

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ
ΣΕ ΠΛΗΡΩΣ ΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΗ ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ
ΚΥΛΙΝΔΡΟ**

**ΧΡΥΣΟΣΤΟΜΟΣ ΘΩΜΟΠΟΥΛΟΣ
Α.Ε.Μ. 918**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

Δρ. ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ

ΚΟΖΑΝΗ (ΙΟΥΛΙΟΣ, 2013)

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια θεωρητική μελέτη των δυνάμεων που ενεργούν σε κύλινδρο κυκλικής διατομής τοποθετημένου κάθετα σε πλήρως ταλαντούμενο ελεύθερο ρεύμα. Προτείνεται ένα οιονεί-στατικό μοντέλο για τη δύναμη αντίστασης, ενώ η δύναμη αδράνειας υπολογίζεται βάσει της θεωρίας του ιδανικού ρευστού. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ θεωρητικού μοντέλου και πειραματικών δεδομένων του συντελεστή αντίστασης παρουσιάζει ποιοτική συμφωνία, με σημαντικές ποσοτικές αποκλίσεις τιμών. Διερεύνηση των αιτιών υποδεικνύει ότι η μετάβαση σε τυρβώδες οριακό στρώμα επάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου δεν μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από το οιονεί-στατικό μοντέλο. Η μετατόπιση του σημείου αποκόλλησης του οριακού στρώματος στην επιφάνεια του κυλίνδρου μπορεί να ληφθεί υπόψη σε ένα ημι-εμπειρικό μοντέλο δια μέσω της αλληλεξάρτησης της μέγιστης τιμής του συντελεστή αντίστασης από τα διαθέσιμα στη βιβλιογραφία πειραματικά δεδομένα για διάφορες τιμές της παραμέτρου συχνότητας, με τον αριθμό Reynolds. Σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ του ημι-εμπειρικού μοντέλου και των πειραματικών δεδομένων από τη βιβλιογραφία εμφανίζει ικανοποιητική ποσοτική συμφωνία.

Abstract

In the present work, a theoretical study on the forces that act on a circular cylinder placed vertically on a fully oscillatory flow is presented. A quasi-steady model for the drag force is suggested while the inertia force is calculated from the theory of the ideal fluid. The comparison between the results of the theoretical model and the experimental data from the bibliography presents qualitative agreement with some quantitative disagreement. Further investigation on the causes of this disagreement indicates that the transition to turbulence boundary layer on the cylinder's surface cannot be satisfactorily described by the quasi-steady model. The actual movement of the separation point on the surface of the cylinder can be taken into account by a semi-empirical model, through the interrelationship between the maximum of the drag coefficient and Reynolds number. Comparison between the results of the semi-empirical model and the experimental data from the bibliography shows satisfactory agreement.

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας κ. Ευστάθιο Κωνσταντινίδη για την πολύτιμη συμβολή του, τον κ. Θεόδωρο Θεοδουλίδη για τη βοήθειά του σε προγραμματιστικά θέματα και τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Κυριάκο Βαφειάδη για τις χρήσιμες συμβουλές του. Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της οικογένειάς μου και φίλους οι οποίοι συνέβαλαν με το δικό τους τρόπο στην προσπάθεια εκπόνησης της εργασίας.

Περιεχόμενα

Περίληψη	2
Abstract.....	2
Ευχαριστίες	3
1. Εισαγωγή.....	5
1.1. Γενικά	5
2. Βιβλιογραφική Επισκόπηση.....	6
2.1. Σταθερή ροή γύρω από κύλινδρο.....	6
2.1.1. Χαρακτηριστικά πεδίου ροής	6
2.1.2. Δύναμη αντίστασης	11
2.1.3. Δυναμική άνωση και αριθμός Strouhal	15
2.2. Ταλαντούμενη ροή γύρω από κύλινδρο.....	17
2.2.1. Χαρακτηριστικά πεδίου ροής	17
2.2.2. Δυνάμεις αδράνειας και αντίστασης.....	20
2.2.3. Εξίσωση Morison	24
3. Θεωρητικά μοντέλα.....	32
3.1. Οιονεί-στατικό μοντέλο	32
3.2. Ημι-εμπειρικό μοντέλο	43
4. Αποτελέσματα και συζήτηση.....	51
5. Συμπεράσματα - Προτάσεις	64
Βιβλιογραφία	65
Παράρτημα.....	67

1. Εισαγωγή

1.1. Γενικά

Σώματα εκτιθέμενα σε ελεύθερο ρεύμα ρευστού υπόκεινται σε υδροδυναμικά φορτία, τα οποία είναι απαραίτητα να μπορούν να εκτιμηθούν από πρακτικής σκοπιάς. Παραδείγματα τέτοιων σωμάτων αποτελούν οι σωληνώσεις υποθαλάσσιας εξόρυξης πετρελαίου, υποθαλάσσιοι αγωγοί, θεμελιώσεις γεφυρών και άλλων κατασκευών στον πυθμένα και πιο πρόσφατα κατασκευές, οι οποίες ως στόχο έχουν την απορρόφηση της ενέργειας των κυμάτων και μετατροπή της σε ηλεκτρική ενέργεια. Γίνεται, λοιπόν, αντιληπτή η σημασία των δυνάμεων αυτών. Ως αποτέλεσμα, ο υπολογισμός των δυνάμεων αυτών έχει επιστήσει την προσοχή των ερευνητών εδώ και πολλές δεκαετίες. Ταυτοχρόνως, η ροή ελεύθερου ρεύματος γύρω από σώμα αποτελεί ένα πολύπλοκο θεμελιώδες πρόβλημα στον κλάδο της Μηχανικής των Ρευστών.

Η ροή γύρω από ένα σώμα μπορεί να διαχωριστεί σε μόνιμη (χρονικά σταθερή) και μη-μόνιμη (χρονικά μεταβαλλόμενη). Η μη-μόνιμη ροή μπορεί επιπλέον να διαχωριστεί σε πλήρως ταλαντούμενη, με μηδενική μέση τιμή και σε μερικώς ταλαντούμενη, η οποία αποτελείται από το συνδυασμό σταθερής και ταλαντούμενης ροής. Η τελευταία μπορεί επιπλέον να διαχωριστεί σε ροή με ή χωρίς αναστροφή της ροής. Φυσικά, σε πρακτικές εφαρμογές στο πραγματικό θαλάσσιο περιβάλλον η ροή δεν μπορεί να είναι πλήρως καθορισμένη ως προς το είδος της. Ωστόσο, ο μηχανικός καλείται να υπολογίσει τα υδροδυναμικά φορτία βάσει αποτελεσμάτων πειραμάτων, τα οποία διεξάγονται υπό ελεγχόμενες συνθήκες σε εργαστήρια και να τα ανάγει στο πραγματικό πρόβλημα.

Οι εργαστηριακές μετρήσεις δείχνουν ότι οι δυνάμεις εμφανίζουν μια πολύπλοκη εξάρτηση στις συνθήκες ροής, η οποία δεν είναι εύκολο να προβλεφθεί από κάποιο θεωρητικό μοντέλο.

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τις δυνάμεις οι οποίες ασκούνται συγκεκριμένα σε κύλινδρο σε αμιγώς ταλαντούμενη ροή. Στην περίπτωση αυτή, τα υδροδυναμικά φορτία, τα οποία ασκούνται στον κύλινδρο είναι οι γραμμικές δυνάμεις αντίστασης και αδράνειας και οι εγκάρσιες δυνάμεις άνωσης. Οι υφιστάμενες μελέτες εστιάζουν στην πειραματική καταγραφή ή θεωρητική ανάλυση των φορτίων και στην προσομοίωση της ροής και τον προσδιορισμό των επιβαλλόμενων δυνάμεων. Ωστόσο, φαίνεται να μην υπάρχει μέχρι στιγμής (τουλάχιστον, όχι ευρέως γνωστό) κάποιο θεωρητικό μοντέλο για την πρόβλεψη αυτών των δυνάμεων, δεδομένων των χαρακτηριστικών της ροής, με εξαίρεση του θεωρητικού μοντέλου του Stokes, το οποίο έχει εφαρμογή σε χαμηλές τιμές της παραμέτρου Keulegan-Carpenter. Η δημιουργία ενός θεωρητικού μοντέλου πρόβλεψης των συντελεστών των δυνάμεων αντίστασης και αδράνειας και κατ' επέκταση των ίδιων των δυνάμεων είναι το αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

Στα πλαίσια της εργασίας πραγματοποιείται μία βιβλιογραφική επισκόπηση στα χαρακτηριστικά της χρονικά σταθερής και της πλήρως ταλαντούμενης ροής, καθώς και στις δυνάμεις που ασκούνται σε κυλινδρικό σώμα, εκτιθέμενο στις ροές αυτές.

Περιγράφεται η διαδικασία πειραματικού προσδιορισμού των δυνάμεων και των συντελεστών αντίστασης και αδράνειας, με τη χρήση της ημι-εμπειρικής σχέσης του Morison και προτείνεται ένα οιονεί-στατικό μοντέλο για τον θεωρητικό υπολογισμό τους. Επιπλέον, αναπτύσσεται ένα ημι-εμπειρικό μοντέλο για τον προσδιορισμό των συντελεστών. Τελικώς, παρατίθενται τα αποτελέσματα των μοντέλων σε σύγκριση με αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα και δίνονται οι απαραίτητες εξηγήσεις για τη συμπεριφορά των αποτελεσμάτων.

2. Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Στα πλαίσια της βιβλιογραφικής επισκόπησης περιγράφονται τα χαρακτηριστικά του πεδίου ροής για τις περιπτώσεις της σταθερής και ταλαντούμενης ροής γύρω από κύλινδρο. Οι γραμμικές και εγκάρσιες δυνάμεις, οι οποίες ασκούνται στον κύλινδρο, παρουσιάζονται και αναλύεται η διαδικασία του πειραματικού προσδιορισμού τους, καθώς και των αντίστοιχων συντελεστών τους.

2.1. Σταθερή ροή γύρω από κύλινδρο

2.1.1. Χαρακτηριστικά πεδίου ροής

Το πεδίο ροής γύρω από έναν κύλινδρο μπορεί να περιγραφεί αναλυτικά για την ιδανική περίπτωση ασυμπίεστου μη-συνεκτικού ρευστού. Στην περίπτωση αυτή το δυναμικό της ροής δίνεται από την υπέρθεση των αντίστοιχων δυναμικών σταθερού ρεύματος και ενός διπόλου. Το δυναμικό της ταχύτητας, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, περιγράφεται από τη σχέση

$$\Phi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta$$

όπου U , η ταχύτητα ροής του ελεύθερου ρεύματος
 r , η ακτίνα από το κέντρο του κυλίνδρου
 a , η ακτίνα του κυλίνδρου
 θ , η γωνία ως προς τον οριζόντιο άξονα

Το πεδίο ταχυτήτων προκύπτει από τα μερικά διαφορικά του δυναμικού και δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

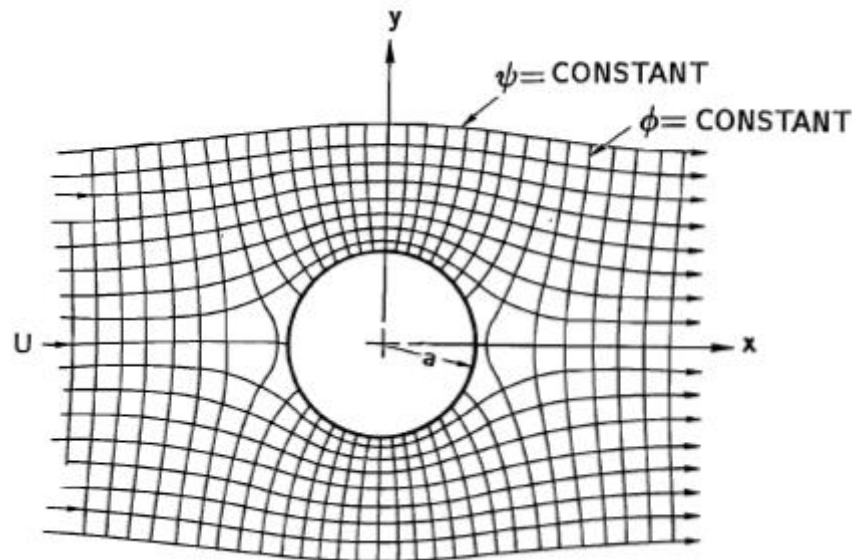
$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$$

και

$$u_\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

Με u_r συμβολίζεται η ακτινική και με u_θ η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας.

Το Σχήμα 2.1 απεικονίζει τις γραμμές ιδανικής δισδιάστατης ροής γύρω από κύλινδρο, οι οποίες εμφανίζουν συμμετρία, τόσο προς τον άξονα διάδοσης του ελεύθερου ρεύματος, όσο και κάθετα σε αυτόν.



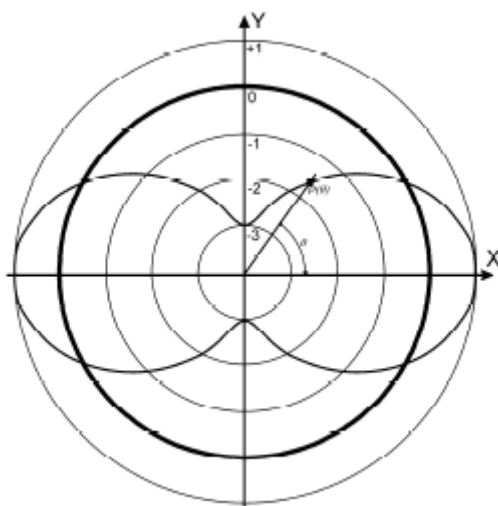
Σχήμα 2.1: Κύλινδρος εντός σταθερής ομοιόμορφης δυναμικής ροής. Με « ψ » συμβολίζεται το δυναμικό των ροϊκών γραμμών και με « ϕ » το δυναμικό της ταχύτητας. (Blevins, 2001)

Η συμμετρία των ροϊκών γραμμών υποδεικνύει, αντίστοιχα, συμμετρική κατανομή πίεσης στην περιφέρεια του κυλίνδρου. Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζεται αδιάστατη η κατανομή πίεσης για όλη την περιφέρεια του κυλίνδρου, όπου x είναι ο παράλληλος στη ροή άξονας και y ο κάθετος σε αυτή και τον κύλινδρο.

Τα δύο σημεία στα οποία ο άξονας x διασταυρώνεται με την επιφάνεια του κυλίνδρου, είναι τα σημεία ανακοπής, στα οποία η ταχύτητα της ροής είναι μηδενική. Στα σημεία αυτά όλη η κινητική ενέργεια του ρευστού μετατρέπεται σε πίεση. Επομένως η ολική πίεση εκεί είναι ίση με το άθροισμα της στατικής και της δυναμικής πίεσης και αυτή ορίζεται και ως πίεση ανακοπής. Η πίεση ανακοπής, αγνοώντας τη στατική πίεση, εκφράζεται σε όρους ταχύτητας της περιβάλλουσας ροής ως:

$$p_s = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_\infty^2 \quad [2.1]$$

όπου p_s , η πίεση στα σημεία ανακοπής
 ρ , η πυκνότητα του ρευστού (kg/m^3)
 U_∞ , η ταχύτητα της ροής (m/s)



Σχήμα 2.2: Κατανομή πίεσης στον κύλινδρο εντός δυναμικής ροής

Κάνοντας χρήση της εξίσωσης Bernoulli και της γνωστής πίεσης στο σημείο ανακοπής, είναι δυνατή η πρόβλεψη της συνολικής κατανομής πίεσης στην περιφέρεια του κυλίνδρου:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_{\infty}^2 + 0 = p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_{\theta}^2 = \text{const.} \quad [2.2]$$

όπου, p , η πίεση σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο στην περιφέρεια του κυλίνδρου

u_{θ} , η εφαπτομενική ταχύτητα κατά μήκος του κυλινδρικού τοιχώματος εκφρασμένη σε κυλινδρικές συντεταγμένες, με $\theta = 0$ στο μπροστινό (κατά μέτωπο της ροής) σημείο ανακοπής και ισούται με:

$$u_{\theta} = -2 U_{\infty} \sin \theta \quad [2.3]$$

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα της Εξίσωσης [2.3] στην [2.2], η πίεση p , κατά μήκος του τοιχώματος κυλίνδρου ισούται με:

$$p = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 [1 - 4\sin^2\theta] \quad [2.4]$$

Η αδιάστατη κατανομή της πίεσης, ανάλογης του όρου που βρίσκεται στις παρενθέσεις, απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2.

Με την αξιοποίηση της σχέσης [2.4], γίνεται κατανοητό και από μαθηματικής πλευράς, πως η πίεση κατανέμεται συμμετρικά. Αυτό οδηγεί τις οποιεσδήποτε δυνάμεις, λόγω πίεσης, οι οποίες ασκούνται στον κύλινδρο να αλληλοαναιρούνται. Επιπλέον, δεδομένου του μηδενικού ιξώδους του ρευστού, καμία δύναμη τριβής δεν αναπτύσσεται μεταξύ των τοιχωμάτων του κυλίνδρου και του ρευστού. Συμπερασματικά, δεν ασκούνται

υδροδυναμικά φορτία σε κύλινδρο, όταν αυτός υπόκειται σε σταθερή ομοιόμορφη δυναμική ροή (Jean LeRond D'Alembert).

Ωστόσο, η παραπάνω περίπτωση αφορά μια ιδανική, αδιατάρακτη ροή, στην οποία οι δυνάμεις ιξώδους αγνοούνται. Στην πραγματικότητα η ροή γύρω από τον κύλινδρο δεν μπορεί να είναι απολύτως ομοιόμορφη, αλλά λαμβάνει διάφορους σχηματισμούς, ανάλογα με τις συνθήκες που επικρατούν.

Στην περίπτωση πραγματικού συνεκτικού ρευστού, η κύρια παράμετρος η οποία καθορίζει τα χαρακτηριστικά του πεδίου ροής είναι ο αδιάστατος αριθμός Reynolds, ο οποίος ορίζεται ως:

$$Re = \frac{U \cdot D}{\nu} \quad [2.5]$$

όπου U , η ταχύτητα του ρευστού μακριά από τον κύλινδρο (m/s)

D , η διάμετρος του κυλίνδρου (m)

ν , το κινηματικό ιξώδες (m^2/s)

Ανάλογα με την τιμή του αριθμού Reynolds διακρίνονται διαφορετικά χαρακτηριστικά της ροής γύρω από τον κύλινδρο. Βέβαια κι άλλοι παράμετροι επηρεάζουν τη μορφή της ροής γύρω από έναν κύλινδρο, όπως η τραχύτητα αυτού. Οι τιμές Reynolds για τις οποίες συμβαίνει μετάβαση από ένα μοντέλο ροής σε ένα άλλο, δεν είναι αυστηρά καθορισμένες, αλλά υπάρχει απόκλιση μεταξύ διαφορετικών επιστημονικών μελετών.

