κινήσεις ή εναλλαγές ολόκληρου ή μέρους του αντικειμένου (Tartre, 1990). Αντίθετα, τα έργα χωρικού προσανατολισμού δεν περιλαμβάνουν νοερή κίνηση ενός αντικειμένου, αλλά πρόβλεψη της θέσης του αντικειμένου μετά από κίνηση δική του (Baki, Kosa, & Guven, 2011).

Για την αξιολόγηση των χωρικών σχέσεων ενδείκνυνται τα τεστ: MGMP, Spatial Visualization Test, Primary Mental Abilities Test, French Reference Kit με απλά έργα που περιλαμβάνουν δισδιάστατη νοερή περιστροφή, σύγκριση κύβων και τρισδιάστατη νοερή περιστροφή (Olkun, 2003).

Για τον έλεγχο της χωρικής οπτικοποίησης υπάρχουν τα παρακάτω τεστ: MGMP, Spatial Visualization Test, Purdue Spatial Visualization Test, Minnesota Paper Form Board, Differential Aptitude Test, French Reference Kit τα οποία περιέχουν πιο δύσκολα έργα όπως δίπλωμα χαρτιού, ανάπτυξη επιφάνειας, δισδιάστατες και τρισδιάστατες μετατροπές (Olkun, 2003).

Το Revised Minnesota Paper Form Board Test (RMPFBT) έχει σχεδιαστεί για την αξιολόγηση της χωρικής οπτικοποίησης και καθορίζει τις ικανότητες που απαιτούνται για την οπτικοποίηση και τον χειρισμό αντικειμένων στο χώρο. Αναπτύχθηκε αρχικά τη δεκαετία του 1920 και αναθεωρήθηκε τα έτη 1934, 1970 και 1995. Χρησιμοποιεί γεωμετρικά σχήματα για την αξιολόγηση της χωρικής ικανότητας και αναγνωρίστηκε ως έγκυρος δείκτης των οπτικοχωρικών ικανοτήτων των μαθητών σε πεδία όπως η τέχνη, ο σχεδιασμός και η μηχανολογία. Το RMPFBT εξετάζει την ικανότητα χειρισμού πολύπλοκων χωρικών πληροφοριών για την επίλυση ενός προβλήματος σε πολλά στάδια (Sjölinder, 1998). Απαιτεί από τον μαθητή να μελετήσει μία ομάδα γεωμετρικών σχημάτων. Η κάθε ομάδα περιέχει ένα διαχωρισμένο σχήμα και πέντε κανονικά σχήματα. Ο μαθητής καλείται να επιλέξει ποιο από τα σχήματα αντιστοιχεί στο διαχωρισμένο σχήμα εάν αυτό συναρμολογηθεί. Έτσι, ο μαθητής καλείται να χειριστεί νοερά το πρόβλημα (Evans & Dirks, 2001). Ωστόσο το τεστ δεν περιέχει κάποιους δείκτες για την εξέταση της νοερής περιστροφής (Sjölinder, 1998).

Ο Olkun (2003) ανέπτυξε το τεστ Χωρικής Οπτικοποίησης (TSV) με 29 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής που αφορούσαν στη δισδιάστατη γεωμετρία. Κατηγοριοποίησε τις ερωτήσεις σε τέσσερις κατηγορίες: 8 ερωτήσεις στα χωρικά έργα, 8 ερωτήσεις στα χωρικά-αριθμητικά έργα, 8 ερωτήσεις στα έργα νοερής περιστροφής και 5 ερωτήσεις στα έργα μέτρησης επιφάνειας. Τα χωρικά έργα ήταν παρόμοια με τα έργα στα συνηθισμένα τεστ χωρικής οπτικοποίησης, όπως σε αυτό της Μινεσότα. Τα χωρικά-αριθμητικά έργα (Clements, Battista, Sarama, & Swaminathon, 1997) ήταν παρόμοια με τα έργα στην Τρίτη Διεθνή Μελέτη για τα Μαθηματικά και τις Επιστήμες (Third International Mathematics and Science Study, 1999). Τα έργα νοερής περιστροφής ήταν παρόμοια με τα έργα στο τεστ Χωρικής Ικανότητας του Wheatley (Wheatley Spatial Ability Test) και τα έργα μέτρησης επιφάνειας (Battista, Clements, Arnoff, Battista, & Borrow, 1998; Mistretta, 2000) περιείχαν έννοιες της γεωμετρίας και της μέτρησης (Cakmak, Isiksal & Koc, 2014).

Στην έρευνα των Cakmak, Isiksal & Koc (2014) χρησιμοποιήθηκε το τεστ Χωρικής Ικανότητας (SAT), με 35 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής από τις οποίες οι 29 αντλήθηκαν από την έρευνα του Olkun (2003). Τα χωρικά έργα, τα χωρικά-αριθμητικά έργα, τα έργα μέτρησης επιφάνειας και τα έργα διπλώματος χαρτιού καθόρισαν την επίδοση στη χωρική οπτικοποίηση, ενώ τα έργα νοερής περιστροφής καθόρισαν την επίδοση στο χωρικό προσανατολισμό (Cakmak, Isiksal & Koc, 2014).

Οι Pellegrino & Kail (1982) επεσήμαναν ότι χρειαζόμαστε την τεχνολογία για την διεξαγωγή τεστ χωρικών ικανοτήτων καθώς μετρώντας την ταχύτητα και την ακρίβεια των συμμετεχόντων σε κάθε άσκηση θα μπορέσουμε να συμπεράνουμε αρκετά για τις διάφορες ψυχολογικές τους ικανότητες. Έτσι λοιπόν οι Pellegrino, Hunt, Abate, Farr (1987) ανέπτυξαν ένα τεστ αξιολόγησης μιας ομάδας ικανοτήτων με τη χρήση στατικών και δυναμικών ασκήσεων. Με στατικές ασκήσεις έλεγξαν ικανότητες όπως αντιληπτική σύγκριση, νοερή περιστροφή, ανάπτυξη επιφάνειας, ενσωμάτωση κομματιού σε ένα σχήμα, προσθήκη κομματιού σε ένα σχήμα, ενώ στις δυναμικές ασκήσεις εξετάστηκαν ικανότητες όπως η ενθύμηση μιας διαδρομής, η παρέκταση μιας διαδρομής, ο υπολογισμός της ταχύτητας ενός και δύο αντικειμένων και η πρόβλεψη της πορείας ενός αντικειμένου σε μία διαδρομή. Τα συμπεράσματα που αποκόμισαν είναι ότι όντως μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον παραδοσιακό τρόπο εκτέλεσης των τεστ της χωρικής ικανότητας με τη χρήση της τεχνολογίας και να έχουμε δεδομένα για την ταχύτητα και την ακρίβεια των απαντήσεων και επιπλέον ότι οι ικανότητες των συμμετεχόντων για την επίλυση των ασκήσεων με στατικές πληροφορίες ήταν ανεξάρτητες από τις ικανότητες που σχετίζονταν με τις δυναμικές και κινούμενες πληροφορίες (Pellegrino, Hunt, Abate, & Farr, 1987).

2. Η γεωμετρική σκέψη

Σύμφωνα με τον Duval (1998) κάθε διαδικασία που περιέχει δοκιμή και λάθος, προσπάθεια επίλυσης και σχεδίαση νέων πληροφοριών πάνω στις ήδη υπάρχουσες αποτελεί μια μορφή συλλογισμού. Δηλαδή, η επαγωγή, η απαγωγή και η εξαγωγή συμπερασμάτων είναι είδη συλλογισμού.

Η διδασκαλία της γεωμετρίας βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν τα γεωμετρικά σχήματα και τις δομές και να αναλύσουν τα χαρακτηριστικά και τις σχέσεις τους. (NCTM, 2000). Ένας τομέας που συσχετίζεται στενά με τη γεωμετρία είναι η στερεομετρία, ή αλλιώς τρισδιάστατη γεωμετρία. Εφόσον τα τρισδιάστατα αντικείμενα, που είναι μέρος της καθημερινής μας εμπειρίας, αναπαριστώνται συνήθως μέσω της δισδιάστατης σχεδίασης, η κατανόηση της τρισδιάστατης γεωμετρίας προϋποθέτει πρώτα να έχουμε κατανοήσει τη γεωμετρία των δύο διαστάσεων (Dorier, Gutiérrez, & Strässer, 2004).

Η χωρική ικανότητα είναι ένας σημαντικός παράγοντας της γεωμετρικής σκέψης (Battista, Wheatley, & Talsma, 1982). Έτσι, για την ανάπτυξη της γεωμετρίας είναι σημαντική η ανάπτυξη των χωρικών ικανοτήτων (Battista, 2007). Ο Battista (1990) διαπίστωσε πως η χωρική οπτικοποίηση και ο λογικός συλλογισμός συνδέονται σημαντικά με την επίδοση στη γεωμετρία καθώς και την επίλυση προβλημάτων στη γεωμετρία. Άρα η επίδοση στη γεωμετρία συνδέεται θετικά με τη χωρική ικανότητα (Kalogirou & Gagatsis, 2011).

Η χωρική σκέψη είναι ένας σημαντικός παράγοντας στη μάθηση της δισδιάστατης και της τρισδιάστατης γεωμετρίας. Βοηθάει το μαθητή να δημιουργήσει επιπλέον εικόνες πάνω στο δοσμένο σχήμα, να ενσωματώσει ή να διαχωρίσει τρισδιάστατα αντικείμενα και να βρει εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Άρα η χωρική σκέψη μπορεί να οδηγήσει στον γεωμετρικό συλλογισμό (Turgut & Uygan, 2014).

Για τη διερεύνηση του γεωμετρικού συλλογισμού των μαθητών αναπτύχθηκαν διάφορα θεωρητικά πλαίσια. Αρχικά, ο van Hiele το 1986 ανέπτυξε ένα μοντέλο για τα επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης, το οποίο αποτελείται από πέντε στάδια: το οπτικό επίπεδο (αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων), το αναλυτικό-περιγραφικό (ταξινόμηση σχημάτων με βάση τις ιδιότητές του), το επίπεδο της αφηρημένης συσχετιστικής σκέψης (αντίληψη σχέσεων στο ίδιο το σχήμα και ανάμεσα στα σχήματα), το επίπεδο παραγωγικού συλλογισμού και το επίπεδο της αυστηρότητας (Γαγάτσης, Μιχαήλ, Δεληγιάννη, Μονογυιού, Καλογήρου, & Φιλίππου, 2011).

Σύμφωνα με τον Battista (2002) η θεωρία γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele είναι αυτή που περιγράφει καλύτερα τη σκέψη των μαθητών για τη δισδιάστατη γεωμετρία. Σύμφωνα με παρεμβάσεις του Battista (2002) στα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, προκύπτουν:

- αναγνώριση, που έχει στόχο την εκμάθηση της μορφής των βασικών σχημάτων και της ορολογίας,
- οπτική σύνδεση, της οποίας ο στόχος είναι να συνδεθούν τα γεωμετρικά σχήματα με πραγματικές αναπαραστάσεις που γνωρίζουν τα παιδιά,
- περιγραφική ανάλυση, όπου επιδιώκεται η αναγνώριση χαρακτηριστικών και σχέσεων και η χρήση γεωμετρικών εννοιών,
- αφαιρετικότητα-συσχέτιση, όπου γίνονται κατηγοριοποιήσεις,
- τυπική αξιωματικότητα, όπου γίνεται χρήση γεωμετρικών αρχών και διδάσκεται συνήθως στο λύκειο (Chang, Sung, & Lin, 2007).

Αργότερα, ο Duval (1998) αναφέρθηκε στη γνωστική ανάλυση της γεωμετρικής σκέψης κατά την οποία υπάρχουν τρεις κατηγορίες γνωστικών διαδικασιών στη μάθηση των γεωμετρικών εννοιών. Αυτές είναι η οπτικοποίηση, η κατασκευή και ο συλλογισμός. Κατά την οπτικοποίηση οι μαθητές εστιάζουν στο χώρο και στις ευρετικές αναπαραστάσεις των εννοιών ώστε να εξερευνήσουν γεωμετρικές καταστάσεις. Η διαδικασία της κατασκευής αποτελείται από πράξεις για τη διαμόρφωση των αναπαραστάσεων των χαρακτηριστικών των γεωμετρικών εννοιών, ενώ στον συλλογισμό γίνεται εξερεύνηση των μαθηματικών σχέσεων και των χαρακτηριστικών ώστε να γίνει γενίκευση, απόδειξη και επεξήγηση. Για την εκτέλεση των διαδικασιών της οπτικοποίησης και της κατασκευής είναι απαραίτητος ο χειρισμός εργαλείων, η σχεδίαση και η αλληλεπίδραση με την τεχνολογία. Αλλά και στη διαδικασία του συλλογισμού η χρήση των εργαλείων θα αποτελέσει τη βάση για την ανάπτυξή του. Αυτές οι διαδικασίες συνδέονται στενά μεταξύ τους και μέσω της σωστής εφαρμογής στην τάξη μπορεί να υποστηριχθεί η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Επιπλέον ο Duval (1995, 1999) διαχώρισε την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος σε τέσσερα είδη κατανόησης στα οποία θα αναφερθούμε στην επόμενη ενότητα.

Οι Houdement & Kuzniak (2003) ανέπτυξαν τη θεωρία για το Γεωμετρικό Χώρο Εργασίας και τα Γεωμετρικά Παραδείγματα. Σύμφωνα με αυτήν, η γεωμετρία χωρίζεται σε τρία είδη:

1. την εμπειρική γεωμετρία, που ασχολείται με φυσικά αντικείμενα καθώς είναι μια εμπειρική επιστήμη,
2. την εμπειρική αξιωματική γεωμετρία, που χρησιμοποιεί τα αξιώματα τα οποία περιγράφουν φυσικά σχήματα και αντικείμενα και
3. την τυπική αξιωματική γεωμετρία, που δεν απαιτεί σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο καθώς εδώ η γεωμετρία είναι αξιωματική και επαγωγική.

Κάθε θεωρία που αναπτύχθηκε για τη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας προσεγγίζει τη γεωμετρία διαφορετικά και είναι κατάλληλη για διάφορους λόγους. Για παράδειγμα η θεωρία των επιπέδων Van Hiele είναι χρήσιμη για την αξιολόγηση των αντιδράσεων, της παραγωγής και της επίλυσης προβλημάτων από τους μαθητές επειδή αποτελεί μια φαινομενολογική προσέγγιση. Η θεωρία του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας είναι περισσότερο επιστημολογική και βοηθάει στην κατηγοριοποίηση των προσεγγίσεων, ενώ η θεωρία του Duval είναι σημειωτική και σκοπεύει στην αξιολόγηση των διαφορετικών ειδών αναπαραστάσεων και τη χρήση τους (Kuzniak, Elia, Hattermann, Roubicek, 2009).

2.1. Εννοιολογική κατανόηση γεωμετρικού σχήματος

Ο Duval (1998) πιστεύει πως ένα μοντέλο μαθηματικής μάθησης όπου ο μαθηματικός συλλογισμός οργανώνεται σε αυστηρά επίπεδα (όπως το μοντέλο van Hiele) είναι ακατάλληλο. Επισημαίνει δηλαδή ότι αντί να αναπαριστώνται υψηλότερα ή χαμηλότερα επίπεδα σκέψης, τα διάφορα είδη γνωστικών ικανοτήτων μπορούν να έχουν συγκεκριμένη και ανεξάρτητη ανάπτυξη. Επιπλέον οι Gutiérrez, Jaime and Fortuny (1991) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές μπορούν να λειτουργούν ταυτόχρονα σε περισσότερα επίπεδα van Hiele.

Σύμφωνα με τον Duval (1995, 1999), η εννοιολογική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος συνίσταται σε τέσσερις κατηγορίες:

1. Αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension) κατά την οποία ο μαθητής μπορεί να αναγνωρίζει και να ονομάζει τα σχήματα, και να διακρίνει τα υποσχήματα που μπορεί να υπάρχουν σε ένα σχήμα.

2. Διαδικαστική ή σειριακή κατανόηση (sequential apprehension) η οποία σχετίζεται με την κατασκευή του σχήματος και την περιγραφή της κατασκευής του.

3. Λεκτική κατανόηση (discursive apprehension) που αφορά στην απόδειξη τόσο στηριζόμενοι σε έναν ορισμό όσο και σε μια διαδικασία. Εδώ απαιτείται αντιληπτική ικανότητα καθώς και γεωμετρικός συλλογισμός.

4. Λειτουργική κατανόηση (operational apprehension) που σχετίζεται με τις τροποποιήσεις του σχήματος. Οι τροποποιήσεις αυτές χωρίζονται σε τρία είδη: οπτικές (optic), αλλαγής θέσης (place way) και μερεολογικές (mereological). Κατά τις οπτικές τροποποιήσεις αλλάζει το μέγεθος του σχήματος (μεγέθυνση ή σμίκρυνση) ή το σχήμα φαίνεται λοξό. Στις τροποποιήσεις αλλαγής θέσης μετακινείται το σχήμα (αλλαγή θέσης) ή αλλάζει ο προσανατολισμός του, ενώ στις μερεολογικές τροποποιήσεις το σχήμα τροποποιείται με την αναδιοργάνωση (reconfiguration) των υποσχημάτων του.

Μέσα από τη γνωστική και αντιληπτική προσέγγιση της γεωμετρίας που επιχειρείται από τον Duval (1995) παρουσιάζεται ένα λεπτομερές πλαίσιο ανάλυσης των γεωμετρικών εικόνων, με βάση το οποίο εντοπίζονται αυτοί οι τέσσερις τύποι γνωστικής σύλληψης. Το κάθε είδος σύλληψης έχει συγκεκριμένους νόμους οργάνωσης και επεξεργασίας του οπτικού ερεθίσματος (Γαγάτσης, 2014).

Η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων απαιτεί πολύ συχνά αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων τύπων σύλληψης, αλλά και η διάκριση μεταξύ του κρίνεται επίσης αναγκαία (Duval, 1998).

Η κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων δεν αποτελεί μοναδιαία οντότητα. Κάθε κατηγορία κατανόησης είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες αλλά κάποιες φορές απαιτείται ο συντονισμός μεταξύ τους (Duval, 1999).

Η οπτικοποίηση καλύπτει την αντιληπτική, τη λεκτική και τη λειτουργική κατανόηση του σχήματος. Και εφόσον παίζει ευρετικό ρόλο και δεν απαιτεί μαθηματική γνώση μπορεί σε συνδυασμό με τη λειτουργική κατανόηση να δώσει επαρκείς αποδείξεις (Duval, 1998).

2.2. Η λειτουργική κατανόηση

Υπάρχουν πολλές λέξεις και φράσεις που ουσιαστικά με τον έναν ή με τον άλλο τρόπο προσπαθούν να περιγράψουν και να αποδώσουν την έννοια της λειτουργικής κατανόησης.

Αρχικά, ο όρος «Operative apprehension» αναφέρεται στη λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος και αναφέρεται αρχικά από τον Duval (1995). Ο όρος «Modification» χρησιμοποιείται σε πολλές περιπτώσεις για να προσδιορίσει τις τροποποιήσεις του σχήματος, δηλαδή τις λειτουργίες της λειτουργικής κατανόησης. Επιπλέον συναντούμε τον όρο «Reconfiguration» που αναφέρεται συνήθως σε λειτουργία της μερεολογικής τροποποίησης και σημαίνει την αναδιαμόρφωση του σχήματος μέσω της επεξεργασίας των υποσχημάτων του. Οι όροι «Composing-decomposing» και «Disembedding» χρησιμοποιούνται κυρίως στο Common Core State Standards αλλά και από τους Clements & Sarama (2009) για να δηλώσουν τη σύνθεση και αποσύνθεση (ανάλυση) του σχήματος καθώς και την αποενσωμάτωση αντίστοιχα. Ο όρος που είναι πιο ευρέως γνωστός είναι η έννοια «Transformation», μεταφρασμένη «μετασχηματισμός» καθώς χρησιμοποιείται στην πλειονότητα των ερευνών για τις τροποποιήσεις του γεωμετρικού σχήματος. Η έννοια με την οποία χρησιμοποιείται αφορά περισσότερο στην περιστροφή του σχήματος ώστε από τα τυπικά να περάσουμε στα μη τυπικά παραδείγματα. Ωστόσο για κάποιους ερευνητές ο όρος αυτός υποδεικνύει εκτός των άλλων τη μετατροπή του σχήματος από το ένα αναπαραστατικό σύστημα στο άλλο. Υπάρχει και η άποψη ότι η έννοια «γεωμετρική μετατροπή» περιλαμβάνει την αντανάκλαση-συμμετρία, την περιστροφή και την μετατροπή από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο.

Επιπροσθέτως, υπάρχουν στη βιβλιογραφία αρκετές φράσεις που περιγράφουν τη διαδικασία των τροποποιήσεων των γεωμετρικών σχημάτων, είτε αυτή καθ’ αυτή είτε ένα από τα τρία είδη τροποποιήσεων, είτε κάποια κατηγορία ή λειτουργία τους. Έννοιες λοιπόν όπως «Configural process» διαμορφωτική επεξεργασία, «Figural reasoning» σχηματικός συλλογισμός, «Figural change» αλλαγή σχήματος, «Visual processing» οπτική επεξεργασία, «Figural processing» επεξεργασία σχήματος, «Reorganisation» αναδιοργάνωση, «Manipulating» επεξεργασία-χειρισμός, «Recomposing» ανασύνθεση, «Dissection» ανατομή-αποενσωμάτωση, «Subdividing» υποδιαίρεση, «Rearrangement» ανακανονισμός-αναδιοργάνωση, «Compination» συνδυασμός, «Restructuring» αναδόμηση, «Subconfiguration» υποδιαμόρφωση, χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν αυτή τη διεργασία της τροποποίησης του γεωμετρικού σχήματος.

Όπως αναφέρθηκε, η λειτουργική κατανόηση χωρίζεται σε τρία είδη τροποποιήσεων. Οι οπτικές τροποποιήσεις αφορούν στην αλλαγή του μεγέθους του σχήματος, όπως σμίκρυνση και μεγέθυνση, αλλά και στη λοξότητα ώστε να έχουν διαφορετική εμφάνιση χωρίς να έχουν αλλάξει. Οι τροποποιήσεις αλλαγής θέσης ασχολούνται με την αλλαγή του προσανατολισμού του σχήματος. Οι μερεολογικές τροποποιήσεις σχετίζονται με τη διάσπαση του σχήματος σε υποσχήματα και στη δημιουργία ενός νέου σχήματος συνδυάζοντας τα υπάρχοντα υποσχήματα (Γαγάτσης, 2014).

Η λειτουργική κατανόηση βοηθάει και οδηγεί τους μαθητές στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων καθώς οι τροποποιήσεις που πραγματοποιούνται συμβάλλουν στην απόδοση χειριστικής λειτουργίας στο σχήμα. Επιπλέον το σχήμα αναδιοργανώνεται νοερά διαφέροντας από την αντιληπτική κατανόηση. Οι μαθητές επεξεργάζονται το σχήμα ευρετικά χωρίς να αλλοιώνουν τις ιδιότητές του. Μέσω της λειτουργικής κατανόησης το σχήμα γίνεται σημείο αναφοράς για τη διερεύνηση άλλων σχηματισμών (Duval, 1995).

Η λειτουργική κατανόηση απαιτεί ικανότητες όπως τη σκέψη και τη σχεδίαση επιπλέον μονάδων στο υπάρχον σχήμα. Περιλαμβάνει τον χειρισμό και την επεξεργασία γεωμετρικών σχημάτων, όπως τη διαίρεση σε μέρη, τον οπτικό μετασχηματισμό, την αλλαγή στον προσανατολισμό που γίνονται είτε νοερά είτε φυσικά. Σύμφωνα με τον Duval (1995) η επεξεργασία γεωμετρικών σχημάτων είναι κρίσιμης σημασίας για την ανάπτυξη της χειριστικής διαδικασίας. Επιπλέον, η λειτουργική κατανόηση δεν είναι αποκομμένη από τα άλλα είδη κατανόησης αλλά συνήθως συμβάλλει στην αντιληπτική και στη λεκτική.

Σύμφωνα με έρευνα των Michael, Elia, Gagatsis, Kalogirou (2010) σχετικά με τις επιδόσεις μαθητών γυμνασίου και λυκείου σε έργα λειτουργικής κατανόησης, φάνηκε ότι η επίδοση στις μερεολογικές τροποποιήσεις είναι χαμηλότερη από τις επιδόσεις στις οπτικές τροποποιήσεις και στις τροποποιήσεις αλλαγής θέσης. Ωστόσο, κατά την επίλυση έργων μερεολογικής τροποποίησης οι μαθητές παρουσιάζουν μία συνοχή στις επιδόσεις τους σε αντίθεση με τις άλλες τροποποιήσεις. Επιπλέον, οι μερεολογικές τροποποιήσεις και οι τροποποιήσεις αλλαγής θέσης είναι αυτές που συνδέονται πιο στενά με τη λειτουργική κατανόηση.

Οι λειτουργικές ικανότητες που σχετίζονται με το χειρισμό και την ανακατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων μπορούν να υποστηρίξουν την ευρετική σκέψη των μαθητών για τις γεωμετρικές έννοιες. Γι’ αυτό το λόγο οι λειτουργικές ικανότητες θα πρέπει να υποστηρίζονται με χειραπτικά υλικά, όπως λογισμικά (Duval, 1995).

Σύμφωνα με έρευνες (Arzarello, Bairral, & Dane, 2014; Noss & Hoyles, 1996), η τεχνολογία παρέχει στους μαθητές αποτελεσματικά περιβάλλοντα μάθησης ώστε να αναπτύξουν τις ικανότητες συλλογισμού σχετικά με την οπτικοποίηση και το χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων (Turgut & Uygan, 2014).

Οι μερεολογικές τροποποιήσεις και οι τροποποιήσεις αλλαγής θέσης συσχετίζονται σε υψηλό βαθμό με τη λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος και άρα συμβάλλουν περισσότερο στην εξήγησή της (Gagatsis, Monoyiou, Deliyianni, Elia, Michael, Kalogirou, Panaoura & Philippou, 2010). Με τη σειρά της η λειτουργική κατανόηση συμβάλλει περισσότερο στην κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών δημοτικού και γυμνασίου (Γαγάτσης, 2014).

Η οπτικοποίηση ταυτίζεται με τη λειτουργική κατανόηση (Duval, 1995) και έτσι η μία προϋποθέτει την άλλη (Duval, 1999). Η οπτικοποίηση κατέχει σημαντικό ρόλο στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων ιδιαίτερα για τους μαθητές του δημοτικού. Αλλά και για τους μαθητές στις μεγαλύτερες τάξεις η οπτικοποίηση και συνεπώς η λειτουργική κατανόηση συμβάλλει στη λεκτική κατανόηση που χρειάζονται οι μαθητές (Γαγάτσης, 2014).

Η λειτουργική κατανόηση είναι η πιο πολύπλοκη αλλά και η λιγότερο συνειδητή. Συνδέεται αλλά και διαχωρίζεται από την αντιληπτική κατανόηση και διαχωρίζεται εντελώς από τη λεκτική κατανόηση. Περιλαμβάνει συγκεκριμένες επεξεργασίες των σχημάτων. Η αλλαγή ενός σχήματος είναι μία πράξη μετατροπής της οπτικής οργάνωσης ενός σχηματισμού (Duval, 1998).

Οι γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται στην επίλυση προβλήματος στη γεωμετρία και στην απόδειξη είναι: μία καθαρά διαμορφωτική διαδικασία, δηλαδή η λειτουργική κατανόηση, μια φυσική λεκτική διαδικασία μέσω περιγραφής, εξήγησης και διαφωνίας, και μια θεωρητική λεκτική διαδικασία μέσω αφαίρεσης (Duval, 1998). Η οπτικοποίηση μπορεί να ενσωματωθεί στη φυσική λεκτική διαδικασία. Αντίθετα, η διαμορφωτική διαδικασία δεν μπορεί να ενσωματωθεί στη θεωρητική λεκτική διαδικασία (Duval, 1998). Η διαμορφωτική διαδικασία στη λειτουργική κατανόηση μας επιτρέπει να διακρίνουμε όλους τους πιθανούς σχηματισμούς, ακόμα και τους πιο αφανείς. Επιπλέον, μπορούμε να αναγνωρίσουμε αυτούς που σχετίζονται με το πρόβλημα (Duval, 1998).

Η ικανότητα σύνθεσης και αποσύνθεσης σχημάτων σχετίζεται με την ικανότητα ανάλυσης και σύνθεσης των αριθμών καθώς και με την επίλυση προβλήματος (Clements & Sarama, 2009). Η έρευνα του Kurina (2003) για την ευρετική δύναμη του σχήματος στη γεωμετρική σκέψη δείχνει ότι η λειτουργική κατανόηση του σχήματος παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση του προβλήματος.

Μία ερευνητική περιοχή στην οποία παίζει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο η λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος είναι η διατήρηση του εμβαδού. Σύμφωνα με τους Piaget, Inhelder, & Szeminska (1981), το εμβαδόν ενός σχήματος μπορεί να διατηρηθεί καθώς αυτό τροποποιείται κάνοντας αποκοπή, μετακίνηση και επικόλληση, αναδιοργανώνοντας (re-arranging) δηλαδή μέρος του σχήματος για την παραγωγή άλλου σχήματος με ίδιο εμβαδόν. Για την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίζουν οι μαθητές τροποποιήσεις όπως μετάφραση, περιστροφή και συμμετρία, οι οποίες αποκαλούνται ισομετρίες και χαρακτηρίζονται ως διατήρηση της απόστασης. Οι έρευνες που έχουν ως στόχο τη μελέτη της διατήρησης του εμβαδού σχημάτων ασχολούνται με έργα μετακίνησης ενός μέρους του σχήματος και επικόλλησης σε άλλο σημείο. Ασχολούνται δηλαδή με την έννοια των ισοδύναμων εμβαδών, της ισοδύναμης περιοχής. Επιπλέον, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της διατήρησης του εμβαδού όταν βλέπουν σχήματα με διαφορετική μορφή. Αυτό σημαίνει ότι δεν βασίζονται τόσο στην αντιληπτική τους ικανότητα όταν συγκρίνουν εμβαδά (Kordaki & Balomenou, 2006). Επιπλέον η ικανότητά τους ως προς τη διατήρηση του εμβαδού ποικίλει ανάλογα με το σχήμα. Όταν αντιμετωπίζουν βασικά σχήματα όπως τετράγωνα και ορθογώνια δεν αντιμετωπίζουν τόσο μεγάλες δυσκολίες όσο όταν έχουν να διαχειριστούν τρίγωνα και ακανόνιστα σχήματα (Kordaki & Balomenou, 2006).

Ένα εργαλείο που είναι κατάλληλο για την εξάσκηση της λειτουργικής κατανόησης είναι το τάγκραμ. Η χρήση του τάγκραμ ενδείκνυται στη διδασκαλία της γεωμετρίας για τη βελτίωση της παρατηρητικότητας, της φαντασίας, της ανάλυσης του σχήματος, της δημιουργικότητας και της λογικής σκέψης (Lin, Shao,Wong, Li, & Niramitranon, 2011). Πιο συγκεκριμένα, το τάγκραμ βοηθάει τους μαθητές στην ανάπτυξη γεωμετρικών εννοιών, στην κατηγοριοποίηση και τη σύγκριση καθώς και στην εξάσκηση – δοκιμή πάνω στο σχήμα. Αυτό συνεπάγεται τη βελτίωση της ικανότητας επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων (Lin, Shao, Wong, Li, & Niramitranon, 2011). Επιπλέον οι μαθητές καλούνται να οργανώνουν και αναδιοργανώνουν συνεχώς τα κομμάτια ώστε να συνθέσουν ένα σχήμα (Bohning & Althouse 1997).

2.3. Η λειτουργική κατανόηση στα Αναλυτικά Προγράμματα

Ένας επιβλαβής παράγοντας της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η απομόνωση ανάμεσα στο αναλυτικό πρόγραμμα, τη διδασκαλία και τη μαθηματική έρευνα. Αντίθετα, η ολοκληρωμένη έρευνα και η αξιολόγηση του αναλυτικού προγράμματος μπορούν να οδηγήσουν σε καλύτερη κατανόηση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών και αλλαγές στο αναλυτικό πρόγραμμα με βάση τις έρευνες (Clements, Battista, Sarama, Swaminathon, 1997).

Το Εθνικό Συμβούλιο των Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM, 2000) τονίζει ότι η εμπλοκή των μαθητών σε χωρικές δραστηριότητες είναι σημαντική για τη μάθηση της γεωμετρίας. Έτσι τα Αναλυτικά προγράμματα πρέπει να περιέχουν δραστηριότητες χωρικής επίγνωσης για τη βελτίωση της χωρικής ικανότητας των μαθητών (Clements & Sarama, 2009). Το NCTM υποστηρίζει επίσης την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να συνδυάζουν, να υποδιαιρούν και να αλλάζουν τα σχήματα. Η χρήση δραστηριοτήτων με τάγκραμ βοηθούν τους μαθητές να πετύχουν αυτούς τους στόχους και να κατανοήσουν γεωμετρικές έννοιες (Bohning & Althouse, 1997)

Στο ισχύον Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών στην Ελλάδα (2003) οι στόχοι που αφορούν σε διαδικασίες που σχετίζονται με τη λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος, όπως ανάλυση και σύνθεση σχημάτων, περιστροφή, μεγέθυνση, σμίκρυνση, αλλαγή θέσης, είναι περιορισμένοι. Για παράδειγμα, οι στόχοι που αφορούν στην αναγνώριση σχημάτων που είναι μέρη ενός σύνθετου σχήματος και στη μεγέθυνση και σμίκρυνση συναντώνται μόνο στις δύο τελευταίες τάξεις του δημοτικού. Αντίθετα, η τοποθέτηση, ο εντοπισμός και η μετατόπιση αντικειμένων σε σχέση με τον εαυτό τους παρατηρείται σαν στόχος μόνο στην Α΄ δημοτικού. Σχετικά με το εμβαδόν, εντοπίζουμε την εμφάνισή του στη Δ΄ δημοτικού με στόχο τη διαισθητική του κατανόηση ενώ αργότερα χρησιμοποιούνται οι τύποι για τον υπολογισμό του. Η ιδιότητα της συμμετρίας υπάρχει σε όλες τις τάξεις του δημοτικού τόσο στο επίπεδο της παρατήρησης όσο και στο επίπεδο της σχεδίασης από τη Γ΄ δημοτικού και έπειτα.

Γενικά στο ΑΠΣ του 2003 παρατηρείται η ύπαρξη λίγων και φτωχών στόχων σχετικά με τις ικανότητες και δεξιότητες που καλούνται να αναπτύξουν οι μαθητές στην περιοχή της γεωμετρίας, γεγονός που φανερώνει την έλλειψη διδακτικών ωρών που αφιερώνονται σε αυτήν τη θεματική ενότητα. Οι στόχοι προσανατολίζονται κυρίως στην παρατήρηση και στη χρήση τύπων, που προωθούν την παθητικότητα και περιορίζουν την ανάπτυξη της χωρικής, γεωμετρικής και κριτικής σκέψης του μαθητή.

Η εικόνα αυτή διαφοροποιείται κατά τον έλεγχο του πιλοτικού Αναλυτικού Προγράμματος του 2011. Αρχικά οι στόχοι πολλαπλασιάζονται και μετονομάζονται σε προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα και επιπλέον προστίθεται μία πληθώρα δραστηριοτήτων και εργαλείων για την επίτευξή τους. Οι στόχοι που αφορούν στις επικαλύψεις επιπέδων με σχήματα και στη μελέτη χωρικών σχέσεων παρατηρούνται στις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού. Οι περιστροφές, οι μετατοπίσεις και η συμμετρία ανήκουν στη θεματική περιοχή των μετασχηματισμών. Από τη Γ΄ δημοτικού και έπειτα εντοπίζονται στόχοι σχετικά με τη σύγκριση σχημάτων μετά από μετασχηματισμό, ενώ στη Δ΄ δημοτικού εισάγονται τα ψηφιδωτά με τη χρήση μετασχηματισμών και στην Ε΄ δημοτικού αρχίζουν οι μαθητές να διδάσκονται τη μεγέθυνση και τη σμίκρυνση. Σχετικά με το εμβαδόν των σχημάτων, ξεκινούν από την Α΄ δημοτικού με σύγκριση των επιφανειών μέσω ανάλυσης και σύνθεσης. Στη Γ΄ και Δ΄ δημοτικού χρησιμοποιούν την έννοια του εμβαδού εκτελώντας ακόμη αναλύσεις και συγκρίσεις επιφανειών, ενώ από την Ε΄ δημοτικού χρησιμοποιούν κανονικά τον τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού. Τέλος, σε όλες τις τάξεις αναφέρεται ο στόχος της σύνθεσης και της ανάλυσης των σχημάτων σε μέρη.

Οι δραστηριότητες και τα εργαλεία που προτείνονται για την επίτευξη των στόχων είναι η χρήση του τάγκραμ ή συναφών εργαλείων, δραστηριότητες δίπλωσης και επικάλυψης επιφανειών, η χρήση του γεωπίνακα, των πεντόμινο, οι καθρέπτες Mira, πλακόστρωτα και ψηφιδωτά, φυσικοί και ψηφιακοί καμβάδες, λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας και γενικά δραστηριότητες ανάλυσης και σύνθεσης σχημάτων με σκοπό τη σύγκριση ή την εύρεση του εμβαδού τους. Είναι φανερή λοιπόν η προσπάθεια εμπλουτισμού της διδασκαλίας της γεωμετρίας με όλα τα διαθέσιμα μέσα, φυσικά και ψηφιακά, ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να φτάσουν στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα του επιπέδου τους.

Στο Common Core State Standards των Ηνωμένων Πολιτειών (2013) δίνεται έμφαση σε δραστηριότητες σύνθεσης και αποσύνθεσης των σχημάτων. Από την Α΄ δημοτικού οι μαθητές αναμένεται να συνθέτουν σχήματα ώστε να δημιουργήσουν ένα σύνθετο σχήμα με σκοπό να κατανοήσουν τη σχέση μέρους-όλου αλλά και να παρατηρήσουν το σχήμα από διαφορετικές οπτικές. Αργότερα γίνεται προσπάθεια για την ανάπτυξη της αιτιολόγησης πάνω στην αποσύνθεση των σχημάτων και έπειτα, στην Γ΄ δημοτικού οι μαθητές μαθαίνουν να διαχωρίζουν σχήματα σε γραμμές και στήλες για την εισαγωγή στο εμβαδόν. Αφού εισαχθούν στην έννοια του εμβαδού, χρησιμοποιούν την σύνθεση και την αποσύνθεση των σχημάτων για την επίλυση προβλημάτων σχετικά με το εμβαδόν δύσκολων σχημάτων. Εκτός όμως από το εμβαδόν, η σύνθεση και η αποσύνθεση χρησιμοποιείται και για την έκφραση κλασμάτων εφόσον αναδεικνύεται ο διαχωρισμός σχημάτων σε δύο ή τέσσερα μέρη και η έκφραση με κλάσμα της σχέσης μέρους-όλου. Ωστόσο, δεν εντοπίζεται κάποιος στόχος σχετικά με την περιστροφή σχημάτων.