Στο Σχήμα 2.3 παρουσιάζονται συνοπτικά τα κύρια χαρακτηριστικά του πεδίου ροής, γύρω από κύλινδρο, συναρτήσει του αριθμού Reynolds.

Παρατηρείται πως για πολύ χαμηλές τιμές $Re < 1$, η ροή παρουσιάζει παρόμοια χαρακτηριστικά με αυτά της ιδανικής. Είναι πλήρως προσκολλημένη και στρωτή γύρω από τον κύλινδρο και συμμετρική ως προς τους δύο άξονες. Συχνά συναντάται να αποκαλείται και ως έρπουσα ροή (creeping flow) (Loth, 2009) ή ως ροή Stokes. Στο εύρος $1 < Re < 5$, η συμμετρία ως προς τον παράλληλο με τη ροή άξονα παραμένει, ωστόσο πρωτοεμφανίζονται τα πρώτα φαινόμενα αποκόλλησης της ροής στο πίσω μέρος του κυλίνδρου.

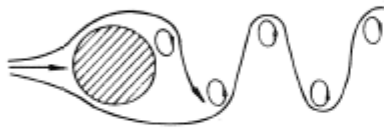
Πέρα της τιμής $Re = 5$, κατόπιν του κυλίνδρου παρουσιάζεται αποκόλληση της ροής από την επιφάνεια και η μορφή της ροής παραμένει σχεδόν αμετάβλητη μέχρι την τιμή $Re \sim 47$ (Singh & Mittal, 2006). Λόγω της αποκόλλησης της ροής από τον κύλινδρο σχηματίζονται δύο συμμετρικές δίνες, προσκολλημένες στην κάθε πλευρά της κεντρικής γραμμής του απόρου.



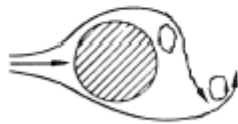
$Re < 1$ Ομοιόμορφη, μη αποκολλημένη ροή



$1 \text{ έως } 5 \leq Re \leq 47$ Η ροή διαχωρίζεται. Ζεύγος προσκολλημένων δινών στον απόρρου.



$47 \leq Re \leq 65$ και $65 \leq Re \leq 190$ Στρωτή ροή. Στο δεύτερο διάστημα δημιουργείται το Von Karman vortex street.



$400 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5$ Το οριακό στρώμα αρχίζει να αποκολλάται και ο δρόμος στοβίλων μετατρέπεται πλήρως σε τυρβώδη



$Re \geq 2 \cdot 10^5$ Τυρβώδες οριακό στρώμα. Στένεμα πάχους και πλήρη αποδιοργάνωση του απόρρου

Σχήμα 2.3: Μοντέλα ροής γύρω από κύλινδρο για διάφορες τιμές του αριθμού Reynolds (Σχήματα από (Lienhard J. H., 1966)

Για $Re > 47$, παρά το γεγονός ότι παραμένει στρωτή, η ροή γίνεται ασταθής και ασύμμετρη, οι δίνες αποκολλώνται και για ελαφρώς μεγαλύτερο Reynolds (~65) (Journée & Massie, 2001) στρόβιλοι αρχίζουν να διαχωρίζονται εναλλασσόμενα από την πίσω πλευρά του κυλίνδρου. Ως εκ τούτου, δημιουργείται ο «δρόμος στοβίλων», όπως ονομάστηκε από τον Ουγγροαμερικάνο επιστήμονα Von Karman (Von Karman vortex street). Η ροή πια είναι εμφανώς χρονικά εξαρτώμενη.

Σε $Re \sim 190$ (Singh & Mittal, 2006), φαινόμενα αστάθειας, όπως ανακυκλοφορία και παραμόρφωση των πρωτογενών δινών εμφανίζονται στον απόρρο, ο οποίος τελικά μετατρέπεται σε τυρβώδης κατάντη του κυλίνδρου.

Καθώς ο Reynolds συνεχίζει να αυξάνεται, το σημείο μετάβασης πέραν του οποίου το αποκολλημένο οριακό στρώμα γίνεται ασταθές, μετακινείται προς τα ανάντη της ροής. Περιοδικές ακανόνιστες διαταράξεις είναι εμφανείς στον απόρρο, η ροή γίνεται μεταβατική και βαθμιαία εκπίπτει στην τυρβώδη. Αυτή η μεταβατική κατάσταση αφορά κατά προσέγγιση το διάστημα τιμών $190 \leq Re \leq 400$.

Στο εύρος τιμών του Reynolds $400 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5$, το οποίο αποκαλείται υποκρίσιμο (sub-critical) το σημείο αποκόλλησης του στρωτού οριακού στρώματος, με αυξανόμενο τον Reynolds, μετακινείται προς τη μετωπική πλευρά του κυλίνδρου και φτάνει έως και 80° από το μπροστινό σημείο ανακοπής. Μόνο στις μεγαλύτερες τιμές και κοντά στο άνω όριο αυτού του διαστήματος τιμών το οριακό στρώμα υφίσταται τυρβώδη μετάβαση. Επιπλέον, οι εκλυόμενες δίνες εμφανίζουν τυρβώδη ανάμιξη μεταξύ τους.

Με περαιτέρω αύξηση $Re \geq 2 \cdot 10^5$ το οριακό στρώμα, το οποίο βρίσκεται υπό τυρβώδη μετάβαση, αποκολλάται στη μπροστινή, κατά τη φορά της ροής, πλευρά του κυλίνδρου, σχηματίζει τη «φουσαλίδα αποκόλλησης» (μία για κάθε πλευρά του κυλίνδρου) και αργότερα επανακολλάται στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Η επανακόλληση αυτή ακολουθείται από τη μετακίνηση του σημείου αποκόλλησης κοντά στην πίσω πλευρά, σε περίπου 140 μοίρες κατάντη της ροής, σε σχέση με το μπροστινό σημείο ανακοπής. Κατά συνέπεια παρατηρείται στένεμα στο πάχος του απόρου, ο οποίος στην προκειμένη περίπτωση είναι πλήρως τυρβώδης. Οι φουσαλίδες αποκόλλησης εξαφανίζονται με περαιτέρω αύξηση του Reynolds και το οριακό στρώμα γίνεται πλήρως τυρβώδες και η ροή χαρακτηρίζεται ως μετακρίσιμη (post-critical). Ο απόρους αυξάνει και πάλι σε πάχος.

2.1.2. Δύναμη αντίστασης

Στην περίπτωση χρονικά σταθερής ροής πραγματικού συνεκτικού ρευστού, η συμμετρία των ροϊκών γραμμών χάνεται και στη θέση της εφαρμόζεται πεδίο ροής, εξαρτώμενο του αριθμού Reynolds του ελεύθερου ρεύματος. Η ασυμμετρία αυτή υποδεικνύει διαφοροποίηση της κινητικής ενέργειας, μεταξύ των διαφόρων σημείων στη ροή, περιφερειακά του κυλίνδρου, με επακόλουθο την ασυμμετρία στις τοπικές πιέσεις. Παραδείγματος χάριν, οι εκλυόμενες δίνες προσδίδουν μια τοπικά αυξημένη κινητική ενέργεια, η οποία μεταφράζεται σε μειωμένη πίεση. Με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli, μπορεί να υπολογιστεί η διαφορά τη πραγματικής πίεσης σε σχέση με αυτή της δυναμικής ροής, για διαφορετικές γωνίες θ της περιφέρειας του κυλίνδρου.

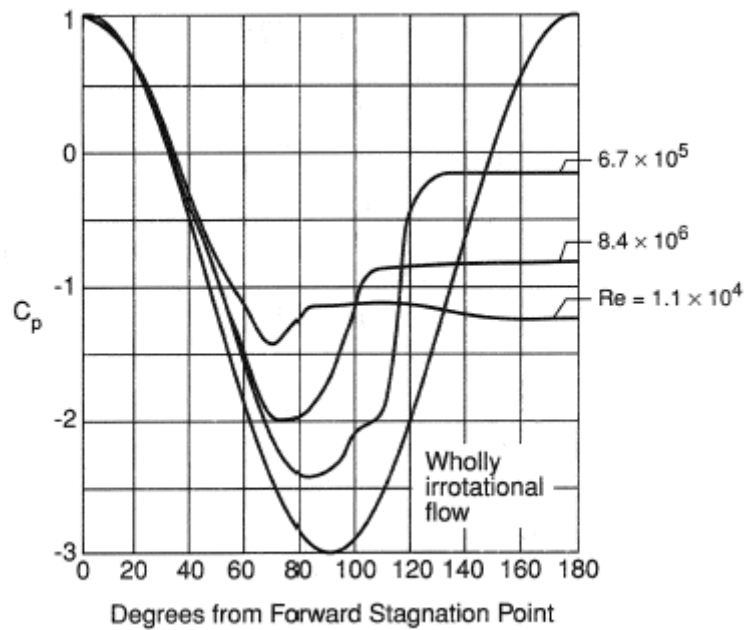
$$\Delta p = p - p_0 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_\infty^2 \cdot [1 - 4\sin^2\theta] \quad [2.6]$$

Διαιρώντας την Εξίσωση 2.6 με τον όρο $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_\infty^2$, δηλαδή την πίεση στο σημείο ανακοπής, προκύπτει η αδιαστατοποιημένη μορφή της διαφοράς πίεσης, η οποία αποτελεί το συντελεστή πίεσης,

$$C_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_\infty^2} = (1 - 4\sin^2\theta) \quad [2.7]$$

Το Σχήμα 2.4 παρουσιάζει την αδιάστατη κατανομή πίεσης σε όλη την περιφέρεια του κυλίνδρου, για τρεις διαφορετικές τιμές του αριθμού Reynolds πραγματικής ροής, σε αντιδιαστολή με την περίπτωση δυναμικής ροής (συμμετρική καμπύλη). Σε κάθε μια από τις τρεις περιπτώσεις πραγματικής ροής, είναι εμφανές πως το πεδίο πίεσης στη μετωπική

επιφάνεια του κυλίνδρου, διαφοροποιείται αυτού των κατάντη της ροής μερών του κυλίνδρου. Επίσης, οι τοπικές πιέσεις μεταβάλλονται με τη μεταβολή του Reynolds.



Σχήμα 2.4: Συντελεστής πίεσης C_p περιφερειακά του κυλίνδρου, πλήρως αστρόβιλης ροής. (Blevins, 2001)

Το τροποποιημένο πεδίο πίεσης επιβάλλει στον κύλινδρο κάποια δύναμη, η οποία ασκείται με κατεύθυνση προς την πλευρά της μικρότερης πίεσης. Η δύναμη αυτή, είναι η δύναμη αντίστασης (ή οπισθέλκουσα). Γίνεται αντιληπτό πως εφόσον η διαφορά πίεσης γύρω από τον κύλινδρο εξαρτάται από την ταχύτητα της ροής, ή αντίστοιχα από τον αριθμό Reynolds, η δύναμη αντίστασης θα εμφανίζει άμεση εξάρτηση από την παράμετρο αυτή.

Εν αντιθέσει της περίπτωσης ροής ασυμπίεστου μη-συνεκτικού ρευστού, στην πραγματική ροή το ρευστό είναι ιξώδες και αλληλεπιδρά με την επιφάνεια του κυλίνδρου. Ως εκ τούτου, στην οπισθέλκουσα δύναμη προστίθεται ακόμα μία συνιστώσα, προερχόμενη από τις διατμητικές δυνάμεις, οι οποίες εφαρμόζονται στη διεπιφάνεια ρευστού-κυλίνδρου και οι οποίες έχουν την προέλευσή τους στην επιφανειακή τριβή. Αυτή η δεύτερη συνιστώσα της οπισθέλκουσας δύναμης, φαίνεται να είναι μεγαλύτερης σημασίας για ροές χαμηλής ταχύτητας (χαμηλού Reynolds), με την αντίσταση πίεσης να είναι η κυρίαρχη συνιστώσα για το μεγαλύτερο εύρος τιμών του αριθμού Reynolds. Με κριτήριο την προέλευση της έκαστης συνιστώσας της δύναμης αντίστασης, η πρώτη συναντάται ως αντίσταση πίεσης (pressure drag), ενώ η δεύτερη ως αντίσταση τριβής (friction drag). Η διεύθυνση της δύναμης αντίστασης είναι η ίδια με αυτή της ταχύτητας του ρευστού, δεδομένου ότι ο κύλινδρος αντιτίθεται στην κίνηση του ρευστού.

Ανά μονάδα μήκους κυλίνδρου διαμέτρου D , η δύναμη αντίστασης μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση της πίεσης ανακοπής και ενός συντελεστή C_D , ως εξής:

$$F_D = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot C_D \cdot D \quad [2.8]$$

όπου:

ρ , η πυκνότητα του ρευστού (kg/m³)

U , η ταχύτητα της ροής μακριά από τον κύλινδρο (m/s)

C_D , αδιάστατος συντελεστής (-)

D , η διάμετρος του κυλίνδρου (m)

Η δύναμη αντίστασης μπορεί να παρουσιαστεί αδιαστατοποιημένη, σα συνάρτηση της πίεσης ανακοπής $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2$ και της διαμέτρου του κυλίνδρου. Η αδιάστατη αυτή μορφή αποτελεί τον συντελεστή αντίστασης C_D (Drag Coefficient), ο οποίος ορίζεται ως:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot D} \quad [2.9]$$

και εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds, την τραχύτητα του κυλίνδρου και το επίπεδο τύρβης της προσπίπτουσας ροής.

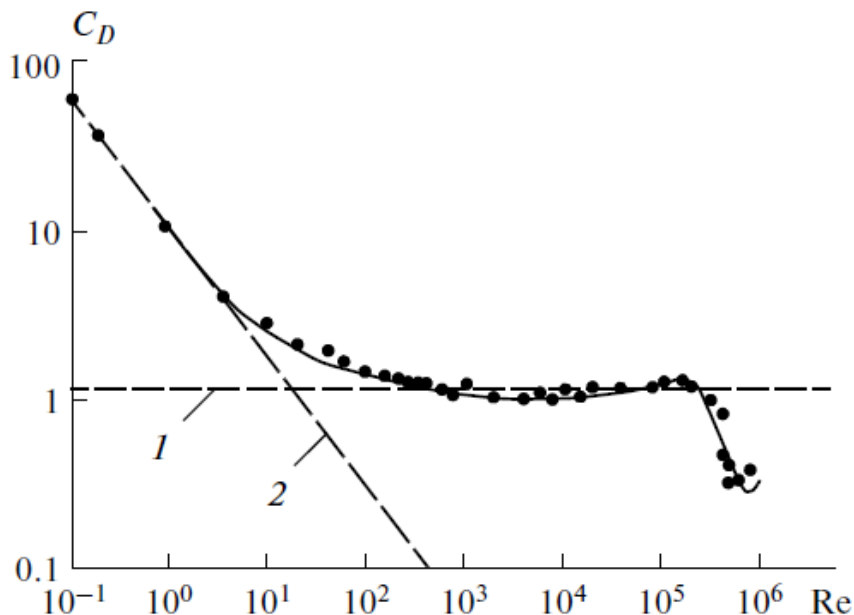
Απομονώνοντας την επίδραση του αριθμού Reynolds στο συντελεστή αντίστασης για αδιατάρακτη περιβάλλουσα ροή γύρω από κυκλικό κύλινδρο παρατηρούνται τα ακόλουθα. Σε καθεστώς ροής Stokes (**Re<1**) οι δυνάμεις αντίστασης κυριαρχούν γύρω από τον κύλινδρο, με τις δυνάμεις αδράνειας να θεωρούνται αμελητέες. Δεδομένης της ομοιόμορφης ροής σε τόσο χαμηλούς Reynolds, όλη η δύναμη αντίστασης προέρχεται από το κομμάτι της αντίστασης τριβής. Ως εκ τούτου για τις τιμές αυτές του αριθμού Reynolds ο συντελεστής αντίστασης λαμβάνει υψηλές τιμές, μεγαλύτερες του 10. Οι προσεγγιστικές λύσεις των εξισώσεων Navier-Stokes δίνουν αξιόπιστα θεωρητικές τιμές του συντελεστή αντίστασης, για τέτοιες χαμηλές ταχύτητες ροής (Tritton, 1959).

Με την αύξηση του Reynolds, η τιμή του συντελεστή αντίστασης μειώνεται και καθώς η ροή κατάντη του κυλίνδρου γίνεται ασταθής, ο ρυθμός μείωσης του ελαττώνεται. Τελικά η φθίνουσα αυτή πορεία του συντελεστή αντίστασης σταματά, όταν η ροή γίνει υποκρίσιμη, όταν δηλαδή ο απόρους γίνει πλήρως τυρβώδης. Στην κατάσταση αυτή, η οποία αντιστοιχεί σε τιμές της τάξης $400 \leq \mathbf{Re} \leq 2 \cdot 10^5$, ο συντελεστής αντίστασης φαίνεται να είναι σχεδόν ανεξάρτητος του Reynolds και να λαμβάνει τιμές κοντά στη μονάδα. Εφόσον αμφοτέρως οι διαμητικές και οι δυνάμεις λόγω διαταραχής της πίεσης σχετίζονται με την τοπική δυναμική πίεση και επιπλέον το σημείο αποκόλλησης παραμένει προσεγγιστικά σταθερό καθ' όλο το υποκρίσιμο καθεστώς ροής, αναμένεται η παραγόμενη δύναμη αντίστασης να είναι ανάλογη της δυναμικής πίεσης του «ελεύθερου» ρεύματος, καθώς και της μετωπικής επιφάνειας του κυλίνδρου. Ως εκ τούτου ο συντελεστής αντίστασης, αντίστοιχα, παραμένει προσεγγιστικά σταθερός. Η οποιαδήποτε αυξομείωση της δύναμης αντίστασης στο διάστημα αυτό θα σχετίζεται αποκλειστικά με την αντίστοιχη μεταβολή στην ταχύτητα. Την παρατήρηση του σχεδόν σταθερού συντελεστή αντίστασης έκανε για πρώτη φορά ο Sir Isaac Newton το 1710 και για το λόγο αυτό, η αντίστοιχη τιμή του συναντάται ως «Συντελεστής αντίστασης του Νεύτωνα» (Newton's Drag Coefficient) (Loth, 2009).