Οι Clements & Sarama (2009) ανέπτυξαν μία τροχιά μάθησης για τις περιοχές της σύνθεσης, της αποσύνθεσης και της από-ενσωμάτωσης (disembedding) των σχημάτων για μαθητές μικρής ηλικίας. Αναφέρουν ότι μέχρι την ηλικία των τριών ετών τα παιδιά βρίσκονται στο στάδιο της προ-σύνθεσης και προ-αποσύνθεσης, κατά τα οποία το παιδί μπορεί να χειριστεί τα σχήματα, να τα αποσυνδέσει μόνο μέσω δοκιμής και λάθους αλλά όχι να τα συνδέσει. Αργότερα, στην ηλικία των 4 ετών το παιδί μπορεί να συναρμολογήσει σχήματα που ακουμπούν. Όταν φτάσει 5 ετών μπορεί να δημιουργήσει μια εικόνα τοποθετώντας πολλά σχήματα μαζί και να περιστρέψει τα σχήματα ώστε να τα συνθέσει. Στην ηλικία των 6 ετών ο μαθητής μπορεί να δημιουργήσει ένα σύνθετο σχήμα, να αντικαταστήσει κάποια κομμάτια του καθώς και να αποσυνθέσει ένα σχήμα χρησιμοποιώντας κάποια απεικόνιση του περιβάλλοντος. Τον επόμενο χρόνο ο μαθητής καταφέρνει να κατασκευάσει ένα σχήμα εσκεμμένα χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενες μονάδες αλλά και να αποσυνθέσει το σχήμα με τη χρήση δικής του απεικόνισης. Στην ηλικία των 8 ετών μπορεί να συνθέσει και να αποσυνθέσει ένα σχήμα χρησιμοποιώντας μονάδες μονάδων.

Σχετικά με τη διαδικασία της αποενσωμάτωσης τα παιδιά 3 ετών μπορούν να θυμηθούν και να αναπαράγουν μικρό αριθμό μη επικαλυπτόμενων σχημάτων. Στην ηλικία των 4 ετών μπορούν να αναγνωρίσουν ένα σχήμα που επικαλύπτεται και αργότερα σχήματα που είναι ενσωματωμένα μέσα σε άλλα (όπως για παράδειγμα τα εγγεγραμμένα). Όταν ο μαθητής φτάσει στην ηλικία των 7 μπορεί να αναγνωρίσει ενσωματωμένα σχήματα σε έναν πολύπλοκο σχηματισμό και μέχρι την ηλικία των 8 ετών καταφέρνει να αναγνωρίσει όλα τα είδη των πολύπλοκων διατάξεων (Clements & Sarama, 2009).

3. Η χρήση της τεχνολογίας στη γεωμετρία

Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί οι έρευνες που χρησιμοποιούν την τεχνολογία στη διερεύνηση και στην ανάπτυξη των χωρικών ικανοτήτων (Kurtulus & Uygan, 2010). Η τεχνολογία αυτή αναφέρεται ως δυναμική γεωμετρία (dynamic geometry), αλληλεπιδραστική γεωμετρία (interactive geometry), εικονικά χειραπτικά υλικά (virtual manipulatives), λογισμικά (computer software), διδασκαλία βάσει υπολογιστών (computer-based instruction) ή εμπλουτισμένα με την τεχνολογία περιβάλλοντα (technology enriched environments).

Η δυναμική ή διαδραστική γεωμετρία (dynamic or interactive) παρουσιάστηκε αρχικά από τους Nick Jackiw και Steve Rasmussen (Isotani, Pedro, Reis, Borges, Lopes, Souza, Anarosa, Brandão & Brandão, 2014). Όριζε την αντίθεση στη στατική και παραδοσιακή διδασκαλία των γεωμετρικών κατασκευών. Ο μαθητής μπορεί πλέον να δράσει στο περιβάλλον κατασκευάζοντας τη γνώση του μέσω του χειρισμού και της εναλλαγής των γεωμετρικών αντικειμένων (Isotani, Pedro, Reis, Borges, Lopes, Souza, Anarosa, Brandão & Brandão, 2014).

Στη δυναμική γεωμετρία μπορεί να κατασκευαστεί ένα περιβάλλον δυναμικό και αλληλεπιδραστικό όπου οι μαθητές χειρίζονται και εναλλάσσουν τα γεωμετρικά αντικείμενα στην οθόνη του υπολογιστή καταλήγοντας εν τέλει να κατασκευάζουν οι ίδιοι τη γνώση τους (Isotani, Pedro, Reis, Borges, Lopes, Souza, Anarosa, Brandão & Brandão, 2014).

Οι Moyer, Bolyard, and Spikell (2002) όρισαν τα «virtual manipulatives», δηλαδή τα εικονικά χειραπτικά υλικά ως «διαδραστική-αλληλεπιδραστική δικτυακή οπτική αναπαράσταση ενός δυναμικού αντικειμένου που δίνει ευκαιρίες για την κατασκευή μαθηματικής γνώσης. Τα εικονικά χειραπτικά υλικά βοηθούν στην ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών, διαδικασιών και άλλων όψεων.

Το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας επιτρέπει στους μαθητές να μάθουν μέσω της διαλεκτικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των μαθητών, των μέσων της μάθησης και του μαθηματικού προβλήματος. Τα μέσα που χρησιμοποιούνται βοηθούν τους μαθητές στη μαθηματικοποίηση της δραστηριότητάς τους και στην ανάπτυξη στρατηγικών για την επίλυση του προβλήματος. Κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης οι μαθητές αναθεωρούν, τροποποιούν και ολοκληρώνουν τη γνώση τους (Brousseau,1997).

Τα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας είναι εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την υποστήριξη ενός μαθητοκεντρικού μαθησιακού περιβάλλοντος (Hannafin, Truxaw , Vermillion & Liu (2008). Κάποια από αυτά είναι: Cabri, Cinderella, GeoGebra, Geometer's SketchPad, Geometry Inventor, Geometric Supposer, Geometry Assistant, Euklid, CaR, GeoNET, GeoLOG, Jeometry, GRACE, DrGEO, Wingeom, κ.α. (Christou, Jones, Mousoulides & Pittalis, 2006).

Πιο συγκεκριμένα, για τη διδασκαλία της γεωμετρίας έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας όπως το Cabri-Geometry, το Geometer's Sketchpad και το GeoGebra. Με τη χρήση των εικονικών περιβαλλόντων γίνεται δυνατός ο χειρισμός και η κίνηση δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων μέσω του συρσίματος με το ποντίκι. Υπάρχουν επίσης και περιβάλλοντα για την τρισδιάστατη γεωμετρία, όπως το Cabri 3D (Hwang & Hu, 2013).

Το λογισμικό Cabri προσφέρει πολλά οφέλη μέσω της χρήσης των δυναμικών του εργαλείων. Ο χρήστης μπορεί να βρει τις διαγωνίους και τις διαμέσους οποιωνδήποτε σχημάτων με ακρίβεια, να περιστρέψει τα σχήματα, να διπλασιάσει και να κατασκευάσει σχήματα με συγκεκριμένο εμβαδόν (Kordaki & Balomenou, 2006).

Η έρευνα των Rafi, Samsudin, & Said (2008) σε μαθητές Β΄ δημοτικού έδειξε ότι οι ικανότητες χωρικής οπτικοποίησης βελτιώθηκαν σε μεγαλύτερο βαθμό στους μαθητές που ασχολήθηκαν με διαδικτυακές δραστηριότητες και δραστηριότητες κινουμένων σχεδίων με τη χρήση του υπολογιστή σε αντίθεση με τους μαθητές που διδάχτηκαν με παραδοσιακές μεθόδους.

Οι Güven and Kösa (2008) εξέτασαν τις χωρικές ικανότητες υποψήφιων δασκάλων με τη χρήση του Cabri 3D. Οι δραστηριότητες περιλάμβαναν απόδειξη θεωρίας και περιστροφή αντικειμένων σε τρισδιάστατο περιβάλλον και παρατηρήθηκε ότι συνέβαλαν σημαντικά στη χωρική ικανότητα των συμμετεχόντων.

Το Geometer Sketchpad μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολύ εύκολα και γρήγορα από τους μαθητές σε αντίθεση με τα παραδοσιακά μέσα που καθιστούν πιο χρονοβόρες και δύσκολες τις διαδικασίες (Dixon, 1997). Επιπλέον οι μαθητές προσηλώνονται στις έννοιες που είναι δύσκολες αλλά και ενδιαφέρουσες χωρίς να ανησυχούν για τη σωστή εκτέλεση υπολογισμών. Αυτό οδηγεί στην ανάπτυξη σκέψης ανώτερου επιπέδου (Nicaise & Barnes, 1996).

Κάποιες έρευνες δείχνουν ότι η χρήση της τεχνολογίας ενίσχυσε τη χωρική σκέψη των μαθητών και τις γεωμετρικές έννοιες (Battista, 2002; Olkun, 2003; Yang & Chen, 2010). Ο Hollebrands (2007) αναφέρει ότι για την ενίσχυση της μαθητικής διερεύνησης με τη χρήση δυναμικών προγραμμάτων γεωμετρίας, η διδασκαλία θα πρέπει να είναι τόσο δομημένη ώστε οι μαθητές να μπορούν να φτάσουν σε υποθέσεις.

Τα δυναμικά προγράμματα γεωμετρίας μπορούν να υποστηρίξουν την ανάπτυξη ικανοτήτων σκέψης ανώτερου επιπέδου, όπως είναι η γενίκευση

(Hannafin, Truxaw, Vermillion & Liu, 2008). Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή νοερών μοντέλων για τη σκέψη των σχημάτων που θα αποτελέσουν τη βάση για την κατασκευή της γεωμετρικής κατανόησης των μαθητών (Battista, 2002). O Zheng (2002) συμπέρανε ότι τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κάνουν γενικεύσεις και συνεπώς να προάγουν την κριτική τους σκέψη. Οι Sinclair and Crespo (2006) ανέφεραν ότι τα προγράμματα δυναμικής γεωμετρίας βοηθούν τους μαθητές στη μάθηση του περιεχομένου και των διαδικασιών των μαθηματικών που αποτελούν πρόκληση σε μη τεχνολογικά περιβάλλοντα.

Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας χρησιμοποιούνται επιτυχώς στη διδασκαλία της γεωμετρίας λόγω της χρήσης του άμεσου χειρισμού των γεωμετρικών αντικειμένων που τα καθιστά αλληλεπιδραστικά (Jones, 2001).

Η διδασκαλία της γεωμετρίας μέσω υπολογιστή ενισχύει όχι μόνο το ενδιαφέρον των μαθητών αλλά και τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες (Chang, Sung, & Lin, 2007). Ο Moyer (1978) απέδειξε ότι η κίνηση που υπάρχει στο Geometer's Sketchpad βοηθάει τους μαθητές στην κατανόηση των εννοιών σχετικά με την περιστροφή. Οι υπολογιστές προσφέρουν πολλές δυνατότητες οπτικοποίησης κυρίως μέσω της κίνησης (Laborde & Laborde, 1995). Επιπλέον, δεν υπάρχει το κώλυμα των τεχνικών δυσκολιών για τη σχεδίαση και την κατασκευή των σχημάτων. Έτσι είναι εφικτή η εξερεύνηση των γεωμετρικών καταστάσεων και η διαχείριση των γεωμετρικών αντικειμένων που φαίνονται να είναι πραγματικά.

Ωστόσο τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας προσανατολίζονται περισσότερο στην κατασκευή και ενισχύουν τη λεκτική και τη διαδικαστική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος. Έτσι δεν αναπτύσσει όλες τις λειτουργίες της οπτικοποίησης και ειδικότερα τη λειτουργική κατανόηση (Duval, 1998).

Η κατανόηση της έννοιας της επιφάνειας και της διατήρησής της έχει επίσης συνδεθεί με το είδος των εργαλείων και ειδικότερα των εργαλείων σε περιβάλλον υπολογιστή (Kordaki & Potari, 2002; Kordaki, 2003). Ειδικότερα, τα Δυναμικά Συστήματα Γεωμετρίας όπως το περιβάλλον Cabri-Geometry II προσφέρουν σημαντικές δυνατότητες για τη μάθηση της έννοιας της επιφάνειας. Οι δυνατότητες αυτές αφορούν στη διαθεσιμότητα πληθώρας εργαλείων που αφορούν σε μια σειρά εννοιών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας καθώς επίσης και στη δυνατότητα άμεσης διαχείρισης μέσω της λειτουργίας του 'συρσίματος' των θεωρητικών εννοιών που εμφανίζονται ως διαγράμματα στην οθόνη του υπολογιστή (Laborde and Laborde, 1995). Τα σχήματα στο περιβάλλον Cabri-Geometry II αποτελούν γεωμετρικά αντικείμενα, τα οποία δύνανται να τροποποιούνται ως προς τη μορφή ενώ διατηρούν τις βασικές γεωμετρικές ιδιότητες με τις οποίες κατασκευάστηκαν (Noss & Hoyles, 1996; Mariotti, 1995).

3.1. Η συμβολή της τεχνολογίας στη λειτουργική κατανόηση

Η λειτουργική κατανόηση συνιστά μια γνωστική διαδικασία μετασχηματισμού σχημάτων σε νοερές απεικονίσεις (Chang, Wu, Lai & Sung, 2014). Μέσω του χειρισμού των σχημάτων οι χρήστες μπορούν να βελτιώσουν τις νοερές τους ικανότητες και την ικανότητα οπτικοποίησης καθώς και να αρχίζουν να σκέφτονται λογικά για τις πιθανές απαντήσεις σε προβλήματα (Chang, Wu ,Lai & Sung, 2014). Ο μετασχηματισμός των σχημάτων αυξάνει τη λειτουργική κατανόηση που με τη σειρά της είναι σημαντική στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων (Duval, 1995). Οι διαδικασίες της από-ενσωμάτωσης, της αναδιοργάνωσης και της ανασύνθεσης προωθούν τη φαντασία και την ικανότητα λογικής σκέψης μέσω της παρατήρησης και της ανάλυσης (Clements & Battista, 1992).

Η γνωστική και λειτουργική διαχείριση των γεωμετρικών σχημάτων προϋποθέτουν την ύπαρξη της χωρικής σκέψης. Τα περιβάλλοντα μάθησης μέσω της τεχνολογίας έχουν αποδειχτεί αποτελεσματικά στην ανάπτυξη της ικανότητας συλλογισμού, διατύπωσης υποθέσεων αλλά και στη βελτίωση των ικανοτήτων χωρικού συλλογισμού (Kurtulus, 2013).

Τα εικονικά περιβάλλοντα ενισχύουν τη γεωμετρική γνώση και την ικανότητα επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων επειδή μπορούν να συνδέσουν τις νοερές εικόνες ανθρωποειδών με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (Hauptman, 2010). Τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας φαίνεται ότι προσφέρουν μια πληθώρα εργαλείων όπως εργαλεία για την κατασκευή, εργαλεία ελέγχου για την μετακίνηση του σχήματος ή σημείων του σχήματος με τη δυνατότητα να τροποποιούνται αυτόματα οι μετρήσεις για το σχήμα (όπως το εμβαδόν και το ύψος), πολλαπλές αναπαραστάσεις και δυνατότητα μετάβασης από τη μία στην άλλη (Kordaki & Balomenou, 2006).

Η χρήση κατάλληλων λογισμικών μπορεί να βελτιώσει τη λειτουργική κατανόηση σύμφωνα με τον Duval (1995). Οι μαθητές μπορούν να αποκτήσουν εμπειρίες οπτικοποίησης και χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων. Με τον χειρισμό σχημάτων μπορούν να ανακαλύψουν έννοιες και σχέσεις που θα διευκολύνουν την οπτική τους ικανότητα (Chang, Wu, Lai & Sung, 2014).

Μέσω ερευνών έχει αναδειχθεί η σημασία της κατασκευής και χρήσης μονάδων και ειδικότερα ανώτερων μονάδων (superordinate units), δηλαδή μονάδες μονάδων στην ανάπτυξη των μαθητών στις χωρικές και γεωμετρικές έννοιες (Clements & Battista, 1992; Wheatley & Cobb, 1990). Οι Clements & Sarama (1995) ανέπτυξαν μια δραστηριότητα με την ονομασία «Tumbling Tetrominoes» τροποποιώντας το γνωστό παιχνίδι Τέτρις. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές καλούνται να καλύψουν ένα πλαίσιο 12 επί 10 μονάδων με σχήματα που πέφτουν και αποτελούνται από τέσσερις κύβους το καθένα. Τα χαρακτηριστικά του λογισμικού είναι τα εξής (Clements, Battista, Sarama, & Swaminathon, 1997):

-ενισχύει τις έννοιες του εμβαδού και τις γεωμετρικές κινήσεις. Το σκορ του μαθητή είναι η επιφάνεια του έχει καλύψει και τα τουβλάκια δεν εξαφανίζονται όταν ολοκληρωθεί μία σειρά. Το κάθε σχήμα μπορεί να κυλίσει (κάτω, δεξιά, αριστερά), να περιστραφεί (δεξιά, αριστερά) και να αναστραφεί (οριζόντια, κάθετα).

-δεν δίνει έμφαση στην ταχύτητα καθώς δεν είναι συνεχόμενη η κάθοδος των σχημάτων.

-το κάθε κουτάκι του τετρόμινο απεικονίζει το τετρόμινο μέσα στο οποίο ανήκει και έχει διαφορετικό χρώμα.

-αντικατάσταση. Το λογισμικό επιτρέπει στο μαθητή να αναιρέσει τις προηγούμενες τοποθετήσεις του όσες φορές θελήσει.

-επανάληψη. Ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να παίξει το ίδιο παιχνίδι με την ίδια σειρά εμφάνισης των τετρόμινο.

-δυνατότητα να βλέπει στην άκρη το τετρόμινο που θα ακολουθήσει.

-το πλαίσιο μπορεί να έχει διαφορετικές διαστάσεις αλλά με το ίδιο εμβαδόν κάθε φορά.

-υπάρχει δυνατότητα αναβάθμισης της δυσκολίας του παιχνιδιού με την επιλογή να μην μπορεί ο χρήστης να αναιρέσει τις ενέργειές του και να μην μπορεί να αναστρέψει το σχήμα.

-το λογισμικό μπορεί να δείξει τα βήματα που ακολούθησε ο χρήστης για κάθε σχήμα ώστε να δίνεται η δυνατότητα παρουσίασης των στρατηγικών.

-δυνατότητα επιλογής ορθογωνίου που ταιριάζει στην οθόνη.

Τα αποτελέσματα από τη χρήση της δραστηριότητας Tumbling Tetrominoes έδειξαν ότι αυξήθηκε η ευελιξία των μαθητών στη σύνθεση σχημάτων για την παραγωγή άλλων σχημάτων. Αυξήθηκε η ικανότητα χρήσης χωρικών εικόνων και φυσικών κινήσεων (Clements, Battista, Sarama, & Swaminathon, 1997).

Οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στη σύνθεση του ορθογώνιου «κουβά» ήταν:

1. Δοκιμή και λάθος: έβλεπαν που ταιριάζουν και αν εμφάνιζαν μεγάλα κενά τα άλλαζαν. Αυτή ήταν και η αρχική στρατηγική όλων των μαθητών.
2. Δημιουργία μοτίβων: διαπίστωναν ότι αν χρησιμοποιούσαν τα τετρόμινο σε συγκεκριμένα μοτίβα θα έφτιαχναν έναν καλό συνδυασμό (π.χ. χρήση δύο

τετρόμινο L για τη δημιουργία ενός ορθογωνίου χωρίς όμως να το αντιληφθούν).

3. Μονάδες μονάδων: επέκταση της δημιουργίας μοτίβων. Οι μαθητές αντιλήφθηκαν ότι μπορούσαν να σχηματίσουν καινούργια σχήματα με τη σύνθεση π.χ. δύο τετρόμινο, οπότε κατασκεύαζαν μια ανώτερη μονάδα που συνήθως διευκόλυνε την κάλυψη.

Γενικά οι μαθητές βελτίωναν συνεχώς τις στρατηγικές τους αλλά χρησιμοποιούσαν και μία μείξη αυτών (Clements, Battista, Sarama, & Swaminathon, 1997).

Στην έρευνά τους, οι Chang, Wu, Lai & Sung (2014) χρησιμοποίησαν το γεωμετρικό σύστημα Hands-On Learning by Doing (HOLD) το οποίο σχεδιάστηκε σύμφωνα με τη θεωρία του Duval για την κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος. Σκοπός της έρευνας ήταν η εξέταση των επιδράσεων αυτού του συστήματος στις τέσσερις κατηγορίες κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος, στη χωρική γεωμετρία και στη μαθησιακή συμπεριφορά. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι με τη χρήση του συστήματος αυξάνεται η επίδοση των μαθητών της πειραματικής ομάδας με στατιστική σημαντικότητα στη χωρική ικανότητα, στη διαδικαστική κατανόηση και στη λειτουργική κατανόηση αλλά όχι στην αντιληπτική κατανόηση (Chang, Wu, Lai & Sung, 2014). Έτσι λοιπόν, παρατηρούμε ότι η ικανότητα λειτουργικής κατανόησης μπορεί να βελτιωθεί στατιστικά σημαντικά με τη χρήση των Νέων Τεχνολογιών.

Επιπλέον, μέσα από την έρευνα των Chang, Wu, Lai & Sung (2014) φάνηκε ότι οι επιδόσεις των μαθητών στη λειτουργική κατανόηση είναι χαμηλότερη από τα άλλα είδη κατανόησης. Για παράδειγμα, αν μεταφράσουμε σε ποσοστά τα αποτελέσματα της έρευνας των Chang, Wu, Lai & Sung (2014) η αντιληπτική κατανόηση αυξήθηκε από 66% σε 80%, η διαδικαστική κατανόηση από 77% σε 86%, η συνολική χωρική ικανότητα από 63% σε 73%, ενώ η λειτουργική κατανόηση από 40% σε 47%. Από αυτά τα αποτελέσματα μπορούμε να συμπεράνουμε την πολυπλοκότητα της λειτουργικής κατανόησης καθώς και τη δυσκολία που παρατηρείται στην ύπαρξη και στην ανάπτυξή της. Επιπλέον η λειτουργική κατανόηση βρίσκεται σε χαμηλά επίπεδα διότι απαιτεί ανώτερης τάξης διεργασίες και κατανόηση του προβλήματος (Chang, Wu, Lai & Sung, 2014).

Το σύστημα HOLD βοηθάει τους μαθητές στην εξοικονόμηση της εργαζόμενης μνήμης κατά τη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος αλλά και στην ανακάλυψη και παρατήρηση των αλλαγών που συμβαίνουν στο σχήμα (Chang, Wu, Lai & Sung, 2014).

Οι Olkun (2003) και Olkun, Altun, & Smith (2005) διαπίστωσαν ότι η χρήση του τάγκραμ μέσω υπολογιστή ενίσχυσε αποτελεσματικά τη γεωμετρική μάθηση. Ακόμη, τα αποτελέσματα μπορούν να συγκριθούν με τα αποτελέσματα από τη χρήση φυσικών εργαλείων. Στην έρευνα των Lin, Shao, Wong, Li, & Niramitranon (2011) χρησιμοποιήθηκε το τάγκραμ σε τάμπλετ για τη συνεργατική επίλυση προβλημάτων από μαθητές Στ΄ δημοτικού στην Ταϊβάν. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες χαμηλής, μέσης, υψηλής και μεικτής επίδοσης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές χαμηλής και μεικτής επίδοσης ωφελήθηκαν περισσότερο μετά την παρέμβαση των 4 εβδομάδων. Επιπλέον, αυξήθηκε η ικανότητα των μαθητών στην περιστροφή βασικών σχημάτων και στον χωρικό συλλογισμό. Ωστόσο η επίδοσή τους δεν αυξήθηκε στατιστικά σημαντικά όσον αφορά στην ικανότητα συναρμολόγησης συνδυαστικών σχημάτων.

Ο Dixon (1997) σε έρευνά του σε μαθητές δευτέρας γυμνασίου με το Sketchpad βρήκε ότι οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν τις εννοιολογικές κατασκευές της περιστροφής και της αντανάκλασης των γεωμετρικών σχημάτων. Σε έρευνα των Baki, Kösa and Güven (2009) διερευνήθηκε η επίδραση της δυναμικής γεωμετρίας και των χειραπτικών υλικών στη βελτίωση των ικανοτήτων χωρικής οπτικοποίησης υποψήφιων δασκάλων. Διαπιστώθηκε ότι οι δύο πειραματικές ομάδες παρουσίασαν αρκετά μεγαλύτερα ποσοστά στις ικανότητες χωρικής οπτικοποίησης σε σχέση με την ομάδα ελέγχου που διδάχθηκε με παραδοσιακές μεθόδους. Επιπλέον, η χρήση της τεχνολογίας έδειξε μεγαλύτερη βελτίωση στη χωρική οπτικοποίηση των συμμετεχόντων συγκριτικά με τη χρήση των χειραπτικών υλικών. Η έρευνα των La Ferla, Olkun, Akkurt, Alibeyoglu, Gonulates, & Accascina (2009) εξέτασε τις χωρικές σχέσεις, τη χωρική οπτικοποίηση και τη νοερή περιστροφή μαθητών γυμνασίου και μέσα από δραστηριότητες του λογισμικού Google SketchUp διαπιστώθηκε ότι αυξήθηκαν σημαντικά οι ικανότητες χωρικής οπτικοποίησης και της νοερής περιστροφής των μαθητών.

Στην έρευνα των Kordaki & Balomenou (2006) σε μαθητές γυμνασίου με τη χρήση του Cabri II ζητήθηκε σε ένα από τα έργα που δόθηκαν η κατασκευή ενός τριγώνου και η εφαρμογή τροποποιήσεων πάνω σε αυτό ώστε να παραχθούν άλλα ισοδύναμα τρίγωνα. Επιπλέον ζητήθηκε από τους μαθητές να επαναλάβουν τη διαδικασία της τροποποίησης όσες πιο πολλές φορές μπορούσαν και να δικαιολογούν κάθε φορά τις στρατηγικές που ακολούθησαν. Με άλλα λόγια, σκοπός του έργου αυτού ήταν η εξέταση της κατανόησης της έννοιας του εμβαδού και της αμεταβλητότητάς της μέσω μιας διαδοχικής διαδικασίας τροποποιήσεων σχημάτων και κατασκευής ισοδύναμων-ισοεμβαδικών (Kordaki & Balomenou, 2006). Το εργαλείου του συρσίματος είναι αυτό που προσδίδει δυναμικότητα στο περιβάλλον, δηλαδή δυναμική θέαση των εννοιών (Mariotti, 2001) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο ως εργαλείο ελέγχου αλλά και ως δοκιμής-έρευνας (Kordaki & Balomenou, 2006).

4. Ερευνητικά ερωτήματα και υποθέσεις

Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι:

1. Μπορεί να βελτιωθεί η λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος των μαθητών με τη χρήση των εικονικών χειραπτικών υλικών Pattern Blocks, Tangrams και Pentominoes;
2. Με ποιο τρόπο μπορούν τα εικονικά χειραπτικά υλικά να επηρεάσουν την επίδοση των μαθητών στη λειτουργική κατανόηση;
3. Ποιες στρατηγικές ακολουθούν οι μαθητές κατά τον χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων;
4. Ποια είναι τα συχνότερα λάθη των μαθητών κατά τον χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων;

5. Πώς σχετίζεται η λειτουργική κατανόηση με τις ομάδες μαθηματικής επίδοσης;
6. Πώς επιδρούν τα εικονικά χειραπτικά υλικά στην ικανότητα λειτουργικής κατανόησης μαθητών που ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες μαθηματικής επίδοσης;

Οι αντίστοιχες ερευνητικές μας υποθέσεις ήταν ότι:

1. Η λειτουργική κατανόηση των μαθητών μπορεί να βελτιωθεί και ειδικότερα με τη χρήση των εικονικών χειραπτικών υλικών.
2. Τα εικονικά χειραπτικά υλικά μπορούν να βελτιώσουν την επίδοση στη λειτουργική κατανόηση τόσο ποσοτικά, με αύξηση της επίδοσης, όσο και ποιοτικά, με βελτίωση της ποιότητας του χειρισμού και της οπτικοποίησης των σχημάτων.
3. Υποθέτουμε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν απλές στρατηγικές για τον χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων και έχουν την ικανότητα της ευελιξίας ώστε να χρησιμοποιήσουν ή να υιοθετήσεις νέες και εναλλακτικές στρατηγικές.
4. Οι μαθητές αναμένεται να κάνουν λάθη στην αναδιαμόρφωση των σχημάτων καθώς είναι μία έννοια που δεν διδάσκεται όσο θα έπρεπε στο σχολείο.
5. Η επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά σχετίζεται με την επίδοση στη χωρική ικανότητα και στη λειτουργική κατανόηση. Οπότε αναμένουμε ότι οι μαθητές με χαμηλή μαθηματική επίδοση θα έχουν αντίστοιχα χαμηλή ικανότητα λειτουργικής κατανόησης και οι μαθητές με μέση ή υψηλή επίδοση στα μαθηματικά θα έχουν μέση ή υψηλή επίδοση αντίστοιχα στη λειτουργική κατανόηση.
6. Σύμφωνα με έρευνες οι μαθητές της χαμηλής μαθηματικής επίδοσης ωφελούνται περισσότερο από διδακτικές παρεμβάσεις και βελτιώνουν την επίδοσή τους περισσότερο από τους υπόλοιπους. Οπότε υποθέτουμε ότι το ίδιο θα συμβεί και στην παρούσα έρευνα.

Μέθοδος

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 32 μαθητές που έχουν διδαχθεί την ύλη της Ε΄ δημοτικού και φέτος φοιτούν στην Στ’ δημοτικού. Πιο συγκεκριμένα συμμετείχαν 18 αγόρια (56%) και 14 κορίτσια (44%) ηλικίας 11 ετών. Οι μαθητές ανήκαν σε μεσαία και χαμηλά κοινωνικοοικονομικά στρώματα, ήταν κατανεμημένοι σε δύο τμήματα και η συμμετοχή τους στην έρευνα ήταν εθελοντική. Η Στ’ δημοτικού επιλέχθηκε διότι η εξέταση της λειτουργικής κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος και ειδικότερα η μερεολογική τροποποίηση απαιτούσε γνώσεις που διδάχθηκαν στην Ε’ δημοτικού. Πιο αναλυτικά οι προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών περιλαμβάνουν την αναγνώριση σύνθετων σχημάτων, την ονομασία με τη χρήση κεφαλαίων γραμμάτων, τη διάσπαση σύνθετων σχημάτων σε υποσχήματα, την αναδιαμόρφωση του σχήματος και τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού απλών και σύνθετων σχημάτων.

Μέσα συλλογής δεδομένων

Α) Ερωτηματολόγιο

Για τις ανάγκες της έρευνας σχεδιάστηκε ένα εργαλείο με ασκήσεις σύντομης απάντησης, πολλαπλής επιλογής και πολλών λύσεων. Οι ασκήσεις σχεδιάστηκαν με άξονα τους στόχους που θέσαμε για τον έλεγχο της έννοιας της λειτουργικής κατανόησης. Ως ικανότητα λειτουργικής κατανόησης θα ορίσουμε την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν γεωμετρικά σχήματα, τόσο απλά όσο και σύνθετα, την ικανότητα διαχωρισμού ενός σχήματος σε επιμέρους σχήματα αλλά και την αναδιαμόρφωση ενός σχήματος με βάση τα υποσχήματά του. Οι στόχοι ήταν να μπορούν οι μαθητές:

Να αναγνωρίζουν τα υποσχήματα ενός σχήματος.

Να διασπούν ένα σχήμα σε υποσχήματα.

Να συνθέτουν ένα σχήμα χρησιμοποιώντας επιμέρους σχήματα.

Να ανασυνθέτουν ένα σχήμα μετά τη διάσπασή του (αναδιαμόρφωση).

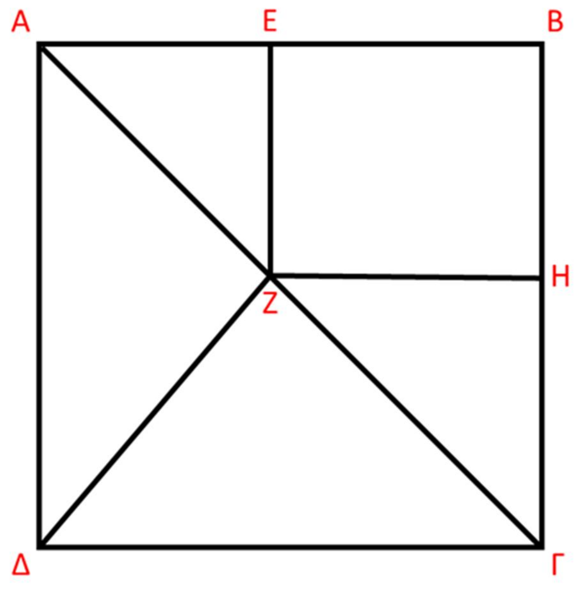
Να υπολογίζουν το εμβαδόν σχημάτων αναλύοντάς τα σε μέρη.

Σύμφωνα λοιπόν με τους παραπάνω στόχους στο τεστ συμπεριλήφθηκαν 5 ασκήσεις.

Άσκηση 1

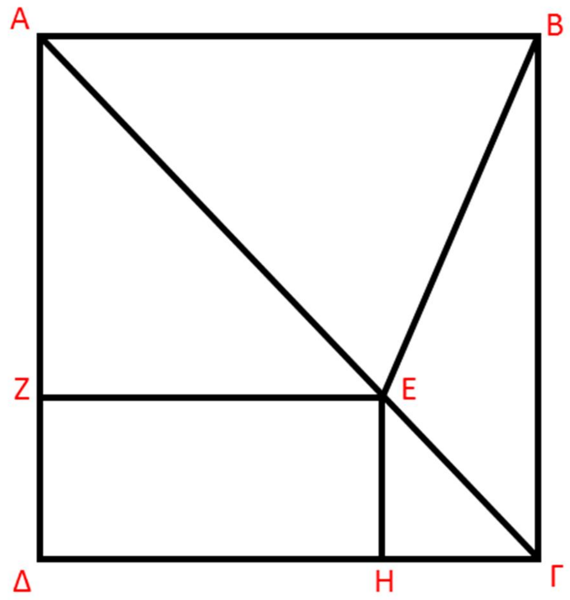
Η άσκηση είχε ως στόχο την αναγνώριση απλών και σύνθετων σχημάτων. Οι μαθητές κλήθηκαν να αναγνωρίσουν μέσα σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ τα απλά και τα σύνθετα σχήματα. Τα σχήματα ήταν συνολικά 20 (5 απλά σχήματα, 5 με συνδυασμό 2 σχημάτων, 5 με συνδυασμό 3 σχημάτων και 5 με συνδυασμό 4 σχημάτων). Η αρχική υπόθεση ήταν ότι οι μαθητές θα μπορούσαν να αναγνωρίσουν τα απλά σχήματα αλλά όχι τα σύνθετα σχήματα ή μόνο δύο εξ αυτών. Συγκεκριμένα θεωρήθηκαν εύκολα προς αναγνώριση τα δύο μεγάλα τρίγωνα στα οποία χωριζόταν το αρχικό τετράγωνο.

Πιο αναλυτικά στο pre test υπήρχαν τα εξής απλά σχήματα: ΑΕΖ, ΕΒΗΖ, ΖΗΓ, ΔΓΖ, ΑΔΖ και τα σύνθετα: ΑΔΓ, ΑΒΗΖ, ΕΒΓΖ, ΗΓΔΖ, ΑΕΖΔ, ΑΒΓ, ΕΒΓΔΖ, ΗΓΔΑΖ, ΑΕΖΓΔ, ΑΒΗΖΔ, ΑΒΓΔΖ, ΕΒΓΔΑΖ, ΑΕΖΗΓΔ, ΑΕΒΗΖΓΔ, ΑΒΓΖΔ.



Εικόνα 1: Το σχήμα που χρησιμοποιήθηκε στην 1η άσκηση του pre test.

Αντίστοιχα στο post test υπήρχαν τα απλά σχήματα: ΑΕΖ, ΖΕΗΔ, ΕΗΓ, ΑΒΕ, ΒΕΓ και τα σύνθετα σχήματα: ΑΒΓ, ΒΓΗΕ, ΖΕΓΔ, ΑΔΗΕ, ΑΒΕΖ, ΑΔΓ, ΑΒΕΗΔ, ΑΒΓΕΖ, ΑΒΓΗΕ, ΒΓΔΖΕ, ΑΒΓΗΕΖ, ΑΒΓΔΖΕ, ΑΕΒΓΔ, ΑΒΕΓΔ, ΑΒΓΕΗΔ.



Εικόνα 2: Το σχήμα που χρησιμοποιήθηκε στην 1η άσκηση του post test.

Η συγκεκριμένη άσκηση κατασκευάστηκε έτσι ώστε οι μαθητές να είναι ικανοί να εντοπίσουν τα φανερά σχήματα αλλά και να τους ωθήσει να συνθέσουν κάποια από τα υποσχήματα του τετραγώνου ΑΒΓΔ ώστε να εντοπίσουν νέα σύνθετα σχήματα.

Η ονομασία του τετραγώνου ΑΒΓΔ δεν θα λαμβάνεται υπόψη σαν απάντηση καθώς υπάρχει στην εκφώνηση με σκοπό να βοηθήσει τον μαθητή στην ονομασία σχημάτων. Ως σωστή θα λαμβάνεται κάθε απάντηση που θα δείχνει με σωστή ή λανθασμένη ονομασία σχημάτων σε ποιο σχήμα αναφέρεται ο μαθητής. Επιπλέον, ο μαθητής δεν θα χρειαστεί να κάνει διαχωρισμό των σχημάτων σε απλά και σύνθετα ή να ονομάσει το είδος του σχήματος (όπως τρίγωνο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) αλλά μόνο να τα καταγράψει.

Άσκηση 2

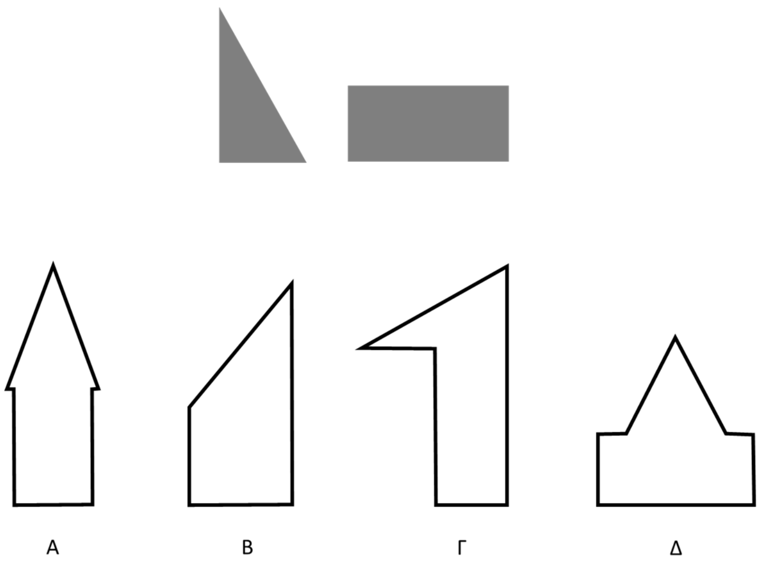
Η δεύτερη άσκηση ζητούσε από τους μαθητές να χωρίσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε 5 υποσχήματα με διαφορετικούς τρόπους και είχε ως στόχο τον διαχωρισμό σχήματος σε υποσχήματα.

Εικόνα 3: Το σχήμα που χρησιμοποιήθηκε στη 2η άσκηση των τεστ.

Με σκοπό να διερευνήσουμε πόσες λύσεις μπορούν να δώσουν οι μαθητές και να ενισχύσουμε τις πολλαπλές απαντήσεις, η άσκηση συνοδεύτηκε από 2 σελίδες με ορθογώνια παραλληλόγραμμα, δηλαδή σύνολο 23 ορθογώνια σχήματα. Η υπόθεση ήταν ότι οι μαθητές θα μπορέσουν να διαχωρίσουν το σχήμα με έναν ή δύο τρόπους και τα ευθύγραμμα τμήματα που θα χαράζουν θα είναι κυρίως τυχαία με σκοπό τη συμπλήρωση πέντε υποσχημάτων.

Άσκηση 3

Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές κλήθηκαν να συνθέσουν δύο σχήματα και να επιλέξουν ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της σύνθεσης ανάμεσα σε τέσσερα διαθέσιμα σχήματα. Ο σκοπός της άσκησης ήταν ο συνδυασμός υποσχημάτων για την παραγωγή σχήματος και ήταν πολλαπλής επιλογής.

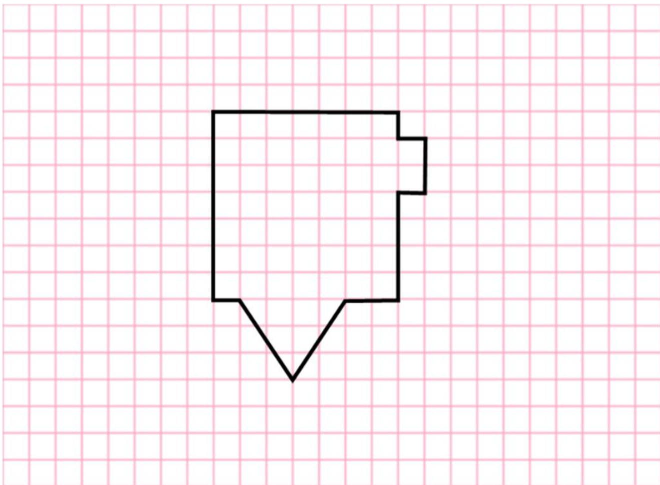


Εικόνα 4: Τα σχήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην 3η άσκηση των τεστ.

Τα σχήματα ήταν ένα ορθογώνιο τρίγωνο και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Οι μαθητές μπορούν να το λύσουν είτε με το μάτι είτε με διαχωρισμό των 4 σχημάτων σε 2 υποσχήματα το καθένα. Το σχήμα Α στο pre test (Β στο post test) αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μικρότερο σε διαστάσεις από το αρχικό και ένα τρίγωνο ισοσκελές. Το σχήμα Β (Δ στο post test) διαχωρίζεται σε ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο διαφορετικής μορφής από το αρχικό. Το σχήμα Γ (Α στο post test) αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο και είναι η σωστή απάντηση. Τέλος, το σχήμα Δ (Γ στο post testτ) αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ίδιο με το αρχικό και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Για την επίλυση της άσκησης αναμένουμε οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν την ικανότητα οπτικοποίησής τους, δηλαδή νοερό συνδυασμό των σχημάτων για τη δημιουργία ενός σύνθετου σχήματος, αλλά και την σχεδίαση ευθύγραμμων τμημάτων στα σύνθετα σχήματα ώστε να διαπιστώσουν σε ποιο ταιριάζουν τα αρχικά σχήματα.

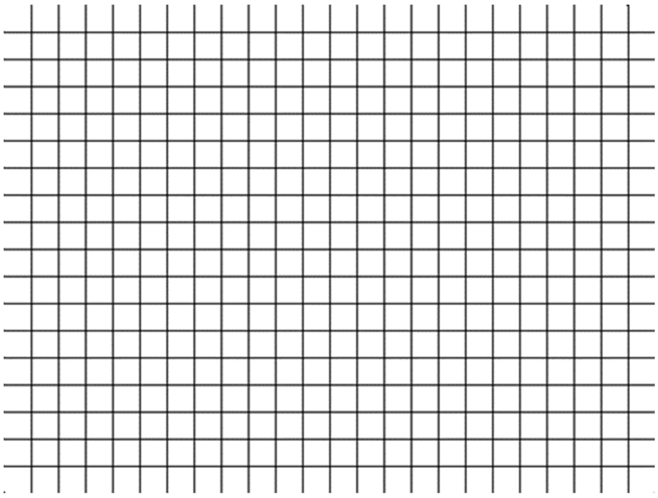
Άσκηση 4

Η τέταρτη άσκηση εξέταζε τον στόχο της αναδιαμόρφωσης ενός σχήματος που αποτελεί το βασικό στοιχείο της μερεολογικής τροποποίησης. Το πρώτο μέρος της άσκησης ζητούσε από τους μαθητές να χωρίσουν ένα σχήμα σε 4 υποσχήματα.



Εικόνα 5: Το σχήμα που χρησιμοποιήθηκε στο πρώτο μέρος της 4ης άσκησης.

Στη συνέχεια οι μαθητές κλήθηκαν να ενώσουν αυτά τα υποσχήματα ώστε να κατασκευάσουν ένα νέο δικό τους σχήμα. Για να δώσουμε την ευκαιρία στους μαθητές να εκφραστούν και να σχεδιάσουν πολλές λύσεις, η άσκηση συνοδεύτηκε από δύο σελίδες με πλέγματα, δηλαδή 13 πλέγματα στο σύνολο. Με αυτόν τον τρόπο θελήσαμε να διερευνήσουμε τις ιδέες, τη δημιουργικότητα, τις ικανότητες αναδιαμόρφωσης του σχήματος αλλά και την ευελιξία των μαθητών.

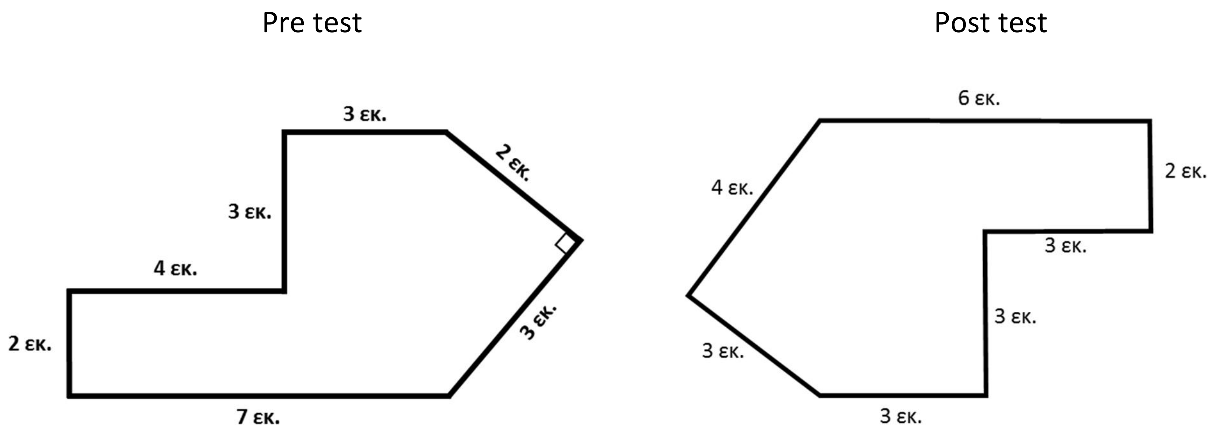


Εικόνα 6: Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε στο δεύτερο μέρος της $4^{ης}$ άσκησης.

Το αρχικό σχήμα που οι μαθητές θα χωρίσουν κατασκευάστηκε έτσι ώστε να τους δώσει κάποια ώθηση και να τους διευκολύνει στον διαχωρισμό ώστε να δώσουν περισσότερη έμφαση στην αναδιαμόρφωσή του. Έτσι λοιπόν στο σχήμα γίνεται εμφανής η ύπαρξη ενός τριγώνου και ενός τετραγώνου ή ορθογωνίου, ανάλογα με τον τρόπο οπτικοποίησης και διαχωρισμού από τους μαθητές. Η υπόθεση ήταν ότι οι μαθητές θα καταφέρουν να χωρίσουν το σχήμα σε υποσχήματα αλλά δεν θα έχουν τόσο μεγάλη επιτυχία στην κατασκευή νέου σχήματος εφόσον και οι ικανότητες αναδιαμόρφωσης αλλά και οι κατασκευαστικές δεξιότητες είτε δεν εξασκούνται σε ικανοποιητικό βαθμό είτε καθόλου. Άρα οι μαθητές είτε δεν θα καταφέρουν να αποδώσουν τα υποσχήματα είτε δεν θα τα συνδυάσουν σωστά ώστε να αποτελέσουν ενιαίο σχήμα.

Άσκηση 5

Τέλος, η πέμπτη άσκηση ήταν ένα πρόβλημα υπολογισμού εμβαδού ενός σύνθετου σχήματος. Εδώ θέλαμε να εξετάσουμε κατά πόσο οι μαθητές θα σκεφτούν ότι για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός σύνθετου σχήματος πρέπει να διαχωρίσουμε το σχήμα σε υποσχήματα, να υπολογίσουμε το εμβαδόν τους και στη συνέχεια να τα προσθέσουμε ώστε να βρούμε το συνολικό εμβαδόν.



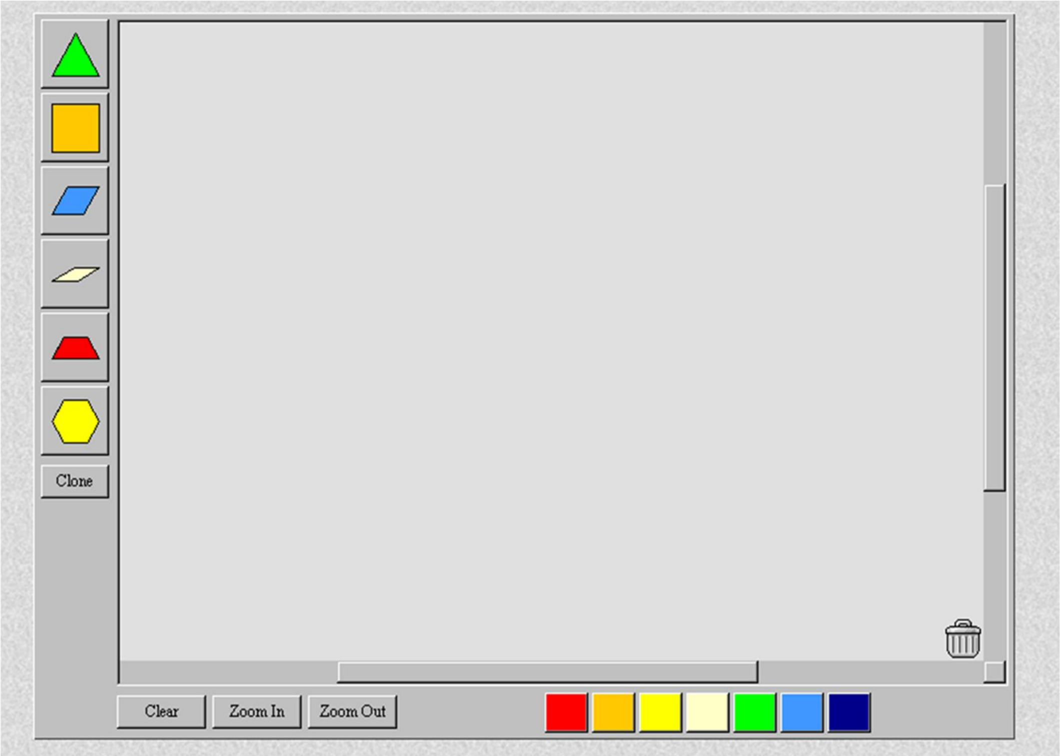
Εικόνα 7: Τα σχήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην 5η άσκηση.

Τα σχήματα των τεστ αποτελούνται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο ή από δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ένα ορθογώνιο τρίγωνο, ανάλογα με τον διαχωρισμό που θα κάνουν οι μαθητές. Η υπόθεση ήταν ότι οι μαθητές θα μπερδέψουν το εμβαδόν με την περίμετρο και θα υπολογίσουν αυτή. Στην ενέργεια αυτή θα τους ωθήσει και η ύπαρξη διαστάσεων σε όλες τις πλευρές.

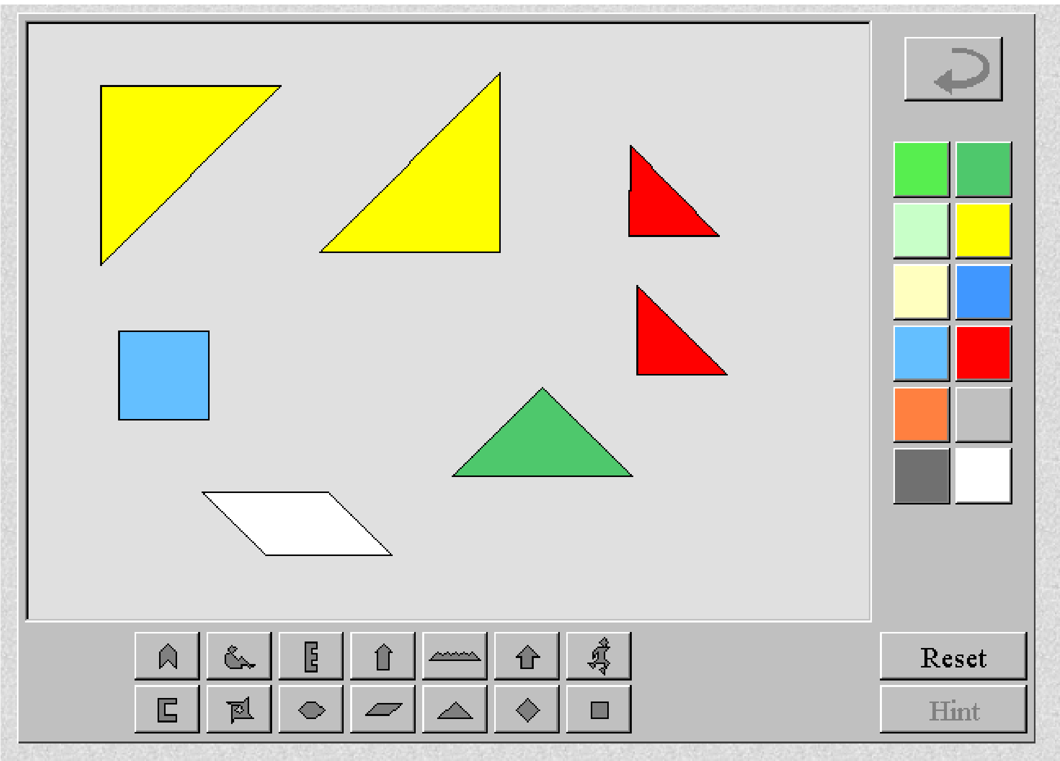
Β) Εικονικά χειραπτικά υλικά

Τα εικονικά χειραπτικά υλικά με βάση τα οποία θα επιχειρηθεί η βελτίωση της λειτουργικής κατανόησης των μαθητών επιλέχθηκαν από την National Library of Virtual Manipulatives. Η βιβλιοθήκη αυτή σχεδιάστηκε το 1999 ως project του Εθνικού Ιδρύματος Επιστημών (National Science Foundation) των ΗΠΑ και περιέχει εικονικά χειραπτικά υλικά κατασκευασμένα από το πανεπιστήμιο της Utah, που λειτουργούν με Java για τη διδασκαλία των μαθηματικών.

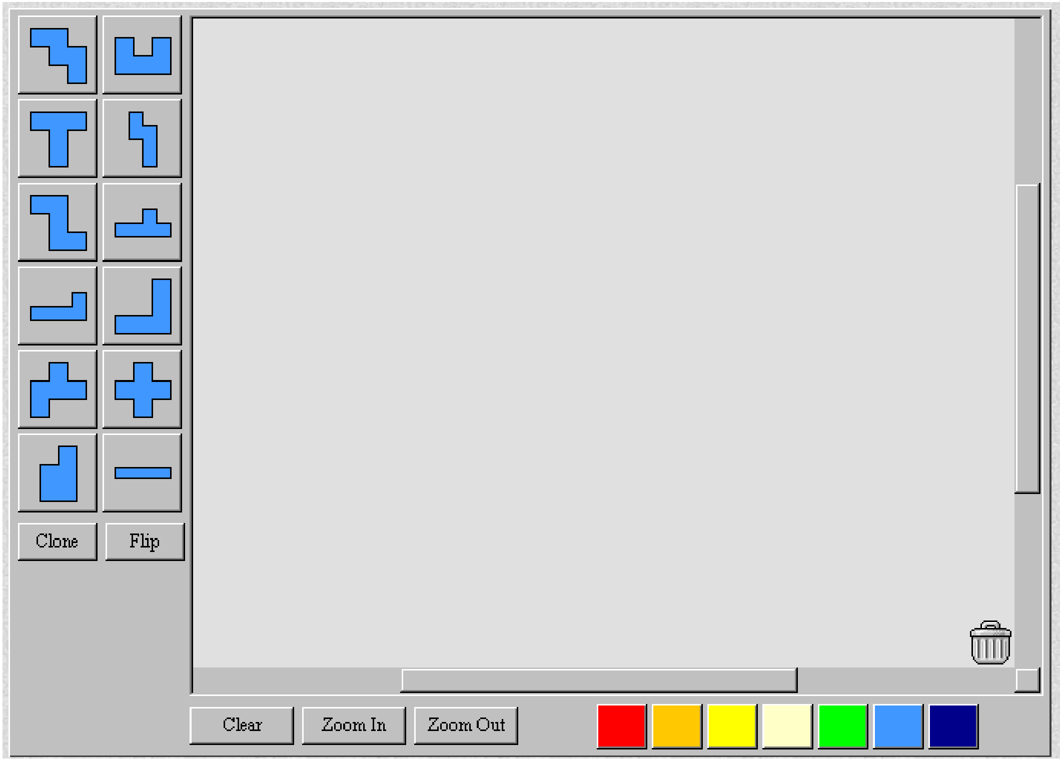
Συγκεκριμένα επιλέχθηκαν τα παρακάτω εικονικά χειραπτικά υλικά: Pattern Blocks, Tangrams και Pentominoes, που αντιστοιχούν στη θεματική ενότητα της Γεωμετρίας και σχετίζονται περισσότερο από τα υπόλοιπα με τις ικανότητες της οπτικοποίησης, του χειρισμού και της αναδιαμόρφωσης σχημάτων, που μας αφορούν.



Εικόνα 8: Το περιβάλλον Pattern Blocks.



Εικόνα 9: Το περιβάλλον Tangrams.



Εικόνα 10: Το περιβάλλον Pentominoes.

Γ) Φύλλα εργασιών

Για τη διδακτική παρέμβαση κατασκευάστηκε ένα φύλλο εργασίας για κάθε εικονικό χειραπτικό υλικό. Οι ασκήσεις που συμπεριλήφθηκαν στα φύλλα εργασίας βασίστηκαν πάνω στις ασκήσεις που προτείνονται στην ιστοσελίδα της National Library of Virtual Manipulatives. Μετά από επιλογή συγκεκριμένων στόχων και ασκήσεων αλλά και τροποποίηση και προσθήκη νέων στοιχείων οριστικοποιήθηκαν οι τελικές ασκήσεις των φύλλων εργασίας (βλ. Παράρτημα), οι οποίες θα αναλυθούν παρακάτω στην ενότητα της διδακτικής παρέμβασης.

Διαδικασία

Πιλοτικές εφαρμογές

Μετά τον σχεδιασμό του τεστ ακολούθησε η προ-πιλοτική εφαρμογή του σε 3 μαθητές Στ΄ δημοτικού. Οι μαθητές έλυσαν το τεστ σε περίπου 20 λεπτά ενώ συνέχισαν για άλλα 10 λεπτά προσπαθώντας να προσθέσουν περισσότερες λύσεις στις δύο ασκήσεις πολλών λύσεων. Αφού ολοκλήρωσαν το τεστ τους δόθηκε προτροπή να διατυπώσουν προφορικά τα σχόλια και τις παρατηρήσεις τους πάνω στα στοιχεία που τους δυσκόλεψαν ή τους φάνηκαν δυσνόητα ώστε να μπορέσουμε να βελτιώσουμε το τεστ. Στην άσκηση 1 οι μαθητές δυσκολεύτηκαν στην ονομασία των σχημάτων με τη χρήση γραμμάτων οπότε αποφασίστηκε η τροποποίηση της εκφώνησης χρησιμοποιώντας την έκφραση «...στο τετράγωνο ΑΒΓΔ…» ώστε στη μελλοντική εφαρμογή του τεστ να μπορούν οι μαθητές να δουν πώς ονομάζεται ένα σχήμα. Στις ασκήσεις 2 και 4 οι μαθητές φάνηκε να μην προσέχουν πολύ τον αριθμό των υποσχημάτων στα οποία έπρεπε να χωρίσουν το κάθε σχήμα, οπότε η άσκηση τροποποιήθηκε επισημαίνοντας σε πόσα σχήματα πρέπει να χωρίσουν. Στην άσκηση 3 υπήρχαν απόψεις για δύο σωστές απαντήσεις ή για συνδυασμό των λευκών σχημάτων με τα γκρι. Άρα αποφασίστηκε να τονιστεί ότι η απάντηση είναι μόνο μία και ότι τα σχήματα θα ενωθούν (αντί του ρήματος «συνδυαστούν»). Τέλος, στην άσκηση 5 οι μαθητές είτε υπολόγισαν την περίμετρο είτε χώρισαν το σχήμα σε υποσχήματα χωρίς να προχωρήσουν σε λύση της άσκησης. Πάνω σ’ αυτό τόνισαν ότι μπέρδεψαν την περίμετρο με το εμβαδόν καθώς και ότι δεν μπορούσαν να θυμηθούν τους τύπους του εμβαδού. Με βάση τις παρατηρήσεις κατά τη διάρκεια της λύσης του τεστ από τους μαθητές αλλά και τα σχόλιά τους το τεστ διορθώθηκε ως προς τις εκφωνήσεις.

Έπειτα, το τεστ εφαρμόστηκε πιλοτικά σε 14 μαθητές Στ’ δημοτικού οι οποίοι δεν είχαν ασχοληθεί ξανά με εργαλεία και υλικά όπως το τάγκραμ. Στους μαθητές δόθηκαν προφορικές οδηγίες πριν τη διανομή των τεστ για τον λόγο διεξαγωγής της έρευνας και για την ανωνυμία των στοιχείων τους. Επιπλέον δόθηκαν διευκρινίσεις ως προς τον χειρισμό των σχημάτων (περιστροφές, μέγεθος) καθώς και ότι οι κατασκευές τους δεν χρειάζεται να είναι πιστά αντίγραφα των σχημάτων και με εντελώς ευθείες γραμμές. Με αυτές τις οδηγίες επιδιώχθηκε να μην σπαταλήσουν οι μαθητές άσκοπα τον χρόνο τους στον σχεδιασμό σχημάτων, καθώς δεν αποτελεί αντικείμενο της παρούσας έρευνας, αλλά στη σκέψη για τον διαχωρισμό, την σύνδεση και την αναδιαμόρφωση των σχημάτων. Οι μαθητές έλυσαν το τεστ σε 30 λεπτά ενώ κάποιοι χρειάστηκαν 40-45 λεπτά, που, όπως διαπιστώθηκε, το έκαναν με σκοπό να μην κάνουν μάθημα. Οι απορίες που είχαν μπορούν να συνοψιστούν στην αδυναμία κατανόησης των σύνθετων σχημάτων αλλά και ονομασίας των σχημάτων γενικότερα και στο φόβο να περιστρέψουν τα σχήματα επειδή πίστευαν ότι είναι λάθος.

Μετά την ανάλυση των αποτελεσμάτων διαπιστώθηκαν ορισμένες αλλαγές που έπρεπε να πραγματοποιηθούν τόσο στο επίπεδο των εκφωνήσεων όσο και στα σχήματα. Στην άσκηση 1 αποφασίστηκε η αντικατάσταση ενός ευθύγραμμου τμήματος για τη διευκόλυνση εντοπισμού και ονομασίας σχημάτων. Στην άσκηση 2 και 4 φάνηκε ότι πρέπει να τονιστεί περισσότερο ο αριθμός των υποσχημάτων που ζητούσαμε να χωρίσουν. Επιπλέον οι μαθητές νόμιζαν ότι αρκεί να δώσουν μία απάντηση εφόσον υπάρχει ένα σχήμα για να χωρίσουν στην άσκηση 2 και για να αναδιαμορφώσουν στην άσκηση 4 και έτσι αγνόησαν τα επιπρόσθετα φυλλάδια που συνόδευαν τις δύο ασκήσεις. Στη μελλοντική εφαρμογή του τεστ θα προστεθούν περισσότερα σχήματα και πλέγματα αντίστοιχα ώστε να καταλάβουν ότι πρόκειται περί άσκησης πολλών απαντήσεων. Στην άσκηση 5 οι περισσότεροι μαθητές υπολόγισαν την περίμετρο ή κάτι αντίστοιχο δείχνοντας ξανά τη σύγχυση που υπάρχει ανάμεσα στις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού. Άρα εδώ προστέθηκε στην εκφώνηση η λέξη «επιφάνεια» που ενδεχομένως θα βοηθούσε τους μαθητές.

Pre test

Στις 3/10 του 2016 εφαρμόστηκε το pre test σε 32 μαθητές της Στ΄ δημοτικού. Οι μαθητές έλυσαν το τεστ κατά την 3^{η} διδακτική ώρα σε περίπου 30 λεπτά. Αρχικά δόθηκαν προφορικές οδηγίες για τον σκοπό και το λόγο της έρευνας, για την ανωνυμία τους, για τον χειρισμό των σχημάτων με όποιον τρόπο θέλουν, για την ιδιαίτερη σημασία του τρόπου που σκέφτονται, για τη μικρή σημασία που θα δώσουμε στη σωστή κατασκευή, για τις διάφορες λύσεις που μπορούν να δώσουν στις ασκήσεις 2 και 4, και για τη συμπλήρωση του τεστ ατομικά καθώς οι απαντήσεις που είναι σωστές είναι πάρα πολλές.

Διδακτική παρέμβαση

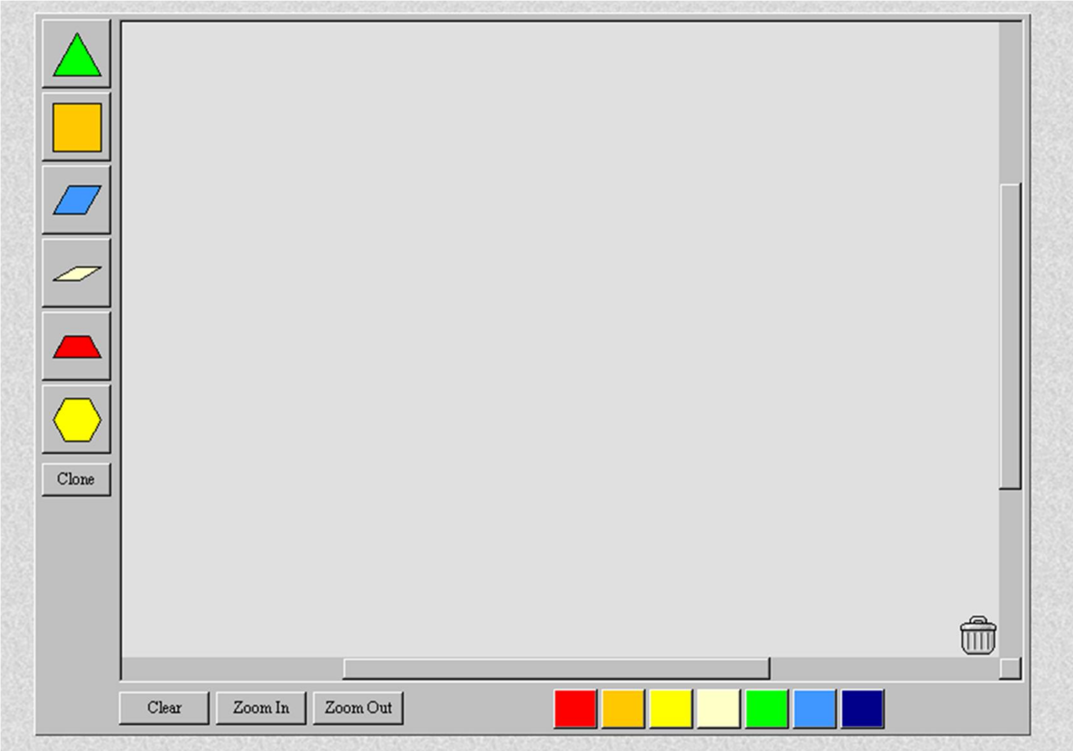
Η παρέμβαση που είχε σχεδιαστεί για τη βελτίωση της ικανότητας της μερεολογικής τροποποίησης των μαθητών βασίστηκε στα εικονικά χειραπτικά υλικά της Εθνικής Βιβλιοθήκης Χειραπτικών Υλικών NLVM (National Library of Virtual Manipulatives).

Η παρέμβαση είχε σχεδιαστεί να εφαρμοστεί σε 4 διδακτικές ώρες. Ωστόσο λόγω τεχνικών προβλημάτων με την αναγνώριση των χειραπτικών υλικών από τους υπολογιστές του σχολείου, ματαιώθηκε η μία διδακτική ώρα.

Η παρέμβαση διήρκεσε τελικά 3 διδακτικές ώρες και διεξήχθη στην αίθουσα πληροφορικής του σχολείου με τη χρήση υπολογιστών και φύλλων εργασίας. Οι μαθητές εργάστηκαν ανά δύο σε κάθε υπολογιστή και έγινε προσπάθεια να εκτελούνται οι ασκήσεις ταυτόχρονα ώστε οι μαθητές να έχουν τη δυνατότητα ανατροφοδότησης τόσο από την ερευνήτρια όσο και από τους υπόλοιπους συμμαθητές τους. Επιπλέον, προωθήθηκε ο διάλογος και η αλληλοβοήθεια μεταξύ των μαθητών, η διόρθωση λανθασμένων απόψεων, οι εναλλακτικές απόψεις καθώς και η εξαγωγή και κατανόηση συμπερασμάτων από όλους. Επιπλέον, δόθηκε ένα φυλλάδιο με οδηγίες εισόδου στην ιστοσελίδα της NLVM για όσους μαθητές θελήσουν να ασχοληθούν με τα συγκεκριμένα ή άλλα εικονικά χειραπτικά υλικά στον ελεύθερο τους χρόνο (βλ. Παράρτημα).

1η διδακτική ώρα

Το πρώτο εικονικό χειραπτικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε για την παρέμβαση ήταν το Pattern Blocks συνοδευμένο από ένα φύλλο εργασίας με ασκήσεις (βλ. Παράρτημα).



Εικόνα 11: Το περιβάλλον Pattern Blocks.

Αρχικά έγινε μία συζήτηση με τους μαθητές για τη χρήση του συγκεκριμένου υλικού, για τα σχήματα που περιέχει και για τις λειτουργίες που επιτελεί. Οι μαθητές ονόμασαν τα σχήματα που βρίσκονται στη δεξιά πλευρά ώστε να διαπιστώσουμε εάν όλοι μπορούν να τα αναγνωρίσουν. Έπειτα εξηγήθηκε η τοποθέτηση των σχημάτων στον καμβά, το σύρσιμο των σχημάτων για να μετακινηθούν, η ένωση σχημάτων μέσω επιλογής καθώς και η σημαντική λειτουργία της περιστροφής των σχημάτων με επιλογή μιας από τις γωνίες του σχήματος. Αφού διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές εξοικειώθηκαν με τις λειτουργίες του εργαλείου προχωρήσαμε στις ασκήσεις.

Ο στόχος της πρώτης άσκησης ήταν η κατασκευή ενός σύνθετου σχήματος με τη χρήση πέντε σχημάτων.

1. Διάλεξε πέντε σχήματα για να φτιάξεις ένα δικό σου σύνθετο σχήμα. Ποια σχήματα χρησιμοποίησες; Πώς τα συνέδεσες;

……

……

Εικόνα 12: Η $1^{η}$ άσκηση του $1^{ου}$ φύλλου εργασίας.

Εδώ οι μαθητές μπορούσαν να διαλέξουν όποια πέντε σχήματα ήθελαν, ακόμα και επαναλαμβανόμενα, ώστε να κατασκευάσουν ένα σύνθετο σχήμα. Στη συνέχεια έπρεπε να ονομάσουν τα σχήματα που χρησιμοποίησαν καθώς και να εξηγήσουν με ποιο τρόπο ένωσαν τα σχήματα. Οι περισσότεροι μαθητές είχαν ήδη συμπληρώσει ότι ένωσαν τα σχήματα τοποθετώντας το ένα δίπλα και κολλητά με το άλλο. Επειδή θέλαμε να κατανοήσουν οι μαθητές ότι η σύνδεση των σχημάτων δεν γίνεται με την κορυφή ενός σχήματος τονίσαμε ότι χρησιμοποιούμε την πλευρά των σχημάτων για να τα συνδέσουμε, ολόκληρη ή μέρος αυτής. Αφού ολοκλήρωσαν αυτό το ζητούμενο οι μαθητές κατασκεύασαν σχήματα με περισσότερα επιμέρους σχήματα θέλοντας, οι περισσότεροι, να καλύψουν όλη την οθόνη με σχήματα.

Έπειτα προχωρήσαμε στη δεύτερη άσκηση που είχε ως στόχο την κάλυψη μεγαλύτερων σχημάτων με μικρότερα ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές τη σχέση μέρους-όλου, που είναι κεντρικής σημασίας στις μερεολογικές τροποποιήσεις.

2. Γέμισε τα παρακάτω σχήματα χρησιμοποιώντας άλλα σχήματα.

πλάγιο παραλληλόγραμμο: ……………………………………………………………………

τραπέζιο: ……………………………………………………………………………………………

εξάγωνο: ……………………………………………………………………………………………

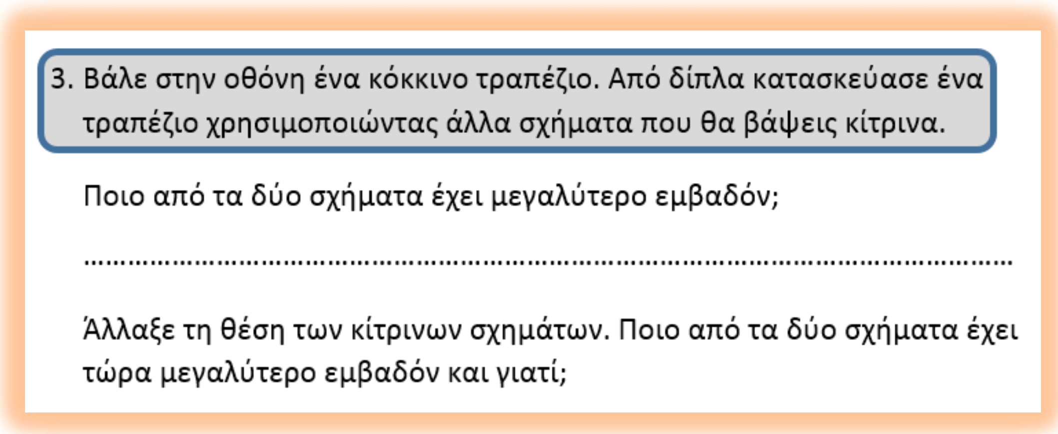
Μπορείς να σκεφτείς και άλλους συνδυασμούς σχημάτων για να φτιάξεις το εξάγωνο;

………

Εικόνα 13: Η 2η άσκηση του 1ου φύλλου εργασίας.

Αρχικά, κάποιοι μαθητές φάνηκε να δυσκολεύονται στην εκτέλεση του πρώτου ζητήματος καθώς δεν γνώριζαν ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν το ίδιο σχήμα παραπάνω από μία φορά και πίστευαν ότι δεν έπρεπε να τα περιστρέψουν. Αφού έλαβαν βοήθεια από συμμαθητές τους που είχαν ήδη ολοκληρώσει την άσκηση, την έλυσαν και οι ίδιοι χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα. Επιπλέον, έδειξαν ιδιαίτερο ενθουσιασμό με τους συνδυασμούς των σχημάτων που έκαναν καθώς ανακάλυπταν ότι διαφορετικές συνδέσεις μπορούν να μας δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Η τελευταία άσκηση ζητούσε από τους μαθητές να συγκρίνουν δύο σχήματα ως προς το εμβαδόν. Στόχος ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές ότι δύο σχήματα μπορούν να έχουν το ίδιο εμβαδόν ακόμα και αν κατασκευάζονται από διαφορετικά σχήματα και έχουν διαφορετικό προσανατολισμό.



3. Βάλε στην οθόνη ένα κόκκινο τραπέζιο. Από δίπλα κατασκεύασε ένα τραπέζιο χρησιμοποιώντας άλλα σχήματα που θα βάψεις κίτρινα.

Ποιο από τα δύο σχήματα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν;

……………………………………………………………………………………………………

Άλλαξε τη θέση των κίτρινων σχημάτων. Ποιο από τα δύο σχήματα έχει τώρα μεγαλύτερο εμβαδόν και γιατί;

Εικόνα 14: Η 3^{η} άσκηση του 1^{ου} φύλλου εργασίας.

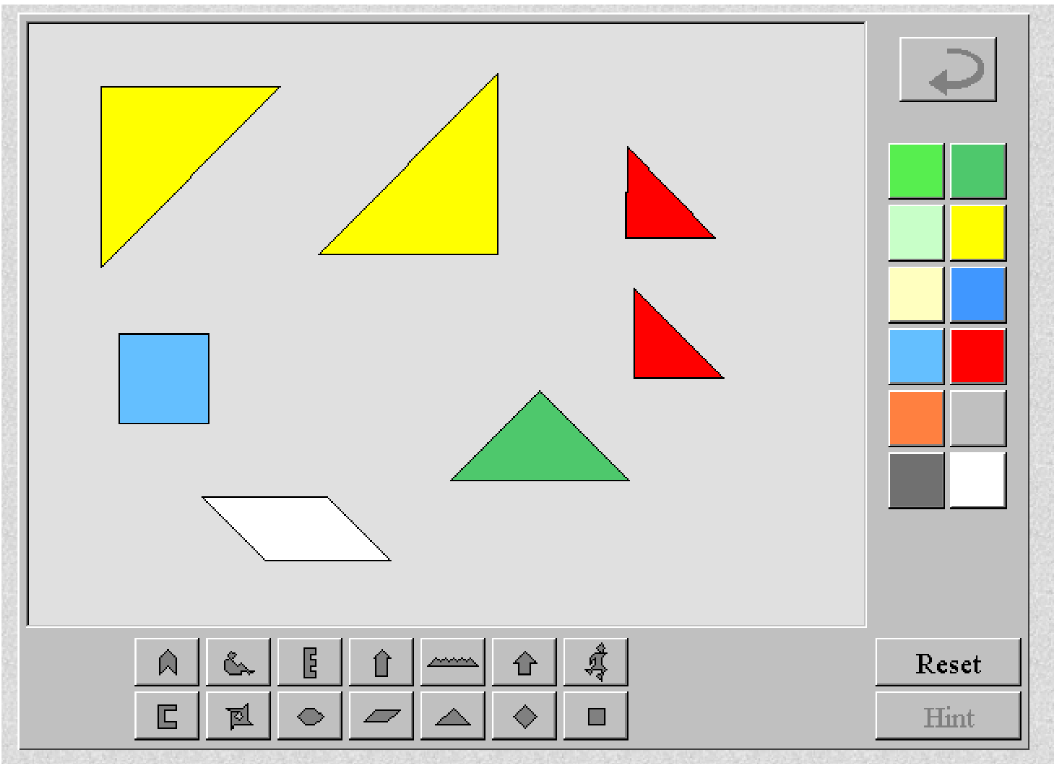
Οι περισσότεροι μαθητές ισχυρίστηκαν ότι τα σχήματα δεν έχουν το ίδιο εμβαδόν καθώς το ένα από τα δύο φαινόταν να είναι μεγαλύτερο. Τότε χρησιμοποιήσαμε τη λειτουργία του συρσίματος ώστε να τοποθετήσουμε το ένα σχήμα πάνω στο άλλο και να δούμε εάν έχουν διαφορές. Έτσι όλοι οι μαθητές κατάλαβαν ότι τα δύο σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν και μετά από συζήτηση καταλήξαμε στο επιθυμητό συμπέρασμα ότι τα σχήματα που κατασκευάζονται από τα ίδια επιμέρους σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν. Έπειτα αλλάξαμε τον προσανατολισμό των υποσχημάτων του δεύτερου σχήματος και διαπιστώσαμε πάλι ότι το εμβαδόν του δεν είχε αλλάξει.