Περαιτέρω αύξηση του Reynolds οδηγεί σε απότομη μείωση του συντελεστή αντίστασης, καθώς η ροή εισέρχεται στο κρίσιμο καθεστώς (critical regime). Όπως έχει αναφερθεί, το οριακό στρώμα στην επιφάνεια του κυλίνδρου μεταβαίνει από στρωτό σε τυρβώδες, αποκολλάται και εν συνεχεία επανακολλάται στην πίσω πλευρά του κυλίνδρου. Αυτό οδηγεί σε μία καθυστέρηση στο διαχωρισμό της ροής από την επιφάνεια του κυλίνδρου, προκαλώντας μία επακόλουθη στένωση του απόρου και ως εκ τούτου μείωση της δύναμης αντίστασης που εφαρμόζεται στον κύλινδρο. Το φαινόμενο αυτό συνήθως αναφέρεται ως “Drag crisis” (Singh & Mittal, 2006). Η αποκόλληση αυτή μειώνει επίσης και τις όποιες διατμητικές δυνάμεις ασκούνται στον κύλινδρο. Το κρίσιμο σημείο στο οποίο συμβαίνει το φαινόμενο αυτό εξαρτάται από την κλίμακα της τύρβης στην περιβάλλουσα ροή, τον λόγο μήκος προς διάμετρο του κυλίνδρου, την επιφανειακή τραχύτητα και άλλους παράγοντες, οι οποίοι σχετίζονται με τον τρόπο με τον οποίο έχουν διεξαχθεί τα πειράματα.

Για υπερκρίσιμες τιμές του Reynolds (super-critical), προσεγγιστικά $Re > 6 \cdot 10^5$, οι «φυσαλίδες αποκόλλησης» απομακρύνονται από την επιφάνεια του κυλίνδρου, το οριακό στρώμα, πλήρως τυρβώδες, επανακολλάται και ο συντελεστής αντίστασης αυξάνει και πάλι επανερχόμενος σε τιμές λίγο μικρότερες της μονάδας.

Σύμφωνα με τον (Lienhard J. H., 1966), οι πρώτες αξιόλογες πειραματικές δουλειές για τον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης, για σταθερή ροή γύρω από λείο κυκλικό κύλινδρο, έγιναν από τους (Relf, 1914) και τον (Wieselsberger, 1921). Οι υπολογισμοί τους καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος αριθμών Reynolds, $4 < Re < 8 \cdot 10^5$. Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να αποδοθεί σε μια από τις πιο διαχρονικές πειραματικές εργασίες, αυτή του (Tritton, 1959), την οποία καλούν ως έμπιστη πηγή πολλοί ερευνητές, λόγω της ακρίβειας των δεδομένων. Σε αυτή καλύπτεται το εύρος τιμών $0.5 \leq Re \leq 100$, εντός του οποίου, όπως έχει αναφερθεί, λαμβάνουν χώρα σημαντικές μεταβάσεις στη ροή.

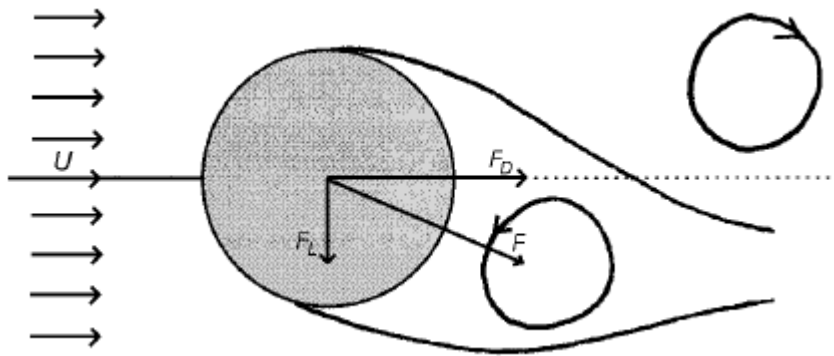


Σχήμα 2.5: Συντελεστής αντίστασης γύρω από κύλινδρο συναρτήσεως του Reynolds. (1) C_D -Newton's Regime, (2) C_D -Stokes Regime. Σχήμα από (Kelbaliyev, 2011).

Στο Σχήμα 2.5 απεικονίζεται η μεταβολή του συντελεστή αντίστασης συναρτήσει του Reynolds. Οι δύο ευθείες (1) και (2) υποδεικνύουν τις κατά προσέγγιση γραμμικοποιήσεις στις τιμές που λαμβάνει ο συντελεστής για καθεστώς ροής Νεύτωνα και ροή Stokes αντίστοιχα.

2.1.3. Δυναμική άνωση και αριθμός Strouhal

Πέραν της γραμμικής δύναμης αντίστασης, στον κύλινδρο, υπό συνθήκες, ασκούνται και εγκάρσιες δυνάμεις. Πρόκειται για τις δυνάμεις άνωσης, οι οποίες είναι αποτέλεσμα της χρονικής ασυμμετρίας της ροής στο πίσω μέρος του κυλίνδρου. Ο όρος δυναμική άνωση χρησιμοποιείται για να διαχωρίσει τη δύναμη αυτή από τη στατική άνωση, η οποία υφίσταται σε κάθε σώμα μερικώς ή ολικώς βυθισμένου σε ρευστό.



Σχήμα 2.6: Δυνάμεις άνωσης, αντίστασης και συνισταμένη δύναμη. Φορά των δυνάμεων άνωσης προς την κατεύθυνση της κοντινότερης δίνης.

Για $Re > 65$, όπως προαναφέρθηκε, αναπτύσσεται στον ομόρου ο δρόμος στροβίλων Von Karman, με μια χρονικά εξαρτώμενη εναλλαγή στην κατεύθυνση των δημιουργούμενων δινών να λαμβάνει χώρα. Αυτό οδηγεί σε μία κυκλική μεταβολή της πίεσης στον ομόρου. Στην πλευρά, όπου ο στρόβιλος είναι πλησιέστερα του κυλίνδρου, οι τοπικές ταχύτητες θα είναι υψηλότερες και ως επακόλουθο οι τοπικές πιέσεις θα είναι μικρότερες. Αυτό συντελεί στην ανάπτυξη μιας δύναμης προς την κατεύθυνση όπου βρίσκεται ο στρόβιλος (βλ. Σχήμα 2.6). Η εγκάρσια κατεύθυνση συνιστώσα της δύναμης αυτής αποτελεί τη δύναμη άνωσης, η οποία, σε συνδυασμό με τη γραμμική δύναμη αντίστασης, συνιστούν τη συνολική δύναμη, η οποία ασκείται σε έναν κύλινδρο εντός σταθερής ροής. Δεδομένης της χρονικής ασυμμετρίας των δημιουργούμενων δινών, η δύναμη άνωσης έχει εναλλασσόμενο μέγεθος και διεύθυνση. Η εναλλαγή στη διεύθυνση μπορεί να χαρακτηριστεί ως ημιτονοειδής, με συχνότητα αντίστοιχη της συχνότητας απόρριψης των δινών, f_{st} και μέτρο:

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot D \cdot C_L \cdot \sin(2\pi f_{st} t) \quad [2.10]$$

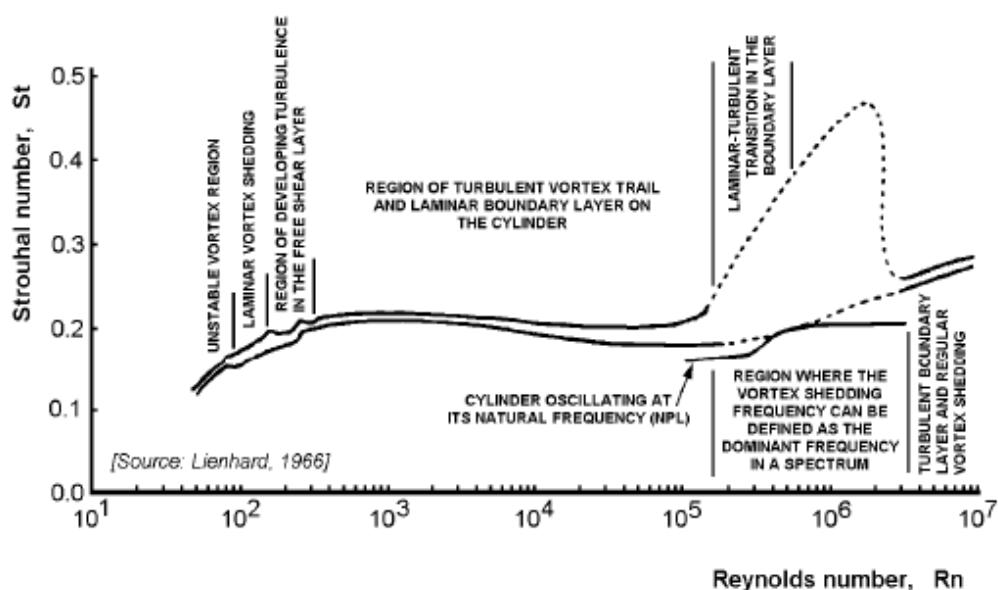
στην οποία:

F_L , η δυναμική άνοση ανά μοναδιαίο μήκος (N/m)
 f_{st} , η συχνότητα έκλυσης δινών (Hz)
 C_L , ο αδιάστατος συντελεστής άνοσης
 U , η ταχύτητα του αδιατάρακτου ρεύματος (m/s)
 D , η διάμετρος του κυλίνδρου (m)
 T , χρόνος (s)

Μία σημαντική παράμετρος της πραγματικής ροής, είναι ο αδιάστατος αριθμός Strouhal, ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$St = \frac{f_{st} \cdot D}{U}$$

και ο οποίος αποτελεί την αδιάστατη παράμετρο συχνότητας έκλυσης στροβίλων. Η συχνότητα έκλυσης των στροβίλων έχει άμεση εξάρτηση από τον αριθμό Reynolds της ροής και ως εκ τούτου και ο αριθμός Strouhal θα είναι συνάρτηση του Reynolds. Στο Σχήμα 2.7, όπως δίνεται από τον (Lienhard J. H., 1966), παρουσιάζεται η μεταβολή του αριθμού Strouhal συναρτήσει του αριθμού Reynolds. Είναι εμφανές πως για μεγάλο εύρος των τιμών Reynolds, ο Strouhal παραμένει αμετάβλητος και σε μία τιμή κοντά στο 0.2.



Σχήμα 2.7: Αριθμός Strouhal ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds.

Η στάσιμη συμπεριφορά του αριθμού Strouhal, για τις τιμές του Reynolds από περίπου 400 μέχρι και λίγο πάνω από την τιμή 10^5 , είναι λογική και αναμενόμενη, δεδομένου ότι, για το φάσμα αυτό των τιμών του Reynolds, η ροή διατηρεί τα χαρακτηριστικά της σχεδόν αναλλοίωτα. Δε δίνονται τιμές για τον αριθμό Strouhal κάτω από περίπου $Re=50$, μιας και δεν υφίσταται έκλυση δινών για μικρότερες τιμές. Επίσης, παρατηρείται πως ο αριθμός Strouhal αυξάνεται πέραν της τιμής 0.2 για περίπου $Re > 2 \cdot 10^5$, όπου και ο απόρροος μετατρέπεται πλήρως σε τυρβώδης.

2.2. Ταλαντούμενη ροή γύρω από κύλινδρο

Στην ενότητα αυτή εξετάζεται η περίπτωση ενός κυλίνδρου απείρου μήκους, ο οποίος εισάγεται σε μία καθαρά ταλαντούμενη ροή (tidal flow), χωρίς ρεύμα σταθερής ταχύτητας (μηδενική μέση ταχύτητα) και παρουσιάζονται οι δυνάμεις οι οποίες του ασκούνται. Αναφέρεται εδώ, εκ των προτέρων, πως μόνο οι δυνάμεις αδράνειας προϋποθέτουν ταλαντούμενη ροή (ή τουλάχιστον εμφάνιση κλίσης πίεσης στη ροή), με τις δυνάμεις αντίστασης και άνωσης να είναι εμφανείς για κάθε πραγματική ροή.

Πριν την εισαγωγή σε περαιτέρω ανάλυση, είναι βασικό να γίνει αντιληπτό πως μια χρονικά εξαρτώμενη ροή γύρω από σταθερό κύλινδρο, είναι κινηματικά ισοδύναμη με έναν κύλινδρο ο οποίος ταλαντώνεται μέσα σε ακίνητο ρευστό. Επίσης είναι σημαντικό να γίνει η θεώρηση πως όλες οι δυνάμεις προκαλούνται από τις κάθετες, στον άξονα του κυλίνδρου, συνιστώσες της ροής (δισδιάστατο μοντέλο). Συνιστώσες της ροής και οποιεσδήποτε προκύπτουσες δυνάμεις παράλληλες στον άξονα το κυλίνδρου (τρίτη διάσταση) αγνοούνται.

2.2.1. Χαρακτηριστικά πεδίου ροής

Στην ιδανική περίπτωση πλήρους ταλαντούμενης ροής, ασυμπίεστου και μη-συνεκτικού ρευστού, γύρω από κύλινδρο, το δυναμικό της ταχύτητας περιγράφεται αναλυτικά με παρόμοιο τρόπο αυτού σταθερής ροής ως

$$\Phi = U(t) \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos\theta$$

όπου $U(t)$ η χρονικά μεταβαλλόμενη ταχύτητα.

Μια σειρά παραμέτρων, όπως η συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης, το ιξώδες του ρευστού και η διάμετρος του κυλίνδρου απαιτούνται για τον προσδιορισμό του πεδίου ροής που επιφέρει η εισαγωγή κυλίνδρου, εντός ταλαντούμενου ρεύματος. Ωστόσο, η μαθηματική ανάλυση της ροής βασίζεται στον συνδυασμό των ανωτέρω σε δύο παραμέτρους. Τον αριθμό Keulegan-Carpenter, Kc και την αδιάστατη παράμετρο συχνότητας β .

Δεδομένου του πεδίου ροής, γίνεται εφικτή η ανάλυση των δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στον κύλινδρο. Διαφορετικός συνδυασμός του πλάτους ταλάντωσης και της διαμέτρου του κυλίνδρου, δεδομένης συχνότητας ταλάντωσης και ιξώδους του ρευστού, επιφέρουν μεταβολές στις δυνάμεις. Αυτές οι μεταβολές οδήγησαν τους (Keulegan & Carpenter, 1958) να συσχετίσουν τις δύο αυτές παραμέτρους με μία αδιάστατη παράμετρο $Kc = 2\pi A/D$, όπου A είναι το πλάτος ταλάντωσης και D η διάμετρος του κυλίνδρου. Με κατάλληλες αντικαταστάσεις η παράμετρος αυτή έρχεται στην ευρέως χρησιμοποιούμενη μορφή της,

$$Kc = \frac{U_{max} \cdot T}{D}$$

όπου με U_{max} συμβολίζεται η μέγιστη ταχύτητα του ημιτονοειδούς ρεύματος, T είναι η περίοδος του κύματος και D η διάμετρος του κυλίνδρου.

Μια δεύτερη παράμετρος, η οποία σε συνδυασμό με τον αριθμό Kc θα μπορούσε χρησιμοποιείται για τον χαρακτηρισμό των συνθηκών της ταλαντούμενης ροής, είναι ο αριθμός Reynolds. Ωστόσο, και οι δύο παράμετροι είναι εξαρτώμενοι από τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης U_{max} . Η καλύτερη κατανόηση και παρουσίαση των αποτελεσμάτων, απαιτούν, οι διάφορες μεταβλητές να εμφανίζονται μόνο μία φορά στις αδιάστατες παραμέτρους. Το σκεπτικό αυτό οδήγησε τον (Sarpkaya, 1976) να εισάγει μια νέα αδιάστατη παράμετρο, τον λόγο $Re / Kc = D^2 / \nu T$.

Η παράμετρος αυτή ονομάζεται παράμετρος συχνότητας ή παράμετρος Stokes.

$$\beta = D^2 / \nu T$$

ή

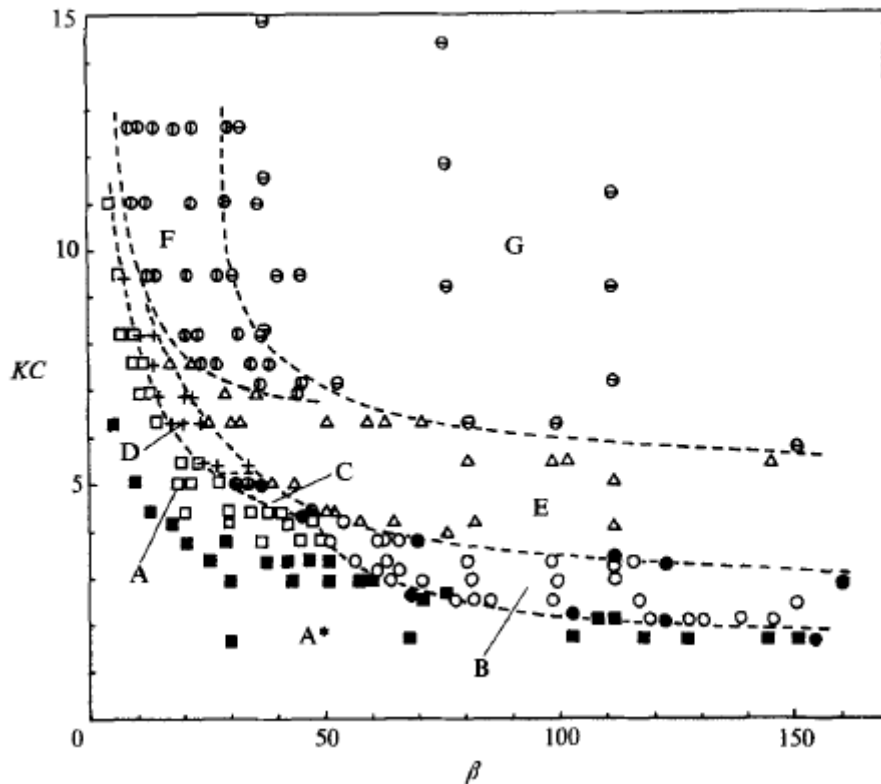
$$\beta = D^2 f / \nu$$

Το γινόμενο των δύο παραμέτρων ισούται με τον Reynolds της ταλάντωσης, δηλαδή την τιμή του Reynolds στο σημείο μέγιστης ταχύτητας της ταλάντωσης.

$$Re = Kc \cdot \beta$$

Οι (Tatsuno & Bearman, 1990) μελέτησαν το πεδίο ροής γύρω από κύλινδρο εντός πλήρως ταλαντούμενης ροής, για αριθμούς Keulegan-Carpenter μεταξύ 1.6 και 15 και για αριθμούς Stokes μεταξύ 5 και 160. Οκτώ διαφορετικά καθεστώτα ροής αναγνωρίστηκαν για αυτά τα εύρη τιμών των Kc και β . Στο Σχήμα 2.8 παρουσιάζονται οι περιοχές εμφάνισης του κάθε ροϊκού καθεστώτος, τα οποία συμβολίζονται με αλφαβητικούς χαρακτήρες.

Στην περιοχή “A*” (κενά τετράγωνα) δεν υφίσταται έκλυση δινών στη ροή, ενώ στην περιοχή “A” (πληρωμένα τετράγωνα) παρατηρείται διαχωρισμός της ροής που καταλήγει στη δημιουργία δινών. Δεν υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ των δύο περιοχών, καθώς είναι δύσκολος ο προσδιορισμός της έναρξης του διαχωρισμού της ροής. Για τις τιμές της περιοχής “B” (κενοί κύκλοι) δεν παρατηρούνται πλήρως σχηματισμένες δίνες, αλλά εμφανίζεται αστάθεια στο οριακό στρώμα, επάνω στον κύλινδρο, η οποία ενεργοποιεί τη δημιουργία δομών στις τρεις διαστάσεις.



Σχήμα 2.8: Κατηγοριοποίηση των ροών. Με αλφαβητικούς χαρακτήρες παριστάνονται οι περιοχές όπου η ροή παρουσιάζει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Τα γεωμετρικά σύμβολα παριστάνουν τις κρίσιμες τιμές για την εμφάνιση αστάθειας “Hori” στη ροή.

Στην περιοχή “C” (πληρωμένοι κύκλοι) εκλύονται μεγάλες δίνες, των οποίων ο σχηματισμός και η διάταξη είναι όμοιες με αυτές στο δρόμο στροβίλων Von Karman της σταθερής ροής. Ωστόσο, η περιστροφή των στροβίλων φαίνεται να είναι αντίθετης φοράς από αυτή στον ομόρου σταθερής ροής. Με αύξηση του πλάτους ταλάντωσης, δηλαδή αύξηση του Kc , εμφανίζεται κάποια ασυμμετρία στην ανάπτυξη των στροβίλων και η ροή διαφέρει με τη διεύθυνση της ταλάντωσης. Αυτό παρατηρείται στην περιοχή “D” (κατακόρυφοι σταυροί). Συγκεκριμένα, κατά την έναρξη ενός κύκλου ταλάντωσης προς μία διεύθυνση, παρατηρούνται οι δύο πρώτοι στροβιλισμοί στα κατόντη του κυλίνδρου, ένας εκ των οποίων φαίνεται να αποκτά μεγαλύτερη ισχύ. Όταν η ροή αλλάξει διεύθυνση, παρατηρείται ότι στην πλευρά όπου είχε δημιουργηθεί ο ισχυρότερος στρόβιλος, υπάρχει ένας στρόβιλος μεγάλης ισχύος, ενώ στην άλλη πλευρά ο πιο αδύναμος στρόβιλος σχεδόν εξαφανίζεται. Το φαινόμενο συναντάται ως “Single Shedding”. Στο καθεστώς ροής “E” (κενά τρίγωνα) η ροή αλλάζει μορφή με το χρόνο. Προσωρινά μοιάζει με το καθεστώς της περιοχής “D”, με τους στροβίλους να είναι εμφανείς μόνο από τη μία πλευρά, αλλά κατά διαστήματα αλλάζει η πλευρά εμφάνισής τους, λόγω κάποιων διαταραχών της ροής.

Για συνδυασμούς των Kc, β της περιοχής “F” (κύκλοι με κάθετη κεντρική γραμμή), δημιουργούνται δύο στρόβιλοι, ένας μεγάλος δεξιόστροφος στην επάνω πλευρά του κυλίνδρου και ένα μικρός αριστερόστροφος στην κάτω. Κάθε φορά που η ροή αλλάζει διεύθυνση οι στρόβιλοι ανταλλάζουν πλευρές εμφάνισης στο πίσω μέρος του κυλίνδρου. Τέλος, για το καθεστώς ροής “G” (κύκλοι με οριζόντια κεντρική γραμμή), κατά την κίνηση του ρευστού προς τη μία διεύθυνση σχηματίζονται δύο στρόβιλοι, εκ των οποίων ο ένας

παραμένει προσκολλημένος στον κύλινδρο και ο άλλος απομακρύνεται από αυτόν. Όταν η ροή επιστρέφει παρατηρείται η ίδια εικόνα, με τον στρόβιλο να αλλάζει φορά περιστροφής.

2.2.2. Δυνάμεις αδράνειας και αντίστασης

Στην περίπτωση ταλαντούμενου ρεύματος πραγματικού ιξώδους ρευστού, ασκούνται στον κύλινδρο δυνάμεις αντίστασης και άνωσης, αντίστοιχες της ροής σταθερής ταχύτητας. Επιπλέον, η επιταχυνόμενη φύση της ροής επιφέρει επιπρόσθετες δυνάμεις αδράνειας στον κύλινδρο.

Ορίζεται για τις περιγραφές και τους μετέπειτα υπολογισμούς, το ίδιο σύστημα αξόνων, όπως χρησιμοποιήθηκε και στη περιγραφή της δυναμικής ροής, με τον x να είναι ο παράλληλος στη ροή άξονας. Η ταχύτητα του ταλαντούμενου ρεύματος δίνεται ως:

$$u(t) = u_{max} \cdot \sin(\omega t) \quad [2.12]$$

στην οποία:

$$u_{max}, \text{ το πλάτος της ταχύτητας ταλάντωσης (m/s)}$$

$$\omega, \text{ η συχνότητα του κύματος (rad/s)}$$

Οι δυνάμεις αντίστασης έχουν την προέλευσή τους στο τοπικά διαταγμένο πεδίο πίεσης στην περιφέρεια του κυλίνδρου και στις δυνάμεις τριβής, οι οποίες αναπτύσσονται στη διεπιφάνεια μεταξύ ρευστού και κυλίνδρου, όπως ακριβώς και στην περίπτωση χρονικά σταθερής ροής. Η συνολική δύναμη αντίστασης υπολογίζεται από την Εξίσωση 2.8, εάν σε αυτή γίνει κατάλληλη μετατροπή, ώστε να ακολουθεί τη μεταβολή της διεύθυνσης της ροής. Εφόσον η δύναμη αντίστασης έχει την ίδια κατεύθυνση με αυτή της ταχύτητας του ρευστού, ο όρος της ταχύτητας U^2 για σταθερό ρεύμα αντικαθίσταται από τον χρονικά εξαρτώμενο ομόλογό του $u(t)|u(t)|$, με στόχο να συμπεριληφθεί το κατάλληλο πρόσημο, ανάλογα με τη φορά της ροής. Με χρήση της Εξίσωσης 2.12 και τις κατάλληλες τροποποιήσεις η εξίσωση της δύναμης αντίστασης παίρνει τη μορφή:

$$F_D(t) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_D \cdot D \cdot U_{max}^2 \cdot \sin(\omega t) \cdot |\sin(\omega t)| \quad [2.13]$$

όπου:

$$U_{max}, \text{ το πλάτος της ταχύτητας του ρευστού (m/s)}$$

$$\omega, \text{ γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του ρευστού (rad/s)}$$

$$t, \text{ ο χρόνος (s)}$$

Εν αντιθέσει με ένα ρεύμα σταθερής ταχύτητας, σε μία ταλαντούμενη ροή εισάγεται η επίδραση της επιτάχυνσης. Παράλληλα με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, υφίσταται στη ροή μια κλίση πίεσης, η οποία και αποτελεί τη γενεσιουργό αιτία της ταλάντωσης και είναι παρούσα ανεξαρτήτως του αν ο κύλινδρος βρίσκεται ή όχι εντός του ρευστού.

Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο περί κίνησης του Νεύτωνα, αυτή η κλίση πίεσης ωθεί το ρευστό στην χρονικά μεταβαλλόμενη κίνησή του. Παρατηρώντας, λοιπόν, την κίνηση του ρευστού χωρίς τον κύλινδρο και εξετάζοντας την κλίση πίεσης,

$$\frac{dp}{dx} = \rho \cdot \frac{du}{dt} = \rho \cdot \dot{u} \quad [2.14]$$

συμβολίζοντας με \dot{u} , τη στιγμιαία επιτάχυνση της ροής (m/s²).

Εισερχόμενος εντός της ροής, ο κύλινδρος υπόκειται σε δυνάμεις αδράνειας, οι οποίες είναι αποτέλεσμα δύο διαφορετικών συνιστωσών. Η πρώτη, γνωστή και ως δύναμη Froude-Krylon, προκαλείται λόγω της προϋπάρχουσας κλίσης πίεσης στη ροή, ενώ η δεύτερη προέρχεται από τη διαταραχή που προκαλεί η είσοδος του κυλίνδρου στη ροή.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η κλίση πίεσης είναι υπαρκτή ακόμα και όταν δεν υπάρχει κύλινδρος στην ροή. Αγνοώντας τη διαταραχή που προκαλεί στο πεδίο ροής η εισαγωγή ενός κυλίνδρου, το αδιατάρακτο πεδίο πίεσης ασκεί δυνάμεις στον κύλινδρο, οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν, ολοκληρώνοντας αυτή την πίεση για όλη την περίμετρο του κυλίνδρου. Μετά την ολοκλήρωση, η δύναμη Froude-Krylon προκύπτει:

$$F_{I1}(t) = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \dot{u}(t) \quad [2.15]$$

στην οποία σχέση το $\rho \cdot \pi \cdot R^2$ είναι η μάζα του κυλίνδρου “m” ανά μοναδιαίο μήκος, ή αντίστοιχα η μάζα του ρευστού που θα αντιστοιχούσε σε σχήμα ίδιο με αυτό του κυλίνδρου, εάν ο κύλινδρος δεν υπήρχε στη ροή. Η αναλυθείσα δύναμη προϋποθέτει την ύπαρξη κλίσης πίεσης και επομένως δεν υφίσταται στην περίπτωση ταλαντούμενου κυλίνδρου εντός στάσιμου ρευστού.

Κατά την περιγραφή και τον υπολογισμό της δύναμης Froude-Krylon (F_{I1}), ο κύλινδρος θεωρήθηκε πως δε διαταράσσει τη ροή. Για τον υπολογισμό της δεύτερης συνιστώσας της δύναμης αδράνειας, αυτό αναιρείται. Προφανώς, ο κύλινδρος δεν είναι αδιαπέραστος και ως εκ τούτου, η γεωμετρία του αναγκάζει το ρευστό να κινηθεί τριγύρω του, τροποποιώντας όλες τις τοπικές ταχύτητες και επιταχύνσεις. Αυτό σημαίνει πως στο ρευστό ασκείται κάποια δύναμη, η οποία μπορεί να προέρχεται μόνο από τον κύλινδρο και η οποία καλείται δύναμη προστιθέμενης ή εικονικής μάζας (added mass or virtual mass force).

Η εμφάνιση δύναμης προστιθέμενης μάζας είναι ανεξάρτητη της συνεκτικότητας του ρευστού και είναι παρούσα στην περίπτωση ταλάντωσης ιδανικού ρευστού γύρω από στάσιμο κύλινδρο (ομοιόμορφη δυναμική ροή). Το δυναμικό της ταχύτητας σε αυτή την περίπτωση, σε ορθογωνικές συντεταγμένες, αποτυπώνεται ως:

$$\Phi = U(t)x + U(t) \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}$$

όπου $x = r \cos \theta$ είναι η οριζόντια συντεταγμένη, $y = r \sin \theta$ η κάθετη συντεταγμένη, $U(t)$ είναι η οριζόντια, χρονικά μεταβαλλόμενη, ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος και a η ακτίνα του κυλίνδρου (βλ. Σχήμα 2.1).

Θεωρείται η περίπτωση ταλαντούμενου κυλίνδρου εντός στάσιμου ιδανικού ρευστού. Το δυναμικό της ταχύτητας, στην περίπτωση αυτή, ισούται με αυτό του ταλαντούμενου ρευστού, διαγράφοντας το όρο της οριζόντιας ροής $U(t)x$:

$$\Phi = U(t) \frac{a^2(x - X(t))}{(x - X(t))^2 + y^2}$$

όπου $X(t)$ είναι η θέση του κυλίνδρου κάθε χρονική στιγμή και $U(t)$ είναι η ταχύτητα του κυλίνδρου, ο οποίος κινείται κατά μήκος του x άξονα. Η δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο σε αυτή την περίπτωση, προκύπτει με τη χρήση τη εξίσωσης Bernoulli για κάθε σημείο στην περιφέρεια του κυλίνδρου και ολοκλήρωση για όλη την επιφάνεια.

$$F_{I2}(t) = -\rho \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \dot{u}(t)$$

Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο γεγονός ότι η δύναμη αυτή αντιτίθεται στην επιτάχυνση του κυλίνδρου.

Ο υπολογισμός της δύναμης προστιθέμενης μάζας μπορεί να γίνει και στην περίπτωση ταλαντούμενης ροής γύρω από στάσιμο κύλινδρο. Ο (Lamb, 1932) εκτίμησε τη δύναμη υπολογίζοντας την κινητική ενέργεια της διαταραγμένης ροής που επιφέρει η είσοδος του κυλίνδρου σε αυτή και αφαιρώντας από αυτή την τιμή της κινητικής ενέργειας της αδιατάρακτης ροής. Το αποτέλεσμα στο οποίο εξάγεται ακολουθώντας την ίδια διαδικασία είναι:

$$F_{I2}(t) = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \dot{u}(t) \quad [2.16]$$

το οποίο είναι ίδιο με την $F_{I1}(t)$.

Πέραν της ίδιας τιμής οι δύο δυνάμεις έχουν αμφότερες την ίδια χρονική φάση. Στις εκφράσεις και των δύο, ο μοναδικός χρονικά εξαρτώμενος όρος είναι αυτός της επιτάχυνσης και επομένως οι δύο δυνάμεις ακολουθούν τη φάση της επιτάχυνσης.

Έχοντας υπολογίσει τις δύο συνιστώσες, η συνολική δύναμη αδράνειας στον κύλινδρο θα είναι το άθροισμά τους:

$$F_I(t) = F_{I1}(t) + F_{I2}(t) = 2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \dot{u}(t) \quad [2.17]$$

Η θεωρητική τιμή 2, η οποία εμφανίζεται ως συντελεστής στην Εξίσωση 2.17 αντικαθίσταται από έναν συντελεστή C_M , ο οποίος αποκαλείται συντελεστής αδράνειας (Inertia Coefficient). Το 2 αυτό προέκυψε ως το 1 της $F_{I1}(t)$, προερχόμενο από το περιβάλλον πεδίο πίεσης και ως επιπλέον 1 της $F_{I2}(t)$, από τη διαταραχή που προκλήθηκε στη ροή από τον κύλινδρο. Το προερχόμενο από το πεδίο πίεσης μέρος για μη σταθερή και συγκεκριμένα ταλαντούμενη ροή λαμβάνεται πάντοτε ίσο με 1. Για στάσιμο ρευστό ή ροή σταθερής ταχύτητας, ωστόσο, η τιμή αυτή είναι ίση με μηδέν, εφόσον δεν υπάρχει επιτάχυνση στη ροή. Το δεύτερο μέρος, από την άλλη, δεν είναι πάντοτε ίσο με μονάδα, με εξαίρεση την περίπτωση ιδανικού ρευστού. Αντίθετα, παίρνει συνήθως τιμές μικρότερες

της μονάδας και έχει επικρατήσει να εκφράζεται μέσω ενός συντελεστή C_A , ο οποίος ονομάζεται συντελεστής προστιθέμενης μάζας (coefficient of added mass). Η ονομασία του προκύπτει από το γεγονός ότι τη διαταραχή στη ροή την προκαλεί η προσθήκη της μάζας του κυλίνδρου.

Συνολικά:

$$C_M = 1 + C_A \quad [2.18]$$

Σε περίπτωση ροής επαρκώς χαμηλού αριθμού Keulegan-Carpenter, η ροή παραμένει προσκολλημένη καθ' όλη την ταλάντωση, ανεξαρτήτως του αριθμού Reynolds. Για την περίπτωση αυτή ισχύει η ανάλυση του Stokes για ταλαντούμενη ιξώδη ροή γύρω από κύλινδρο (Bearman, Downie, Graham, & Obasahu, 1985), σύμφωνα με την οποία ο συντελεστής αδράνειας δίνεται συναρτήσει της παραμέτρου συχνότητας ως:

$$C_M = 1 + 4(\pi\beta)^{-\frac{1}{2}}$$

Επομένως, ο συντελεστής αδράνειας για μικρές τιμές του Kc , όπου και οι δυνάμεις αδράνειας υπερिशύουν των δυνάμεων αντίστασης, λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες του 2. Για μεγαλύτερους αριθμούς Kc , όπου δεν έχει εφαρμογή η ανάλυση Stokes, ισχύει: $C_M \leq 2$.