Στο τέλος, εφόσον είχαμε λίγο χρόνο διαθέσιμο διερευνήσαμε την ίδια άσκηση με το παράδειγμα του εξάγωνου καθώς αυτό περιέχει περισσότερα επιμέρους σχήματα και η αλλαγή της τοποθέτησης των επιμέρους σχημάτων αλλοιώνει την αρχική μορφή του εξάγωνου. Εδώ οι μαθητές ανταποκρίθηκαν πολύ θετικά αφού πλέον είχαν και επιχειρήματα για να υποστηρίξουν την άποψή τους.

2^{η} διδακτική ώρα

Κατά τη δεύτερη διδακτική ώρα οι μαθητές ασχολήθηκαν με το εικονικό χειραπτικό υλικό Tangrams και το αντίστοιχο φύλλο εργασίας που το συνόδευε (βλ. Παράρτημα).

Οι μαθητές ασχολούνται με τα τάγκραμ από την Α΄ κιόλας δημοτικού οπότε είναι εξοικειωμένοι με τη μορφή τους και τη χρήση τους.



Εικόνα 15: Το περιβάλλον Tangrams.

Ωστόσο, έγινε μια εισαγωγή ώστε να διαπιστωθεί ότι όλοι τα γνωρίζουν και για να υπενθυμίσουμε τη λειτουργία τους. Αρχικά λοιπόν ζητήθηκε από τους μαθητές να ονομάσουν τα κομμάτια τάγκραμ και να τα μετακινήσουν μέσα στον καμβά. Εφόσον κατά την προηγούμενη διδακτική ώρα είχαν εξοικειωθεί με τις λειτουργίες των εικονικών χειραπτικών υλικών δεν χρειάστηκε να τονιστεί κάποιο άλλο χαρακτηριστικό, όπως το σύρσιμο, η περιστροφή ή η ένωση σχημάτων.

Η πρώτη άσκηση ήταν αντίστοιχη της δεύτερης άσκησης του προηγούμενου φύλλου εργασίας και ζητούσε την κάλυψη μεγαλύτερων τάγκραμ από μικρότερα τάγκραμ με σκοπό την κατανόηση μέρους-όλου του σχήματος. Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν θετικά και χωρίς προβλήματα και διερεύνησαν τις σχέσεις μέρος-όλου των σχημάτων τάγκραμ και τις σχέσεις μεταξύ των σχημάτων τάγκραμ.

1. Προσπάθησε να καλύψεις κάθε σχήμα με τα υπόλοιπα:

   μπλε τετράγωνο: ……………………………………………………………………………

   πράσινο τρίγωνο: ……………………………………………………………………………

   άσπρο πλάγιο παραλληλόγραμμο: ………………………………………………………

   κίτρινο τρίγωνο: ……………………………………………………………………………

Εικόνα 16: Η 1^{η} άσκηση του 2^{ου} φύλλου εργασίας.

Η δεύτερη άσκηση ζητούσε από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα τάγκραμ χρησιμοποιώντας όλα τα κομμάτια και στη συνέχεια να υπολογίσουν πόσα κόκκινα τετράγωνα θα μπορούσαν να χωρέσουν μέσα στο τάγκραμ. Και σε αυτήν την άσκηση στόχος είναι η διερεύνηση της σχέσης μέρους-όλου του σχήματος. Όλοι μπόρεσαν με ευκολία να κατασκευάσουν το τάγκραμ και λίγοι μαθητές κατάφεραν να υπολογίσουν πόσα τετράγωνα θα μπορούσαν να καλύψουν το τάγκραμ. Άλλοι μαθητές υπολόγισαν τα τετράγωνα με βάση την προηγούμενη άσκηση στην οποία φαινόταν ο αριθμός των τετραγώνων που χωράνε σε κάθε κομμάτι τάγκραμ.

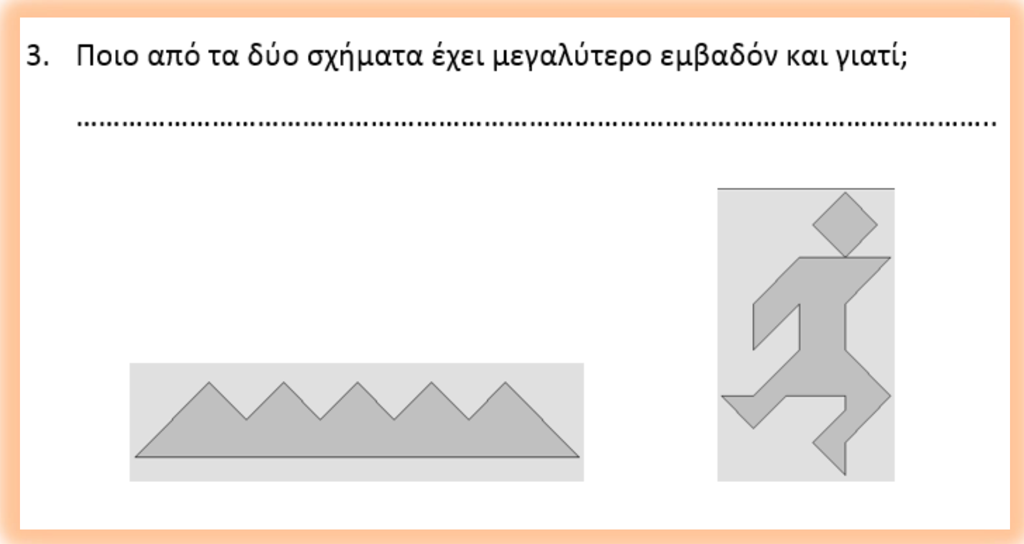
2. Κατασκεύασε ένα τάγκραμ χρησιμοποιώντας όλα τα κομμάτια.

   Πόσα κόκκινα τρίγωνα μπορούν να χωρέσουν μέσα στο τάγκραμ που κατασκεύασες;

   ………………………………………………………………………………………………

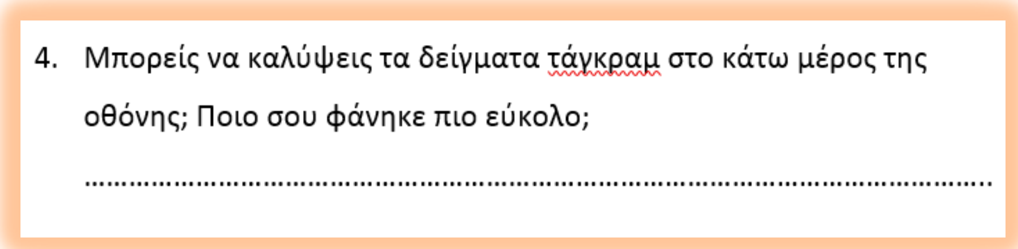
Εικόνα 17: Η 2^{η} άσκηση του 2^{ου} φύλλου εργασίας.

Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές κλήθηκαν να συγκρίνουν το εμβαδόν δύο τάγκραμ από τα προτεινόμενα του λογισμικού και να αιτιολογήσουν. Στόχος της άσκησης ήταν η σύγκριση ισοεμβαδικών σχημάτων. Οι περισσότεροι ισχυρίστηκαν ότι το αριστερό τάγκραμ είναι μεγαλύτερο επειδή έτσι φαινόταν, ενώ 2-3 μαθητές θυμήθηκαν (χαμηλόφωνα ώστε να αφήσουν τους υπόλοιπους να σκεφτούν) την προηγούμενη διδακτική ώρα με το Pattern Blocks όπου τα σχήματα που έχουν τα ίδια επιμέρους σχήματα έχουν και ίδιο εμβαδόν.



Εικόνα 18: Η 3η άσκηση του 2ου φύλλου εργασίας.

Ζητήθηκε έπειτα από τους μαθητές να καλύψουν τα κενά τάγκραμ με τα κομμάτια τάγκραμ και αφού χρειάστηκαν κάποια λεπτά για να τα ολοκληρώσουν, τότε τόνισαν πώς το εμβαδόν των δύο τάγκραμ είναι το ίδιο. Στη συνέχεια ρωτήθηκαν και για άλλα τάγκραμ και διαπίστωσαν ότι όλα τα πρότυπα τάγκραμ του συγκεκριμένου υλικού αλλά και όλα τα τάγκραμ έχουν το ίδιο εμβαδόν εφόσον αποτελούνται από τα ίδια σχήματα.

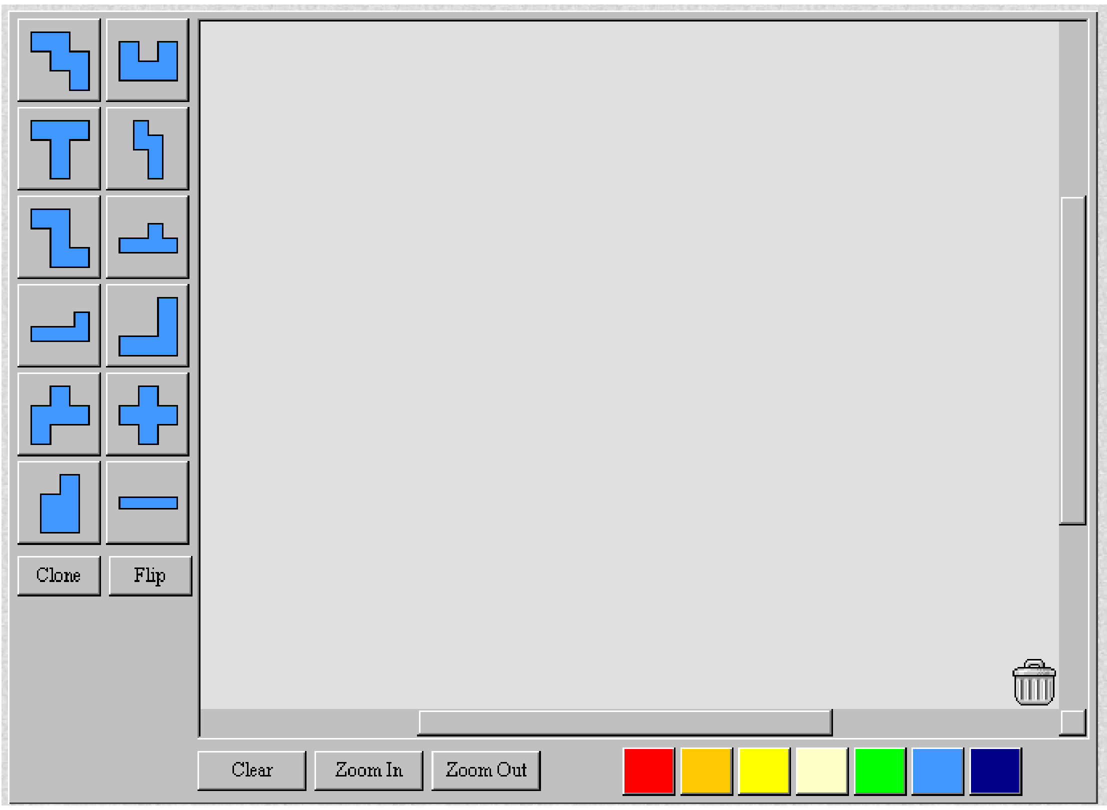


Εικόνα 19: Η 4η άσκηση του 2ου φύλλου εργασίας.

Στον υπόλοιπο χρόνο οι μαθητές ασχολήθηκαν με την κάλυψη των κενών τάγκραμ ώστε να εξασκήσουν τις ικανότητές τους στις τροποποιήσεις και στον χειρισμό των σημάτων καθώς και την οπτικοχωρική τους ικανότητα.

3η διδακτική ώρα

Την τρίτη διδακτική ώρα χρησιμοποιήθηκε το εικονικό χειραπτικό υλικό Pentominoes και το φύλλο εργασίας που είχε κατασκευαστεί γι’ αυτό (βλ. Παράρτημα). Το εργαλείο αυτό διαθέτει τα ίδια χαρακτηριστικά με τα άλλα δύο που χρησιμοποιήθηκαν στις προηγούμενες διδακτικές ώρες οπότε οι μαθητές φάνηκαν εξοικειωμένοι με τα χαρακτηριστικά του.



Εικόνα 20: Το περιβάλλον Pentominoes.

Αρχικά συζητήθηκε η μορφή των σχημάτων καθώς τα περισσότερα από αυτά δεν είναι συνηθισμένα και κλήθηκαν οι μαθητές να παρομοιάσουν κάθε σχήμα με κάποιο γράμμα ή άλλο αντικείμενο που του μοιάζει (π.χ. T, Z, I, σκάλα, σταυρός). Κάποιοι μαθητές συνέδεσαν τα πεντόμινο με το τέτρις καθώς τα σχήματα ήταν παρόμοια.

1. Μπορείς να σκεφτείς γιατί τα σχήματα αυτά ονομάζονται πεντόμινο;

   ……………………………………………………………………………………………………

Εικόνα 21: Η 1^{η} άσκηση του 3^{ου} φύλλου εργασίας.

Έτσι περάσαμε στην πρώτη άσκηση που αναφέρεται στην ονομασία των πεντόμινο με στόχο τη διερεύνηση της έννοιας των πεντόμινο. Οι μαθητές συνέδεσαν τα σχήματα με τον αριθμό 5 αλλά δεν μπορούσαν να βρουν τι συνδέει τον αριθμό 5 με τα πεντόμινο. Κάποιοι έλεγαν ότι έχουν πέντε γωνίες ή πέντε πλευρές και μετά από αρκετή σκέψη κάποιος μίλησε για πέντε σχήματα. Έτσι λοιπόν τους προτρέψαμε να βρουν ποια 5 σχήματα θα μπορούσαν να συνδέσουν για να φτιάξουν ένα συγκεκριμένο εύκολο οπτικά πεντόμινο. Μετά από επεξεργασία ορισμένοι μαθητές κατάλαβαν ότι αναφερόμαστε σε πέντε κουτάκια, δηλαδή πέντε τετραγωνάκια και στη συνέχεια το κατανόησαν όλοι οι μαθητές.

Η δεύτερη άσκηση ζητούσε από τους μαθητές να καλύψουν την οθόνη τους με τα πεντόμινο και είχε ως στόχο τον χειρισμό και την εξοικείωση με την τοποθέτηση τέτοιου είδους σχημάτων στον χώρο.

2. Χρησιμοποίησε τα πεντόμινο για να καλύψεις την οθόνη σου.

Εικόνα 22: Η 2^{η} άσκηση του 3^{ου} φύλλου εργασίας.

Στην τρίτη άσκηση οι μαθητές κλήθηκαν να υπολογίσουν το εμβαδόν και την περίμετρο του κάθε πεντόμινο.

3. Υπολόγισε το εμβαδόν και την περίμετρο του κάθε πεντόμινο.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Συμπέρασμα: ………………………………………………………………………………

Εικόνα 23: Η $3^{η}$ άσκηση του $3^{ου}$ φύλλου εργασίας.

Μ’ αυτόν τον τρόπο θέλαμε να εξάγουν το συμπέρασμα ότι το εμβαδόν όλων των πεντόμινο είναι το ίδιο αλλά και να το διαχωρίσουν από την περίμετρο. Μετά τον υπολογισμό του εμβαδού και της περιμέτρου των μισών περίπου πεντόμινο οι μαθητές έφτασαν όντως σε αυτό το συμπέρασμα.

Στην τέταρτη άσκηση οι μαθητές έπρεπε να κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χρησιμοποιώντας τρία διαφορετικά πεντόμινο. Εδώ θέλαμε να εξασκήσουμε τη σύνθεση των σχημάτων για την παραγωγή ενός νέου σχήματος.

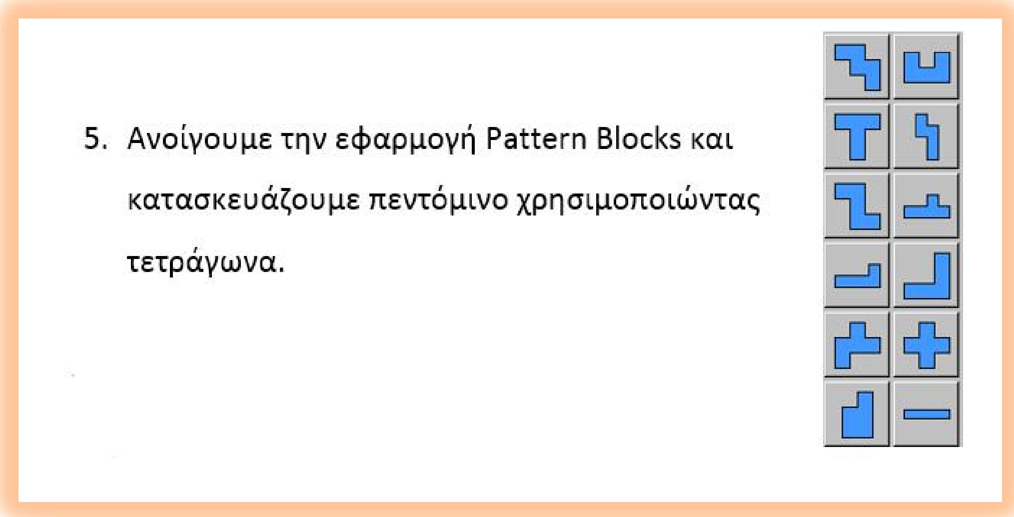
4. Κατασκεύασε ένα ορθογώνιο χρησιμοποιώντας 3 διαφορετικά πεντόμινο. Ποια χρησιμοποίησες;

……………………………………………………………………………………………………

Εικόνα 24: Η $4^{η}$ άσκηση του $3^{ου}$ φύλλου εργασίας.

Οι περισσότεροι κατάφεραν να κατασκευάσουν το ζητούμενο σχήμα αλλά όχι με τη χρήση εντελώς διαφορετικών πεντόμινο. Έπειτα οι μαθητές μοιράζονταν μεταξύ τους τις διαφορετικές απόψεις για τα σχήματα που χρησιμοποίησαν και έτσι όλοι κατάφεραν να κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Στην τελευταία άσκηση οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν τα πεντόμινο χρησιμοποιώντας το εικονικό χειραπτικό υλικό Pattern Blocks της πρώτης διδακτικής ώρας και συγκεκριμένα το τετράγωνο. Σκοπός ήταν η σύνθεση πεντόμινο με τη χρήση μικρότερων μονάδων.



Εικόνα 25: Η $5^{η}$ άσκηση του $3^{ου}$ φύλλου εργασίας.

Οι μαθητές κατασκεύαζαν με ευκολία τα πεντόμινο χρησιμοποιώντας τα τετράγωνα, ενώ στο τέλος τους προτρέψαμε αντί να κατασκευάζουν από την αρχή κάποιο πεντόμινο να αλλάζουν θέση σε ένα ή περισσότερα τετράγωνα ώστε να κατασκευάζουν άμεσα άλλο πεντόμινο.

Post test

Το post test δόθηκε στους μαθητές στις 14/10 του 2016 κατά την $1^{η}$ διδακτική ώρα. Οι μαθητές συγκεντρώθηκαν στη μία από τις δύο τάξεις για να λύσουν το τεστ. Αυτό δημιούργησε λίγα προβλήματα συντονισμού, χώρου και φασαρίας τα οποία μειώθηκαν αφού ξεκίνησε η διανομή των τεστ. Δόθηκαν οι ίδιες προφορικές οδηγίες στους μαθητές και ενημερώθηκαν πως το συγκεκριμένο τεστ είναι παρόμοιο αλλά όχι ακριβώς ίδιο με το προηγούμενο. Οι μαθητές ολοκλήρωσαν το τεστ σε 30 λεπτά. Κάποιοι μαθητές πίστεψαν ότι το τεστ είναι συμπληρωματικό του προηγούμενου και σε κάποιες ασκήσεις, όπως για παράδειγμα στις ασκήσεις 2 και 4 δεν έδωσαν όλες τις απαντήσεις εφόσον είχαν απαντήσει στο προηγούμενο. Επιπλέον, οι 9 σελίδες του τεστ φάνηκαν να τους προκαλούν κούραση αλλά και να τους αποθαρρύνουν να ασχοληθούν με την συμπλήρωση όλων των διαθέσιμων σχημάτων και πλεγμάτων. Τέλος, ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς των δύο τμημάτων να κατατάξουν τους μαθητές σε τρεις ομάδες επίδοσης σύμφωνα με την επίδοσή τους στα μαθηματικά, όπως την έχουν αξιολογήσει οι ίδιοι κατά τη φετινή και την προηγούμενη σχολική χρονιά.

Κωδικοποίηση – Βαθμολόγηση των δεδομένων

Οι απαντήσεις των μαθητών κωδικοποιήθηκαν στο σύστημα SPSS με αριθμητικά δεδομένα. Υπολογίστηκε η αξιοπιστία των δύο ερωτηματολογίων με πέντε items στο καθένα και βρέθηκε ότι είναι μέτρια. Συγκεκριμένα, στο pre test το Cronbach's Alpha ήταν 0.572 και στο post test 0.711, τιμές οι οποίες είναι αποδεκτές δεδομένου του μικρού αριθμού των ερωτήσεων και του δείγματος.

Στην 1η άσκηση οι μαθητές έλαβαν μία μονάδα για κάθε σωστό απλό σχήμα που αναγνώριζαν και μία μονάδα για κάθε σωστό σύνθετο σχήμα. Όπου δεν υπήρχε αναγνώριση του σχήματος ή υπήρχε λανθασμένη ονομασία δεν υπολογίστηκε. Ως σωστή αναγνώριση θεωρήθηκε η σωστή ονομασία του σχήματος με τη χρήση των γραμμάτων αλλά και η ονομασία που έδειχνε πώς έχουν καταλάβει ποιο σχήμα είναι (όπως κόμματα ανάμεσα στα σχήματα ή ονομασία όλων των σημείων απ' τα οποία διέρχονται τα ευθύγραμμα τμήματα του σχήματος).

Στη 2η άσκηση κάθε σωστός διαχωρισμός του σχήματος σε υποσχήματα βαθμολογήθηκε με 1, ενώ οι λανθασμένοι διαχωρισμοί με 0. Ως σωστός διαχωρισμός υπολογίστηκε κάθε διαχωρισμός που αποτελούταν από 5 διακριτά υποσχήματα χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι επαναλήψεις των ίδιων υποσχημάτων στην ίδια θέση.

Στην 3η άσκηση βαθμολογήθηκαν με 1 οι σωστές απαντήσεις των μαθητών ενώ με 0 οι λανθασμένες απαντήσεις.

Στο πρώτο μέρος της 4ης άσκησης οι μαθητές έλαβαν 1 μονάδα για τον σωστό διαχωρισμό σε 4 υποσχήματα και καμία μονάδα για λανθασμένο διαχωρισμό, που περιείχε περισσότερα ή λιγότερα υποσχήματα. Στο δεύτερο μέρος της 4ης άσκησης βαθμολογήθηκε με 1 μονάδα η κάθε σωστή αναδιαμόρφωση που κατασκεύαζαν οι μαθητές. Ως λανθασμένες απαντήσεις, που βαθμολογήθηκαν με 0, θεωρήθηκαν αυτές στις οποίες οι μαθητές δεν χρησιμοποίησαν όλα τα σχήματα που διαχώρισαν στο πρώτο μέρος ή δεν κατασκεύασαν ένα ενιαίο σχήμα (σύνδεση πλευρών με γωνίες ή κενά μεταξύ των σχημάτων). Ωστόσο, απαντήσεις που περιείχαν ένα σχήμα μέσα σε ένα άλλο θεωρήθηκαν σωστές καθώς αφορούν στην ενσωμάτωση (embedding) των σχημάτων.

Στην 5η άσκηση οι απαντήσεις των μαθητών ταξινομήθηκαν σε 5 κατηγορίες: 1) περίμετρος, όπου οι μαθητές υπολόγισαν την περίμετρο του σχήματος, 2) διαχωρισμός (όχι αποτελεσματικός), όπου οι μαθητές διαχώρισαν το σχήμα σε υποσχήματα, όχι με τρόπο που θα μπορούσε να τους βοηθήσει να υπολογίσουν το εμβαδόν αλλά δείχνοντας ότι το άκουσαν ή το αντέγραψαν από τους υπόλοιπους συμμαθητές τους, 3) διαχωρισμός, όπου οι μαθητές διαχώρισαν το σχήμα σε υποσχήματα αλλά δεν προχώρησαν σε κάποια άλλη ενέργεια, 4) διαχωρισμός και μερική επίλυση, όπου διαχωρίστηκε το σχήμα σε υποσχήματα και υπολογίστηκε το εμβαδόν κάποιων από τα υποσχήματα (εδώ οι μαθητές φάνηκε να μη θυμούνται όλους τους τύπους του εμβαδού είτε να κάνουν κάποια λάθη στον υπολογισμό των διαστάσεων), και 5) σωστή επίλυση της άσκησης, που περιλάμβανε τον διαχωρισμό του σχήματος σε υποσχήματα, τον υπολογισμό του εμβαδού κάθε υποσχήματος και την πρόσθεση των εμβαδών των υποσχημάτων για την εύρεση του συνολικού εμβαδού. Σ’ αυτήν την κατηγορία εντάχθηκαν και οι μαθητές που δεν εκτέλεσαν την τελική πρόσθεση των εμβαδών των σχημάτων για να υπολογίσουν το εμβαδόν του συνολικού σχήματος. Οι παραπάνω κατηγορίες έλαβαν και τον αντίστοιχο βαθμό, από 1 έως 5, με τη σειρά που παρουσιάστηκαν ενώ οι μαθητές που δεν απάντησαν στην άσκηση βαθμολογήθηκαν με 0.

Αποτελέσματα

I. Επίδοση στις ασκήσεις, στρατηγικές και λάθη των μαθητών

Άσκηση 1

Α) Αναγνώριση απλών σχημάτων

	Πριν την παρέμβαση		Μετά την παρέμβαση	
Απλά σχήματα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
0	2	6,3%	2	6,3%
3	1	3,1%	2	6,3%
4	4	12,5%	7	21,9%
5	25	78,1%	21	65,6%
Σύνολο	**32**	**100%**	**32**	**100%**

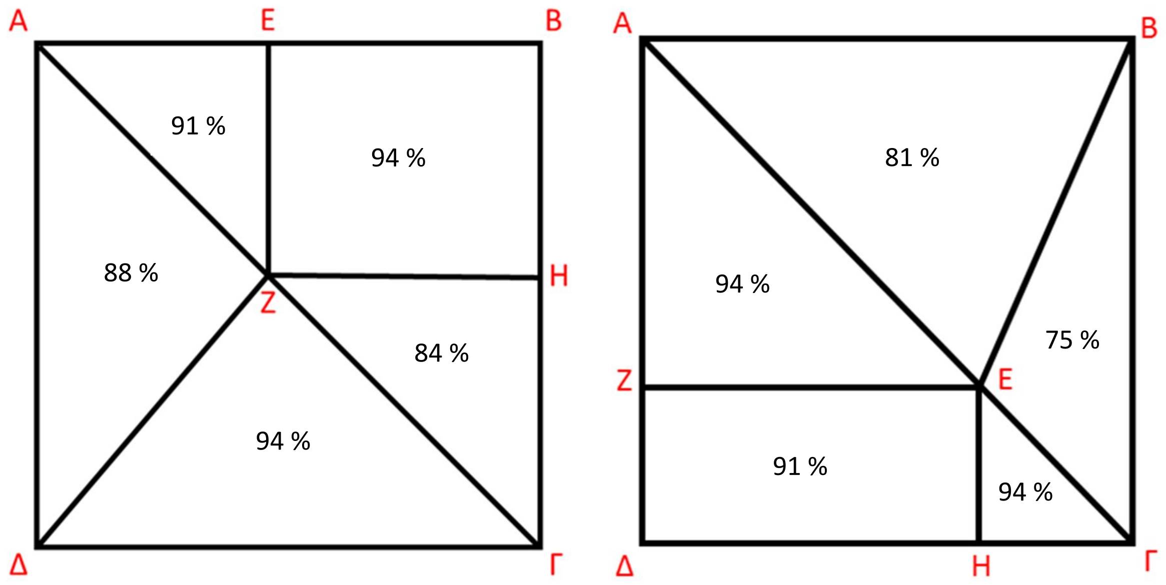
Πίνακας 1: Αναγνώριση απλών σχημάτων.

Στο pre test από το σύνολο των 32 μαθητών οι 25 (78,1%) αναγνώρισαν και τα 5 απλά σχήματα, οι 4 (12,5%) αναγνώρισαν 4 απλά σχήματα, ένας μαθητής (3,1%) αναγνώρισε 3 απλά σχήματα, ενώ δύο μαθητές δεν εκτέλεσαν την άσκηση. Αντίθετα στο post test 21 μαθητές (65,6%) αναγνώρισαν 5 απλά σχήματα, 7 μαθητές (21,9%) 4 σχήματα, 2 μαθητές (6,3%) 3 σχήματα, ενώ ένας μαθητής ονόμαζε λάθος τα σχήματα και ένας ακόμη δεν εκτέλεσε την άσκηση.

Καταγράφοντας πιο αναλυτικά τα σχήματα που αναγνωρίστηκαν από τους μαθητές στο pre test βλέπουμε ότι το τετράπλευρο ΕΒΗΖ αναγνωρίστηκε από 30 μαθητές, το τρίγωνο ΔΖΓ από 30 μαθητές, το τρίγωνο ΑΕΖ από 29 μαθητές, το τρίγωνο ΑΔΖ από 28 μαθητές και το τρίγωνο ΖΗΓ από 27 μαθητές. Στο post test 30 μαθητές αναγνώρισαν το τρίγωνο ΑΕΖ, 30 μαθητές το τρίγωνο ΕΗΓ, 29 μαθητές εντόπισαν το τετράπλευρο ΖΕΗΔ, 26 μαθητές το τρίγωνο ΑΒΕ και 24 μαθητές το τρίγωνο ΒΕΓ.

Μεταφράζοντας τις συχνότητες σε σχετικές συχνότητες μπορούμε να δούμε στο παρακάτω σχήμα το ποσοστό των μαθητών που αναγνώρισαν κάθε σχήμα:

Pre test Post test



Ο μέσος όρος επιτυχίας στην αναγνώριση των απλών σχημάτων στο pre test ήταν 90%, ενώ στο post test 87%. Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας τις συχνότητες εμφάνισης των σχημάτων με τον αριθμό των μαθητών παρατηρούμε ότι το σύνολο των απλών σχημάτων που εντόπισαν οι μαθητές στο pre test ήταν 144, το οποίο αντιστοιχεί σε 4,5 σχήματα ανά μαθητή, ενώ στο post test ήταν 139, δηλαδή 4,3 σχήματα ανά μαθητή. Οπότε βλέπουμε ότι η ικανότητα των μαθητών στην αναγνώριση απλών σχημάτων δεν βελτιώθηκε. Ωστόσο βρισκόταν ήδη σε υψηλά επίπεδα και αυτή η στασιμότητα – ελαφρά μείωση μπορεί να οφείλεται στην αλλαγή του σχήματος ή σε άλλες συνθήκες όπως η διάθεση των μαθητών.

Β) Αναγνώριση σύνθετων σχημάτων

Από τους 32 μαθητές στο pre test μόνο οι 13 κατάφεραν να εντοπίσουν κάποιο σύνθετο σχήμα στο pre test. Συγκεκριμένα, 6 μαθητές (19%) εντόπισαν 2 σχήματα, 2 μαθητές (6%) αναγνώρισαν 3 σχήματα, 2 μαθητές (6%) αναγνώρισαν 4 σχήματα, 2 μαθητές (6%) αναγνώρισαν 6 σχήματα και 1 μαθητής (3%) εντόπισε 5 σύνθετα σχήματα.

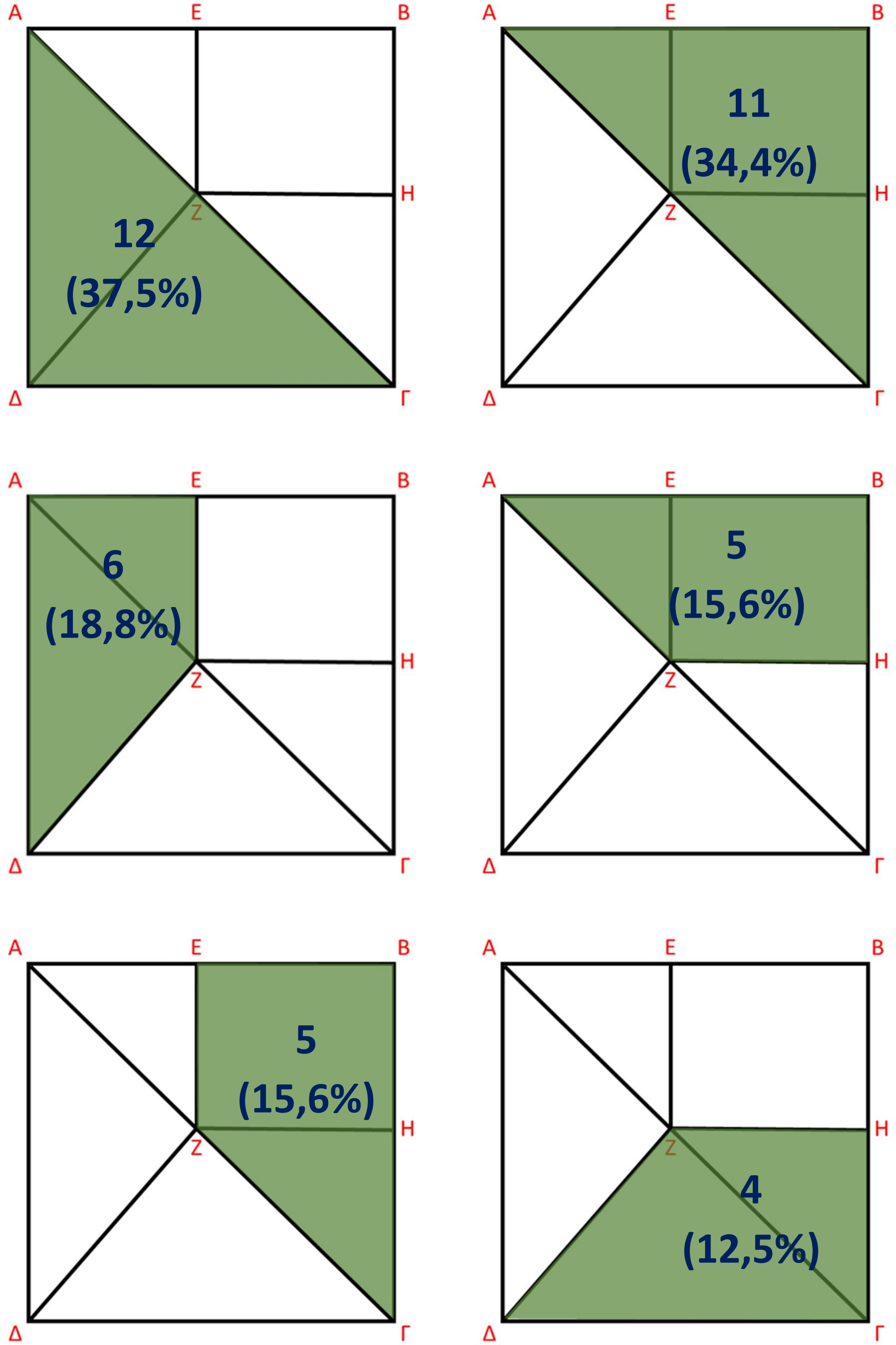
Στο post test βλέπουμε ότι 19 μαθητές κατάφεραν να αναγνωρίσουν σύνθετα σχήματα. Από αυτούς οι 7 μαθητές (21,9%) εντόπισαν 2 σύνθετα σχήματα, 5 μαθητές (15,6%) 4 σύνθετα σχήματα, 3 μαθητές (9,4%) κατέγραψαν 5 σύνθετα σχήματα, 2 μαθητές (6,3%) αναγνώρισαν 6 σύνθετα σχήματα, 1 μαθητής (3,1%) βρήκε 3 σύνθετα σχήματα, ενώ υπήρξε και ένας μαθητής (3,1%) που αναγνώρισε και κατέγραψε 7 σύνθετα σχήματα, όπως βλέπουμε παρακάτω:

	Πριν την παρέμβαση		**Μετά την παρέμβαση**	
Σύνθετα σχήματα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
0	19	59,4%	13	40,6%
2	6	18,8%	7	21,9%
3	2	6,3%	1	3,1%
4	2	6,3%	5	15,6%
5	1	3,1%	3	9,4%
6	2	6,3%	2	6,3%
7			1	3,1%
Σύνολο	**32**	**100%**	**32**	**100%**

Πίνακας 2: Αναγνώριση σύνθετων σχημάτων.