Με αντικατάσταση του συντελεστή 2 της [2.17] με το C_M η συνολική δύναμη αδράνειας λαμβάνεται ως:

$$F_I(t) = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot C_M \cdot \dot{u}(t) \quad [2.19]$$

στην οποία:

$F_I(t)$, η δύναμη αδράνειας ανά μοναδιαίο μήκος κυλίνδρου (N/m)

ρ , η πυκνότητα του ρευστού (kg/m^3)

C_M , ο αδιάστατος συντελεστής αδράνειας (-)

$\dot{u}(t)$, η χρονικά εξαρτώμενη επιτάχυνση της ροής (m/s^2)

ή με αντικατάσταση της ταχύτητας από την Εξίσωση 2.12 και παραγώγιση ως προς το χρόνο:

$$F_I(t) = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot C_M \cdot \omega \cdot U_{max} \cdot \cos(\omega t) \quad [2.20]$$

Οι δυνάμεις αδράνειας κυριαρχούν των δυνάμεων αντίστασης για μικρές τιμές του Kc , όταν ταυτόχρονα ο Reynolds είναι μεγάλος, ενώ οι δυνάμεις αντίστασης φαίνεται να υπερिशύουν όταν ο Kc είναι μεγάλος, με σχετικά μικρό Reynolds. Στην πρώτη περίπτωση ο συνδυασμός μικρής περιόδου με υψηλή μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης υποδηλώνει πολύ μεγάλη επιτάχυνση της ροής και επομένως έντονες δυνάμεις αδράνειας. Στη δεύτερη, ο συνδυασμός σχετικά χαμηλής μέγιστης ταχύτητας με μεγάλη περίοδο ταλάντωσης αντιστρέφει το αποτέλεσμα.

2.2.3. Εξίσωση Morison

Ο J.R. Morison και οι συνεργάτες του ήταν από τους πρώτους ερευνητές που προσπάθησαν να προβλέψουν το συνολικό φορτίο προερχόμενο από κύματα, το οποίο εφαρμόζεται σε σώματα (Morison, O'Brien, Johnson, & Schaaf, 1950). Στην έρευνά του, συνέδεσε τις δύο δυνάμεις, αδράνειας και αντίστασης, ώστε να λάβει τη συνισταμένη δύναμη. Κατά προσέγγιση, η δύναμη αυτή, ανά μονάδα μήκους ενός σταθερού κυλίνδρου ο οποίος βρίσκεται εντός ημιτονοειδούς ταλαντούμενης ροής, δίνεται ως εξής:

$$F(t) = F_I(t) + F_D(t) \quad [2.21]$$

ή αναλυτικά:

$$F(t) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_D \cdot D \cdot u(t) \cdot |u(t)| + \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot C_M \cdot \dot{u}(t) \quad [2.22]$$

και με αντικατάσταση του όρου της ταχύτητας από την Εξίσωση 2.12:

$$F(t) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_D \cdot D \cdot U_{max}^2 \cdot \sin(\omega t) \cdot |\sin(\omega t)| + \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot C_M \cdot \omega \cdot U_{max} \cdot \cos(\omega t) \quad [2.23]$$

στην οποία, ο πρώτος όρος είναι αυτός της δύναμης αντίστασης και ο δεύτερος αντιπροσωπεύει τη δύναμη αδράνειας.

Παρατηρείται από τη μορφή της εξίσωσης (και κυρίως μετά την αντικατάσταση της ταχύτητας) πως οι δύο δυνάμεις βρίσκονται σε διαφορά φάσης 90° μεταξύ τους. Αυτό οφείλεται στην αντίστοιχη διαφορά φάσης μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης κατά την ταλαντούμενη ροή. Η δύναμη αδράνειας είναι ανάλογη της στιγμιαίας επιτάχυνσης στη ροή, ενώ η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη του τετραγώνου της στιγμιαίας ταχύτητας της ροής.

Στη χρήση της εξίσωσης Morison βασίζεται ο προσδιορισμός των συντελεστών αντίστασης και αδράνειας δια μέσω μιας πειραματικής διαδικασίας. Η επιλογή της μαθηματικής προσέγγισης υπολογισμού των μέσων συντελεστών C_M και C_D , για ταλάντωση δεδομένων χαρακτηριστικών, επαφίεται στην ευχέρεια του κάθε ερευνητή. Το πρώτο βήμα, ωστόσο, για κάθε περίπτωση είναι πάντα η καταγραφή της δύναμης, ως συνάρτηση του χρόνου. Για τη διαδικασία υπολογισμού απαιτείται ένα επιπλέον χαρακτηριστικό της ροής, ως τη δεύτερη συνάρτηση του χρόνου και συνήθως αυτό είναι η ταχύτητα. Εφόσον τα δεδομένα έχουν καταγραφεί, το επόμενο βήμα είναι η διερεύνηση των συντελεστών αυτών για τους οποίους η κυματομορφή της δύναμης που προκύπτει από την εξίσωση Morison προσαρμόζεται ακριβέστερα στην κυματομορφή της παραγόμενης, από την πειραματική διάταξη, δύναμης. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για ροές διαφορετικών χαρακτηριστικών, γίνεται καταγραφή των αποτελεσμάτων και παρουσιάσή τους σε κατάλληλα διαγράμματα. Αναφορικά, αντιδιαστέλλοντας τα δεδομένα από την εργασία του (Frigaard, 1989) και της

δουλειάς των (Journée & Massie, 2001), οι μέθοδοι που κατά κόρων χρησιμοποιούνται για το σκοπό αυτό είναι οι εξής:

- **Μέθοδος υπολογισμού των συντελεστών αντίστασης και αδράνειας στα σημεία μέγιστης επιτάχυνσης και ταχύτητας**

Η τεχνική αυτή συναντάται και ως Μέθοδος Morison, καθότι αποτελεί την τακτική που ο ίδιος ο Morison πρότεινε πρώτος και ακολούθησε στους υπολογισμούς του. Πρόκειται για τον υπολογισμό των συντελεστών αντίστασης και αδράνειας στα σημεία όπου αντίστοιχα η επιτάχυνση ή η ταχύτητα είναι μέγιστες. Πιο συγκεκριμένα, στα σημεία όπου η ταχύτητα είναι μέγιστη, η επιτάχυνση θα είναι μηδενική και επομένως η συνολική δύναμη εκείνη τη στιγμή θα ισούται μόνο με τη δύναμη αντίστασης. Οπότε, αντικαθιστώντας στην εξίσωση Morison και επιλύοντας ως προς τον συντελεστή αντίστασης, λαμβάνουμε:

$$C_D = \frac{2 \cdot F(t)}{\rho \cdot D \cdot u(t) \cdot |u(t)|} \quad [2.24]$$

Αντίστοιχα, όταν η επιτάχυνση είναι μέγιστη, η ταχύτητα θα είναι μηδενική και επομένως η συνολική δύναμη τη στιγμή αυτή θα ισούται με τη δύναμη αδράνειας. Οπότε, λύνοντας την εξίσωση Morison ως προς τον συντελεστή αδράνειας για τα σημεία αυτά προκύπτει:

$$C_M = \frac{4 \cdot F(t)}{\rho \cdot \pi \cdot D^2 \cdot \dot{u}(t)} \quad [2.25]$$

Το πιθανό σφάλμα που μπορεί να προκύψει, μπορεί να αποφευχθεί με την επανάληψη της μεθόδου για πολλά σημεία και εύρεσης της μέσης τιμής των αποτελεσμάτων για κάθε συντελεστή.

- **Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων**

Αποτελεί μία υπολογιστική προσαρμογή της εξίσωσης Morison (Εξίσωση 2.22) στην μετρημένη καταγραφή της δύναμης, για το χρονικό διάστημα μιας περιόδου, θεωρώντας μηδενικό σφάλμα επαναληψιμότητας μεταξύ των περιόδων (μεγαλύτερα διαστήματα θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα, αλλά θα καθυστερούσαν την υπολογιστική διαδικασία). Ουσιαστικά αποτελεί την ελαχιστοποίηση του εμβαδού μεταξύ των κυματομορφών της μετρούμενης δύναμης και της δύναμης Morison. Η εξεύρεση της ιδανικής κυματομορφής προϋποθέτει τον καθορισμό των συντελεστών C_D και C_M . Αυτό μπορεί να γίνει με την ελαχιστοποίηση του υπολοίπου της διαφοράς:

$$R(C_D, C_M) = \int_0^T [F(t)_m - F(t, C_D, C_M)_{fitted}]^2 dt \quad [2.26]$$

όπου T είναι ο χρόνος της μετρούμενης καταγραφής και συνήθως ισοδυναμεί με τον χρόνο μιας περιόδου. Με $F(t)_m$ συμβολίζεται η μετρημένη τιμή της δύναμης (measured) και με $F(t)_{fitted}$, η προσαρμοσμένη δύναμη.

Ο υπολογισμός του ελαχίστου για στην Εξίσωση 2.26 γίνεται θέτοντας τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial R}{\partial C_D}$ και $\frac{\partial R}{\partial C_M}$ ίσες με το μηδέν. Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων ως προς C_D και C_M αντίστοιχα, προκύπτουν οι μέσοι συντελεστές, οι οποίοι ελαχιστοποιούν την Εξίσωση 2.26.

Συγκεκριμένα, με τη χρήση της εξίσωσης Morison σε N αριθμό χρονικών στιγμών, κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, τα ολοκληρώματα μπορούν να μετατραπούν σε αθροίσματα και οι σχέσεις αυτές να πάρουν τη μορφή:

$$\frac{\partial R}{\partial C_D} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N (F(t)_m - F(t)_{fitted}) \cdot \frac{\partial F(t)_{fitted}}{\partial C_D} = 0 \quad [2.27]$$

και

$$\frac{\partial R}{\partial C_M} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N (F(t)_m - F(t)_{fitted}) \cdot \frac{\partial F(t)_{fitted}}{\partial C_M} = 0 \quad [2.28]$$

Με την αντικατάσταση της δύναμης από τη Σχέση 2.22 και μετά από πράξεις και απλοποιήσεις προκύπτει:

$$C_D \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{Kc^2} \cdot u^4 + C_M \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\pi}{2 \cdot Kc^2} \cdot u \cdot |u| \cdot \dot{u} = \sum_{i=1}^N F_m \cdot u \cdot |u| \quad [2.29]$$

και

$$C_D \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{Kc^2} \cdot u \cdot |u| \cdot u + C_M \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\pi}{2 \cdot Kc^2} \cdot \dot{u}^2 = \sum_{i=1}^N F_m \cdot \dot{u} \quad [2.30]$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, καθώς κάθε μια από αυτές αποτελεί γραμμικό συνδυασμό μεταξύ των συντελεστών αντίστασης και αδράνειας. Με στόχο την απλοποίηση της επίλυσης τους, γράφονται στη μορφή:

$$a \cdot C_D + b \cdot C_M = c \quad [2.31]$$

και

$$d \cdot C_D + e \cdot C_M = f \quad [2.32]$$

όπου:

$$a = \sum_{i=1}^N \frac{1}{Kc^2} \cdot u^4, \quad b = \sum_{i=1}^N \frac{\pi}{2 \cdot Kc^2} \cdot u \cdot |u| \cdot \dot{u}, \quad c = \sum_{i=1}^N F_m \cdot u \cdot |u|$$

και

$$d = \sum_{i=1}^N \frac{1}{Kc^2} \cdot u \cdot |u| \cdot \dot{u}, \quad e = \sum_{i=1}^N \frac{\pi}{2 \cdot Kc^2} \cdot u^2, \quad f = \sum_{i=1}^N F_m \cdot \dot{u}$$

Η επίλυση του συστήματος δίνει τους προσαρμοσμένους συντελεστές:

$$C_D = \frac{b \cdot f - c \cdot e}{b \cdot d - a \cdot e} \quad [2.33]$$

και

$$C_M = \frac{b \cdot c - a \cdot f}{b \cdot d - a \cdot e} \quad [2.34]$$

- **Μέθοδος Ανάλυσης Fourier-Averaging**

Κάθε χρονικά εξαρτώμενο σήμα $F(t)$, το οποίο επαναλαμβάνεται με περίοδο T , μπορεί να εκφραστεί με μία σειρά, απείρων θεωρητικά όρων ως:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \sin(n\omega t) + b_n \cdot \cos(n\omega t)] \quad [2.27]$$

στην οποία:

$$\begin{aligned} F(t) &= \text{η αυθαίρετη περιοδική συνάρτηση} \\ a_n, b_n &= \text{συντελεστές με "n" ακέραιο θετικό} \\ t &= \text{χρόνος} \end{aligned}$$

Οι συντελεστές a_n και b_n μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \quad [2.28]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega t) dt \quad [2.29]$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega t) dt \quad [2.30]$$

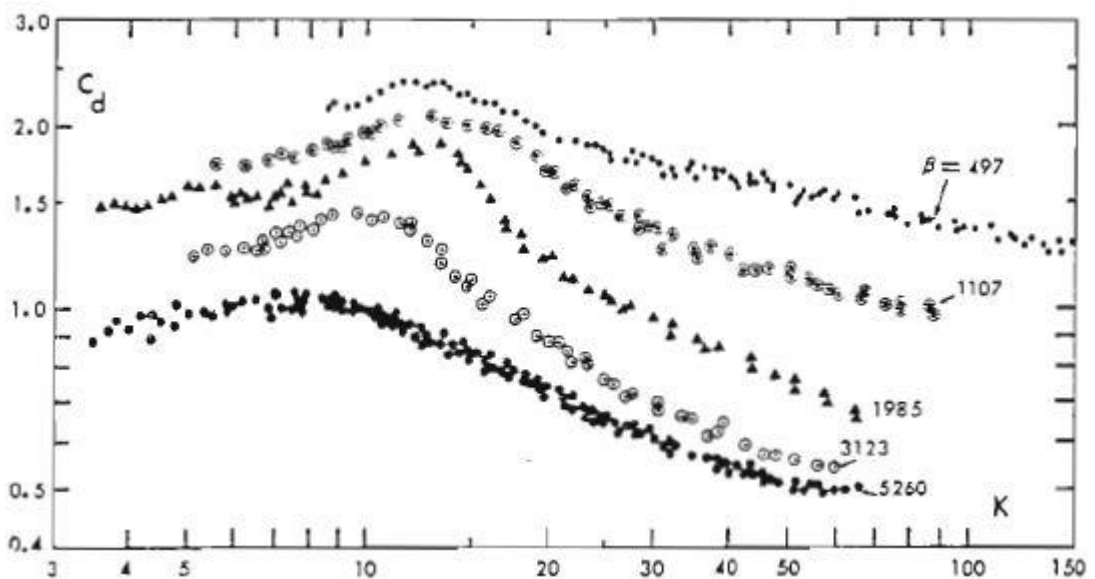
Οι παραπάνω σχέσεις πρέπει να εφαρμοστούν για μια περίοδο T , του μετρημένου σήματος. Είναι άνευ σημασίας το ποια θα είναι η χρονική στιγμή, στην οποία ξεκινά η περίοδος, αρκεί η διάρκεια της μέτρησης να ισοδυναμεί με $\Delta t = T$. Η θεωρία υποδεικνύει ότι οι σειρές περιλαμβάνουν έναν άπειρο αριθμό όρων, το οποίο δεν είναι πάντα πρακτικό. Η χρήση ενός μόνο όρου βοηθά στη γραμμικοποίηση του περιοδικού σήματος.

Αναλύοντας τις δύο συνιστώσες της δύναμης, στη σχέση του Morison, σε σειρές Fourier ενός όρου, προκύπτει η συνολική αναλυμένη δύναμη. Το σήμα θα αποτελείται από έναν ημιτονοειδή και έναν συνημιτονοειδή όρο. Οι δύο συντελεστές προκύπτουν έπειτα από μεσοστάθμιση ως προς το ημιτονοειδές και τον συνημιτονοειδές όρο και επίλυση ως προς τον συντελεστή αντίστασης και αδράνειας αντίστοιχα.

Οι προκύπτουσες τιμές των μέσων συντελεστών συνήθως καταγράφονται σε διαγράμματα συναρτήσεως του αριθμού Keulegan-Carpenter και λιγότερο συχνά συναρτήσεως του αριθμού Reynolds, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου συχνότητας β .

Τα Σχήματα 2.9 και 2.10 παρουσιάζουν συγκεντρωτικά κάποια από τα πειραματικά δεδομένα του (Sarkkaya, 1976) για τους συντελεστές αντίστασης και αδράνειας, συναρτήσεως των αδιάστατων παραμέτρων Kc και β , όπως παρατίθενται από τον (Frigaard, 1989). Επιπλέον, συνδυασμένες οι τιμές των μέσων συντελεστών αντίστασης και αδράνειας, για χαμηλές τιμές του αριθμού Kc , δίνονται από τον (Sarkkaya, 1986) στο Σχήμα 2.11.

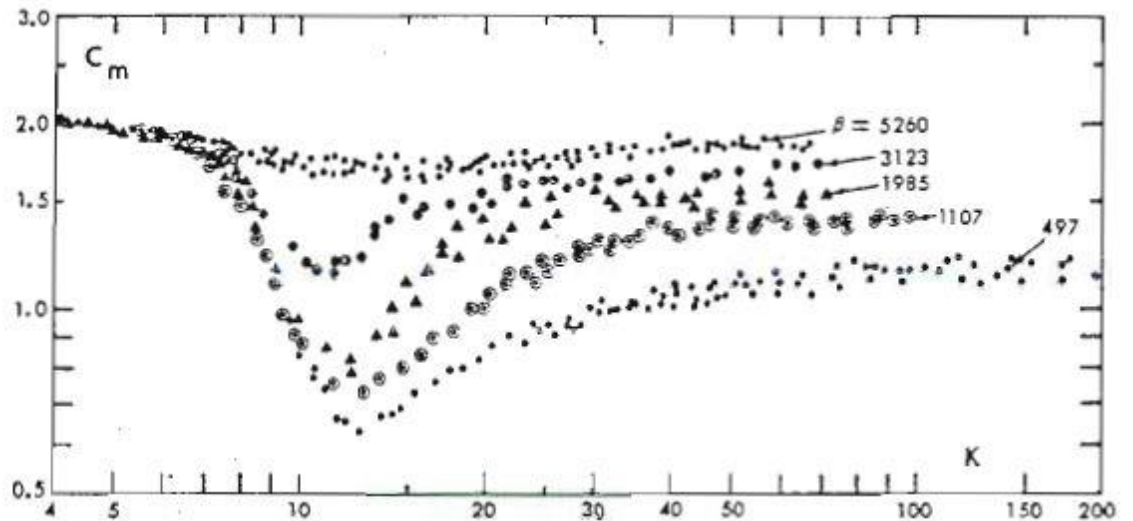
Παρατηρείται πως για πολύ χαμηλές τιμές του Kc , ο μέσος συντελεστής αντίστασης λαμβάνει μεγάλες τιμές, οι οποίες μειώνονται με την αύξηση του Kc . Σε τιμές περίπου $2 \leq Kc \leq 5$, διάστημα το εξαρτάται από την παράμετρο Stokes της ταλάντωσης, ο συντελεστής αντίστασης εμφανίζει ελάχιστο και έπειτα αρχίζει και πάλι να αυξάνει.



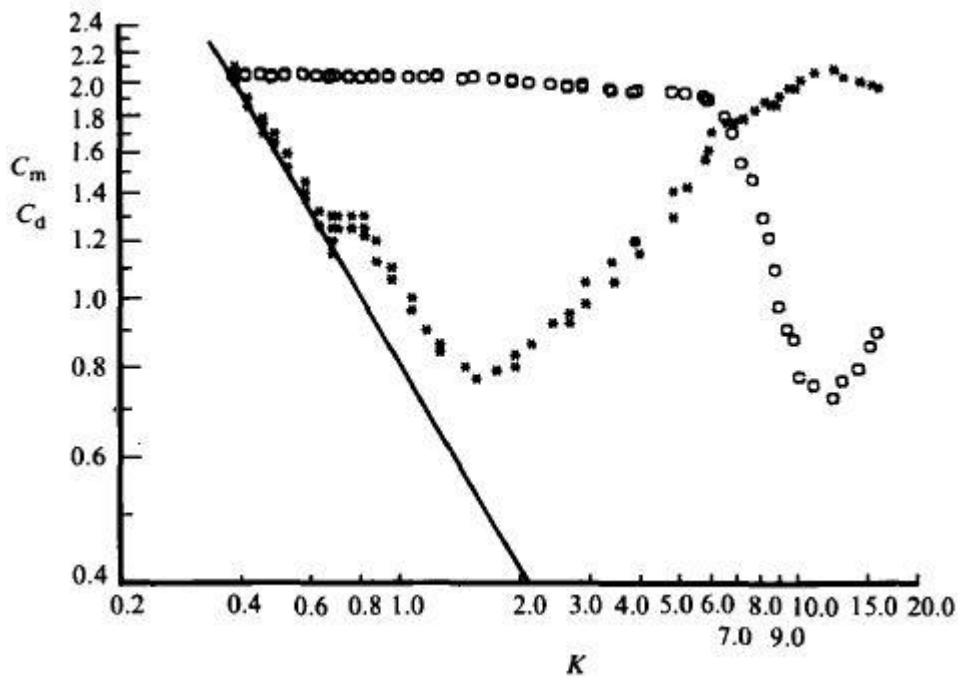
Σχήμα 2.9: Γραφική παράσταση του συντελεστή αντίστασης $C_{D_{exp}}$ σε σχέση με τον αριθμό Kc για διάφορες τιμές του β .

Σε συνδυασμό των σχημάτων 2.9 και 2.11, φαίνεται πως ο συντελεστής αντίστασης καταλήγει σε ένα μέγιστο, σε τιμή του Kc η οποία εξαρτάται από την παράμετρο συχνότητας β και η οποία μειώνεται με την αύξηση του β . Τελικώς, με περαιτέρω αύξηση του αριθμού Keulegan-Carpenter οι τιμές του συντελεστή συνεχίζουν να φθίνουν και τείνουν να σταθεροποιούνται για πολύ μεγάλες τιμές του Kc . Βασικό είναι να παρατηρηθεί η ποιοτική συμφωνία μεταξύ των γραφικών παραστάσεων του συντελεστή αντίστασης για

τις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου συχνότητας, καθώς και το γεγονός ότι για τα περισσότερα β οι μέγιστοι συντελεστές αντίστασης βρίσκονται στην περιοχή τιμών του Kc από 10 έως 15. Σε συνδυασμό των δύο διαγραμμάτων (Σχήματα 2.9, 2.10) γίνεται εμφανής η αντίστροφη εξάρτηση των δύο συντελεστών από την παράμετρο συχνότητας. Με αύξηση του β ο συντελεστής αντίστασης μειώνεται, ενώ ο συντελεστής αδράνειας αυξάνεται.



Σχήμα 2.10: Γραφική παράσταση του συντελεστή αδράνειας $C_{M_{exp}}$ σε σχέση με τον αριθμό Kc για διάφορες τιμές του β .



Σχήμα 2.11: Μέσοι συντελεστές αντίστασης $C_{D_{exp}}$ και αδράνειας $C_{M_{exp}}$ για χαμηλές τιμές του Kc και $\beta=1035$ (Sarkaya, 1986)

Αναλυμένη σε σειρά Fourier ενός όρου, η δύναμη της εξίσωσης Morison γράφεται στη μορφή:

$$F(t) = \frac{8}{3 \cdot \pi} \cdot C_D \cdot \sin(\omega t) + \frac{\pi^2}{Kc} \cdot C_M \cdot \cos(\omega t)$$

Ο λόγος των αδρανειακών προς τις δυνάμεις ιξώδους, με τη χρήση των $C_M = 2$ προερχόμενο από τη θεωρία ιδανικού ρευστού και $C_D \sim 1$ για πραγματικό ρευστό, δίνεται ως:

$$\frac{\text{Inertia Forces}}{\text{Drag Forces}} = \frac{\frac{\pi^2}{Kc} \cdot C_M}{\frac{8}{3 \cdot \pi} \cdot C_D} = \frac{6 \cdot \pi^3}{8 \cdot Kc}$$

Επομένως, η επίδραση των δύο δυνάμεων θεωρητικά θα είναι ίδια όταν ισχύει:

$$\frac{6 \cdot \pi^3}{8 \cdot Kc} = 1$$

ή

$$Kc \sim 23$$

Θεωρητικά για τιμές του αριθμού Keulegan-Carpenter πολύ μικρότερες του 23 οι αδρανειακές δυνάμεις θα υπερिशύουν των δυνάμεων αντίστασης, ενώ αντιστρόφως, για τιμές πολύ μεγαλύτερες του 23, οι δυνάμεις ιξώδους θα κυριαρχούν στη ροή.

Όσον αφορά το συντελεστή αδράνειας, όπως προκύπτει από τη θεωρία, λαμβάνει τιμές κοντά στην τιμή 2. Ωστόσο, όπως φαίνεται και στα αποτελέσματα πειραμάτων του (Sarpkaya, 1976), στο Σχήμα 2.10 ο συντελεστής αυτός επιδέχεται διάφορες διακυμάνσεις στην τιμή του, ανάλογα με τα στοιχεία της ροής, τα οποία εκφράζονται εδώ μέσω των αριθμών β και Kc . Παρόλα αυτά, κατά τη χρήση του συντελεστή για υπολογιστικούς σκοπούς, κυρίως για τον υπολογισμό των φορτίων μέσω της εξίσωσης Morison, γίνεται συνήθως χρήση κάποιας, ή κάποιων σταθερών τιμών του C_M . Ο (Clauss, 1992) για παράδειγμα, πρότεινε τις τιμές $C_M = 2$ για $Kc < 10$ και $C_M = 1.5$ για $Kc \geq 10$. Μια γρήγορη ματιά στα δεδομένα του Sarpkaya δικαιολογούν, ως ένα βαθμό, αυτή του την επιλογή.

Οι (Gudmestad & Moe, 1996) διεξήγαγαν μία συγκριτική αξιολόγηση μεταξύ των πρακτικών που ακολουθούν και εν τέλει των τιμών του συντελεστή αντίστασης τις οποίες λαμβάνουν, μέσω αυτών των πρακτικών, δύο διαφορετικοί οργανισμοί: το Αμερικάνικο Ινστιτούτο Πετρελαίου (American Petroleum's Institute API) και ο Νορβηγικός Det Norske Veritas (DNV). Το API προτείνει για κυκλικό κύλινδρο την τιμή $C_M = 1.6$ για την περίπτωση λείας και την τιμή $C_M = 1.2$ για την περίπτωση τραχιάς επιφάνειας. Από την άλλη πλευρά το DNV δίνει τις τιμές $C_M = 2$ και $C_M = 1.8$ για λεία και τραχιά επιφάνεια αντίστοιχα. Κατά τη συμπερασματική τους αξιολόγηση οι Gudmestad & Geir Moe, καταλήγουν στο ότι η τακτική για τους υπολογισμούς, την οποία ακολουθεί η API, χρησιμοποιεί "state-of-the-art" τιμές.

Σημαντική παρατήρηση, ως προς τον συντελεστή αδράνειας, αποτελεί το γεγονός ότι στην περιοχή περίπου $8 \leq KC \leq 18$, για όλες τις τιμές της παραμέτρου β , ο συντελεστής αδράνειας λαμβάνει χαμηλές τιμές, ακόμα και μικρότερες της μονάδας. Κάτι τέτοιο έρχεται σε αντίθεση με τη θεωρία, δεδομένου ότι ο συντελεστής αδράνειας της δύναμης Froude-Krylov λαμβάνει τιμή ίση με τη μονάδα, με τον συντελεστή αδράνειας να αποτελεί το άθροισμα του προαναφερθέντα συντελεστή και του συντελεστή προστιθέμενης μάζας. Η εξήγηση είναι απλή και δεν υπάρχει κάτι το βαθύ από μαθηματικής ή ρευστομηχανικής σκοπιάς στο φαινόμενο αυτό. Η αιτία βρίσκεται στον συντελεστή προστιθέμενης μάζας, ο οποίος υπό συνθήκες μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές. Σύμφωνα με έναν ορισμό, ο συντελεστής προστιθέμενης μάζας είναι το μέτρο της προστιθέμενης δύναμης η οποία χρειάζεται να ασκηθεί από τον κύλινδρο, ώστε να επιταχυνθεί ή επιβραδυνθεί το ρευστό περιφερειακά του κυλίνδρου, το οποίο υφίσταται μια χρονικά εξαρτώμενη κίνηση. Η χρονικά μέση τιμή αυτής της δύναμης μπορεί απλά να γίνει αρνητική. Σύμφωνα με έναν δεύτερο ορισμό, ο συντελεστής προστιθέμενης μάζας είναι ένα αδιάστατο μέτρο της μάζας η οποία παρασύρεται από τον κύλινδρο κατά την κατεύθυνση της ροής. Το μέγεθος και η σχετική διεύθυνση κίνησης μιας τέτοιας παρασυρόμενης μάζας μεταβάλλεται με το χρόνο, εντός δεδομένης ταλάντωσης και ο μέσος όρος της μπορεί να είναι σε διεύθυνση αντίθετη αυτής της θετικής επιτάχυνσης. Ως εκ τούτου, αν για μια συγκεκριμένη ταλάντωση ο συντελεστής αδράνειας είναι αρνητικός, αυτό σημαίνει πως η συνολική μάζα ρευστού, η οποία παρασύρθηκε κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, είναι μεγαλύτερη κατά την επιβράδυνση από αυτή της επιτάχυνσης.

3. Θεωρητικά μοντέλα

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου υπολογισμού των συντελεστών της εξίσωσης Morison, για κάθε περίπτωση αμιγώς ταλαντούμενης ροής. Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται αρχικά η περίπτωση ενός οιονεί-στατικού μοντέλου και εν συνεχεία θεωρία και πειραματικά δεδομένα συνδυάζονται σε ένα ημι-εμπειρικό μοντέλο.

3.1. Οιονεί-στατικό μοντέλο

Ο όρος «οιονεί-στατικό» προέρχεται από το γεγονός ότι το μοντέλο αυτό βασίζεται στη θεωρία της χρονικά σταθερής ροής για τον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης. Συγκεκριμένα χρησιμοποιείται μια ημι-εμπειρική σχέση υπολογισμού του συντελεστή αντίστασης, εξαρτώμενη από τον αριθμό Reynolds ροής σταθερής ταχύτητας.

Η διαδικασία εκτίμησης των συντελεστών των δυνάμεων της ταλαντούμενης ροής είναι η αντίστοιχη με αυτή που ακολουθείται κατά τον πειραματικό προσδιορισμό των συντελεστών. Συγκεκριμένα και σε διακριτά βήματα, η διαδικασία έχει ως εξής:

- Παράγεται η θεωρητική δύναμη, δεδομένων των χαρακτηριστικών της ροής (β, Kc), αντίστοιχης της πειραματικής, με τη χρήση της εξίσωσης Morison. Η θεωρητική ιδιότητά της έγκειται στο γεγονός ότι οι συντελεστές, οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν, θα είναι οι θεωρητικοί, όπως προκύπτουν από σχέσεις και παραδοχές.
- Εφόσον αποκτηθεί η κυματομορφή της δύναμης, αντίστοιχης της πειραματικά εξαγόμενης, ακολουθείται η ίδια διαδικασία προσδιορισμού των συντελεστών. Συγκεκριμένα, πραγματοποιείται προσαρμογή της εξίσωσης Morison στη θεωρητική δύναμη, η οποία παράχθηκε, με την κατάλληλη προσαρμογή των συντελεστών της εξίσωσης, ώστε οι δύο κυματομορφές των δυνάμεων να συμπέσουν. Αυτό, σε αντιστοιχία με την πειραματική διαδικασία, θα γίνει με κάποια μέθοδο εκτίμησης των μέσων συντελεστών του κύκλου ταλάντωσης. Είναι σημαντικό, όταν επιθυμείται να συγκριθούν τα αποτελέσματα, τα οποία εξάγονται από ένα τέτοιο θεωρητικό μοντέλο, με τα πειραματικά της αντίστοιχης ροής, να επιλέγεται η ίδια μέθοδος προσαρμογής της δύναμης Morison στη θεωρητική δύναμη, με αυτή που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διεξαγωγή προσαρμογής της δύναμης Morison στην, εκ του πειράματος καταγεγραμμένη δύναμη.
- Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για πολλούς διαφορετικούς συνδυασμούς των αδιάστατων παραμέτρων της ροής και τα αποτελέσματα καταγράφονται σε διαγράμματα. Κατά τον τρόπο αυτό θα δημιουργηθούν γραφικές παραστάσεις του συντελεστή αντίστασης και του συντελεστή αδράνειας με τις διάφορες παραμέτρους, οι οποίες διευκολύνουν τη σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα πειραματικά.

Το πρώτο βήμα στη δημιουργία της θεωρητικής δύναμης, με τη χρήση της εξίσωσης Morison, αποτελεί η επιλογή των κατάλληλων συντελεστών. Ως χρονικά στιγμιαίος συντελεστής αντίστασης λαμβάνεται ο αντίστοιχος συντελεστή αντίστασης σταθερής ροής, για τους ίδιους αριθμούς Reynolds. Οι πειραματικά μετρημένες τιμές του συντελεστή αντίστασης για ροή σταθερής ταχύτητας, αν και αξιόπιστες, είναι διακριτές και δύσχρηστες για την υπολογιστική διαδικασία. Απαιτείται μία συνεχής σχέση του συντελεστή αντίστασης με τον αριθμό Reynolds, σε εύρος που να καλύπτει όλες τις πιθανές τιμές του Reynolds, για ταλάντωση διαφόρων χαρακτηριστικών. Στα πλαίσια της αναζήτησης της καταλληλότερης προς χρήση σχέσης, διεξήχθη μια συγκριτική αξιολόγηση των διαθέσιμων, στη βιβλιογραφία, σχέσεων. Η αξιοπιστία των σχέσεων αυτών κρίνεται έπειτα από σύγκριση των αποτελεσμάτων τους με αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα. Δεδομένης της σχετικής στασιμότητας που παρουσιάζει ο συντελεστής αντίστασης για τιμές του Reynolds μεγαλύτερες του 400 και μέχρι το σημείο της κρίσης αντίστασης, στην αξιολόγηση χρησιμοποιούνται τα αξιόπιστα πειραματικά δεδομένα του (Tritton, 1959).

Μεγάλο πλήθος μελετών έχουν διεξαχθεί για τον πειραματικό ή αναλυτικό υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης, σε οιονεί στατική ροή, ασυμπίεστου ιξώδους ρευστού, γύρω από σφαιρικά σωματίδια. Αντίθετα λιγότερες είναι οι δουλειές που συναντώνται σχετικά με μη σφαιρικά σωματίδια και ακόμα μικρότερος ο αριθμός αυτών, οι οποίες απευθύνονται σε κυκλικό κύλινδρο. Έχουν αναπτυχθεί γενικού χαρακτήρα σχέσεις για την εκτίμηση του C_d μη σφαιρικών σωμάτων (συμπαριλαμβανομένου και του κυλίνδρου), οι οποίες κάνουν χρήση διάφορων παραγόντων σχήματος, όπως η σφαιρικότητα. Στην αξιολόγησή τους περί των πιο αξιόπιστων μεθόδων υπολογισμού του C_d για μη σφαιρικά σωματίδια, οι (Chhabra, Agarwal, & Sinha, 1998), κρίνουν ως καλύτερη αυτή του (Ganser, 1993). Ωστόσο, τα αποτελέσματα της σχέσης που προτείνει ο Ganser δίνουν μεγάλο σφάλμα απόκλισης σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα για κυκλικούς κυλίνδρους. Επομένως, καμία σχέση, η οποία αφορά μη σφαιρικά σωματίδια, δεν είναι κατάλληλη για την περίπτωση κυλίνδρου.