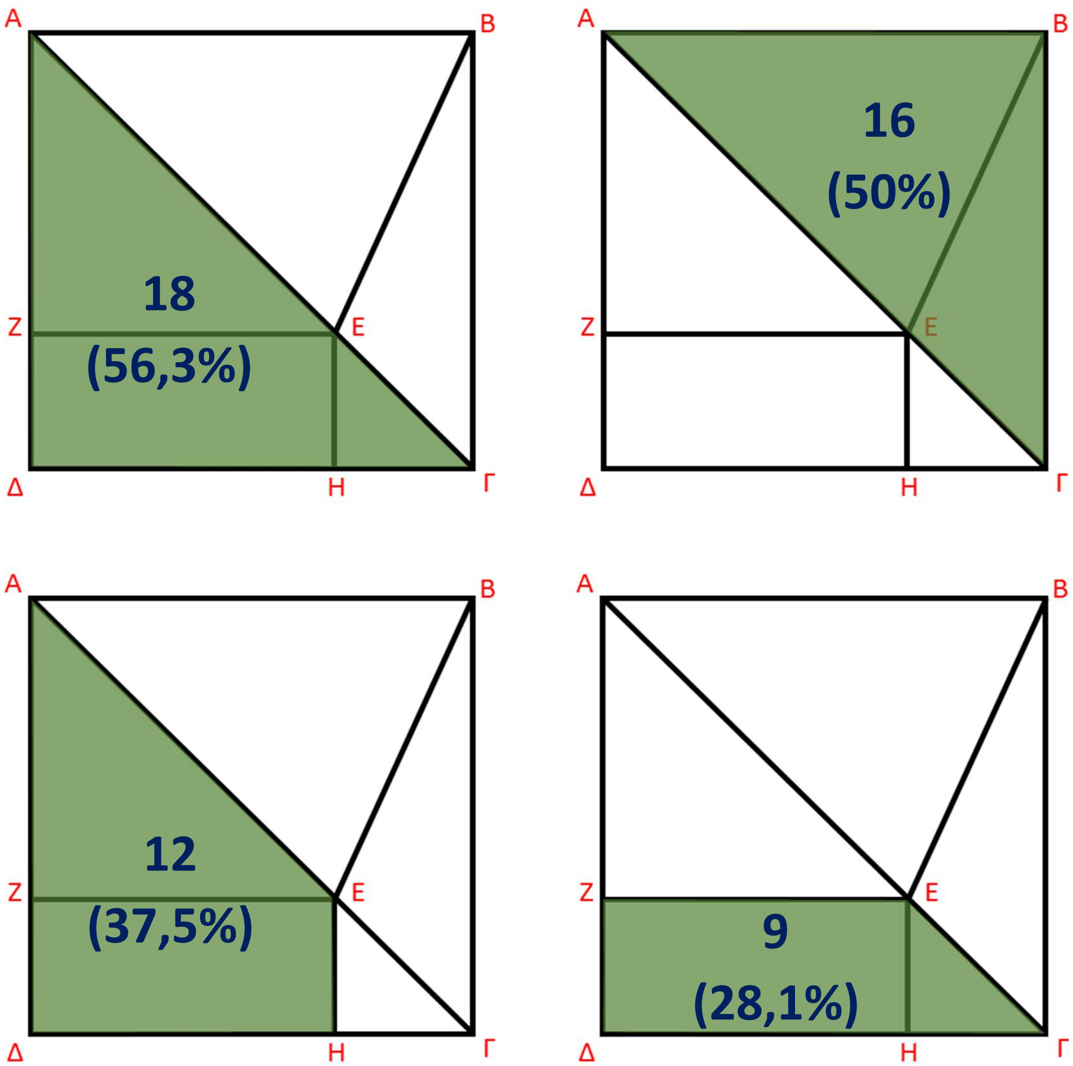
Πιο αναλυτικά παρουσιάζονται τα σύνθετα σχήματα που αναγνωρίστηκαν από τους μαθητές καθώς και η συχνότητα και η σχετική συχνότητα εμφάνισής τους:

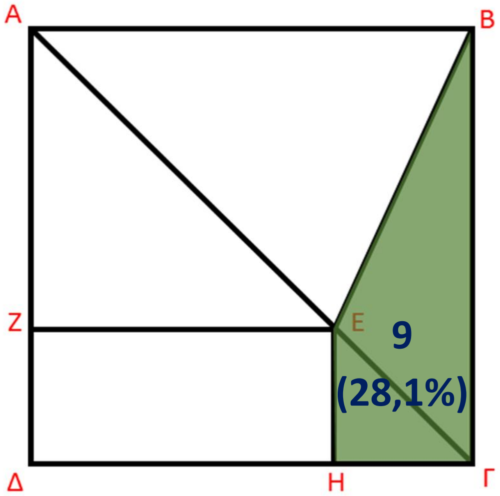
Pre test

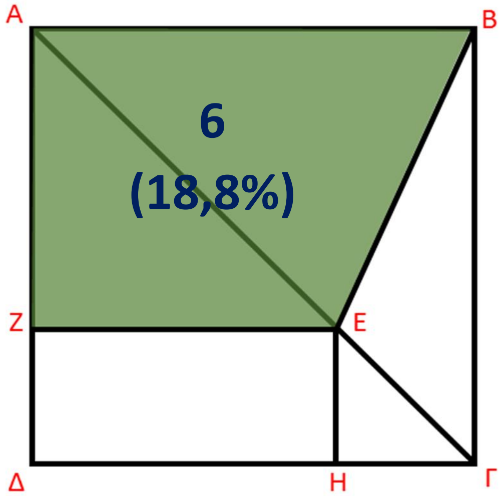


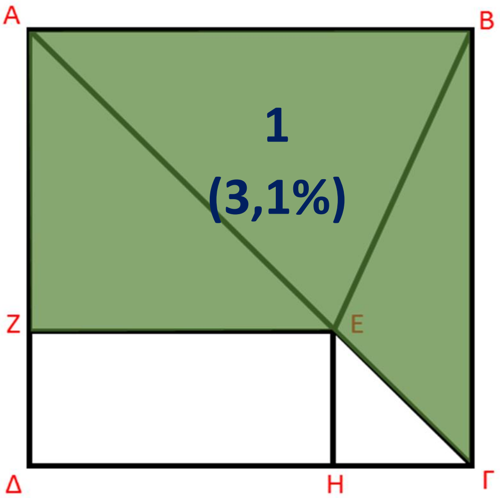
Παρατηρούμε λοιπόν ότι 12 μαθητές (37,5%) και 11 μαθητές (34,4%) εντόπισαν τα δύο μεγάλα τρίγωνα του τετραγώνου, δηλαδή τα ΑΔΓ και ΑΒΓ αντίστοιχα. Αμέσως μετά εντοπίστηκαν τα τραπέζια ΑΕΖΔ (6 μαθητές, 18,8%), ΑΒΗΖ (5 μαθητές, 15,6%), ΕΒΓΖ (5 μαθητές, 15,6%) και ΖΗΓΔ (4 μαθητές, 12,5%).

Post test









Στο post test τα σχήματα που αναγνωρίστηκαν περισσότερο ήταν ξανά τα δύο μεγάλα τρίγωνα ΑΔΓ (18 μαθητές, 56,3%) και ΑΒΓ (16 μαθητές, 50%). Τρίτο σχήμα σε συχνότητα εμφάνισης ήταν το τραπέζιο ΑΔΗΕ (12 μαθητές, 37,5%) και στη συνέχεια τα σχήματα ΖΕΓΔ (9 μαθητές, 28,1%), ΒΓΗΕ (9 μαθητές, 28,1%) και ΑΒΕΖ (6 μαθητές, 18,8%). Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι ένα μαθητής εντόπισε το σχήμα ΑΒΓΕΖ το οποίο, εκτός από το τρίγωνο ΑΔΓ, αποτελείται από 3 σχήματα.

Κάνοντας μία συνολική αποτίμηση της επίδοσης στο δεύτερο μέρος αυτής της άσκησης αναφορικά με τα σύνθετα σχήματα συμπεραίνουμε ότι στο pre test οι μαθητές αναγνώρισαν συνολικά 42 σύνθετα σχήματα, δηλαδή 1,3 σχήματα ο καθένας, ενώ στο post test η αναλογία σχήματος ανά μαθητή αυξήθηκε στο 2,2 αφού οι μαθητές αναγνώρισαν συνολικά 71 σύνθετα σχήματα. Βλέπουμε λοιπόν ότι παρόλο που η ικανότητα αναγνώρισης απλών σχημάτων δεν βελτιώθηκε καθόλου, η αναγνώριση σύνθετων σχημάτων σχεδόν διπλασιάστηκε. Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στο γεγονός ότι δεν έχουν εξασκηθεί αρκετά στα σύνθετα σχήματα και στο συνδυασμό σχημάτων, στην ενασχόληση των μαθητών με οπτικά ερεθίσματα μέσω της χρήσης των λογισμικών και στη βελτίωση της ικανότητας σύνθεσης σχημάτων που ενισχύθηκε μέσω των ασκήσεων των φύλλων εργασιών.

Λάθη

Τα συνηθέστερα λάθη των μαθητών στη συγκεκριμένη άσκηση αφορούσαν στην ονομασία των σχημάτων. Κάποιοι μαθητές ονόμαζαν τα σχήματα χρησιμοποιώντας τα γράμματα όλων των σημείων απ’ τα οποία διερχόταν το σχήμα ή με κόμμα ή παύλες ανάμεσα στα γράμματα (5 και 6 μαθητές στο pre και στο post test αντίστοιχα). Για παράδειγμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ στο post test θα ονομαζόταν ΑΒΓΗΔΖ. Οι απαντήσεις αυτών των μαθητών θεωρήθηκαν σωστές εφόσον είχαν αντίληψη του σχήματος το οποίο ονόμαζαν.

Άλλοι μαθητές ονόμαζαν το σχήμα με βάση ένα ευθύγραμμο τμήμα του σχήματος, συνήθως του ευθύγραμμου τμήματος που βρισκόταν ενδιάμεσα, δηλαδή μέσα στο μεγάλο τετράγωνο. Για παράδειγμα θέλοντας να ονομάσει ένα σχήμα στο post test ένας μαθητής χρησιμοποίησε την ονομασία ΑΕΓ, η οποία αντιστοιχεί σε ευθύγραμμο τμήμα. Αυτές οι απαντήσεις θεωρήθηκαν λανθασμένες καθώς δεν ήταν ξεκάθαρο το σχήμα που είχαν αναγνωρίσει οι μαθητές.

Άσκηση 2

Στο pre test ο μέσος όρος των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές ήταν M=7,06, SD=4,340, ενώ στο post test M=10,53, SD=6,599. Το σύνολο των διαχωρισμών στο pre test ήταν 256 από τους οποίους οι 226 ήταν σωστοί, ενώ στο post test οι μαθητές έδωσαν 376 απαντήσεις εκ των οποίων οι 337 ήταν σωστές. Άρα το ποσοστό επιτυχίας στον διαχωρισμό του σχήματος στο pre test ήταν 88,28%, ενώ στο post test 89,63%.

	M	SD
Πριν την παρέμβαση	7,06	4,340
Μετά την παρέμβαση	10,53	6,599

Πίνακας 3: Επιδόσεις στον διαχωρισμό σχήματος.

Το σύνολο των διαθέσιμων ορθογωνίων παραλληλογράμμων ήταν 23 οπότε αυτή ήταν η μέγιστη δυνατή επίδοση. Ο μέγιστος αριθμός λύσεων που δόθηκε στο pre test ήταν 21 (1 μαθητής), ενώ ο μικρότερος αριθμός λύσεων ήταν 1 (1 μαθητής). Οπότε το εύρος των απαντήσεων ήταν 20. Στο post test το εύρος των απαντήσεων ήταν 22 καθώς η μέγιστη επίδοση ήταν 23, ενώ η ελάχιστη 1.

Σωστές απαντήσεις	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
1	1	3,1%	1	3,1%
2	2	6,3%	1	3,1%
3	4	12,5%	3	9,4%
4	2	6,3%		
5	1	3,1%	3	9,4%
6	4	12,5%	3	9,4%
7	10	31,3%	2	6,3%
8	1	3,1%	3	9,4%
9	2	6,3%	1	3,1%
10	1	3,1%	2	6,3%
11	-	-	1	3,1%
13	-	-	2	6,3%
14	1	3,1%	1	3,1%
15	1	3,1%	3	9,4%
16	1	3,1%		

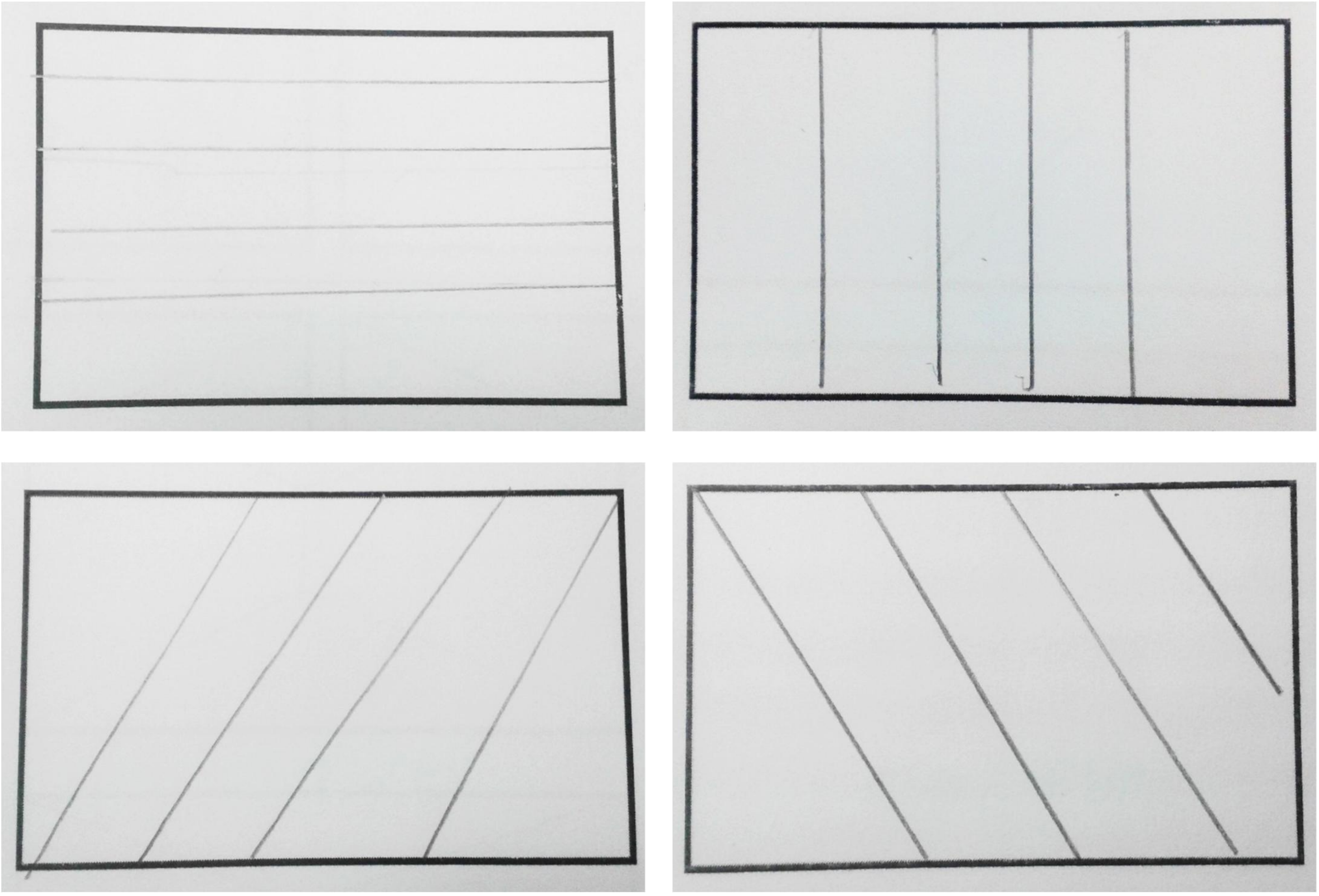
19	-	-	1	3,1%
21	1	3,1%	1	3,1%
22	-	-	3	9,4%
23	-	-	1	3,1%
Σύνολο	**32**	**100%**	**32**	**100%**

Πίνακας 4: Σωστές απαντήσεις διαχωρισμού σχήματος.

Στον παραπάνω πίνακα βλέπουμε τον αριθμό των λύσεων που έδωσε κάθε μαθητής καθώς και τη συχνότητά τους. Στο pre test 10 μαθητές λοιπόν (31,3%), δηλαδή περίπου το 1/3 του συνόλου των μαθητών, έδωσαν 7 λύσεις διαχωρισμού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Στη συνέχεια 4 μαθητές (12,5%) έδωσαν 6 λύσεις και άλλοι 4 μαθητές (12,5%) 3 λύσεις. Δύο από τους μαθητές έδωσαν 9 λύσεις, δύο 4 λύσεις και άλλοι δύο 2 λύσεις (6,3% σε κάθε περίπτωση). Με τη μικρότερη συχνότητα, δηλαδή ένας μαθητής (3,1%) βλέπουμε ότι παρουσιάζονται οι υπόλοιπες λύσεις, οι οποίες είναι: 21, 16, 15, 14, 10, 8, 5 και 1. Στο post test με συχνότητα 3 εμφανίστηκαν οι εξής αριθμοί λύσεων: 22, 15, 8, 6, 5, 3, με ποσοστό 9,4% η κάθε μία. Έπειτα 2 μαθητές (6,3%) έδωσαν 13 λύσεις, άλλοι δύο 10 λύσεις και ακόμα δύο 7 λύσεις. Τέλος, από έναν μαθητή έχουμε στις υπόλοιπες περιπτώσεις, δηλαδή στις 23, 21, 19, 14, 11, 9, 2 και 1 λύση.

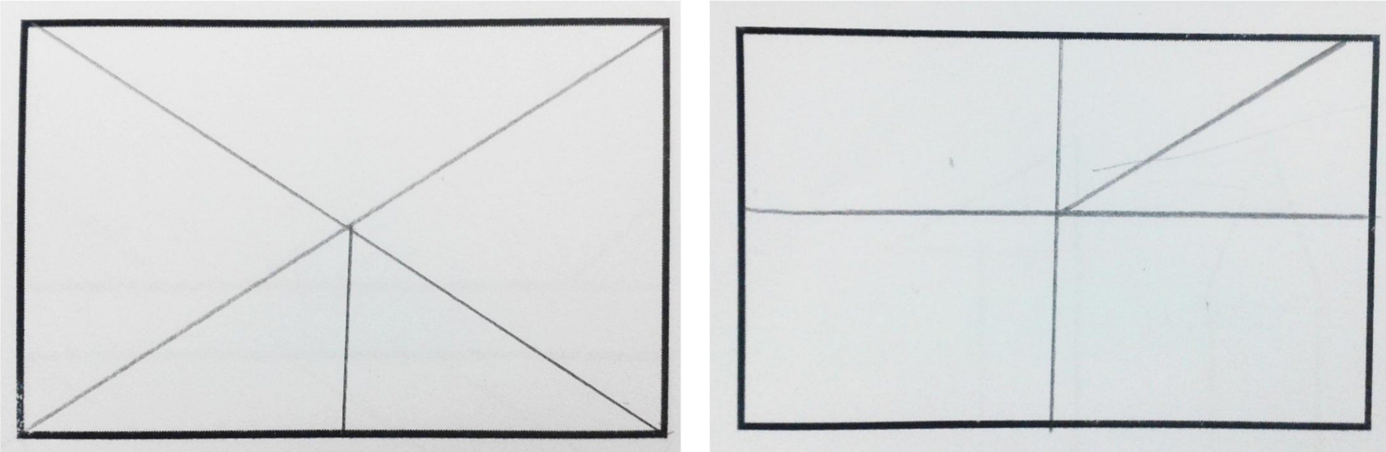
Στρατηγικές

Οι συχνότεροι τρόποι διαχωρισμού που παρατηρήθηκαν ήταν τα 4 οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα, τα 4 κάθετα ευθύγραμμα τμήματα και τα 4 διαγώνια ευθύγραμμα τμήματα με συχνότητα εμφάνισης 39 στο pre test και 67 στο post test.



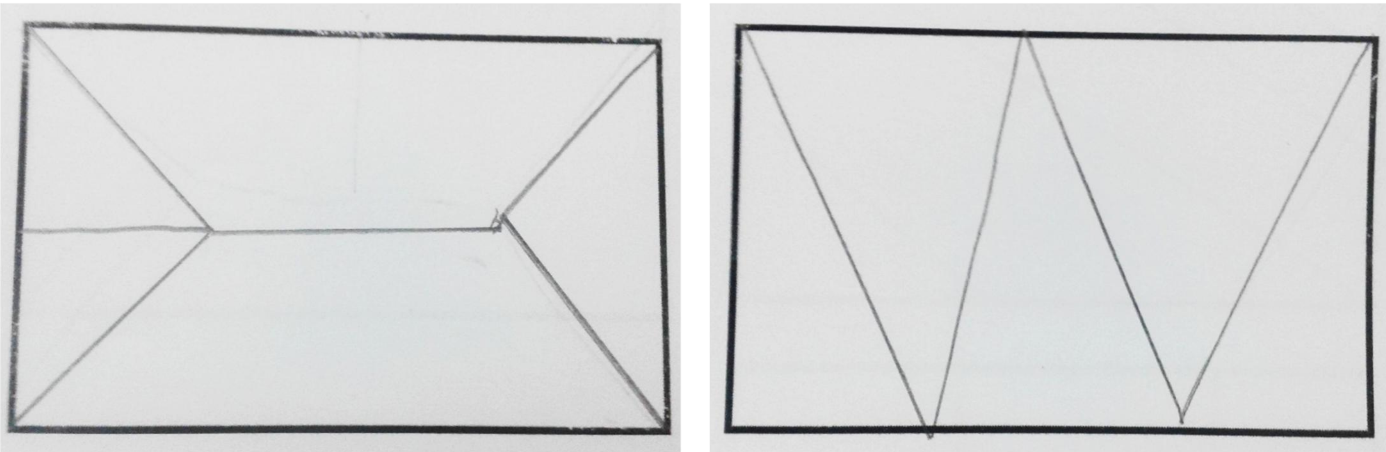
Εικόνα 26: Παραδείγματα διαχωρισμού σχημάτων με οριζόντια, κάθετα και διαγώνια ευθύγραμμα τμήματα.

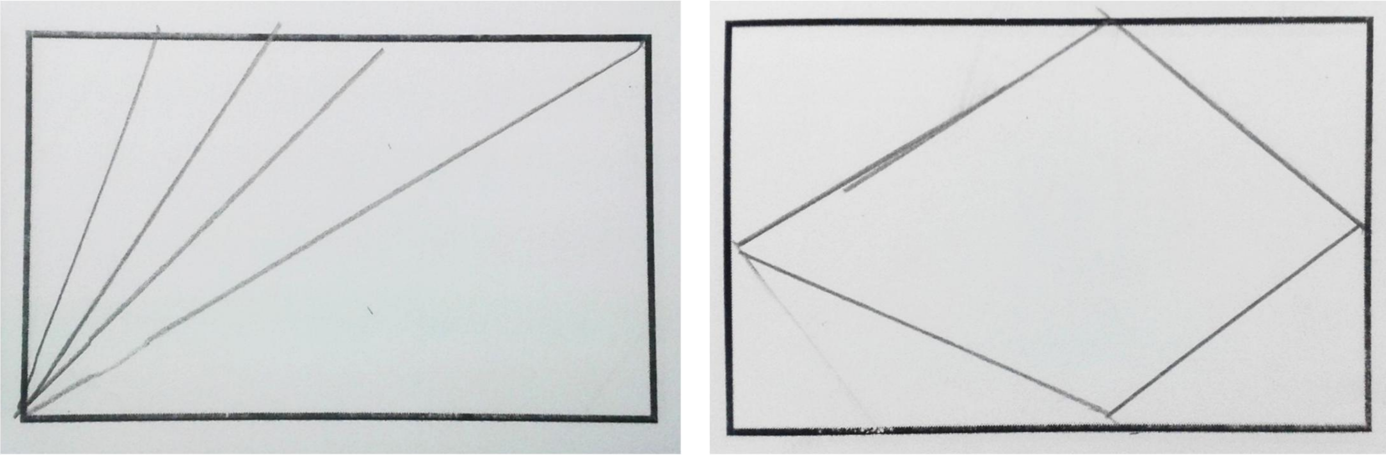
Επιπλέον οι μαθητές χρησιμοποιούσαν το συνδυασμό χιαστί με την προσθήκη ενός ακόμη ευθύγραμμου τμήματος (22 στο pre test και 15 στο post test) αλλά και τον σταυρό με την προσθήκη ενός ακόμη ευθύγραμμου τμήματος (6 στο pre test και 12 στο post test).



Εικόνα 27: Παραδείγματα διαχωρισμού με διαγωνίους και σταυρό.

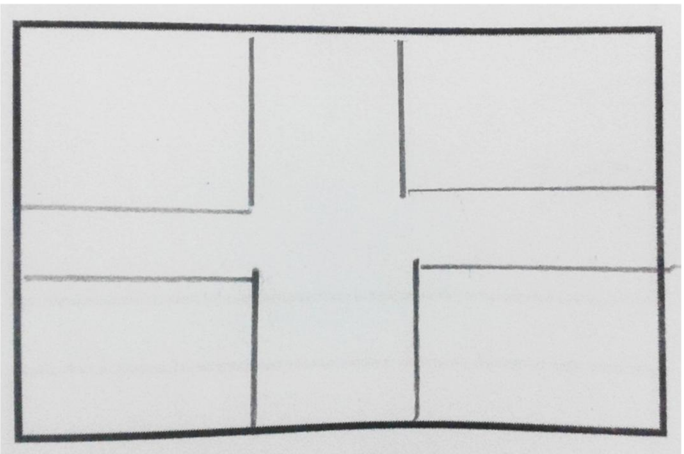
Ακόμη παρατηρήθηκαν λύσεις της μορφής ενός φακέλου (3 στο pre test και 18 στο post test), της μορφής των γραμμάτων M και W (4 στο pre test και 13 στο post test), ακτίνες (6 στο pre test και 12 στο post test) καθώς και σκηνές (4 στο pre test και 8 στο post test).

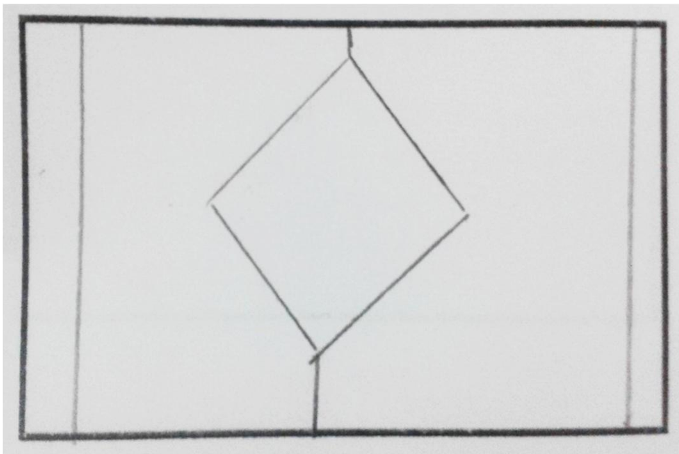


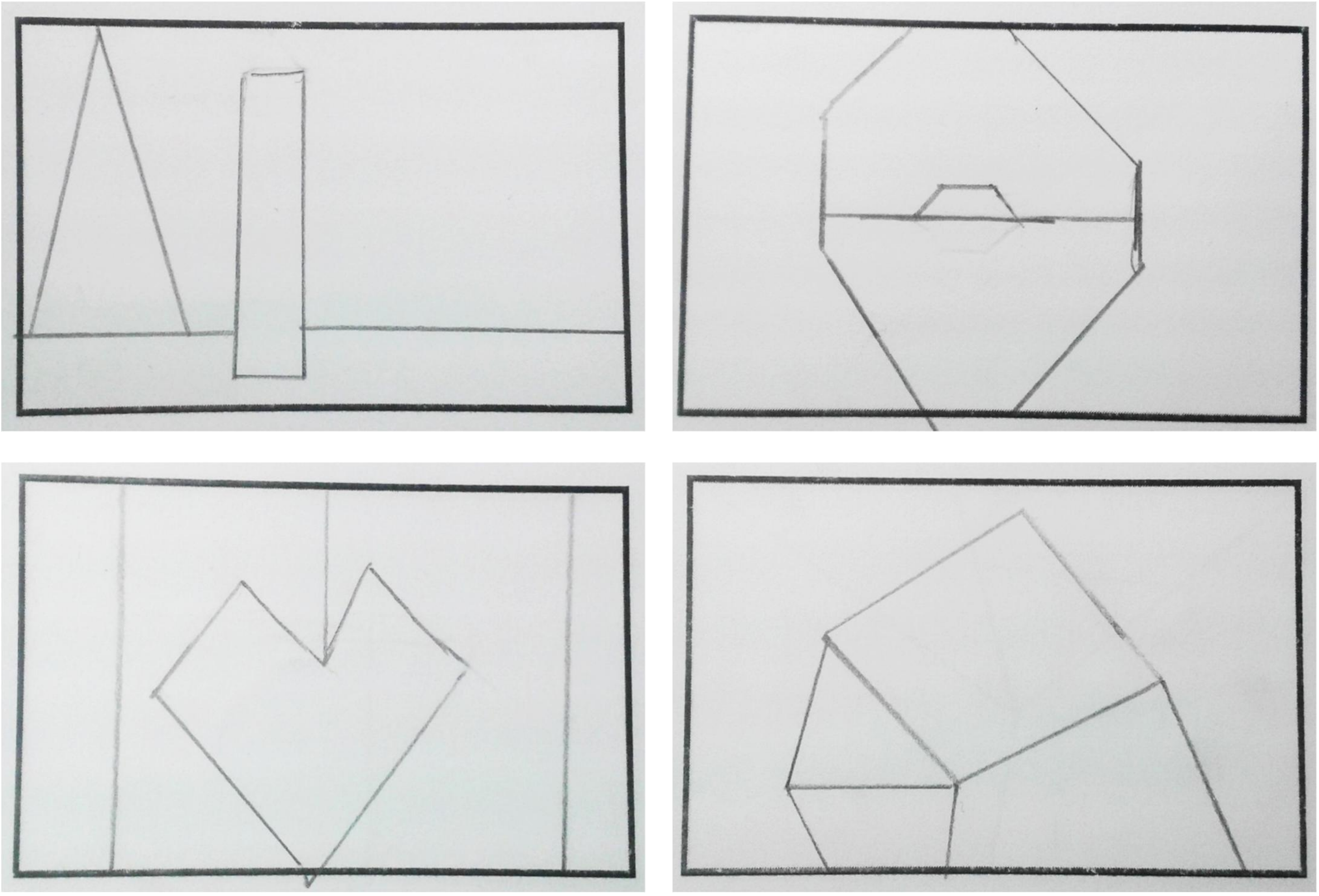


Εικόνα 28: Παραδείγματα διαχωρισμού με φάκελο, W, ακτίνες και σκηνή.

Στο pre test παρατηρήθηκε ότι 4 από τους μαθητές χρησιμοποίησαν ξεκάθαρα και σχήματα στις απαντήσεις τους εκτός από ευθείες και ευθύγραμμα τμήματα. Στο post test οι μαθητές αυτοί αυξήθηκαν στους 9.



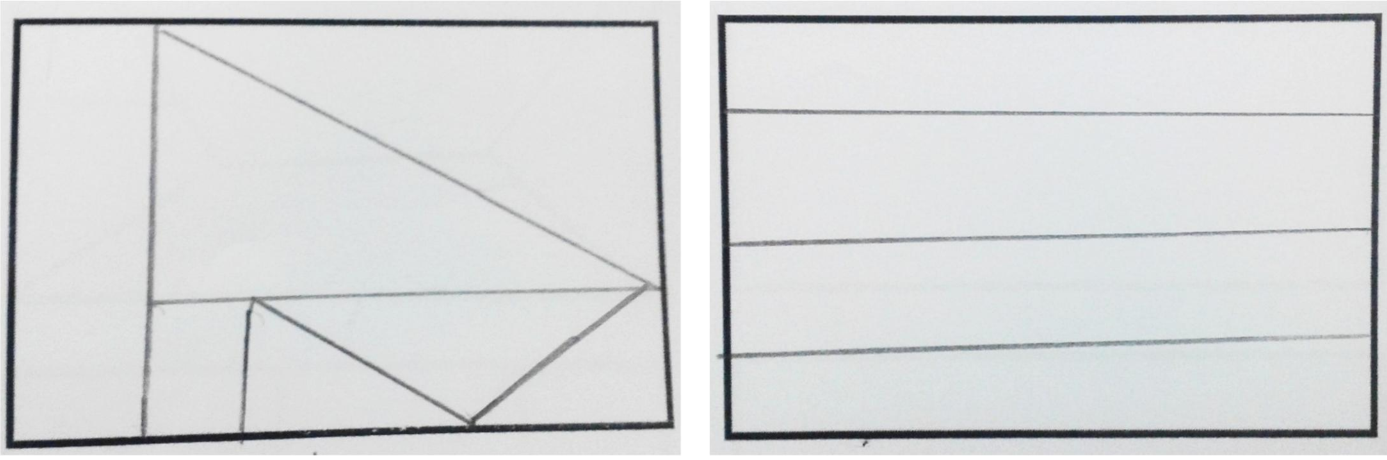




Εικόνα 29: Παραδείγματα διαχωρισμού με χρήση σχημάτων.

Λάθη

Τα συχνότερα λάθη των μαθητών ήταν ο διαχωρισμός σε περισσότερα σχήματα από τα πέντε που ήταν τα ζητούμενα της άσκησης (7 απαντήσεις στο pre test και 17 στο post test) ή σε λιγότερα σχήματα (8 στο pre test και 17 στο post test). Επιπλέον οι μαθητές επαναλάμβαναν κάποια λύση που είχαν ήδη δώσει (12 στο pre test και 4 στο post test). Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι οι απαντήσεις των μαθητών που χρησιμοποίησαν την ίδια λύση αλλά με διαφορετική κατεύθυνση ή προσανατολισμό σχημάτων θεωρήθηκαν σωστές καθώς χειρίστηκαν το σχήμα και τα υποσχήματά του με σωστό τρόπο και στα πλαίσια της μερεολογικής τροποποίησης.



Εικόνα 30: Παραδείγματα λανθασμένου διαχωρισμού.

Άσκηση 3

Στο pre test 29 από τους 32 μαθητές απάντησαν σωστά στην άσκηση, δηλαδή ποσοστό 91%. Στο post test είχαμε τα ίδια αποτελέσματα καθώς το 91% απάντησε σωστά στην άσκηση. Και στα δύο τεστ το 9% των μαθητών (3 μαθητές) είχαν λάθος απάντηση, εφόσον 2 μαθητές επέλεξαν λάθος σχήμα ενώ ένας μαθητής δεν έλυσε την άσκηση. Ως προς τη μέθοδο επίλυσης 7 μαθητές στο pre test και 2 μαθητές στο post test διαχώρισαν τα σύνθετα σχήματα σε υποσχήματα ή σχεδίασαν πάνω στα σχήματα ή εκ νέου τα δύο απλά σχήματα, ενώ οι υπόλοιποι έλυσαν την άσκηση χωρίς να προβούν σε κάποιο σχέδιο.

	Πριν την παρέμβαση		**Μετά την παρέμβαση**	
	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
Σωστή απάντηση	29	90,6%	29	90,6%
Λάθος απάντηση	2	6,3%	2	6,3%

Χωρίς απάντηση	1	3,1%	1	3,1%
Σύνολο	**32**	**100%**	**32**	**100%**

Πίνακας 5: Επιδόσεις στη σύνθεση σχήματος.

Άσκηση 4

Η άσκηση 4 χωριζόταν σε 2 μέρη. Στο πρώτο μέρος οι μαθητές κλήθηκαν να χωρίσουν ένα σχήμα σε 4 υποσχήματα και στο δεύτερο μέρος έπρεπε να χρησιμοποιήσουν αυτά τα 4 υποσχήματα για να συνθέσουν ένα νέο σχήμα.

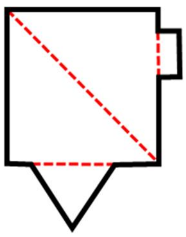
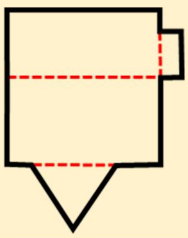
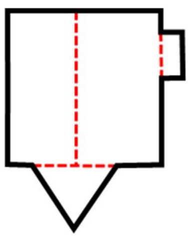
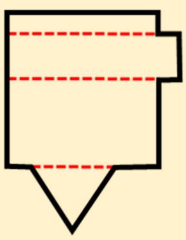
Α) Διαχωρισμός σύνθετου σχήματος

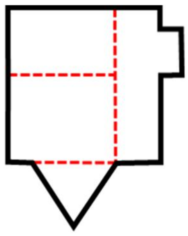
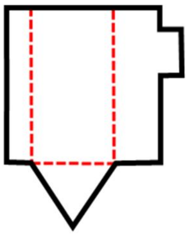
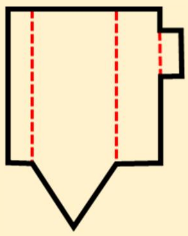
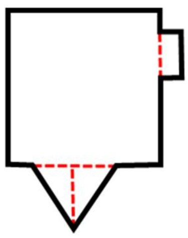
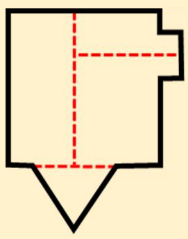
	Πριν την παρέμβαση		**Μετά την παρέμβαση**	
	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
Σωστός διαχωρισμός	26	81,3%	27	84,4%
Λάθος διαχωρισμός	6	18,8%	4	12,5%
Χωρίς απάντηση	-	-	1	3,1%
Σύνολο	**32**	**100%**	**32**	**100%**

Πίνακας 6: Επιδόσεις στον διαχωρισμό σύνθετου σχήματος.

Στο pre test από τους 32 μαθητές οι 26 (81,3%) κατάφεραν να διαχωρίσουν σωστά το σχήμα σε τέσσερα υποσχήματα, ενώ οι υπόλοιποι 6 μαθητές (18,8%) διαχώρισαν το σχήμα λάθος. Στο post test βλέπουμε ότι 27 μαθητές (84,4%) χώρισαν σωστά το σχήμα σε τέσσερα υποσχήματα, 4 μαθητές (12,5%) διαχώρισαν λάθος, ενώ 1 μαθητής (3,1%) δεν έλυσε καθόλου την άσκηση.

Στρατηγικές

	Πριν την παρέμβαση		Μετά την παρέμβαση	
Στρατηγικές διαχωρισμού	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
	12	37,5%	10	31,3%
	6	18,8%	2	6,3%
	4	12,5%	10	31,3%
	2	6,3%	-	-

 	2	6,3%	-	-
	-	-	2	6,3%
	-	-	2	6,3%
	-	-	1	3,1%
Χωρίς απάντηση / Λάθος απάντηση	6	18,8%	5	15,6%
Σύνολο	**32**	**100%**	**32**	**100%**

Πίνακας 7: Στρατηγικές διαχωρισμού σύνθετου σχήματος.

Σχετικά με τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για τον διαχωρισμό του σχήματος σε τέσσερα υποσχήματα βλέπουμε ότι στο pre test 12 μαθητές (37,5%) διαχώρισαν το σχήμα σε μικρό τρίγωνο, μικρό ορθογώνιο και στη συνέχεια διαχώρισαν το υπόλοιπο σχήμα σε δύο τρίγωνα χρησιμοποιώντας μία διαγώνιο. 6 μαθητές (18,8%) διαχώρισαν σε μικρό τρίγωνο, μικρό ορθογώνιο και δύο ορθογώνια χρησιμοποιώντας ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα. 4 μαθητές (12,5%) χώρισαν σε μικρό τρίγωνο, μικρό ορθογώνιο και δύο ορθογώνια χρησιμοποιώντας ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα. 2 μαθητές (6,3%) χώρισαν το σχήμα σε μικρό τρίγωνο και τρία ορθογώνια, ενώ οι υπόλοιποι 2 μαθητές (6,3%) χώρισαν σε μικρό τρίγωνο, δύο ορθογώνια και ένα σύνθετο σχήμα. Από τους 6 μαθητές (18,8%) που δεν έλυσαν σωστά την άσκηση, οι 3 δεν την έλυσαν καθόλου και οι υπόλοιποι 3 χώρισαν το σχήμα είτε σε περισσότερα (5) είτε σε λιγότερα (2) υποσχήματα. Συμπερασματικά, παρατηρούμε ότι όλοι οι μαθητές που έλυσαν το πρώτο μέρος της άσκησης διαχώρισαν το μικρό τρίγωνο στο σχήμα και δεν το χρησιμοποίησαν ως μέρος άλλου σχήματος. Επιπλέον, οι περισσότεροι μαθητές (22/25) διαχώρισαν και το μικρό ορθογώνιο από το υπόλοιπο σχήμα, ενώ 4 από τους 25 χρησιμοποίησαν το μικρό ορθογώνιο ως μέρος άλλου σχήματος.