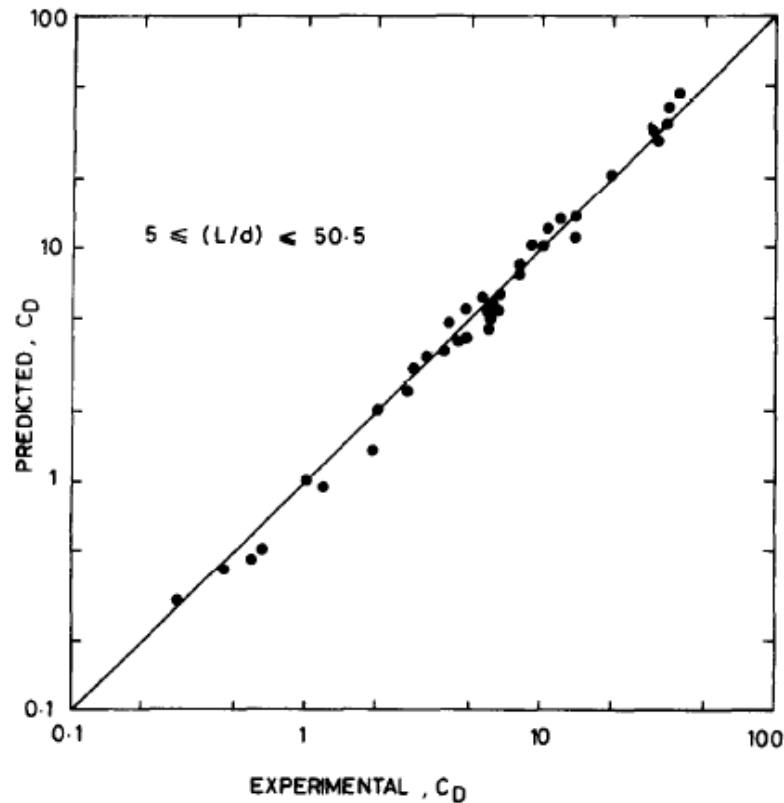
Τα πρώτα γνωστά αναλυτικά αποτελέσματα προέρχονται από τις προσεγγιστικές λύσεις της ακριβής, σύμφωνα με τον (Lienhard J. H., 1966), σχέσης του (Lamb, 1932) για πολύ μικρές τιμές του Reynolds (Stokes flow).

$$C_d = \frac{8 \cdot \pi}{Re \cdot (2,002 - \ln(Re))} \quad [3.1]$$

Μία άλλη σχέση του συντελεστή αντίστασης με τον αριθμό Reynolds, για καθεστώς ροής Stokes ($Re < 1$), εντός νευτώνειου μέσου, είναι αυτή που ανέπτυξαν οι (Cho, Pak, Cho, & Park, 1991), για κυλίνδρους με πεπερασμένο μήκος ($5 < L/d < 50$).

$$C_d = \frac{4}{Re \cdot (\ln(L/d) - 0.1137)} \quad [3.2]$$

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της Εξίσωσης 3.2 με δεδομένα πειραμάτων που οι ίδιοι διεξήγαγαν, οι (Madhav & Chhabra, 1994) βρήκαν πως το μέσο σφάλμα για 38 δεδομένα, στην περιοχή έρπουσας ροής, δεν ξεπερνά το 10%. Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζεται η αντίστοιχη αντιδιαστολή αποτελεσμάτων.



Σχήμα 3.1: Αντιδιαστολή πειραματικών δεδομένων των (Madhav & Chhabra, 1994) με τις προσεγγίσεις της εξίσωσης των (Cho, Pak, Cho, & Park, 1991)

Στην πειραματική τους αυτή μελέτη για τον υπολογισμό του συντελεστή αντίστασης σε μη σφαιρικά σωματίδια, εντός νευτώνειων ρευστών, οι (Madhav & Chhabra, 1994), εισάγουν μία επιπλέον εξίσωση. Με τον συνδυασμό δεδομένων από μετρήσεις για διάφορα σχήματα προτείνουν την, απαλλαγμένη από παραμέτρους σχήματος:

$$C_d = \frac{24}{Re} \cdot [1 + 0.604 \cdot Re^{0.529}] \quad [3.3]$$

για την οποία και ισχυρίζονται πως μπορεί να σταθεί αξιόπιστη ακόμα και σε περίπτωση κυλίνδρου για $0,1 \leq Re \leq 400$. Παρότι ο αριθμός Reynolds αποτελεί τη μοναδική παράμετρο, η σχέση χρησιμοποιείται υπό τους περιορισμούς της σφαιρικότητας του κυλίνδρου, η οποία βρίσκεται στα πλαίσια $0,35 \leq \psi \leq 0,7$ και του λόγου μήκους προς διάμετρο να κινείται στο διάστημα $0,05 < L/d < 50$. Στο Σχήμα 3.3 φαίνεται πως η σχέση αυτή δεν μπορεί να υποστηρίξει την περίπτωση κυλίνδρου «απείρου» μήκους, με τα αποτελέσματα, τα οποία δίνει να αποκλίνουν πολύ των αντίστοιχων πειραματικών δεδομένων για $Re < 50$.

Οι (Clift, Grace, & Weber, 1978), για κυλίνδρους μεγάλου (άπειρου θεωρητικά) μήκους και για σχετικά μικρό εύρος τιμών $0.1 < Re < 400$, προτείνανε τις σχέσεις 3.4, 3.5 και 3.6. Η ημι-εμπειρική τους αποτύπωση βασίστηκε στα πειραματικά δεδομένα τα οποία εξήγαγε ο (Pruppacher, 1970) για χαμηλές και ενδιάμεσες τιμές του αριθμού Reynolds και συνοψίζεται ως εξής:

$$C_d = \frac{9.689}{Re^{0.78}} \cdot (1 + 0.147 \cdot Re^{0.82}) \text{ για } 0.1 < Re < 5 \quad [3.4]$$

$$C_d = \frac{9.689}{Re^{0.78}} \cdot (1 + 0.227 \cdot Re^{0.5}) \text{ για } 5 < Re < 40 \quad [3.5]$$

$$C_d = \frac{9.689}{Re^{0.78}} \cdot (1 + 0.0838 \cdot Re^{0.82}) \text{ για } 40 < Re < 400 \quad [3.6]$$

Μια επιπλέον τμηματική εξίσωση για τον υπολογισμό του C_d συναρτήσει του Re εισάγεται από τον (Hui, 2003). Βασιζόμενος σε προϋπάρχουσα εμπειρική σχέση, την οποία και έκρινε ως μη αξιόπιστη, πρότεινε ο ίδιος μία τριμερή σχέση, η οποία συνδέει το συντελεστή αντίστασης με τον αριθμό Reynolds. Κάθε μια από τις τρεις εξισώσεις, απευθύνεται σε διαφορετικό εύρος τιμών Reynolds, καλύπτοντας συνολικά ένα μεγάλο φάσμα τιμών από $Re=0.1$ έως $Re=7 \cdot 10^4$, το οποίο είναι και το βασικό του πλεονέκτημα έναντι των σχέσεων του (Clift, Grace, & Weber, 1978):

$$C_d = \frac{10^{[1.05+0.08 \cdot (\lg(Re))^2]}}{Re^{0.66}} \text{ για } 0.1 < Re \leq 50, \quad [3.7]$$

$$C_d = \frac{10^{[0.75+0.06 \cdot (\lg(Re))^2]}}{Re^{0.44}} \text{ για } 50 < Re \leq 4 \cdot 10^3 \quad [3.8]$$

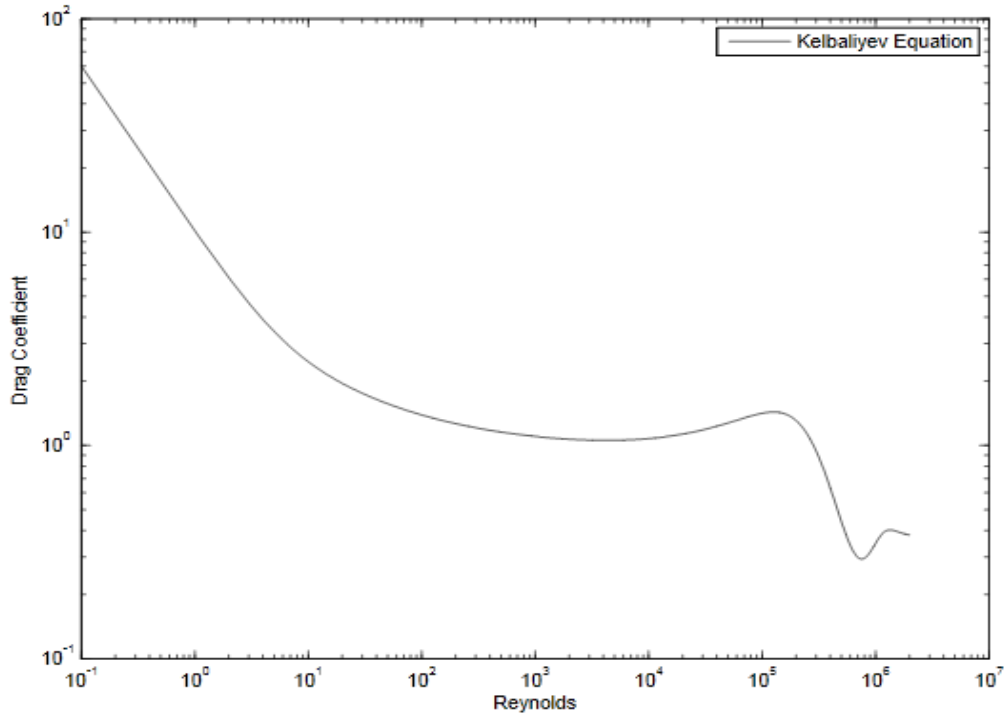
$$C_d = \frac{Re^{0.77}}{10^{[1.72+0.08 \cdot (\lg(Re))^2]}} \text{ για } 4 \cdot 10^3 < Re \leq 7 \cdot 10^4 \quad [3.9]$$

Στις σχέσεις που διατυπώθηκαν μέχρι στιγμής παρατηρείται πως είτε είναι εφαρμόσιμες για μικρό φάσμα μοντέλων ροής, είτε είναι ασυνεχείς. Η μοναδική γνωστή μέχρι στιγμής συνεχής εξίσωση, από τη βιβλιογραφία, η οποία συγχρόνως καλύπτει μεγάλο εύρος τιμών του αριθμού Reynolds, είναι αυτή του (Kelbaliyev, 2011):

$$C_d = \frac{10}{Re^{0.778}} \cdot \left(1 + \frac{Re^{1.875} + 0.368 \cdot 10^{-3} \cdot Re^{2.55}}{60 + 6.8 \cdot Re^{1.15} + 0.4 \cdot 10^{-14} \cdot Re^{3.95}} \right) + 0.36 \cdot (1 - \exp(-1.2 \cdot 10^{-24} \cdot Re^4)) \quad [3.10]$$

όπου $0.1 \leq Re \leq 10^6$.

Στο Σχήμα 3.2 αποτυπώνεται η γραφική παράσταση της Εξίσωσης 3.10 για όλο το φάσμα τιμών του Reynolds στο οποίο είναι εφαρμόσιμη. Η μορφή της ταυτίζεται με τις αντίστοιχες, βασιζόμενες σε πειραματικά δεδομένα, γραφικές παραστάσεις οι οποίες υπάρχουν στη βιβλιογραφία.



Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση της Εξίσωσης 3.10 για όλο το εφαρμόσιμο εύρος τιμών Reynolds

Η Εξίσωση 3.10 στην αυτή της μορφή είναι κατασκευασμένη με σκοπό να δίνει αποτελέσματα σε όλο το εύρος $0.1 \leq Re \leq 10^6$. Ωστόσο, είναι δυνατόν να διαχωριστεί σε δύο σκέλη. Το πρώτο υπολογίζει το συντελεστή αντίστασης για τιμές Reynolds της υποκρίσιμης ροής, ενώ το δεύτερο για Reynolds μεγαλύτερων τιμών. Επομένως μπορούμε να λάβουμε:

$$C_d = \frac{10}{Re^{0.778}} \cdot \left(1 + \frac{Re^{1.875} + 0.368 \cdot 10^{-3} \cdot Re^{2.55}}{60 + 6.8 \cdot Re^{1.15} + 0.4 \cdot 10^{-14} \cdot Re^{3.95}} \right) \quad \text{για } 0.1 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5 \quad [3.11]$$

και

$$C_d = 0.36 \cdot (1 - \exp(-1.2 \cdot 10^{-24} \cdot Re^4)) \quad \text{για } Re > 2 \cdot 10^5 \quad [3.12]$$

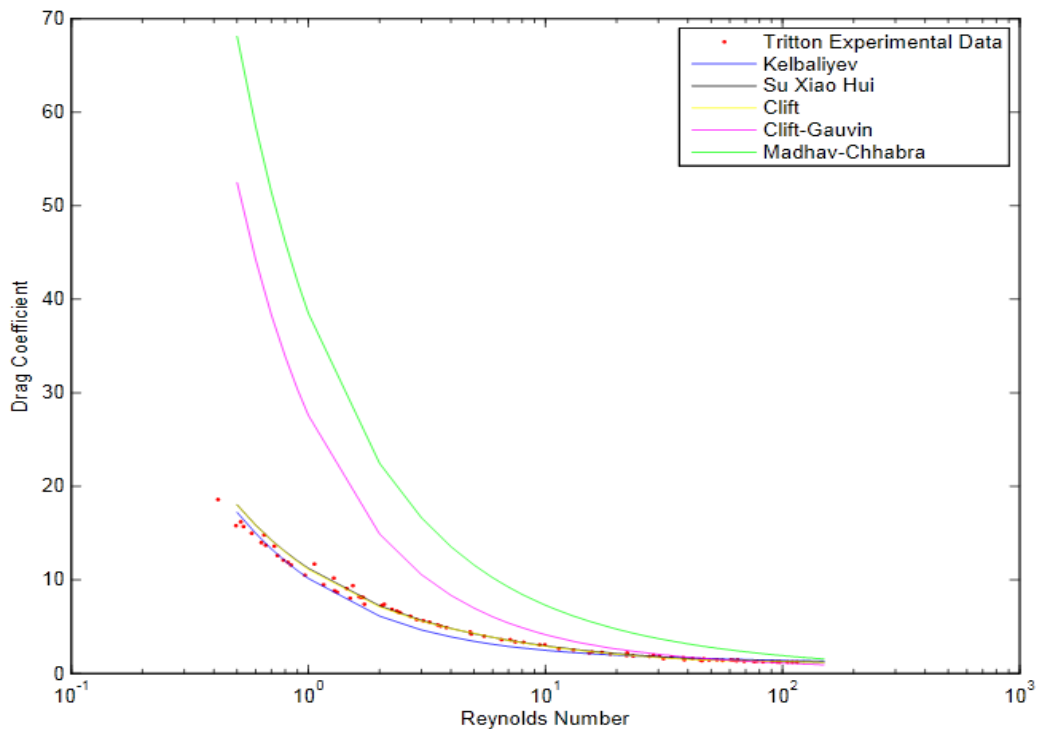
Αυτός ο διαχωρισμός θα μπορούσε να βοηθήσει στην επιτάχυνση της υπολογιστικής διαδικασίας, αναλόγως με τους στόχους της εκάστοτε έρευνας.

Στο σύγγραμμά του ο (Loth, 2009) αναφέρεται στην παρακάτω σχέση των Clift-Gauvin, για κυκλικής ή προσεγγιστικά κυκλικής διατομής αντικείμενα, ως αρκετά ακριβής μεταξύ του συντελεστή αντίστασης και του αριθμού Reynolds. Η σχέση αφορά υποκρίσιμες τιμές ($Re \leq 2 \cdot 10^5$). Η αδιάστατη αυτή έκφραση δίνεται ως:

$$C_d = \frac{24}{Re} \cdot [1 + 0.15 \cdot (Re)^{0.687}] + \frac{0.42}{1 + \frac{42500}{Re^{1.16}}} \quad [3.13]$$

Τα αποτελέσματα, ωστόσο, που λαμβάνονται για το εύρος τιμών του Reynolds ($0.5 \leq Re \leq 110$) χαρακτηρίζονται από ποσοτική ασυμφωνία, σε σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα, όσον αφορά την περίπτωση κυλίνδρου. Το ίδιο συμβαίνει και για όλο το φάσμα των υποκρίσιμων τιμών του αριθμού Reynolds. Η γραφική της παράσταση, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.3, εμφανίζει σχετική ποσοτική ομοιότητα με τα δεδομένα που έχουν προκύψει από πειράματα.

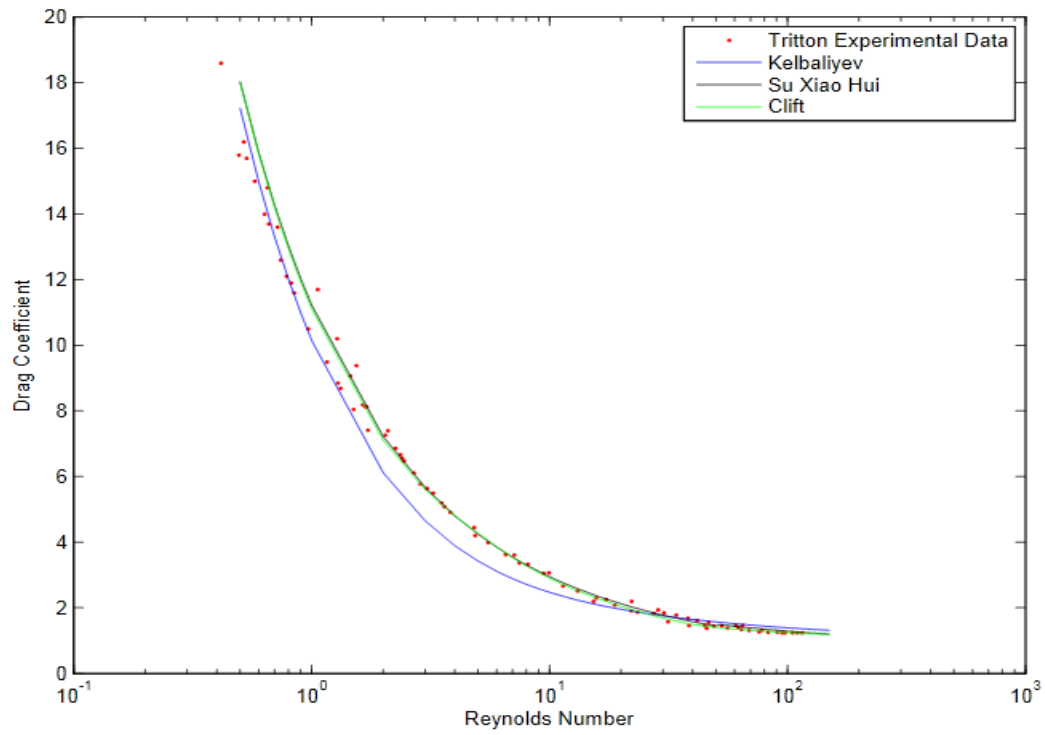
Συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα χρήσης των παραπάνω σχέσεων αποτυπώνονται στα Σχήματα 3.3 και 3.5 για μικρότερο και μεγαλύτερο εύρος τιμών του Reynolds αντίστοιχα. Φαίνεται ξεκάθαρα πως οι δύο ασυνεχείς σχέσεις των (Clift, Grace, & Weber, 1978) και του (Hui, 2003) ακολουθούν πιστά τα πειραματικά δεδομένα του (Tritton, 1959). Ωστόσο, η αποτύπωσή τους δημιουργεί μία ασυνεχή γραφική παράσταση. Το γεγονός αυτό τις χρήζει ακατάλληλες για χρήση τους στο οιονεί-στατικό μοντέλο, διότι με την εισαγωγή τους στην εξίσωση Morison θα δώσουν ως αποτέλεσμα μια ασυνεχή δύναμη.