Στο post test οι μαθητές χρησιμοποίησαν κατά κύριο λόγο τις ίδιες στρατηγικές που παρατηρήθηκαν και στο pre test. 10 μαθητές (31,3%) χρησιμοποίησαν τη στρατηγική διαχωρισμού σε μικρό τρίγωνο, μικρό ορθογώνιο και σε δύο ορθογώνια με βάση ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα. 10 μαθητές (31,3%) χρησιμοποίησαν την ίδια στρατηγική με την παραπάνω με τη διαφορά ότι το ευθύγραμμο τμήμα ήταν διαγώνιο και 2 μαθητές (6,3%) χρησιμοποίησαν οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα. Στη συνέχεια 2 μαθητές (6,3%) χώρισαν σε δύο τρίγωνα (διαχωρίζοντας το μικρό τρίγωνο), ένα μικρό ορθογώνιο και ένα τετράγωνο, 2 μαθητές (6,3%) σε τρία ορθογώνια και ένα σύνθετο σχήμα (μικρό τρίγωνο και ορθογώνιο) και μία μαθήτρια (3,1%) χώρισε το σχήμα σε μικρό τρίγωνο, δύο σύνθετα σχήματα και ένα ορθογώνιο.

Μετά από εξέταση της στρατηγικής που χρησιμοποίησε κάθε μαθητής στο post test σε σχέση με το pre test διαπιστώθηκε πως μόνο 7 μαθητές διατήρησαν την αρχική στρατηγική τους, 4 μαθητές έδωσαν λάθος απαντήσεις και στα δύο τεστ, ενώ οι υπόλοιποι 21 μαθητές χρησιμοποίησαν διαφορετική στρατηγική διαχωρισμού. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές διαθέτουν ευελιξία και ανταποκρίνονται και υιοθετούν διαφορετικές στρατηγικές.

Β) Αναδιαμόρφωση σχήματος

	Πριν την παρέμβαση		Μετά την παρέμβαση	
Σωστές απαντήσεις	**Συχνότητα**	**Σχετική συχνότητα**	**Συχνότητα**	**Σχετική συχνότητα**
0	17	53,1%	6	18,8%
1	4	12,5%	14	43,8%
2	5	15,6%	5	15,6%
3	5	15,6%	3	9,4%
4	1	3,1%	1	3,1%
5	-	-	1	3,1%
12	-	-	1	3,1%
13	-	-	1	3,1%
Σύνολο	**32**	**100%**	**32**	**100%**

Πίνακας 8: Σωστές απαντήσεις αναδιαμόρφωσης σχήματος.

Στο pre test 15 από τους 32 μαθητές, δηλαδή ποσοστό 46,9%, έδωσε τουλάχιστον μία σωστή απάντηση αναδιαμόρφωσης του σχήματος. Πιο συγκεκριμένα, 5 μαθητές (15,6%) έδωσαν τρεις σωστές λύσεις, 5 μαθητές (15,6%) έδωσαν δύο σωστές λύσεις, 4 μαθητές (12,5%) έδωσαν μία σωστή λύση και ένας μαθητής (3,1%) έδωσε τέσσερις σωστές λύσεις. Στο post test παρατηρούμε μεγαλύτερο εύρος ανάμεσα στον αριθμό των σωστών λύσεων που έδωσαν οι μαθητές. Από τους 32 μαθητές τουλάχιστον μία σωστή λύση δόθηκε από 26 μαθητές. Αναλύοντας τις συχνότητες βλέπουμε ότι 14 μαθητές (43,8%) έδωσαν μία λύση αναδιαμόρφωσης του σχήματος, 5 μαθητές (15,6%) έδωσαν μία σωστή απάντηση και 3 μαθητές (9,4%) αναδιαμόρφωσαν σωστά το σχήμα τρεις φορές. Προχωρώντας σε χαμηλότερες συχνότητες, ένας μαθητής έδωσε τέσσερις λύσεις, ένας μαθητής απάντησε σωστά πέντε φορές ενώ δύο μαθητές έδωσαν 12 και 13 σωστές λύσεις αντίστοιχα.

	M	SD
Πριν την παρέμβαση	1,03	1,282
Μετά την παρέμβαση	2,09	2,977

Πίνακας 9: Επιδόσεις στην αναδιαμόρφωση σχήματος.

Στο pre test ο κάθε μαθητής έκανε κατά μέσο όρο 1,03 αναδιαμόρφωση, SD=1,282, ενώ στο post test ο μέσος όρος των σωστών αναδιαμορφώσεων ήταν 2,09, SD=2,977.

Στο pre test το σύνολο των απαντήσεων των μαθητών ήταν 60, εκ των οποίων σωστές θεωρήθηκαν οι 33, ενώ στο post test οι μαθητές έκαναν 75 αναδιαμορφώσεις από τις οποίες οι 67 ήταν σωστές. Άρα στο pre test οι μαθητές είχαν 55% επιτυχία ενώ στο post test 89,33%.

Στρατηγικές

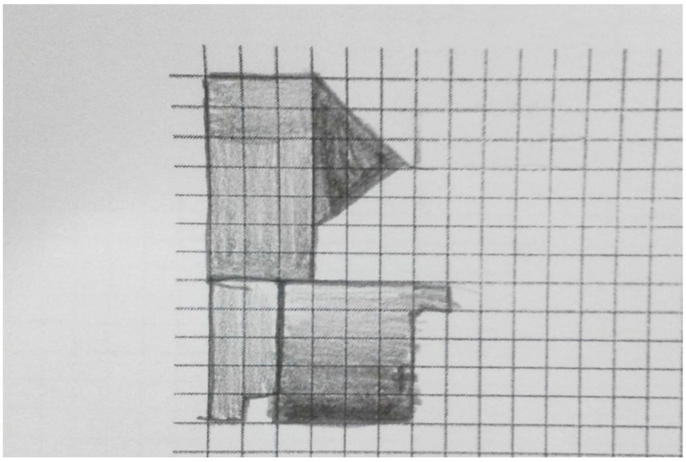
Οι σωστές απαντήσεις των μαθητών ταξινομήθηκαν σε δύο μεγάλες κατηγορίες στρατηγικών, τις οποίες ακολούθησαν οι μαθητές για τη σύνθεση των υποσχημάτων σε νέο σχήμα. Στο pre test 17 απαντήσεις (51,5%) δόθηκαν με βάση τη στρατηγική της διατήρησης δύο σχημάτων (συνήθως των μεγαλύτερων) και περιστροφής των άλλων δύο σχημάτων γύρω τους, ενώ σε 16 απαντήσεις (48,5%) έγινε πλήρης αναδιαμόρφωση του σχήματος

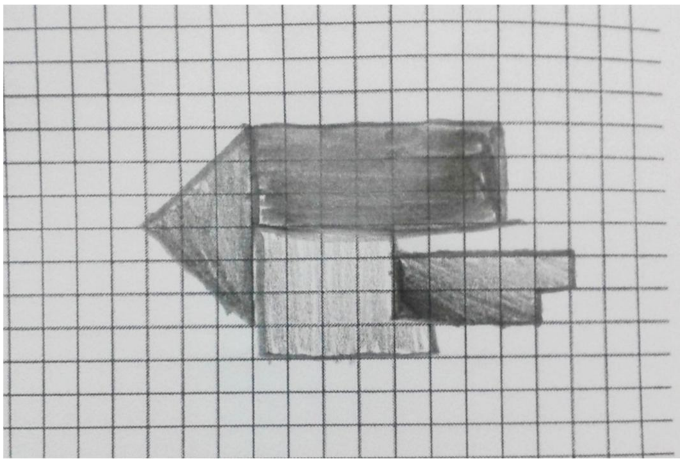
Στο post test το 53,6% των απαντήσεων εντάχθηκε στη στρατηγική της πλήρους αναδιαμόρφωσης, ενώ στο 46,3% των σωστών απαντήσεων οι μαθητές διατήρησαν δύο από τα σχήματα σύμφωνα με τα αρχικά και περίστρεψαν τα άλλα δύο σχήματα γύρω τους.

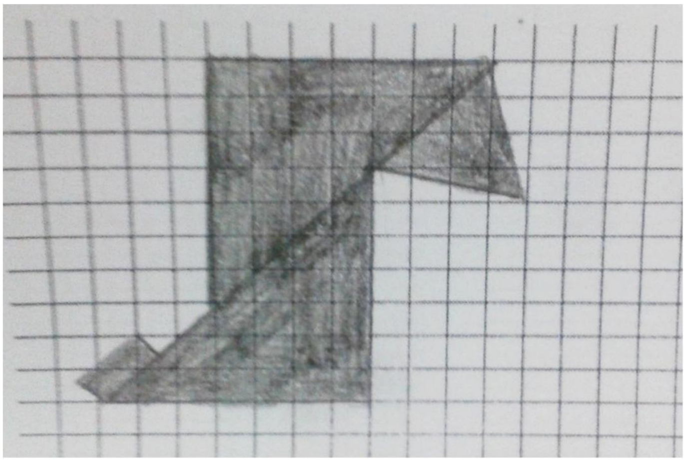
	Πριν την παρέμβαση		Μετά την παρέμβαση	
Στρατηγική	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
Μερική αναδιαμόρφωση	17	51,5%	31	46,3%
Πλήρης αναδιαμόρφωση	16	48,5%	36	53,7%
Σύνολο απαντήσεων	**33**	**100%**	**67**	**100%**

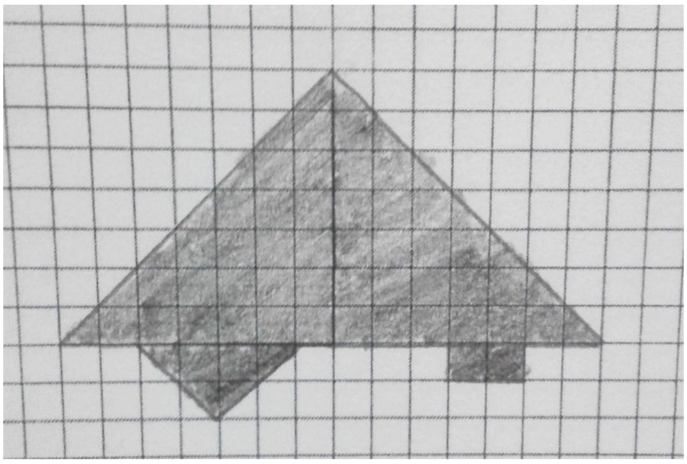
Πίνακας 10: Στρατηγικές αναδιαμόρφωσης σύνθετου σχήματος.

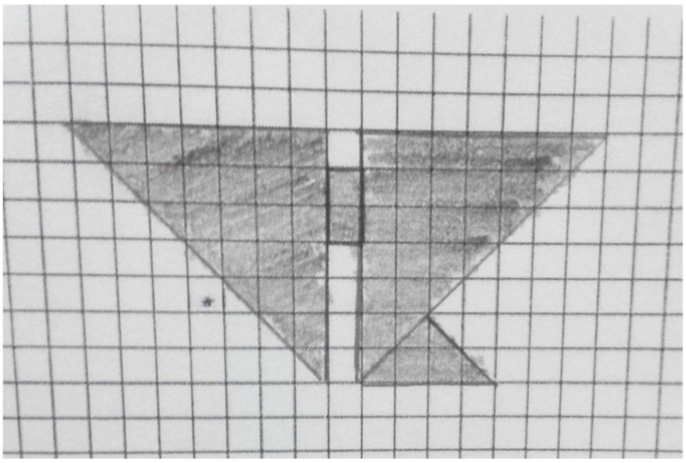
Παρακάτω θα δούμε κάποια παραδείγματα στα οποία οι μαθητές έκαναν πλήρη αναδιαμόρφωση του σχήματος:

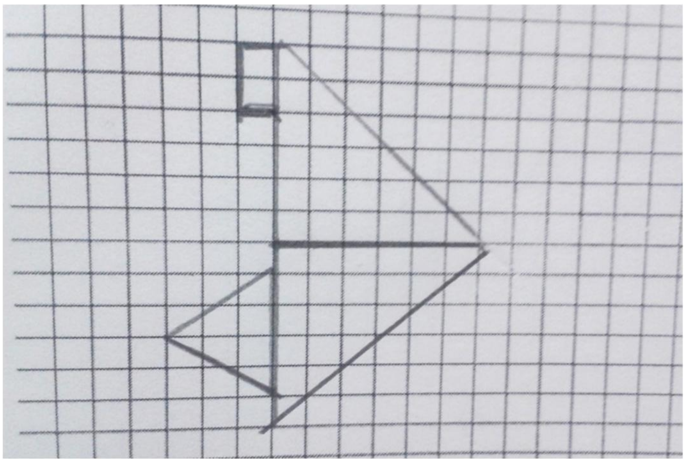


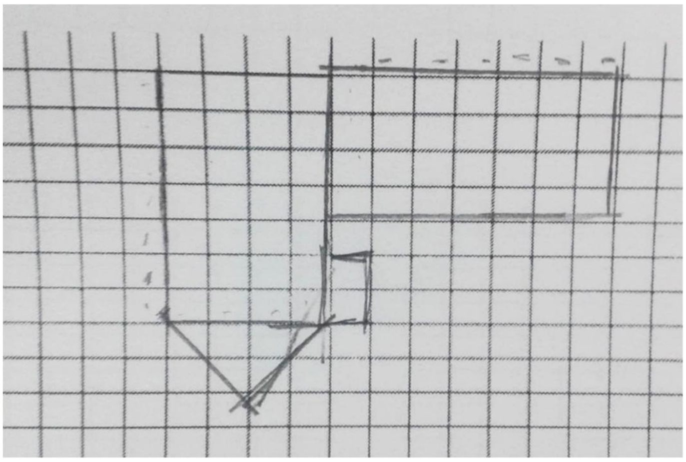


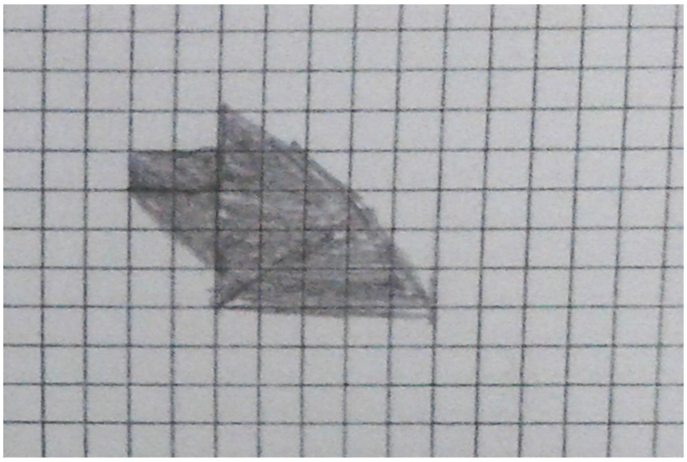


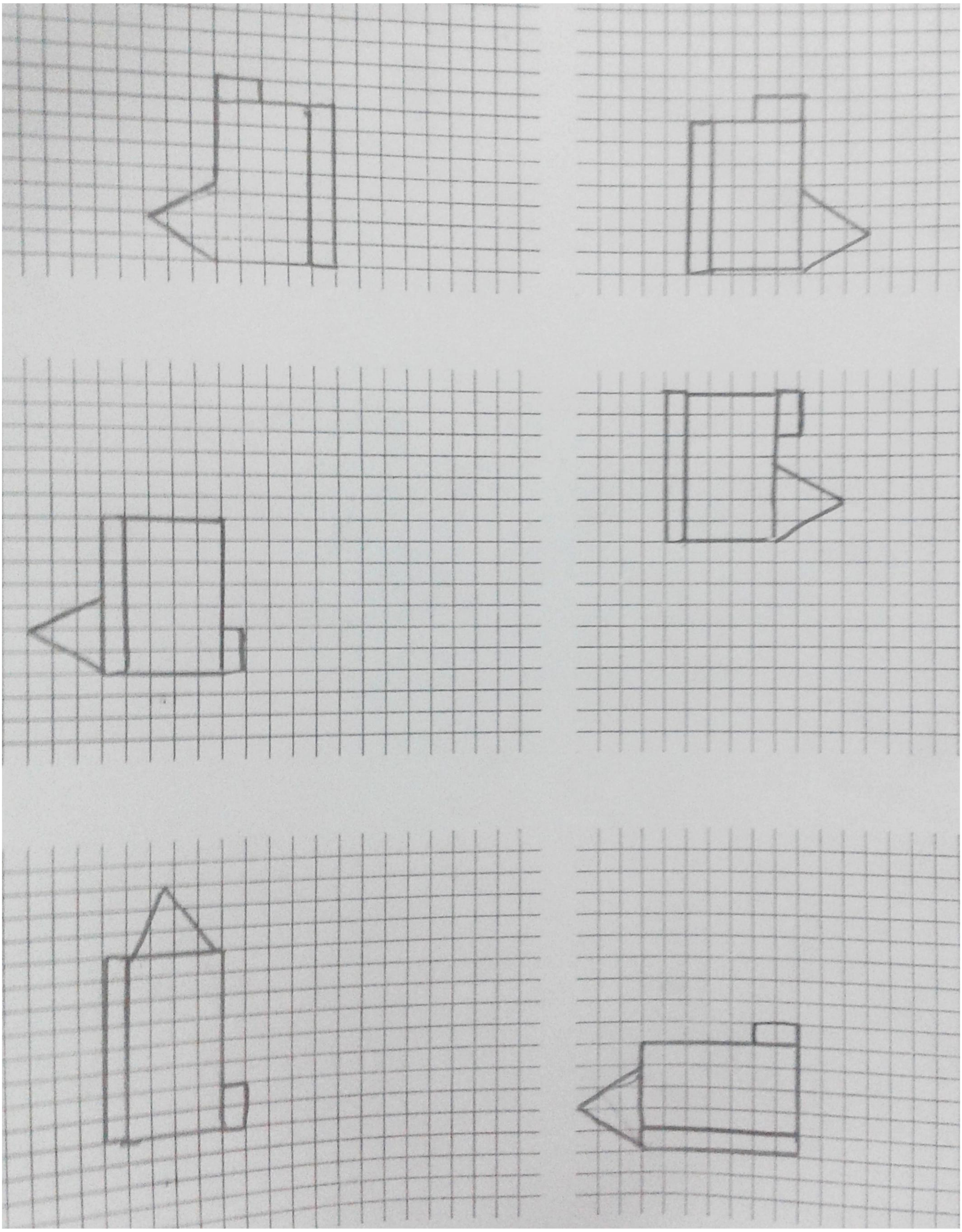


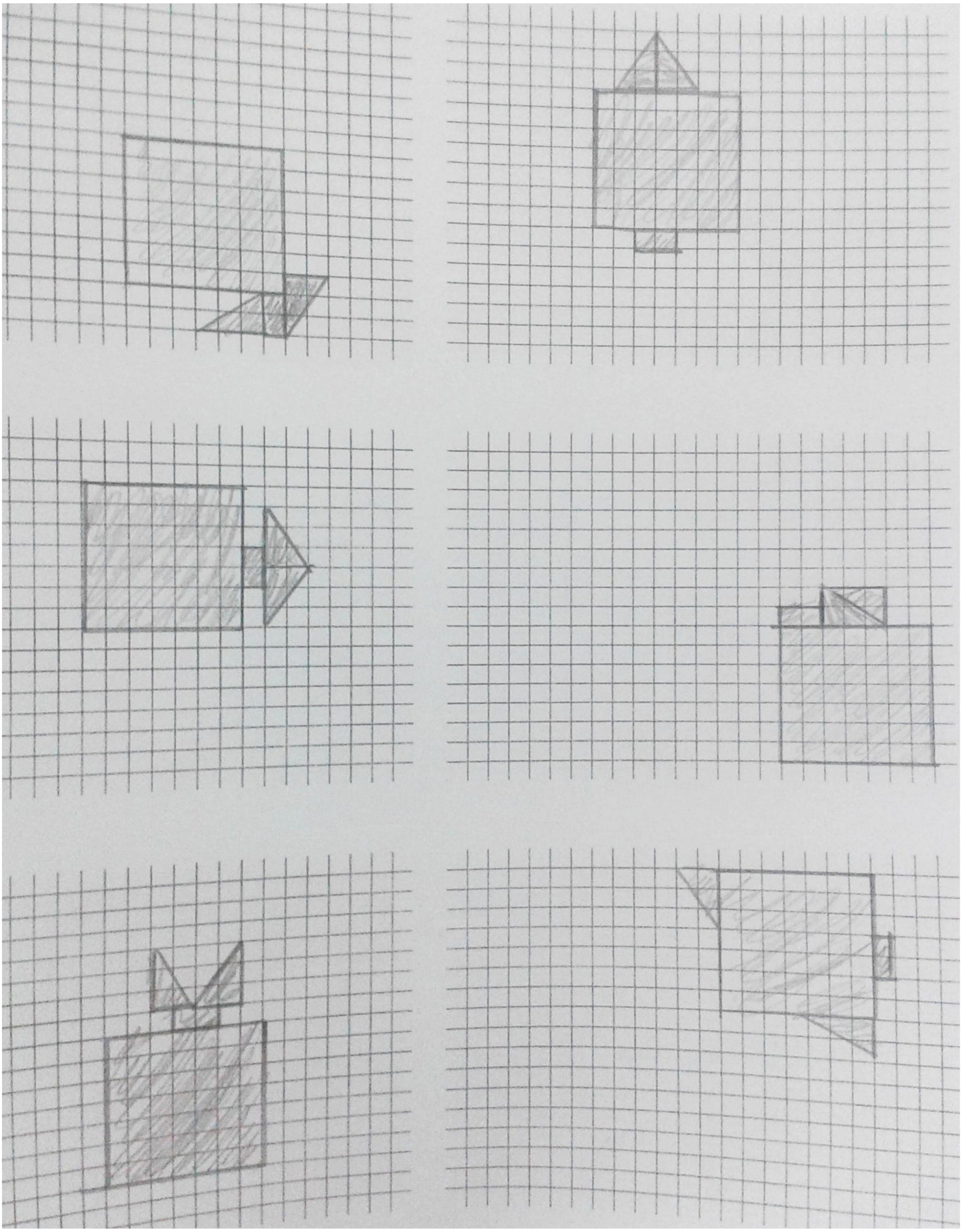






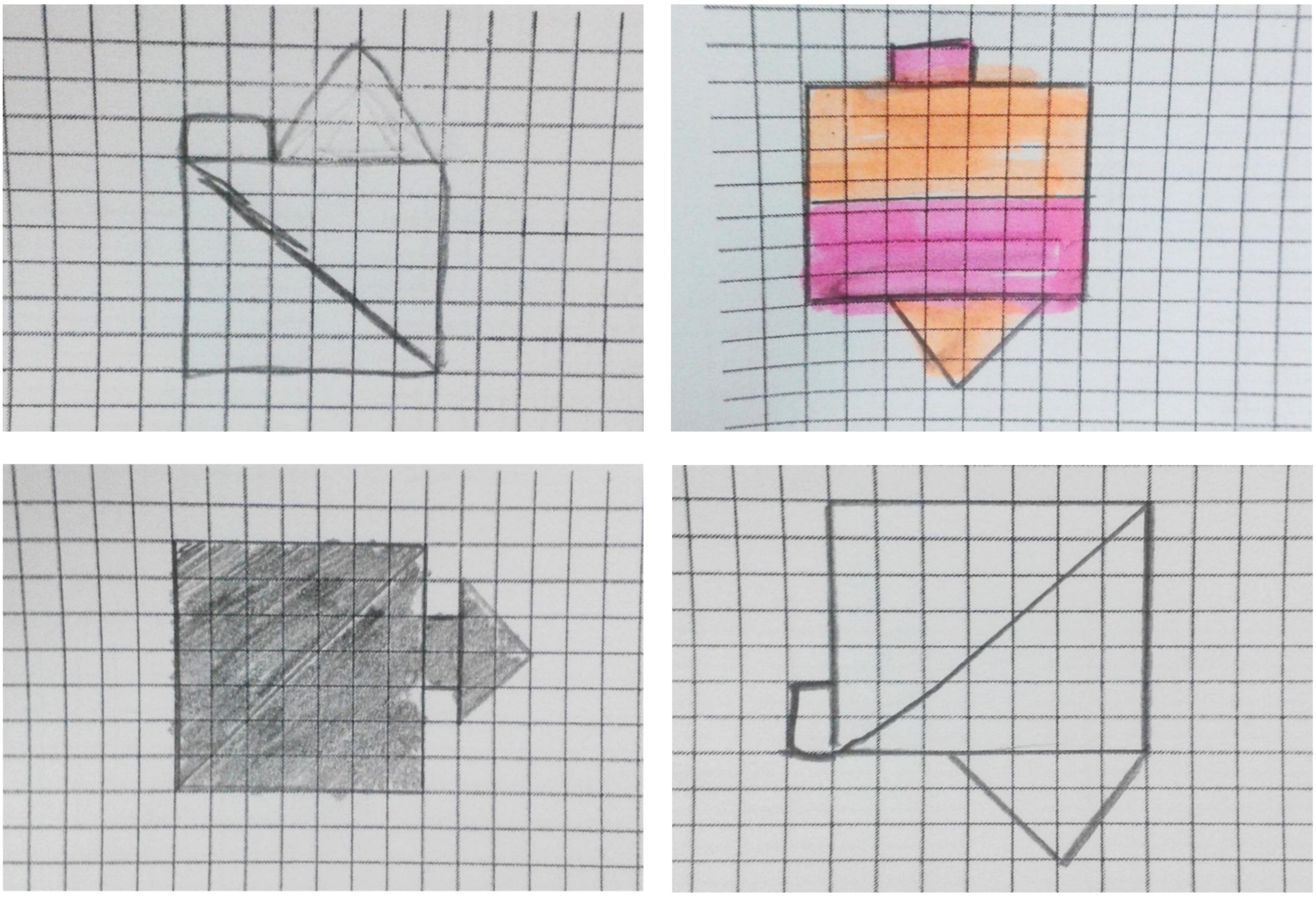






Εικόνα 31: Παραδείγματα πλήρους αναδιαμόρφωσης του σχήματος.

Στη συνέχεια μπορούμε να δούμε παραδείγματα μερικής αναδιαμόρφωσης του σχήματος κατά την οποία δύο από τα σχήματα (συνήθως τα μεγαλύτερα, ανάλογα με τον αρχικό διαχωρισμό που έκαναν οι μαθητές) παραμένουν σταθερά και τα υπόλοιπα δύο περιστρέφονται γύρω τους:



Εικόνα 32: Παραδείγματα μερικής αναδιαμόρφωσης του σχήματος.

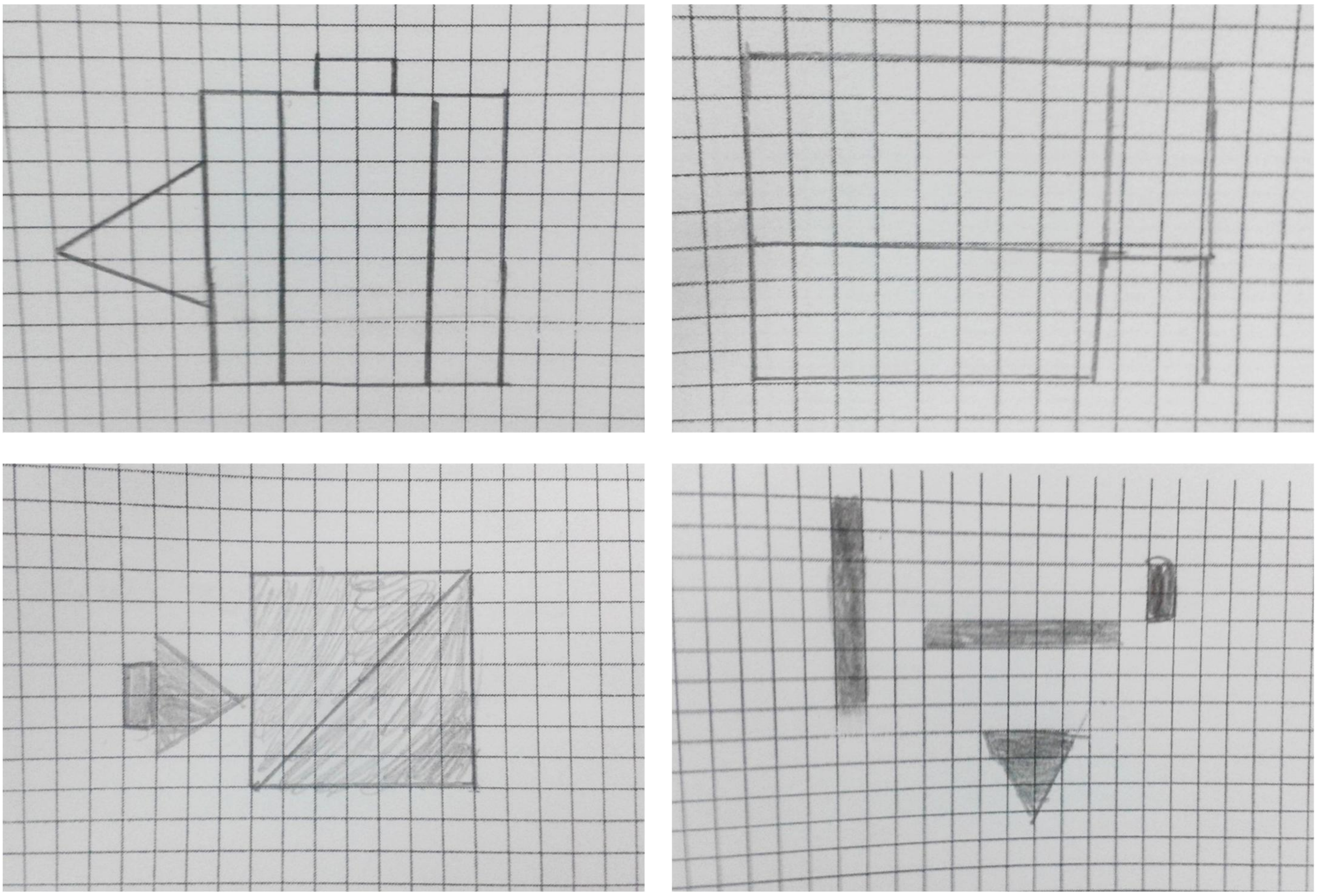
Λάθη

Από τις 60 απαντήσεις των μαθητών οι 27 (45%) θεωρήθηκαν λανθασμένες. Σε 8 από τις απαντήσεις (29,6%) οι μαθητές χρησιμοποίησαν λιγότερα σχήματα από τα αρχικά, παραλείποντας ένα σχήμα. Σε άλλες 8 απαντήσεις (29,6%) χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικά σχήματα, είτε επαναλαμβάνοντας κάποιο σχήμα δύο φορές είτε προσθέτοντας άλλα σχήματα. 6 απαντήσεις (22,2%) θεωρήθηκαν λανθασμένες επειδή οι μαθητές ένωσαν κάποια πλευρά ενός σχήματος με ένα σημείο άλλου σχήματος διακόπτοντας μ’ αυτόν τον τρόπο το πλήρες γεωμετρικό σχήμα. Τέλος, σε 5 απαντήσεις (18,5%) οι μαθητές σχεδίασαν τα σχήματα χωρίς να τα συνδέσουν μεταξύ τους είτε λόγω αδυναμίας είτε λόγω παρανόησης της εκφώνησης της άσκησης.

	Πριν την παρέμβαση		Μετά την παρέμβαση	
Λάθη	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
Λιγότερα σχήματα	8	29,6%	1	12,5%
Περισσότερα σχήματα	-	-	3	37,5%
Διαφορετικά σχήματα	8	29,6%	1	12,5%
Ένωση σημείου-πλευράς	6	22,2%	2	25,0%
Ασύνδετα σχήματα	5	18,5%	-	-
Επανάληψη απάντησης	-	-	1	12,5%
Σύνολο	**26**	**100%**	**8**	**100%**

Πίνακας 11: Λάθη στις απαντήσεις αναδιαμόρφωσης του σχήματος.

Στο post test καθώς το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών αυξήθηκε στη συγκεκριμένη άσκηση, τα λάθη τους υποτριπλασιάστηκαν. 3 απαντήσεις χρησιμοποίησαν περισσότερα από τέσσερα σχήματα στην αναδιαμόρφωση, σε 2 απαντήσεις οι μαθητές ένωσαν την πλευρά ενός σχήματος με ένα σημείο άλλου σχήματος, σε 1 απάντηση χρησιμοποιήθηκαν λιγότερα σχήματα, σε μία απάντηση χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικά σχήματα, ενώ μία απάντηση θεωρήθηκε λανθασμένη διότι ήταν επανάληψη μιας άλλης απάντησης της ίδιας μαθήτριας.



Εικόνα 33: Παραδείγματα λανθασμένης αναδιαμόρφωσης του σχήματος.

Άσκηση 5

Στο πρόβλημα υπολογισμού του εμβαδού ενός σύνθετου σχήματος οι απαντήσεις των μαθητών ταξινομήθηκαν σε κατηγορίες ανάλογα με το αν έλυσαν σωστά το πρόβλημα, μερικώς σωστά ή λάθος.

		Πριν την παρέμβαση		Μετά την παρέμβαση	
		Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα
Σωστή απάντηση		6	18,8%	15	46,9%
Μερικώς σωστή απάντηση	Διαχωρισμός και μερική επίλυση	13	40,6%	12	37,5%
	Διαχωρισμός	6	18,8%	3	9,4%
Λάθος απάντηση	Αναποτελεσματικός διαχωρισμός	2	6,3%	2	6,3%
	Περίμετρος	2	6,3%	-	-
Χωρίς απάντηση		3	9,4%	-	-
Σύνολο		**32**	**100%**	**32**	**100%**

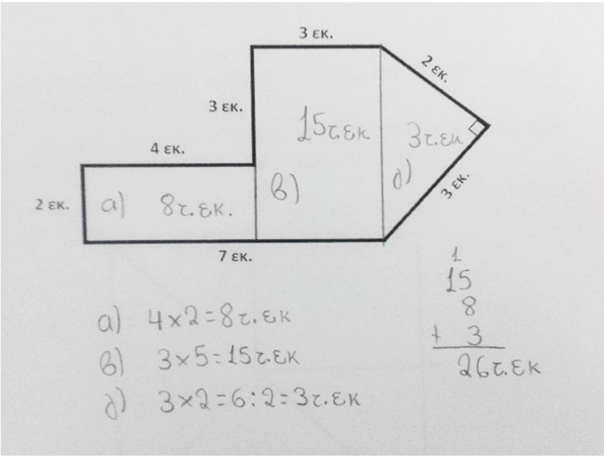
Πίνακας 12: Απαντήσεις των μαθητών στον υπολογισμό του εμβαδού σύνθετου σχήματος.

Στο pre test 6 μαθητές (18,8%) έλυσαν σωστά το πρόβλημα, διαχωρίζοντας το σχήμα σε υποσχήματα, υπολογίζοντας το εμβαδόν των υποσχημάτων και εν τέλει το συνολικό εμβαδόν, ενώ στο post test 15 μαθητές (46,9%) απάντησαν σωστά.

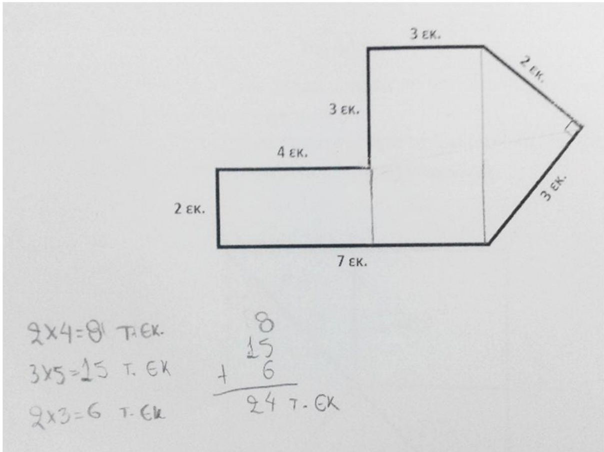
19 μαθητές (59,4%) στο pre test έλυσαν μερικώς σωστά το πρόβλημα, από τους οποίους οι 13 (40,6%) διαχώρισαν το σχήμα σε υποσχήματα και υπολόγισαν το εμβαδόν κάποιων υποσχημάτων και οι 6 (18,8%) έκαναν απλά διαχωρισμό του σχήματος. Στο post test 15 μαθητές (46,9%) έλυσαν μερικώς σωστά το πρόβλημα. Από αυτούς οι 12 (37,5%) διαχώρισαν το σχήμα και υπολόγισαν το εμβαδόν μερικών υποσχημάτων, ενώ οι 3 (9,4%) διαχώρισαν απλά το σχήμα σε υποσχήματα.

Λάθος απάντηση έδωσαν 4 μαθητές (12,5%) στο pre test και 2 μαθητές (6,3%) στο post test. Από αυτούς τους μαθητές στο pre test 2 (6,3%) διαχώρισαν το σχήμα αλλά όχι με λειτουργικό τρόπο ώστε να μπορέσουν να συνεχίσουν την άσκηση ή να αποδείξουν ότι κατανόησαν τι έκαναν και 2 μαθητές (6,3%) υπολόγισαν την περίμετρο του σχήματος. Στο post test οι 2 μαθητές που απάντησαν λάθος έκαναν αναποτελεσματικό διαχωρισμό. Τέλος, 3 μαθητές (9,4%) στο pre test δεν απάντησαν στην άσκηση.

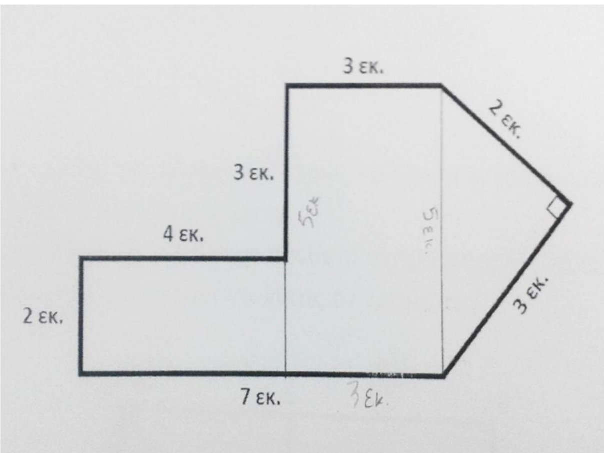
Σωστή απάντηση



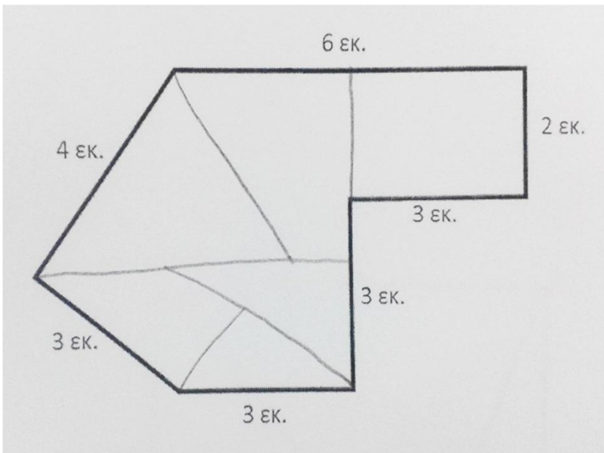
Διαχωρισμός και μερική επίλυση



Διαχωρισμός



Αναποτελεσματικός διαχωρισμός



Εικόνα 34: Παραδείγματα απαντήσεων στον υπολογισμό του εμβαδού σύνθετου σχήματος.

Σύνοψη των ποσοστών επιτυχίας των μαθητών σε κάθε άσκηση

Μετά τη σχεδίαση και την πιλοτική εφαρμογή του ερωτηματολογίου ξεχωρίσαμε τις ασκήσεις που ήταν πιο δύσκολες για τους μαθητές. Αυτές είναι η 1β, δηλαδή η αναγνώριση σύνθετων σχημάτων, η 2, δηλαδή ο διαχωρισμός ενός σχήματος και η 4β, δηλαδή η αναδιαμόρφωση ενός σχήματος.

	Πριν την παρέμβαση	Μετά την παρέμβαση
Άσκηση 1α	78.1%	65.6%
Άσκηση 1β	40.6%	59.4%
Άσκηση 2	56.3%	65.6%
Άσκηση 3	90.6%	90.6%
Άσκηση 4α	81.3%	87.1%
Άσκηση 4β	46.9%	81.3%
Άσκηση 5	78.1%	93.8%

Πίνακας 35: Ποσοστά επιτυχίας σε κάθε άσκηση των τεστ.

Στο πρώτο μέρος της άσκησης 1 το ποσοστό επιτυχίας καθορίστηκε με βάση πόσοι μαθητές κατάφεραν να αναγνωρίσουν και τα πέντε γεωμετρικά σχήματα. Στο δεύτερο μέρος της άσκησης 1 επιτυχημένοι θεωρήθηκαν οι μαθητές που αναγνώρισαν τουλάχιστον δύο σύνθετα γεωμετρικά σχήματα. Στην άσκηση 2 θεωρήθηκαν επιτυχημένοι όσοι μαθητές διαχώρισαν το σχήμα 7 φορές και πάνω ώστε να θεωρήσουμε ότι αυτοί οι διαχωρισμοί δεν πραγματοποιήθηκαν τυχαία. Στις ασκήσεις 3 και 4α θεωρήθηκαν επιτυχημένοι όσοι μαθητές έδωσαν τη σωστή απάντηση. Στο δεύτερο μέρος της άσκησης 4 θεωρήθηκαν επιτυχημένοι όσοι μαθητές πραγματοποίησαν τουλάχιστον 1 αναδιαμόρφωση στο σχήμα, καθώς ακόμη και η μια αναδιαμόρφωση μπορεί να δείξει ότι οι μαθητές έχουν ικανότητες μερεολογικής τροποποίησης. Στην άσκηση 5 θεωρήθηκαν επιτυχημένοι οι μαθητές που διαχώρισαν το σχήμα σε υποσχήματα ακόμη κι αν δεν συνέχισαν στον υπολογισμό του εμβαδού.

ΙΙ. Συνολική επίδοση και σύγκριση μέσων όρων

Κωδικοποίηση δεδομένων

Για τον υπολογισμό της ποσοτικής επίδοσης των μαθητών τα δεδομένα κωδικοποιήθηκαν με διαφορετικό τρόπο έτσι ώστε όλες οι ασκήσεις να έχουν τον ίδιο σχεδόν συντελεστή. Η άσκηση 1 βαθμολογήθηκε με 2 μονάδες από τις οποίες 0,5 μονάδες αντιστοιχούσαν στο πρώτο μέρος της άσκησης και 1,5 μονάδες στο δεύτερο μέρος της άσκησης. Η άσκηση 2 βαθμολογήθηκε με 2 μονάδες και η άσκηση 3 με 1 μονάδα. Η άσκηση 4 βαθμολογήθηκε με 3 μονάδες καθώς ήταν η πιο σημαντική για την εξέταση της μερεολογικής τροποποίησης και κατ' επέκταση της λειτουργικής κατανόησης, από τις οποίες 1 μονάδα δόθηκε στο πρώτο μέρος και 2 μονάδες στο δεύτερο μέρος της. Τέλος, η άσκηση 5 βαθμολογήθηκε με 2 μονάδες.

Πιο αναλυτικά, στην άσκηση 1 έλαβαν 0,5 μονάδες οι μαθητές που αναγνώρισαν και τα πέντε απλά σχήματα, ενώ 0 μονάδες όλοι οι υπόλοιποι, 1,5 μονάδες όσοι μαθητές αναγνώρισαν 6 έως 15 σύνθετα σχήματα, 1 μονάδα οι μαθητές που αναγνώρισαν 3 έως 5 σύνθετα σχήματα, 0,5 μονάδες οι μαθητές που αναγνώρισαν 1 ή 2 σύνθετα σχήματα, ενώ 0 μονάδες οι μαθητές που δεν αναγνώρισαν κάποιο σύνθετο σχήμα. Οι μονάδες για το πρώτο και το δεύτερο μέρος της άσκησης υπολογίστηκαν αθροιστικά.

Στην άσκηση 2 δόθηκαν 2 μονάδες στους μαθητές που έκαναν 16 έως και 23 διαχωρισμούς, 1,5 μονάδες σε όσους έκαναν 10 έως και 15 διαχωρισμούς, 1 μονάδα σε αυτούς που έκαναν 5 έως και 9 διαχωρισμούς, 0,5 μονάδες σε όσους έκαναν 1 έως και 4 διαχωρισμούς, ενώ 0 μονάδες στους μαθητές που δεν έκαναν κάποιο διαχωρισμό.

Στην άσκηση 3 οι μαθητές που επέλεξαν τη σωστή απάντηση έλαβαν 1 μονάδα ενώ οι μαθητές που απάντησαν λάθος δεν έλαβαν μονάδες.

Στο πρώτο μέρος της άσκησης 4 βαθμολογήθηκαν με 1 όσοι μαθητές έκαναν σωστό διαχωρισμό και με 0 όσοι μαθητές έκαναν λανθασμένο διαχωρισμό. Στο δεύτερο μέρος της άσκησης οι μαθητές βαθμολογήθηκαν με 2 μονάδες εάν έκαναν 6 έως και 13 σωστές αναδιαμορφώσεις, με 1,5 μονάδες για 4 έως και 5 σωστές αναδιαμορφώσεις, με 1 μονάδα εάν έκαναν 2 έως και 3 σωστές αναδιαμορφώσεις, με 0,5 μονάδες για 1 σωστή αναδιαμόρφωση και με 0 μονάδες εάν δεν είχαν κάνει κάποια αναδιαμόρφωση ή πραγματοποιούσαν λανθασμένη αναδιαμόρφωση.

Στην άσκηση 5 οι μαθητές που έλυσαν σωστά το πρόβλημα έλαβαν 2 μονάδες, οι μαθητές που έκαναν μερική επίλυση του προβλήματος έλαβαν 1,5 μονάδες, όσοι διαχώρισαν σωστά το σχήμα έλαβαν 0,5 μονάδες, ενώ όσοι έκαναν λάθος διαχωρισμό ή είχαν λάθος απάντηση ή δεν εκτέλεσαν την άσκηση έλαβαν 0 μονάδες.

Άσκηση		Μονάδες	
Άσκηση 1	1α	0,5	2
	1β	1,5	
Άσκηση 2			2
Άσκηση 3			1
Άσκηση 4	4α	1	3
	4β	2	
Άσκηση 5			2
Σύνολο			**10**

Πίνακας 36: Σύνοψη της κωδικοποίησης των δεδομένων για τα ποσοτικά αποτελέσματα.

Σύγκριση μέσων όρων

Η συνολική επίδοση των μαθητών στο τεστ πριν την παρέμβαση ήταν M=4.844, SD=1.7572, ενώ στο τεστ μετά την παρέμβαση η συνολική επίδοση των μαθητών ήταν M=5.969, SD=2.0118. Η διαφορά αυτή είναι στατιστικά σημαντική (t=3.684, df=31, p=0.001<0.005).

Στην $1^{η}$ άσκηση η επίδοση των μαθητών πριν την παρέμβαση ήταν M=0.719, SD=0.5671 και μετά την παρέμβαση M=0.891, SD=0.6055. Η διαφορά δεν είναι στατιστικά σημαντική (t=1.878, df=31, p=0.07>0.05). Στο πρώτο μέρος της άσκησης 1 η επίδοση πριν την παρέμβαση ήταν M=0.375, SD=0.22 και μετά την παρέμβαση M=0.328, SD=0.2413. Η διαφορά αυτή δεν είναι στατιστικά σημαντική (Z=1, p=0.32>0.05). Στο δεύτερο μέρος της άσκησης 1 ο μέσος όρος πριν ήταν M=0.344, SD= 0.4826, ενώ μετά M=0.531, SD=0.5227. Η διαφορά αυτή είναι στατιστικά σημαντική (Z=2.307, p=0.021<0.05).

Στη $2^{η}$ άσκηση η επίδοση των μαθητών πριν την παρέμβαση ήταν M=0.969, SD=0.4004, ενώ μετά την παρέμβαση ο μέσος όρος ήταν M=1.25, SD=0.4919. Η διαφορά αυτή είναι στατιστικά σημαντική (t=2.958, df=31, p=0.006<0.01).

Στην 3η άσκηση η επίδοση των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση ήταν M=0.91, SD=0.296. Δεν υπάρχει διαφορά στην επίδοση (Z=0, p=1).

Στην 4η άσκηση η επίδοση των μαθητών πριν την παρέμβαση ήταν M=1.234, SD= 0.7069, ενώ μετά την παρέμβαση M=1.563, SD=0.7803. Η διαφορά αυτή είναι στατιστικά σημαντική (t=2.559, df=31, p=0.016<0.05). Στο πρώτο μέρος της άσκησης 4 ο μέσος όρος πριν την παρέμβαση ήταν M=0.81, SD=0.397, ενώ μετά την παρέμβαση M=0.84, SD=0.369. Η διαφορά αυτή δεν είναι στατιστικά σημαντική (Z=0.577, p=0.56>0.05). Στο δεύτερο μέρος της άσκησης 4 ο μέσος όρος πριν την παρέμβαση ήταν M=0.422, SD=0.4937, ενώ μετά την παρέμβαση M=0.688, SD=0.5351. Η διαφορά αυτή είναι στατιστικά σημαντική (t=2.468. df=31, p=0.019<0.05).

Στην 5η άσκηση ο μέσος όρος πριν την παρέμβαση ήταν M=0.875, SD=0.6720, ενώ μετά την παρέμβαση M=1.359, SD=0.6628. Η διαφορά αυτή είναι στατιστικά σημαντική (t=4.360, df=31, p<0.001).

Άσκηση	Pre test	Post test	Συντελεστής
Αναγνώριση απλών σχημάτων	75%	65,6%	5%
Αναγνώριση σύνθετων σχημάτων	22,9%	35,4%	15%
Διαχωρισμός σχήματος	48,5%	62,5%	20%
Σύνθεση σχήματος	91%	91%	10%
Διαχωρισμός σύνθετου σχήματος	81%	84%	10%
Αναδιαμόρφωση σχήματος	21,1%	34,4%	20%
Υπολογισμός εμβαδού σύνθετου σχήματος	43,8%	68%	20%
Συνολική ποσοτική επίδοση	**48,4%**	**59,7%**	**100%**

Πίνακας 37: Σύνοψη των μέσων όρων και του συντελεστή σε κάθε άσκηση.

Συσχέτιση με τη μαθηματική επίδοση

Η μαθηματική επίδοση των μαθητών αξιολογήθηκε από τους εκπαιδευτικούς της τάξης οι οποίοι, όπως προαναφέρθηκε, ταξινόμησαν τους μαθητές σε τρεις ομάδες: χαμηλή, μέση και υψηλή, σύμφωνα με την επίδοση που είχαν παρουσιάσει οι μαθητές στα μαθηματικά τη φετινή και την περσινή χρονιά. Η μαθηματική επίδοση λοιπόν φαίνεται ότι συσχετίζεται μέτρια με το τεστ πριν την παρέμβαση ($r=0.59$, $p<0.001$) και ισχυρά με το τεστ μετά την παρέμβαση ($r=0.73$, $p<0.001$).

Νωρίτερα διαπιστώσαμε πως η συνολική επίδοση των μαθητών μετά την παρέμβαση βελτιώθηκε στατιστικά σημαντικά σε σχέση με την επίδοση πριν την παρέμβαση. Τι συμβαίνει όμως στην επίδοση των τριών ομάδων μαθηματικής επίδοσης;

Η ομάδα υψηλής μαθηματικής επίδοσης στο τεστ πριν την παρέμβαση είχε $M=5{,}65$, $SD=1{,}6179$, ενώ μετά την παρέμβαση $M=7{,}15$, $SD=1{,}2962$. Η διαφορά αυτή είναι στατιστικά σημαντική ($t=4{,}806$, $df=16$, $p<0{,}001$).

Ο μέσος όρος της ομάδας μέσης μαθηματικής επίδοσης πριν την παρέμβαση ήταν $M=4{,}46$, $SD=1{,}3501$, ενώ μετά την παρέμβαση είχαν $M=5{,}27$, $SD=1{,}7083$. Η διαφορά αυτή δεν ήταν στατιστικά σημαντική ($t=1{,}121$, $df=10$, $p=0{,}289>0{,}05$).

Η ομάδα χαμηλής μαθηματικής επίδοσης πριν την παρέμβαση είχε $M=2{,}5$, $SD=0{,}5774$, ενώ μετά την παρέμβαση $M=2{,}88$, $SD=0{,}8539$. Η διαφορά αυτή δεν ήταν στατιστικά σημαντική ($t=1{,}000$, $df=3$, $p=0{,}391>0{,}05$).

	Πριν την παρέμβαση		Μετά την παρέμβαση	
Ομάδες μαθηματικής επίδοσης	M	SD	M	SD
Υψηλή	5,65	1,62	7,15**	1,3
Μέση	4,46	1,35	5,27	1,71
Χαμηλή	2,50	0,58	2,86	0,85
Μέσος όρος	4,84	1,76	5,97**	2,01

Πίνακας 38: Μέσος όρος, τυπική απόκλιση και στατιστικά σημαντική διαφορά ανά ομάδα μαθηματικής επίδοσης.

** Η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική.

Συγκρίθηκαν επίσης οι επιδόσεις των μαθητών στη λειτουργική κατανόηση που ανήκουν σε διαφορετική ομάδα μαθηματικής επίδοσης. Σύμφωνα με τα Post Hoc (LSD) τεστ του ελέγχου ANOVA διαπιστώνουμε πως ανάμεσα στους μαθητές υψηλής μαθηματικής επίδοσης και μέσης μαθηματικής επίδοσης υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά τόσο πριν την παρέμβαση ($p=0.028<0.05$) όσο και μετά την παρέμβαση ($p=0.001<0.005$). Επιπλέον, η διαφορά ανάμεσα στην ομάδα μέσης επίδοσης και χαμηλής επίδοσης είναι στατιστικά σημαντική πριν την παρέμβαση ($p=0.042<0.05$) αλλά και μετά την παρέμβαση ($p=0.002<0.005$). Τέλος, αναμενόμενο είναι ότι και η διαφορά ανάμεσα στην ομάδα υψηλής μαθηματικής επίδοσης και χαμηλής μαθηματικής επίδοσης είναι στατιστικά σημαντική πριν την παρέμβαση ($p=0.001<0.005$) και μετά την παρέμβαση ($p<0.001$).

Συμπεράσματα

Στην αναγνώριση απλών σχημάτων η επίδοση των μαθητών ήταν ήδη σε υψηλά επίπεδα και παρουσίασε μικρή πτώση μετά την παρέμβαση, η οποία όμως δεν ήταν στατιστικά σημαντική. Αντιθέτως, η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίσουν σύνθετα σχήματα βελτιώθηκε στατιστικά σημαντικά, εφόσον αρχικά ο κάθε μαθητής αναγνώριζε κατά μέσο όρο 1 σύνθετο σχήμα, ενώ μετά την παρέμβαση αντιστοιχούσαν δύο σύνθετα σχήματα σε κάθε μαθητή. Τα λάθη που παρατηρήθηκαν αφορούσαν στην ονομασία των σχημάτων με τη χρήση των κεφαλαίων γραμμάτων. Φάνηκε ότι οι μισοί τουλάχιστον μαθητές δεν ήταν ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με τη σωστή ονομασία των σχημάτων. Ωστόσο, χρησιμοποιούσαν αντίστοιχους τρόπους ονομασίας με παύλες ή κόμματα ανάμεσα στα γράμματα που αναπαριστούσαν τις κορυφές των σχημάτων. Επιπλέον, ονόμαζαν τα σχήματα χρησιμοποιώντας το κεφαλαίο γράμμα όποιου σημείο βρισκόταν πάνω στο σχήμα.

Στο θέμα του διαχωρισμού ενός σχήματος σε υποσχήματα η διαφορά ανάμεσα στο τεστ πριν την παρέμβαση και στο τεστ μετά την παρέμβαση ήταν στατιστικά σημαντική, καθώς ο μέσος όρος των σωστών διαχωρισμών πριν ήταν 7 ανά μαθητή, ενώ μετά αντιστοιχούσαν 10 σωστές απαντήσεις σε κάθε μαθητή. Για τον διαχωρισμό οι μαθητές χρησιμοποιούν κυρίως ευθύγραμμα τμήματα, όπως τέσσερα οριζόντια ή κάθετα ή διαγώνια ευθύγραμμα τμήματα. Έπειτα, συχνά χρησιμοποιούν τις διαγωνίους του αρχικού σχήματος και προσθέτουν ένα ακόμη ευθύγραμμο τμήμα, ή σχεδιάζουν έναν σταυρό και ένα ευθύγραμμο τμήμα. Γενικότερα οι απαντήσεις τους χαρακτηρίζονται από ευθύγραμμα τμήματα, ενώ ορισμένοι μαθητές (περίπου 12,5% πριν την παρέμβαση και περίπου 28% μετά την παρέμβαση) φάνηκε ξεκάθαρα ότι χρησιμοποίησαν και σχήματα στις απαντήσεις τους για τον διαχωρισμό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αυτό για το οποίο δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι είναι για το ποιοι μαθητές πραγματοποίησαν τον διαχωρισμό του σχήματος εσκεμμένα διαχωρίζοντας νοερά το σχήμα και έπειτα εφαρμόζοντας τον αντίστοιχο διαχωρισμό και στο χαρτί, και ποιοι χάραζαν τυχαία ευθύγραμμα τμήματα μέχρι να μετρήσουν 5 επιμέρους σχήματα. Τέλος, τα συχνότερα λάθη των μαθητών ήταν ο διαχωρισμός σε περισσότερα ή λιγότερα σχήματα καθώς και ο διαχωρισμός αγνοώντας κάποιο κομμάτι του σχήματος. Αυτό το τελευταίο γεγονός μπορεί να ερμηνευθεί από πολλές οπτικές. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι κάποιοι μαθητές αδυνατούν να δουν το σχήμα και συνολικά αλλά και σε μέρη ταυτόχρονα με αποτέλεσμα κατά τον διαχωρισμό να αγνοούν κάποιο κομμάτι του είτε επειδή δεν μπορούν να το «δικαιολογήσουν» σαν μέρος του σχήματος είτε επειδή απλά δεν το βλέπουν.

Στη σύνθεση ενός σχήματος με τη χρήση δύο υποσχημάτων οι μαθητές δεν αντιμετώπισαν κάποιο πρόβλημα. Τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση μόνο τρεις μαθητές δεν απάντησαν σωστά στην ερώτηση. Λίγοι μόνο μαθητές σχεδίασαν πάνω στα σχήματα ώστε να βρουν τη σωστή απάντηση. Άρα οι περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να συνθέσουν τα δύο σχήματα σε ένα μεγαλύτερο σχήμα χωρίς τη χρήση κάποιου σχεδίου. Ωστόσο δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ποιοι πραγματικά έκαναν οπτικοποίηση των σχημάτων και ποιοι επέλεξαν τυχαία ή αντέγραψαν από συμμαθητές τους.

Κατά τον διαχωρισμό ενός σύνθετου σχήματος σε τέσσερα υποσχήματα στο πρώτο μέρος της άσκησης 4, οι μαθητές ανταποκρίθηκαν θετικά, καθώς το 80% πριν την παρέμβαση και το 84% μετά την παρέμβαση κατάφεραν να διαχωρίσουν σωστά το σχήμα σε τέσσερα επιμέρους σχήματα. Το σχήμα είχε σύνθετη μορφή στην οποία ξεχώριζαν ένα ορθογώνιο και ένα τρίγωνο, με σκοπό οι μαθητές να διευκολυνθούν στον διαχωρισμό ώστε να μπορέσουν να αφιερώσουν περισσότερο χρόνο αργότερα στην αναδιαμόρφωση του σχήματος. Πραγματικά, αυτή η μορφή του σχήματος επηρέασε τους μαθητές στον τρόπο που το χώρισαν καθώς το 85% πριν την παρέμβαση και το 82% μετά την παρέμβαση χώρισε το σχήμα με βάση το ορθογώνιο και το τρίγωνο που εξείχαν από το σχήμα. Αξίζει να σημειωθεί πως το 66% περίπου των μαθητών άλλαξε τη στρατηγική διαχωρισμού του σχήματος μετά την παρέμβαση σε σχέση με το τεστ πριν την παρέμβαση. Αυτό αποδεικνύει πώς διαθέτουν ευελιξία στη χρήση των στρατηγικών διαχωρισμού σχημάτων και δεν διστάζουν να χρησιμοποιήσουν διαφορετική στρατηγική.

Στην αναδιαμόρφωση του σχήματος σε νέο σχήμα οι μαθητές σημείωσαν αρκετή πρόοδο. Πριν την παρέμβαση σχεδόν οι μισοί μαθητές κατάφεραν να δώσουν τουλάχιστον μία σωστή απάντηση αναδιαμόρφωσης, ενώ μετά την παρέμβαση το

80% των μαθητών έδωσαν έστω και μία απάντηση. Πριν την παρέμβαση ο μέσος όρος των αναδιαμορφώσεων των μαθητών ήταν μία, ενώ μετά την παρέμβαση σε κάθε μαθητή αντιστοιχούσαν δύο αναδιαμορφώσεις. Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης και το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών, δηλαδή πόσες σωστές απαντήσεις έδωσαν σε σχέση με το σύνολο των απαντήσεων που έδωσαν. Παρατηρούμε λοιπόν πως πριν την παρέμβαση το ποσοστό επιτυχίας τους ήταν 55%, ενώ μετά την παρέμβαση το ποσοστό αυξήθηκε στο 89%. Συνεπώς μειώθηκαν οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών. Μελετήθηκε επιπλέον και η ποιότητα της αναδιαμόρφωσης που πραγματοποίησαν οι μαθητές και διαπιστώθηκε πως σε γενικές γραμμές στις μισές απαντήσεις έκαναν μερική αναδιαμόρφωση του σχήματος εφόσον διατήρησαν δύο υποσχήματα ίδια και περιέστρεψαν τα άλλα δύο υποσχήματα, ενώ στις άλλες μισές απαντήσεις έκαναν πλήρη αναδιαμόρφωση του σχήματος αλλάζοντας τον προσανατολισμό και τη θέση όλων των σχημάτων. Τα λάθη που έκαναν οι μαθητές στην αναδιαμόρφωση ήταν η χρήση λιγότερων ή περισσότερων σχημάτων από τα τέσσερα αρχικά. Επιπλέον, κάποιοι μαθητές χρησιμοποίησαν διαφορετικά σχήματα ενώ άλλοι μαθητές δεν ένωσαν σωστά τα σχήματα είτε σχεδιάζοντάς τα εντελώς ξεχωριστά είτε συνδέοντας την πλευρά ενός σχήματος με το σημείο άλλου σχήματος διαχωρίζοντας έτσι σε δύο ξεχωριστά σχήματα.

Στον υπολογισμό του εμβαδού σύνθετου σχήματος οι μαθητές παρουσίασαν στατιστικά σημαντική βελτίωση μετά την παρέμβαση. Περισσότεροι μαθητές εντάχθηκαν στην κατηγορία της σωστής επίλυσης του προβλήματος, διαχωρίζοντας σωστά το σχήμα σε επιμέρους σχήματα και υπολογίζοντας όλα τα εμβαδά καθώς και το τελικό.

Συζήτηση

Μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας είδαμε αρκετές έρευνες οι οποίες διαπίστωσαν ότι η χωρική ικανότητα μπορεί να βελτιωθεί με τη χρήση της τεχνολογίας (Kordaki & Balomenou, 2006; Rafi, Samsudin, Said, 2008; Guven & Kosa, 2008; Battista, 2002; Olkun, 2003; Yang & Chen, 2010; Kurtulus, 2013; Hauptman, 2010, Baki, Kosa & Guven, 2009; Dixon, 1997; La Ferla, Olkun, Akkurt, Alibeyoglu, Gonulates & Accascina, 2009) και οι καταλληλότερες δραστηριότητες για την επίτευξη αυτού του σκοπού είναι η σχεδίαση, η οπτικοποίηση και η σύγκριση γεωμετρικών σχημάτων (NCTM, 2000). Πιο εξειδικευμένα, έρευνες που ασχολήθηκαν με τη λειτουργική κατανόηση του σχήματος διαπίστωσαν πως η ανάπτυξή της συνδέεται με την ανάπτυξη και των άλλων ειδών κατανόησης (αντιληπτική, λεκτική, διαδικαστική) και μπορεί να βελτιωθεί (Clements, Battista, Sarama & Swaminathon, 1997; Chang, Wu, Lai & Sung, 2014), ειδικότερα με τη χρήση των κατάλληλων δραστηριοτήτων και εργαλείων (Duval, 1995).

Στην έρευνά μας προσπαθήσαμε να συμπεριλάβουμε δραστηριότητες κατάλληλες για την ανάπτυξη της λειτουργικής κατανόησης με αποτέλεσμα να έχουμε πράγματι βελτίωση στη λειτουργική κατανόηση των μαθητών. Η συνολική επίδοση των μαθητών στη λειτουργική κατανόηση με έμφαση στις μερεολογικές τροποποιήσεις βελτιώθηκε σημαντικά μετά την παρέμβαση. Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με την έρευνα των Chang, Wu, Lai & Sung (2014) κατά την οποία η λειτουργική κατανόηση αυξήθηκε από 40% σε 47%. Άρα παρατηρούμε αντίθετα αποτελέσματα σε σχέση με έρευνες στις οποίες η χωρική οπτικοποίηση δεν βελτιώθηκε καθόλου (Sexton, 1992; Ferrini-Mundy, 1987; Zavotka, 1987). Τα χαμηλά ποσοστά επίδοσης στη λειτουργική κατανόηση υποστηρίζονται και από τους Chang, Wu, Lai & Sung (2014) οι οποίοι διαπίστωσαν ότι η λειτουργική κατανόηση είναι χαμηλότερη σε σχέση με τα άλλα είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος καθώς είναι πολύπλοκη και αναπτύσσεται δύσκολα.

Σύμφωνα με τον Battista (1990) η χωρική ικανότητα συσχετίζεται ισχυρά με τη μαθηματική επίδοση αλλά και με την επίδοση στη γεωμετρία ειδικότερα (Battista, 2007; Kalogirou & Gagatsis, 2011). Στην έρευνά μας διαπιστώσαμε πράγματι σημαντική συσχέτιση. Διαχωρίζοντας τους μαθητές σε ομάδες σύμφωνα με την επίδοσή τους στα μαθηματικά παρατηρούμε πως οι μαθητές της υψηλής μαθηματικής επίδοσης βελτιώθηκαν περισσότερο σε σχέση με τους υπόλοιπους. Ακολουθούν οι μαθητές της μέσης μαθηματικής επίδοσης και τέλος οι μαθητές της χαμηλής μαθηματικής επίδοσης των οποίων η ικανότητα λειτουργικής κατανόησης δεν βελτιώθηκε καθόλου. Αυτό ίσως να μας προκαλούσε έκπληξη καθώς σύμφωνα με έρευνες, όπως στην επίλυση προβλημάτων (Lin, Shao, Wong & Niramitranon, 2011) οι μαθητές της χαμηλής επίδοσης βελτιώνονται περισσότερο καθώς υπάρχουν μεγαλύτερα περιθώρια βελτίωσης γι' αυτούς. Ωστόσο, έχει αναφερθεί ότι η ικανότητα της λειτουργικής κατανόησης έχει ιδιαίτερη φύση και η κατάκτησή της είναι πιο δύσκολη από άλλες έννοιες (Chang, Wu, Lai & Sung, 2014). Αυτό συμβαίνει διότι απαιτεί ανώτερης τάξης διεργασίες, τις οποίες δεν μπορούν να επιτύχουν όλοι οι μαθητές. Είναι ακόμη πιθανό οι μαθητές που ανήκαν στην ομάδα χαμηλής μαθηματικής επίδοσης να μην είχαν ενεργό ρόλο στη διδακτική παρέμβαση με αποτέλεσμα να μην ωφεληθούν στον ίδιο βαθμό με τους υπόλοιπους συμμαθητές τους.

Περιορισμοί της έρευνας

Η παρούσα έρευνα υπόκειται σε περιορισμούς. Αρχικά το δείγμα της έρευνας δεν επιλέχθηκε με την απλή τυχαία δειγματοληψία αλλά μέσω της βολικής δειγματοληψίας. Επιπλέον το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό και δεν είναι αντιπροσωπευτικό. Επομένως τα αποτελέσματα της έρευνας δεν μπορούν να γενικευτούν σε όλο τον πληθυσμό αλλά ούτε και σε άλλες συνθήκες.

Ένας ακόμη περιορισμός είναι η μη ύπαρξη ομάδας ελέγχου. Η ύπαρξη ομάδας ελέγχου ενδεχομένως θα μας βοηθούσε να διαπιστώσουμε με μεγαλύτερη ασφάλεια εάν η βελτίωση της επίδοσης των μαθητών οφείλεται στη διδακτική παρέμβαση είτε είναι αποτέλεσμα της διδασκαλίας των εκπαιδευτικών της τάξης είτε εξαρτάται από άλλους παράγοντες.

Ο χρόνος της διδακτικής παρέμβασης αποτελεί επίσης περιορισμό καθώς οι δύο βδομάδες της έρευνας και συγκεκριμένα οι τρεις διδακτικές ώρες που αφιερώθηκαν στη διδακτική παρέμβαση δεν ήταν αρκετές ώστε να έχουν σημαντική επίδραση στην ικανότητα των μαθητών για χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων.

Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης πραγματοποιήθηκε μόνο συμπτωματική παρατήρηση των μαθητών. Δεν πραγματοποιήθηκε δηλαδή συστηματική παρατήρηση των διαδικασιών και των συμπεριφορών των μαθητών, η οποία θα μπορούσε να μας δώσει αρκετά στοιχεία για τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν κατά τον χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων.

Τέλος, στους περιορισμούς της έρευνας θα πρέπει να αναφέρουμε και την αξιολόγηση των μαθητών από τους δασκάλους με βάση τη μαθηματική τους επίδοση. Οι μαθητές δεν είχαν αξιολογηθεί ακόμη γραπτά και συνεπώς ήταν δύσκολο για τους δασκάλους να τους ταξινομήσουν σε ομάδες επίδοσης με βάση τη μέχρι τώρα πορεία τους στα μαθηματικά.

Εκπαιδευτικές εφαρμογές

Οι εκπαιδευτικές εφαρμογές που προκύπτουν από την έρευνά μας αφορούν στη διδασκαλία της γεωμετρίας στα σχολεία, στη χρήση της τεχνολογίας, στην επιμόρφωση των δασκάλων σε νέους τρόπους διδασκαλίας, νέα αντικείμενα και νέα μέσα, στην κατάλληλη εκπαίδευση των υποψήφιων δασκάλων, στην αναδιαμόρφωση των αναλυτικών προγραμμάτων αλλά και των σχολικών εγχειριδίων.

Αρχικά, φάνηκε ότι η λειτουργική κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος και γενικότερα η χωρική ικανότητα μπορεί να βελτιωθεί. Αρκεί να αναλογιστεί κανείς ότι με παρέμβαση τριών διδακτικών ωρών αυξήθηκε η ικανότητα των μαθητών στον χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων. Άρα μία διδασκαλία προσανατολισμένη σε αυτόν τον σκοπό θα μπορούσε να προσφέρει σημαντικά οφέλη στη χωρική ικανότητα των μαθητών και στον τρόπο που χειρίζονται και αντιμετωπίζουν τα γεωμετρικά σχήματα.

Ακόμη, με τη χρήση της τεχνολογίας καθίσταται δυνατή η εκτέλεση μιας πληθώρας λειτουργιών που με τα συμβατικά μέσα θα ήταν δύσκολες να εφαρμοστούν. Για παράδειγμα, πόσο εύκολο θα ήταν να κόψει ένας μαθητής και να ενώσει γεωμετρικά σχήματα ή να χρησιμοποιήσει έναν μεγάλο αριθμό γεωμετρικών σχημάτων για να συγκρίνει και να κατασκευάσει δομές χωρίς την τεχνολογία;

Όλα αυτά βέβαια θα μπορούσαν να γίνουν πραγματικότητα μέσω της κατάλληλης επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών αλλά και της εκπαίδευσης των υποψήφιων δασκάλων, οι οποίοι θα πρέπει να μαθαίνουν να βρίσκουν νέα μέσα διδασκαλίας και να προσαρμόζουν τη διδασκαλία τους σε νέες συνθήκες και στις νέες απαιτήσεις της έρευνας και των δυνατοτήτων των μαθητών.

Τέλος, υψίστης σημασίας είναι και η αναδιαμόρφωση των σχολικών εγχειριδίων και των αναλυτικών προγραμμάτων ώστε να συμβαδίζουν όχι μόνο με τα καταλληλότερα εκπαιδευτικά πρότυπα αλλά και να βρίσκονται ένα βήμα πριν τη διδασκαλία, υποστηρίζοντάς τη και ανοίγοντας νέους δρόμους για τη βελτίωσή της.

Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Αρχικά η συγκεκριμένη έρευνα θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε μεγαλύτερο δείγμα ούτως ώστε τα αποτελέσματα να έχουν τη δυνατότητα να γενικευτούν για όλο τον εξεταζόμενο πληθυσμό. Επιπλέον, σε μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να εξεταστούν περισσότερες μεταβλητές, όπως το φύλλο των μαθητών, η ηλικία και η επίδοση στη γεωμετρία.

Ακόμη, η χρήση ενός συνδυασμού εργαλείων για τη διδακτική παρέμβαση θα είχε ενδιαφέρον. Η χρήση της τεχνολογίας σε συνδυασμό με τα χειραπτικά υλικά θα μπορούσε να εξεταστεί σε αντιδιαστολή με παρεμβάσεις που χρησιμοποιούν μόνο χειραπτικά υλικά, μόνο την τεχνολογία ή τίποτα από αυτά.

Ενδιαφέρουσα θα ήταν και η αφιέρωση περισσότερου χρόνου στη διδακτική παρέμβαση με σκοπό τη μελέτη της εξεταζόμενης έννοιας για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα με πιθανότητα για μεγαλύτερη αύξηση των επιδόσεων ποσοτικά και ποιοτικά. Ακόμη, η διατήρηση της έννοιας μετά από μήνες ή σε επόμενες σχολικές τάξεις θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

Η χωρική οπτικοποίηση και γενικότερα η χωρική ικανότητα θα μπορούσε να συνδεθεί με την επίδοση σε τεστ νοημοσύνης. Με βάση αυτό θα μπορούσε να εξεταστεί η συσχέτισή τους και η επίδραση της μίας στην άλλη.

Οι συνεντεύξεις θα μπορούσαν να αποτελέσουν ένα καλό εργαλείο για τη διερεύνηση τόσο των στρατηγικών και του τρόπου σκέψης που ακολούθησαν οι μαθητές στην επίλυση των ασκήσεων όσο και των απόψεών τους σχετικά με τη χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία της χωρικής ικανότητας και της γεωμετρίας.

Αν και στην παρούσα έρευνα δόθηκε ένα φυλλάδιο ώστε να προτρέψει και να βοηθήσει τους μαθητές στην ενασχόλησή τους με τα εικονικά χειραπτικά υλικά και εκτός σχολικού ωραρίου, αυτή η μεταβλητή δεν εξετάστηκε. Άρα σε μελλοντικές έρευνας θα μπορούσε να εξεταστεί κατά πόσο η ενασχόληση των μαθητών με τα εικονικά χειραπτικά υλικά στον ελεύθερό τους χρόνο θα μπορούσε να επιδράσει στην ικανότητα της χωρικής οπτικοποίησης σε σχέση με τους μαθητές που χρησιμοποίησαν τα εικονικά χειραπτικά υλικά μόνο κατά τη διδασκαλία. Με άλλα λόγια ένα ερευνητικό ερώτημα θα μπορούσε να είναι εάν έχει μεγαλύτερη επίδραση στη χωρική οπτικοποίηση ο χρόνος ενασχόλησης με την τεχνολογία ή η ποιότητα ενασχόλησης με αυτή.

Τέλος, ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα μπορούσε να παρουσιάσει μία έρευνα που θα εξετάζει τις ικανότητες χωρικής οπτικοποίησης σε σχέση με τις εξωσχολικές δραστηριότητες των μαθητών. Για παράδειγμα, μπορεί να επηρεάσει τον τρόπο με τον οποίο οπτικοποιούν και χειρίζονται ή τροποποιούν τα γεωμετρικά σχήματα το άθλημα ή το χόμπι με το οποίο ασχολούνται οι μαθητές στον ελεύθερό τους χρόνο ή κάποια άλλη δραστηριότητα όπως ένα παζλ, τα ηλεκτρονικά παιχνίδια, κ.λπ.;

Βιβλιογραφικές αναφορές

Arzarello, F., Bairral, M. A., & Danè, C. (2014). Moving from dragging to touchscreen: geometrical learning with geometric dynamic software. *Teaching mathematics and its applications*, *33*(1), 39-51.

Baki, A., Kosa, T., & Guven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualization skills of pre-service mathematics teachers. *British Journal of Educational Technology*, *42*(2), 291-310.

Battista, M. T. (1990). Spatial Visualization and Gender Differences in High School Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(1), 47-60.

Battista, M. T. (2002). Learning geometry in a dynamic computer environment. *Teaching Children Mathematics*, *8*(6), 333.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 843-908.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. V. A. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 503-532.

Battista, M. T., Wheatley, G. H., & Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(5), 332-340.

Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. T. (1988). The effect of instructions on spatial visualization skills of middle school boys and girls. *American Educational Research Journal, 25*(1), 51-71.

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education—A review. *Educational studies in mathematics*, *11*(3), 257-269.

Bohning, G., & Althouse, J. K. (1997). Using tangrams to teach geometry to young children. *Early childhood education journal*, *24*(4), 239-242.

Braukmann, J., & Pedras, M. J. (1993). A Comparison of Two Methods of Teaching Visualization Skills to College Students. *Journal of Industrial Teacher Education*, *30*(2), 65-80.

Brinkmann, E. H. (1966). Programmed instruction as a technique for improving spatial visualization. *Journal of Applied Psychology, 50*(2), 179-184.

Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990* (Vol. 19). Springer Science & Business Media.

Cakmak, S., Isiksal, M., & Koc, Y. (2014). Investigating effect of origami-based instruction on elementary students' spatial skills and perceptions. *The Journal of Educational Research*, *107*(1), 59-68.

Chan, D. W. (2007). Gender differences in spatial ability: Relationship to spatial experience among Chinese gifted students in Hong Kong. *Roeper Review*, *29*(4), 277-282.

Chang, K. E., Sung, Y. T., & Lin, S. Y. (2007). Developing geometry thinking through multimedia learning activities. *Computers in Human Behavior*, *23*(5), 2212-2229.

Chang, K. E., Wu, L. J., Lai, S. C., & Sung, Y. T. (2014). Using mobile devices to enhance the interactive learning for spatial geometry. *Interactive Learning Environments*, 1-19.

Christou, C., Jones, K., Mousoulides, N., & Pittalis, M. (2006). Developing the 3DMath dynamic geometry software: Theoretical perspectives on design. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 13*(4), 168–174.

Clements, D. H. (1998). Geometric and Spatial Thinking in Young Children.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning.

Clements, D. H., & Sarama, J. (1995). Tumbling Tetrominoes. *Palo Alto, CA: Dale Seymour*.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach*. Routledge.

Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., & Swaminathon, S. (1997). Development of students' spatial thinking in a unit on geometric motions and area. *The Elementary School Journal, 98*, 171–186.

Common Core Standards Writing Team. (2013). Progressions for the Common Core State Standards in Mathematics (draft). Grades K–5, Geometry. Tucson, AZ: Institute for Mathematics and Education, University of Arizona.

Connor, J. M., Schackman, M., & Serbin, L. A. (1978). Sex-related differences in response to practice on a visual-spatial test and generalization to a related test. *Child Development*, 24-29.

De Lisi, R., & Wolford, J. L. (2002). Improving children's mental rotation accuracy with computer game playing. *The Journal of genetic psychology*,*163*(3), 272-282.

Deno, J. A. (1995). The relationship of previous spatial visualization ability. *Engineering Design Graphics Journal, 59*(3), 5-17.

Dixon, J. K. (1995). Limited English proficiency and spatial visualization in middle school students' construction of the concepts of reflection and rotation. *Bilingual Research Journal*, *19*(2), 221-247.

Dixon, J. K. (1997). Computer use and visualization in students' construction of reflection and rotation concepts. *School Science and Mathematics*, *97*(7), 352-358.

Dorier, J. L., Gutiérrez, A., & Strässer, R. (2004). Geometrical thinking: [Introduction to Thematic Working Group 7].

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer Berlin Heidelberg.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. *NEW ICMI STUDIES SERIES*, *5*, 37-51.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.

Ekstrom, R. B., French, J. W., Harman, H. H., & Dermen, D. (1976). Manual for kit of factor-referenced cognitive tests. *Princeton, NJ: Educational testing service*.

Elliot, J., & Smith, I. M. (1983). An international dictionary of spatial tests. *Winstor: Nelson Publishing Company*.

Evans, J. G., & Dirks, S. J. (2001). Relationships of admissions data and measurements of psychological constructs with psychomotor performance of dental technology students. *Journal of Dental Education*, *65*(9), 874-882.

Fennema, E., & Sherman, J. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization and affective factors. *American educational research journal*, *14*(1), 51-71.

Fennema, E., & Tartre, L. A. (1985). The use of spatial visualization in mathematics by girls and boys. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(3), 184-206.

Ferrini-Mundy, J. (1987). Spatial training for calculus students: sex differences in achievement and in visualization ability. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(2), 126–140.

Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P., Panaoura, A., & Philippou, A. (2010). One way of assessing the understanding of a geometrical figure. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, 10*, 35-50.

Guilford, J. P., Fruchter, B., & Zimmerman, W. S. (1952). Factor analysis of the Army Air Forces Sheppard Field battery of experimental aptitude tests. *Psychometrika*, *17*(1), 45-68.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 237-251.

Guven, B., & Kosa, T. (2008). The Effect of Dynamic Geometry Software on Student Mathematics Teachers' Spatial Visualization Skills. *Online Submission*, *7*(4).

Halpern, D. F. (2013). *Sex differences in cognitive abilities*. Psychology press.

Hannafin, R. D., Truxaw, M. P., Vermillion, J. R., & Liu, Y. J. (2008). Effects of spatial ability and instructional program on geometry achievement. *Journal of Educational Research, 101*(3), 148–156.

Hauptman, H. (2010). Enhancement of spatial thinking with Virtual Spaces 1.0. *Computers & Education, 54*(1), 123-135.

Hollebrands, K. F. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for research in mathematics education*, 164-192.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In *Proceedings of CERME* (Vol. 3, pp. 1-10).

Hwang, W. Y., & Hu, S. S. (2013). Analysis of peer learning behaviors using multiple representations in virtual reality and their impacts on geometry problem solving. *Computers & Education*, *62*, 308-319.

Iben, M. F. (1988). School Mathematics Experiences: A Comparison of US and Japanese Seventh and Eighth Grade Students.

Isotani, S., Pedro, L. Z., Reis, H. M., Borges, S. S., Lopes, A. M., Souza, J. P., Brandão, A, A., & Brandão, L. O. (2014). Interactive geometry goes mobile with GeoTouch. In *2014 IEEE 14th International Conference on Advanced Learning Technologies* (pp. 181-185). IEEE.

Jones, K. (2001) Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations, *Educational Studies in Mathematics, 44*, 55-85.

Kalogirou, P., & Gagatsis, A. (2011). A first insight of the relationship between students' spatial ability and geometrical figure apprehension. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, 11*, 27-39.

Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics 52*: 177–209.

Kordaki, M., & Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*(1): 1–36.

Kordaki, M., & Balomenou, A. (2006). Challenging students to view the concept of area in triangles in a broad context: Exploiting the features of Cabri-II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(1), 99-135.

Kurina, F. (2003). Geometry - The resource of opportunities. In M. Mariotti (Ed.), Proceedings of CERME 3.

Kurtulus, A. (2013). The effects of web-based interactive virtual tours on the development of prospective mathematics teachers' spatial skills. *Computers & Education, 63*, 141-150.

Kurtulus, A., & Uygan, C. (2010). The effects of Google Sketchup based geometry activities and projects on spatial visualization ability of student mathematics teachers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *9*, 384-389.

Kuzniak, A., Elia, I., Hattermann, M., Roubicek, F. (2009). Introduction: Geometrical Thinking in *Proceedings of CERME 6*, January 28th-February 1st 2009, Lyon France

La Ferla, V., Olkun, S., Akkurt, Z., Alibeyoglu, M. C., Gonulates, F., & Accascina, G. (2009). An international comparison of the effect of using computer manipulatives on pre-service and middle grades students' understanding of three-dimensional buildings. In *Proceedings of the 9th International Conference on Technology in Mathematics* (pp. 1-5).

Laborde, J. M. (1995). What about a learning environment where Euclidean concepts are manipulated with a mouse?. In *Computers and exploratory learning* (pp. 241-262). Springer Berlin Heidelberg.

Lappan, G., & Houang, R.T. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 124–146.

Lean, C., & Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 267–299.

Lin, C. P., Shao, Y. J., Wong, L. H., Li, Y. J., & Niramitranon, J. (2011). The Impact of Using Synchronous Collaborative Virtual Tangram in Children's Geometric. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET*, *10*(2), 250-258.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development, 56*, 1479-1498.

Lohman, D. (1988) Spatial abilities as traits, processes and knowledge. In *Sternberg, R. J. (ed), Advances in the Psychology of Human Intelligence, Vol. 4*. Hillsdale, NJ: LEA.

Lohman, D. F. (1979). *Spatial ability: A review and analysis of the correlational literature*. (Tech. Rep. No. 8). Stanford, CA: Stanford University, Aptitude Research Project, School of Education.

Maccoby, E. E. & Jacklin, C. N. (1974). *The Psychology of Sex Differences*. Stanford University Press, Stanford.

Maier P. H., (1996) Developments in Mathematics Education in Germany. Selected Papers from the *Annual Conference on Didactics of Mathematics*, Regensburg, 1996. 69-81.

Mariotti, M., A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds), *Exploiting Mental imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 97-116). Berlin: Springer-Verlag.

Mariotti, M.A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. International *Journal of Computers for Mathematical Learning 6*(3): 257–281.

McGee, M. G. (1979). Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal, and Neurological Influences. *Psychological Bulletin, 86*(5), 889-917.

McGee, M. G. (1979). *Human spatial abilities: Sources of sex differences*. New York: Praeger.

Michael, P., Elia, I., Gagatsis, A. & Kalogirou, P. (2010). Primary school students' operative apprehension of geometrical figures. *Quaderni di Ricerca in Didattica Mathematica, N.20*, Supplemento 1, 225-243.

Miller, C. L. (1996). A historical review of applied and theoretical spatial visualization publications in engineering graphics. *The Engineering Design Graphics Journal, 60*(3), 12–33.

Miller, J. W., & Miller, H. G. (1977). Toward resolution of the spatial puzzle. *Peabody Journal of Education*, *54*(3), 135-141.

Mistretta, R. M. (2000). Enhancing geometric reasoning. *Adolescence*, *35*(138), 365.

Moses, B. E. (1977). The nature of spatial ability and its relationship to mathematical problem solving. *Dissertation Abstracts International, 38*(8), 4640A.

Moyer, J. C. (1978). The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children. *Journal for Research in Mathematics Education, 5-9*, 83-92.

Moyer, P. S., Bolyard, J. J., & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching children mathematics*, *8*(6), 372.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nicaise, M., & Barnes, D. (1996). The union of technology, constructivism, and teacher education. *Journal of Teacher Education*, *47*(3), 205-12.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.

Olkun, S. (2003) Comparing computer versus concrete manipulatives in learning 2D geometry. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 22*(1), 43-56.

Olkun, S. (2003). Making connections: Improving spatial abilities with engineering drawing activities. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, *3*(1), 1-10.

Olkun, S., Altun, A. & Smith, G. (2005). Computers and 2D geometric learning of Turkish fourth and fifth graders. *British Journal of Educational Technology, 36*(2), 317–326.

Pellegrino, J. W., & Kail, R. (1982). Process analyses of spatial aptitude. *Advances in the psychology of human intelligence*, *1*, 311-365.

Pellegrino, J. W., Hunt, E. B., Abate, R., & Farr, S. (1987). A computer-based test battery for the assessment of static and dynamic spatial reasoning abilities. *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers*, *19*(2), 231-236.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1967). *The Child's Conception Of Space* (New York: Norton).

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1981). *The Child's Conception of Geometry*. NY: Norton & Company.

Rafi, A., Samsudin, K. & Said, C. (2008). Training in spatial visualization: The effects of training method and gender. *Educational Technology & Society, 11*(3), 127-140.

Robichaux, R. R., & Guarino, A. J. (2000). Predictors of Visualization: A Structural Equation Model.

Sexton, T. J. (1992). Effect on spatial visualization: introducing basic engineering graphics concepts using CAD technology. *Engineering Design Graphics Journal, 56*(3), 36–43.

Shepard, R. & Metzler, J. (1971). Mental Rotation Of Three-Dimensional Objects. *Science, 171*, 701–703.

Shepard, R. (1978). The Mental Image. *American Psychologist, 33*, 125–137.

Sinclair, N., & Crespo, S. (2006). Learning mathematics in dynamic computer environments. *Teaching Children Mathematics, 12*, 436–444.

Sjölinder, M. (1998). Spatial cognition and environmental descriptions. *Exploring Navigation: Towards a Framework for Design and Evaluation of Navigation in Electronic Spaces. Kista, Sweden: SICS*.

Smith, G. G., Gerretson, H., Olkun, S., Yuan, Y., Dogbey, J. & Erdem, A. (2009). Stills, not full motion, for interactive spatial training: American, Turkish and Taiwanese female pre-service teachers learn spatial visualization. *Computers & Education, 52*(1), 201–209.

Stumpf, H., & Eliot, J. (1995). Gender-related differences in spatial ability and the k factor of general spatial ability in a population of academically talented students. *Personality and Individual Differences*, *19*(1), 33-45.

Stumpf, H., & Eliot, J. (1999). A structural analysis of visual spatial ability in academically talented students. *Learning and Individual Differences, 11*, 137-151.

Tartre, L. A. (1990) Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 216-229.

Thurstone, L. L. (1938). *Primary mental abilities*. Psychometric Monographs

Travis, B. & Lennon, E. (1997). Spatial skills and computer-enhanced instruction in calculus. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 16*(4), 467–478.

Turgut, M., & Uygan, C. (2014). Designing Spatial Visualization Tasks for Middle School Students with a 3D Modelling Software. *R&E-SOURCE*.

Ullman, K. M. & Sorby, S. A. (1990). Enhancing the visualization skills of engineering students through computer modelling. *Computer Applications in Engineering Education, 3*(4), 251–257.

Wheatley, G. H., & Cobb, P. (1990). Analysis of young children's spatial constructions. *Transforming early childhood mathematics education: International perspectives*, 161-173.

Witkin, H. A., Moore, C. A., Goodenough, D. R., & Cox, P. W. (1975). Field-dependent and field-independent cognitive styles and their educational implications. *ETS Research Bulletin Series*, *1975*(2), 1-64.

Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2006, July). Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks. In *30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 425-432).

Yang, J. C., & Chen, S. Y. (2010). Effects of gender differences and spatial abilities within a digital pentominoes game. *Computers & Education*, *55*(3), 1220-1233.

Zavotka, S. L. (1987). Three-dimensional computer animated graphics: a tool for spatial skill instruction. *Educational Communication and Technological Journal, 35*(3), 133–144.

Zheng, T. (2002). Do mathematics with interactive geometry software. *Mathematics Teacher, 96*, 492–497.

Γαγάτσης, Α. (2014). Το γεωμετρικό σχήμα στο γεωμετρικό συλλογισμό: κάνοντας τους μαθητές τυφλούς ή εξερευνητές. *Πρακτικά του 5ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (Εν.Ε.Δι.Μ). Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Γαγάτσης, Α., Μιχαήλ, Π., Δεληγιάννη, Ε., Μονογυιού, Α., Καλογήρου, Π., & Φιλίππου, Α. (2011). *Ικανότητα Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων Συναρτήσεων και*

Γεωμετρίας: η Μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Ίδρυμα Προώθησης Έρευνας.

Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Πρόγραμμα Σπουδών (2011). Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό). Νέο Σχολείο (Σχολείο 21ου αιώνα), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΕΣΠΑ 2007-2013.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Pre-test

Post test

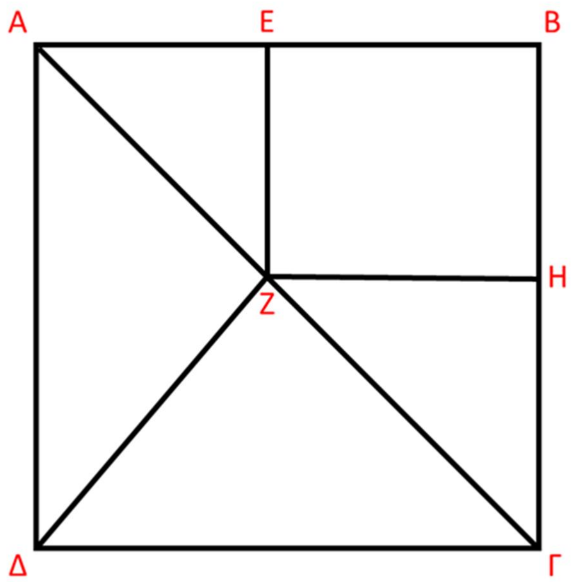
Φύλλα εργασίας

Οδηγίες για την είσοδο στην ιστοσελίδα NLVM

Pre-test

Γεωμετρία

1. Ονόμασε όποιο απλό σχήμα μπορείς να δεις στο τετράγωνο ΑΒΓΔ χρησιμοποιώντας τα γράμματα.
   Στη συνέχεια ονόμασε όποιο σύνθετο σχήμα μπορείς να δεις στο τετράγωνο ΑΒΓΔ χρησιμοποιώντας τα γράμματα.



………

………

………

………

………

………

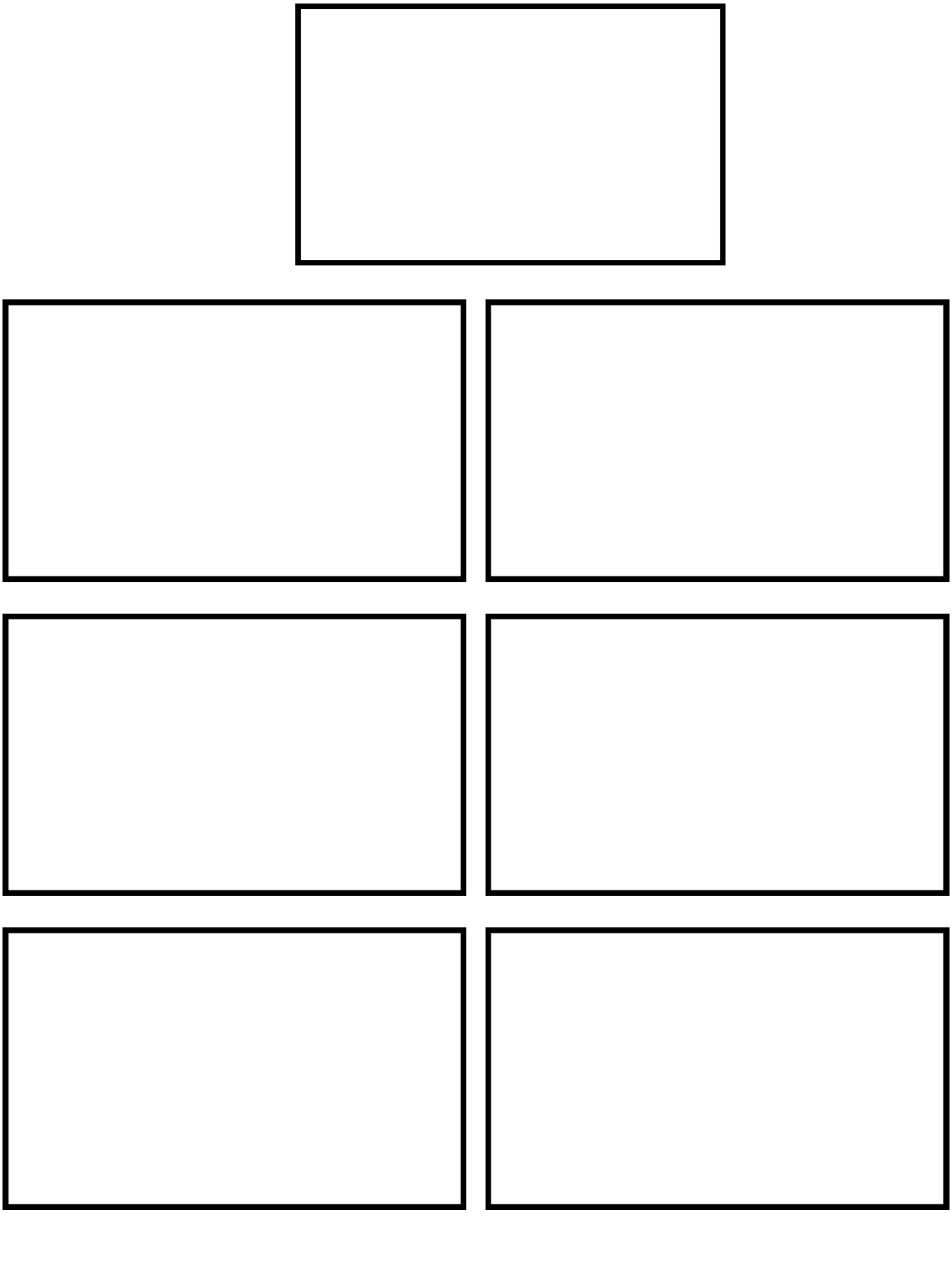
………

………

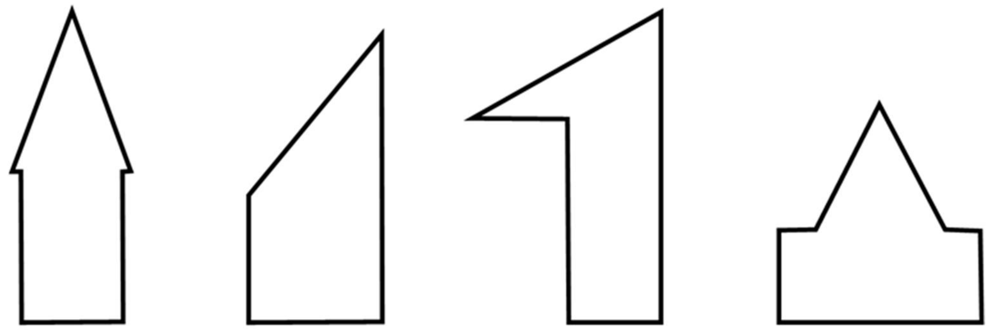
………

………

2. Χώρισε το παρακάτω σχήμα σε **πέντε** μικρότερα σχήματα.
   Μπορείς να δώσεις περισσότερες από μία απαντήσεις;

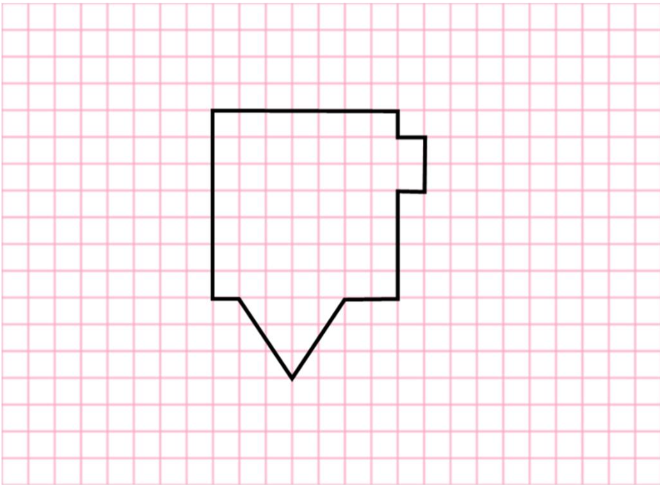


3. Ποιο από τα παρακάτω λευκά σχήματα θα έχουμε εάν ενώσουμε τα δύο γκρι σχήματα; (Κυκλώνω μόνο μία απάντηση)



Α Β Γ Δ

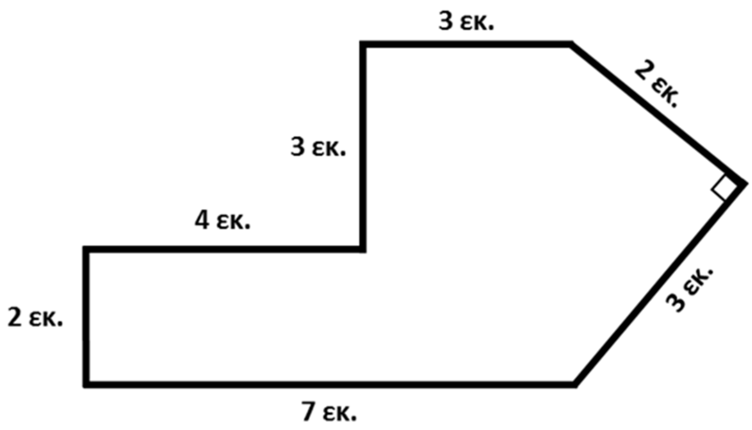
4. Χώρισε το παρακάτω σχήμα σε **τέσσερα** μικρότερα σχήματα.



Στη συνέχεια σχεδίασε ένα δικό σου σχήμα χρησιμοποιώντας αυτά τα 4 μικρότερα σχήματα.

Μπορείς να δώσεις περισσότερες από μία απαντήσεις;

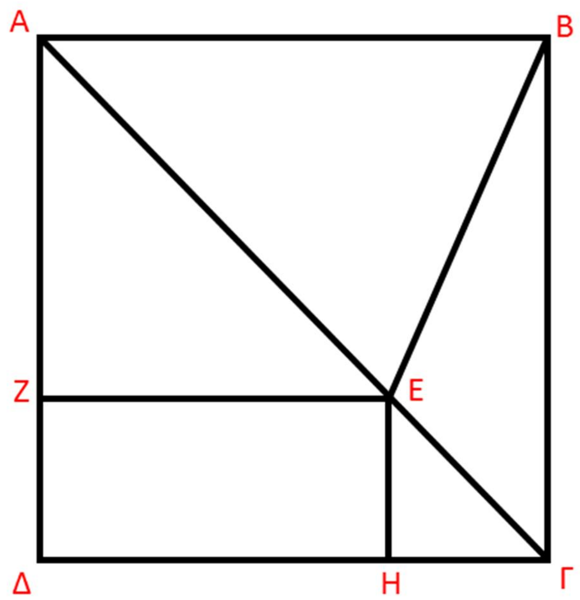
5. Υπολόγισε το **<u>εμβαδόν</u>** (επιφάνεια) του παρακάτω σχήματος.
   Μπορείς να δείξεις με λόγια ή με σχέδια πώς σκέφτηκες;



Post test

Γεωμετρία

6. Ονόμασε όποιο απλό σχήμα μπορείς να δεις στο τετράγωνο ΑΒΓΔ χρησιμοποιώντας τα γράμματα.
   Στη συνέχεια ονόμασε όποιο σύνθετο σχήμα μπορείς να δεις στο τετράγωνο ΑΒΓΔ χρησιμοποιώντας τα γράμματα.



………

………..

………

………..

………

………..

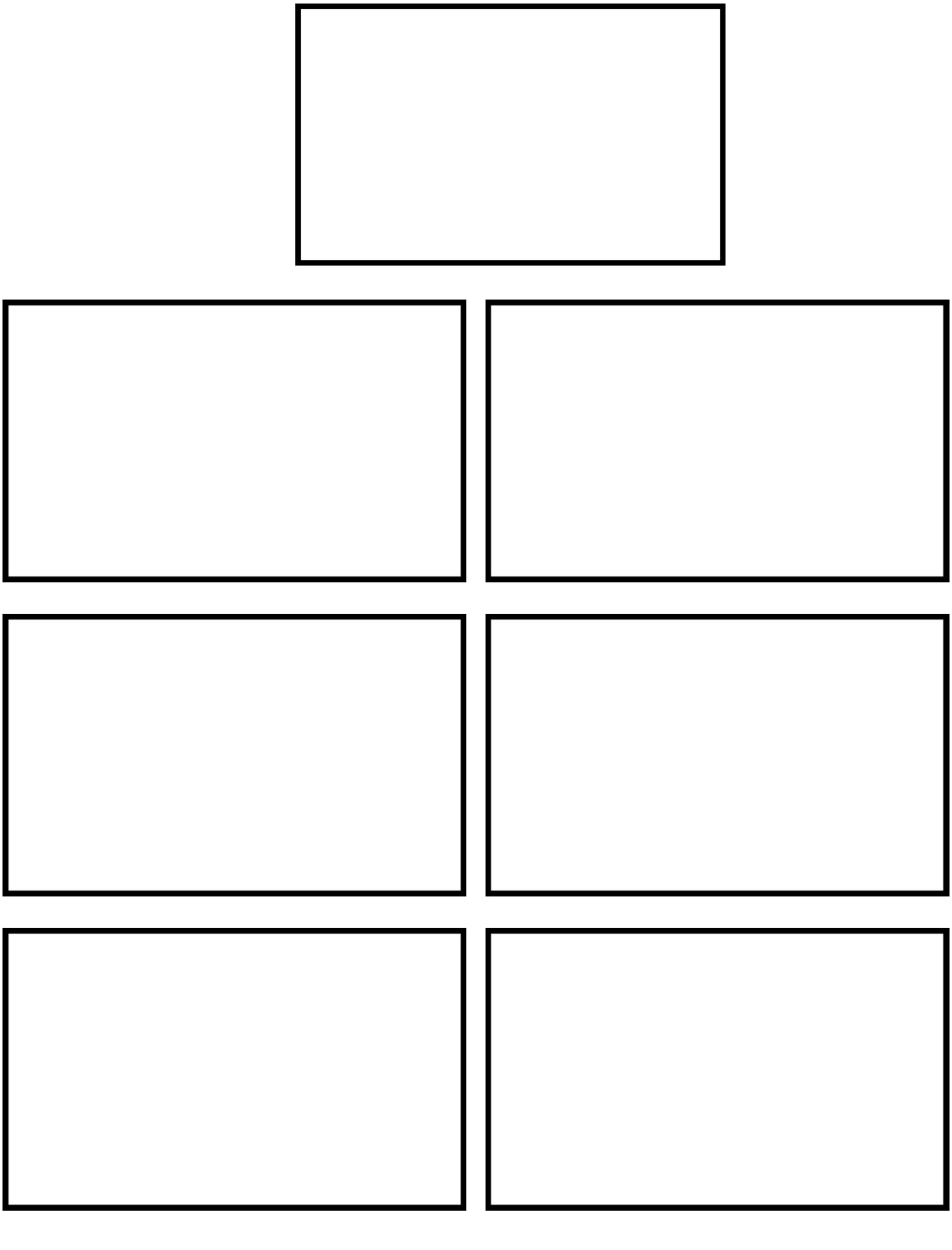
………

………..

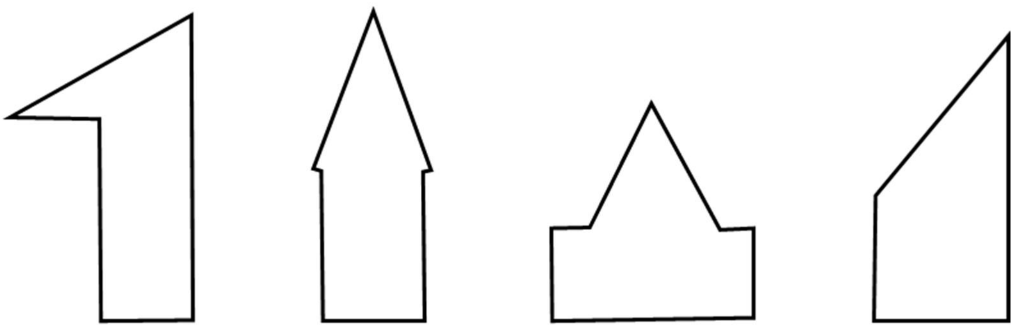
………

………..

7. Χώρισε το παρακάτω σχήμα σε **πέντε** μικρότερα σχήματα.
   Μπορείς να δώσεις περισσότερες από μία απαντήσεις;

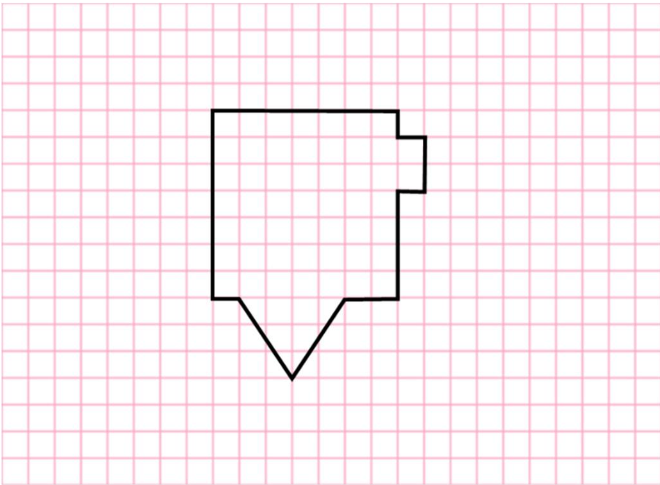


8. Ποιο από τα παρακάτω λευκά σχήματα θα έχουμε εάν ενώσουμε τα δύο γκρι σχήματα; (Κυκλώνω μόνο μία απάντηση)



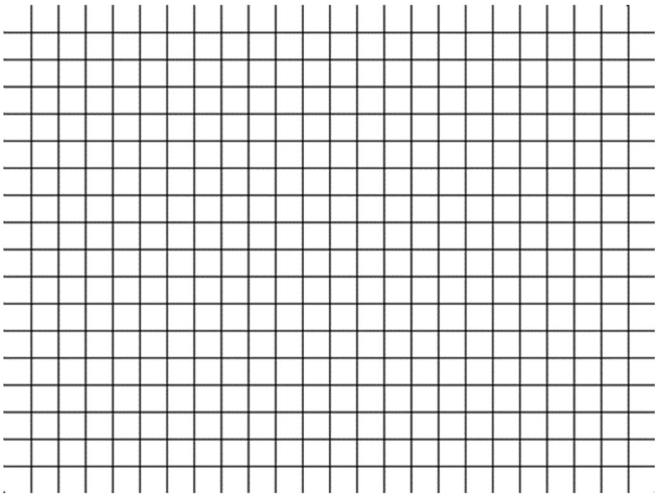
Α Β Γ Δ

9. Χώρισε το παρακάτω σχήμα σε **τέσσερα** μικρότερα σχήματα.

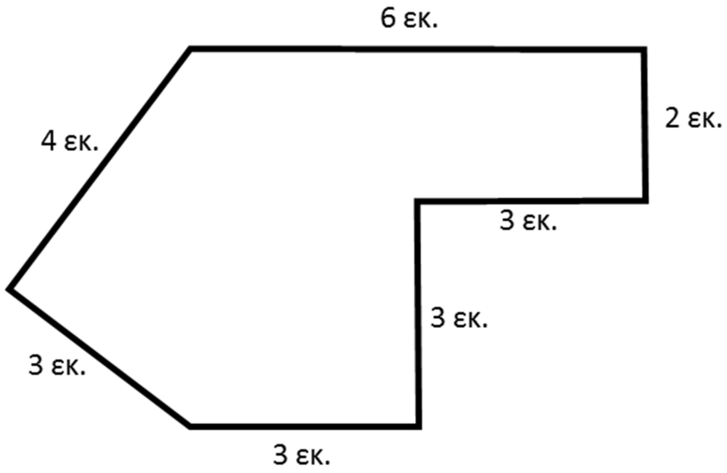


Στη συνέχεια σχεδίασε ένα δικό σου σχήμα χρησιμοποιώντας αυτά τα 4 μικρότερα σχήματα.

Μπορείς να δώσεις περισσότερες από μία απαντήσεις;



10.Υπολόγισε το **<u>εμβαδόν</u>** (επιφάνεια) του παρακάτω σχήματος.
Μπορείς να δείξεις με λόγια ή με σχέδια πώς σκέφτηκες;



Pattern Blocks

1. Διάλεξε πέντε σχήματα για να φτιάξεις ένα δικό σου σύνθετο σχήμα. Ποια σχήματα χρησιμοποίησες; Πώς τα συνέδεσες;

....

....

Τώρα δοκίμασε να φτιάξεις ένα σύνθετο σχήμα χρησιμοποιώντας περισσότερα σχήματα.

2. Γέμισε τα παρακάτω σχήματα χρησιμοποιώντας άλλα σχήματα.

πλάγιο παραλληλόγραμμο: ....

τραπέζιο: ....

εξάγωνο: ....

Μπορείς να σκεφτείς και άλλους συνδυασμούς σχημάτων για να φτιάξεις το εξάγωνο;

....

3. Βάλε στην οθόνη ένα κόκκινο τραπέζιο. Από δίπλα κατασκεύασε ένα τραπέζιο χρησιμοποιώντας άλλα σχήματα που θα βάψεις κίτρινα.

Ποιο από τα δύο σχήματα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν;

....

Άλλαξε τη θέση των κίτρινων σχημάτων. Ποιο από τα δύο σχήματα έχει τώρα μεγαλύτερο εμβαδόν και γιατί;

....

Tangrams

1. Προσπάθησε να καλύψεις κάθε σχήμα με τα υπόλοιπα:

   μπλε τετράγωνο: ……………………………………………………………………………….

   πράσινο τρίγωνο: ………………………………………………………………………………

   άσπρο πλάγιο παραλληλόγραμμο: …………………………………………………

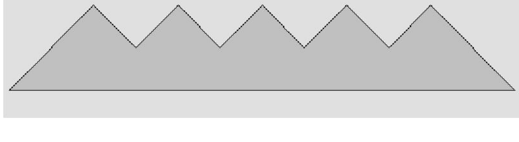
   κίτρινο τρίγωνο: ……………………………………………………………………………….

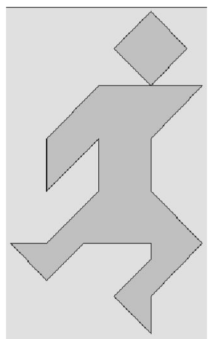
2. Κατασκεύασε ένα τάγκραμ χρησιμοποιώντας όλα τα κομμάτια. Πόσα κόκκινα τρίγωνα μπορούν να χωρέσουν μέσα στο τάγκραμ που κατασκεύασες;

   ……………………………………………………………………………………………………….

3. Ποιο από τα δύο σχήματα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν και γιατί;

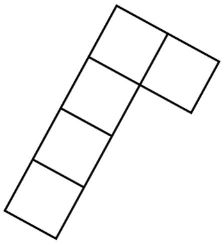
   ……………………………………………………………………………………………………….





4. Μπορείς να καλύψεις τα δείγματα τάγκραμ στο κάτω μέρος της οθόνης; Ποιο σου φάνηκε πιο εύκολο;

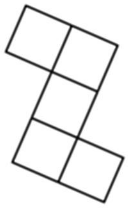
   ……………………………………………………………………………………………………….



Pentominoes

1. Μπορείς να σκεφτείς γιατί τα σχήματα αυτά ονομάζονται πεντόμινο;

   ………………………………………………………………………………………………………



2. Χρησιμοποίησε τα πεντόμινο για να καλύψεις την οθόνη σου.

3. Υπολόγισε το εμβαδόν και την περίμετρο του κάθε πεντόμινο.

   ………………………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………………………

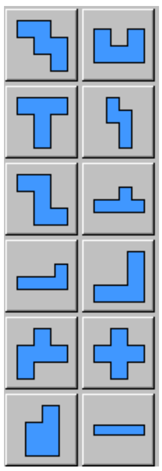
   ………………………………………………………………………………………………………

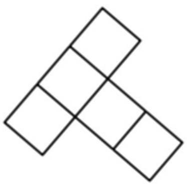
   Συμπέρασμα: ……………………………………………………………………………….

4. Κατασκεύασε ένα ορθογώνιο χρησιμοποιώντας 3 διαφορετικά πεντόμινο. Ποια χρησιμοποίησες;

   ………………………………………………………………………………………………………

5. Ανοίγουμε την εφαρμογή Pattern Blocks και κατασκευάζουμε πεντόμινο χρησιμοποιώντας τετράγωνα.



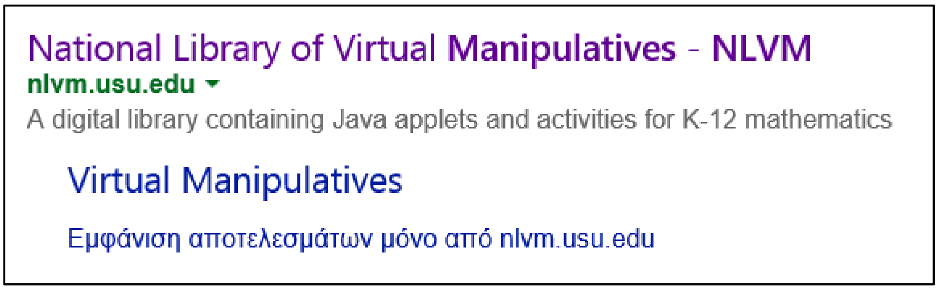


Οδηγίες

1 Πληκτρολογούμε nlvm στη μηχανή αναζήτησης.

(Δουλεύει καλύτερα σε Internet Explorer)

2 Επιλέγουμε το πρώτο αποτέλεσμα που θα μας βγάλει.



National Library of Virtual Manipulatives: είναι μία Βιβλιοθήκη που περιέχει εφαρμογές – παιχνίδια για τα μαθηματικά.

3 Επιλέγουμε το κουτάκι που γράφει Geometry και τις τάξεις 3 – 5 ή 6 – 8.