Σχήμα 3.3: Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων των σχέσεων $C_d(Re)$ με τα πειραματικά δεδομένα από (Tritton, 1959)

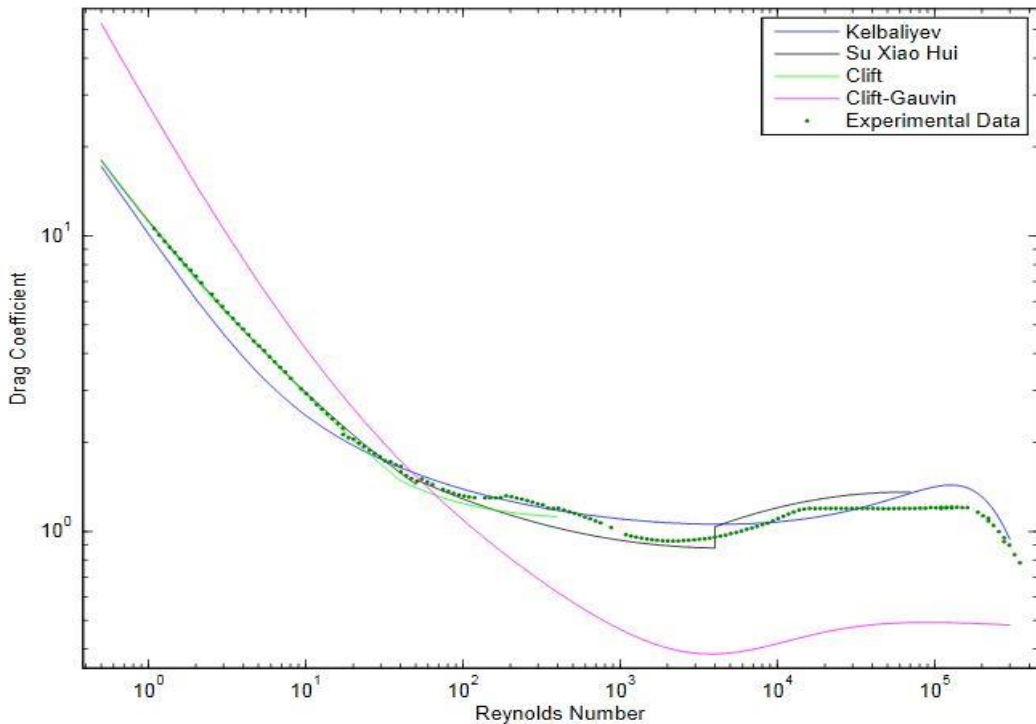
Από τις τρεις συνεχείς σχέσεις, οι οποίες παρατέθηκαν, μόνο αυτή του (Kelbaliyev, 2011) (Εξίσωση 3.10) φαίνεται να δίνει ικανοποιητικές τιμές του συντελεστή αντίστασης, με μικρές μόνο αποκλίσεις από τις πειραματικές τιμές, οι οποίες παρατηρούνται στο διάστημα $2 \leq Re \leq 10$. Στο Σχήμα 3.4. παρουσιάζεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων της 3.10 με πειραματικά δεδομένα.

Οι εναπομένουσες εξισώσεις φαίνεται να μη δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα, με το σφάλμα απόκλισης στην τιμή του συντελεστή αντίστασης που δίνουν, σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα, να ξεπερνά ακόμα και το 100%, για χαμηλές τιμές του Reynolds.



Σχήμα 3.4: Σύγκριση των γραφικών παραστάσεων των τριών πιο αποτελεσματικών σχέσεων $C_d(Re)$ με τα πειραματικά δεδομένα από (Tritton, 1959)

Για την αξιολόγηση των τιμών που εξάγονται από τις θεωρητικές σχέσεις, επιλέχθηκε η σύγκρισή τους με τα αξιόπιστα πειραματικά δεδομένα του (Tritton, 1959) χωρίς καμία προέκταση σε μεγαλύτερες τιμές του Reynolds. Ωστόσο, μία διεύρυνση της αξιολόγησης αυτής παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.5, όπου και παρουσιάζονται οι τιμές που δίνει κάθε μια από τις εξισώσεις, για τιμές του Reynolds μέχρι τα όρια της υποκρίσιμης ροής ($Re \leq 2 \cdot 10^5$). Γίνεται εμφανής η ασυνεχής μορφή της σχέσης του (Hui, 2003), καθώς και η πιστότητα με την οποία η σχέση του (Kelbaliyev, 2011) ακολουθεί τις πειραματικές τιμές, κάτι που την καθιστά κατάλληλη για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας.



Σχήμα 3.5: Συγκριτική απεικόνιση των γραφικών παραστάσεων των θεωρητικών σχέσεων $C_d(Re)$, με συνδυασμένα τα πειραματικά δεδομένα των (Relf, 1914) και (Wieselsberger, 1921) για τιμές $Re \leq 2 \cdot 10^5$

Σε αντίθεση με το συντελεστή αντίστασης, δεν υπάρχει κάποια θεωρητική προσέγγιση για το συντελεστή αδράνειας, καθώς αφορά τη χρονικά μέση τιμή και η στιγμιαία του τιμή δεν έχει φυσική ερμηνεία. Για το λόγο αυτό, στη δημιουργία της θεωρητικής δύναμης μέσω της εξίσωσης Morison ο συντελεστής αντίστασης λαμβάνεται από τη θεωρία ιδανικού ρευστού και ισοδυναμεί με τη σταθερή τιμή $C_M = 2$.

Στη γενική της μορφή η εξίσωση Morison, όπως παρουσιάστηκε, είναι η:

$$F(t) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_d \cdot D \cdot u(t) \cdot |u(t)| + \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot C_m \cdot \dot{u}(t)$$

Για τη διευκόλυνση της υπολογιστικής διαδικασίας, ως μοναδικοί παράμετροι του προβλήματος επιλέγεται να παραμείνουν οι αδιάστατοι αριθμοί Keulegan-Carpenter και Stokes (β). Για το σκοπό, ξεχωριστά από την εξίσωση Morison, η ταχύτητα και η επιτάχυνση μορφοποιούνται κατάλληλα.

Από την Εξίσωση 2.12 η ταχύτητα δίνεται ως:

$$u(t) = u_{max} \cdot \sin(\omega t)$$

Διαιρώντας τα δύο μέλη της εξίσωσης με το γινόμενο της συχνότητας ταλάντωσης επί τη διάμετρο του κυλίνδρου $f \cdot D$, λαμβάνεται μια αδιάστατη ταχύτητα η οποία συμβολίζεται με V:

$$V(t) = \frac{u_{max}}{f \cdot D} \cdot \sin(\omega t)$$

Όμως το σταθερό μέλος της εξίσωσης $\frac{u_{max}}{f \cdot D}$ είναι ο αριθμός Keulegan-Carpenter. Επομένως:

$$V(t) = Kc \cdot \sin(\omega t) \quad [3.14]$$

Αντίστοιχα, η επιτάχυνση η οποία ορίζεται ως η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας έχει ως εξής:

$$\dot{u}(t) = u_{max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

ή

$$\dot{u}(t) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot u_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Με παρόμοιο τρόπο, διαιρώντας με το γινόμενο $f^2 D$ η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως:

$$\dot{V}(t) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{u_{max}}{f \cdot D} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

και με την αντικατάσταση $Kc = \frac{u_{max}}{f \cdot D}$:

$$\dot{V}(t) = 2 \cdot \pi \cdot Kc \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad [3.15]$$

Η φάση της ταλαντούμενης ταχύτητας και ως εκ τούτου και της επιτάχυνσης, αλλά και της δύναμης συνολικά, είναι συνάρτηση της γωνιακής συχνότητας ω και του χρόνου t . Δεδομένου ότι $\omega \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t$, ορίζεται η αδιάστατη παράμετρος χρόνου $\tau = f \cdot t$. Αντικαθιστώντας την παράμετρο χρόνου στις εξισώσεις της ταχύτητας (Εξ. 3.14) και της επιτάχυνσης (Εξ. 3.15) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$V = Kc \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \tau) \quad [3.16]$$

και

$$\dot{V} = 2 \cdot \pi \cdot Kc \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \tau) \quad [3.17]$$

για ταχύτητα και επιτάχυνση αντίστοιχα.

Η εξίσωση Morison στη μορφή που δίνεται από την 2.23 διαίρεται κατά μέλη με τον όρο $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot D \cdot U_{max}^2$ και λαμβάνεται αδιάστατο το φορτίο που δέχεται ο κύλινδρος. Με επιπλέον αντικατάσταση $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ προκύπτει:

$$F(t) = C_d \cdot \sin(2\pi f t) \cdot |\sin(2\pi f t)| + \pi^2 \cdot \frac{f \cdot D}{u_{max}} \cdot C_m \cdot \cos(2\pi f t) \quad [3.18]$$

ή με την αντικατάσταση $\frac{f \cdot D}{u_{max}} = \frac{1}{Kc}$:

$$F(t) = C_d \cdot \sin(2\pi\tau) \cdot |\sin(2\pi\tau)| + \frac{\pi^2}{Kc} \cdot C_m \cdot \cos(2\pi\tau) \quad [3.19]$$

Με τη χρήση των εξισώσεων της αδιάστατης ταχύτητας (Εξ. 3.16) και επιτάχυνσης (Εξ. 3.17) και έπειτα από πράξεις, εξάγεται η αδιάστατη δύναμη Morison:

$$F_{th} = \frac{1}{Kc^2} \cdot V \cdot |V| \cdot C_d + \frac{\pi}{2 \cdot Kc^2} \cdot \dot{V} \cdot C_m \quad [3.20]$$

Όταν η παραπάνω εξίσωση εφαρμόζεται στον υπολογισμό της θεωρητικής δύναμης θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός F_{th} , ενώ για τον υπολογισμό της προσαρμοσμένης δύναμης θα γίνεται χρήση της συμβολισμού F_{fit} . Επιπλέον, αποσκοπώντας στην αποφυγή σύγχυσης μεταξύ των θεωρητικών και των προσαρμοσμένων συντελεστών, οι δε θεωρητικοί θα συμβολίζονται ως C_d και C_m , ενώ οι μέσοι προσαρμοσμένοι συντελεστές ως C_D και C_M .

Εφαρμόζοντας την ημ εμπειρική σχέση του συντελεστή αντίστασης C_d και τη θεωρητική τιμή του συντελεστή αδράνειας C_m , στην Εξίσωση 3.20, δημιουργείται η θεωρητική δύναμη. Στην κυματομορφή αυτής της δύναμης και για διάστημα μιας περιόδου προσαρμόζεται η εξίσωση Morison, στην οποία γίνεται χρήση των μέσων συντελεστών αντίστασης C_D και αδράνειας C_M .

Ο συντελεστής αντίστασης, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε στους παραπάνω υπολογισμούς, προέρχεται από την προαναφερθείσα σχέση του Kelbaliyev, στην οποία ο αριθμός Reynolds που εφαρμόζεται θα είναι η ημιτονοειδής (σε φάση με την ταχύτητα) σχέση:

$$Re = Re_{max} |\sin(2\pi\tau)| \quad [3.21]$$

με

$$Re_{max} = Kc \cdot \beta \quad [3.22]$$

όπου Kc και β είναι οι τιμές που επιλέγονται για κάθε ταλάντωση και για την οποία αναζητούνται οι μέσοι συντελεστές.

$$F_{fit} = \frac{1}{Kc^2} \cdot V \cdot |V| \cdot C_{D_{Qs}} + \frac{\pi}{2 \cdot Kc^2} \cdot \dot{V} \cdot C_{M_{Qs}}$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών της εξίσωσης Morison με χρήση της μεθόδου **Fourier Averaging** αναλύεται ο κάθε όρος της εξίσωσης σε σειρά Fourier ενός όρου.

Η δύναμη αντίστασης:

$$F_D = C_{D_{Qs}} \cdot \sin(2\pi\tau) \cdot |\sin(2\pi\tau)|$$

κατά Fourier αναλύεται ως εξής:

$$F_{D_{four}} = a_1 \cdot \sin(2\pi\tau) + b_1 \cdot \cos(2\pi\tau) \quad [3.33]$$

με

$$a_1 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T F_D \cdot \sin(2\pi\tau) d\tau = \frac{2}{T} \cdot C_{D_{Qs}} \cdot \int_0^T F_D \cdot \sin(2\pi\tau)^2 \cdot |\sin(2\pi\tau)| d\tau$$

$$a_1 = \frac{8}{3\pi} \cdot C_{D_{Qs}}$$

και

$$b_1 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T F_D \cdot \cos(2\pi\tau) d\tau = \frac{2}{T} \cdot C_{D_{Qs}} \cdot \int_0^T \sin(2\pi\tau) \cdot \cos(2\pi\tau) |\sin(2\pi\tau)| d\tau$$

$$b_1 = 0$$

Επομένως συνολικά λαμβάνεται:

$$F_{D_{four}} = \frac{8}{3\pi} \cdot C_{D_{Qs}} \cdot \sin(2\pi\tau) \quad [3.34]$$

Αντίστοιχα η δύναμη αδράνειας,

$$F_M = \frac{\pi^2}{K_C} \cdot C_{M_{Qs}} \cdot \cos(2\pi\tau)$$

αναλυμένη κατά σειρά Fourier ενός όρου λαμβάνεται ως:

$$F_{M_{four}} = \frac{\pi^2}{K_C} \cdot C_{M_{Qs}} \cdot \cos(2\pi\tau) \quad [3.35]$$

Και συνολικά η κατά Fourier αναλυμένη δύναμη Morison:

$$F_{four} = \frac{8}{3\pi} \cdot C_{D_{Qs}} \cdot \sin(2\pi\tau) + \frac{\pi^2}{K_C} \cdot C_{M_{Qs}} \cdot \cos(2\pi\tau) \quad [3.36]$$

Κάνοντας το “Averaging” ως προς το ημιτονοειδές και έπειτα για το συνημιτονοειδές μέρος:

$$\langle F_{th} \cdot \sin(2\pi\tau) \rangle = \langle \frac{8}{3\pi} \cdot C_{D_{Qs}} \cdot \sin(2\pi\tau)^2 + \frac{\pi^2}{K_C} \cdot C_{M_{Qs}} \cos(2\pi\tau) \cdot \sin(2\pi\tau) \rangle \quad [3.37]$$

$$\int_0^T F_{th} \cdot \sin(2\pi\tau) d\tau = \frac{8}{3\pi} \cdot C_{D_{Qs}} \cdot \frac{1}{2}$$

απ' όπου, με κατάλληλες πράξεις, τη χρήση της Εξίσωσης 3.16 και επίλυση ως προς C_d , προκύπτει ο προσαρμοσμένος συντελεστής αντίστασης:

$$C_{D_{Qs}} = \frac{3\pi}{4 \cdot K_C} \cdot \int_0^T F_{th} \cdot V d\tau \quad [3.38]$$

και

$$\langle F_{th} \cdot \cos(2\pi\tau) \rangle = \langle \frac{8}{3\pi} \cdot C_{D_{Qs}} \cdot \cos(2\pi\tau) \cdot \sin(2\pi\tau) + \frac{\pi^2}{K_C} \cdot C_{M_{Qs}} \cdot \cos(2\pi\tau)^2 \rangle \quad [3.39]$$

$$\int_0^T F_{th} \cdot \cos(2\pi\tau) d\tau = \frac{\pi^2}{K_C} \cdot C_{M_{Qs}} \cdot \frac{1}{2}$$

απ' όπου, με κατάλληλες πράξεις, τη χρήση της Εξίσωσης 3.15 και επίλυση ως προς C_m , προκύπτει ο προσαρμοσμένος συντελεστής αδράνειας:

$$C_{M_{Qs}} = \frac{1}{\pi^3} \cdot \int_0^T F_{th} \cdot \dot{V} d\tau \quad [3.40]$$

3.2. Ημι-εμπειρικό μοντέλο

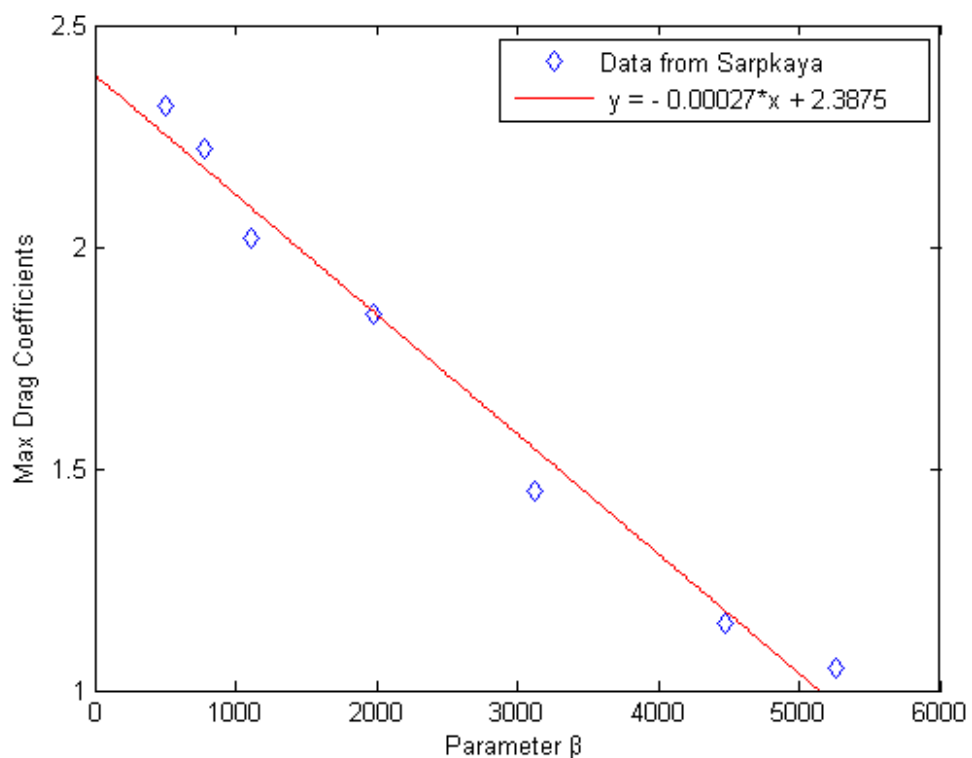
Προτείνεται ένα ημι-εμπειρικό μοντέλο εκτίμησης του μέσου συντελεστή αντίστασης. Το μοντέλο αυτό αποτελεί συνδυασμό του οιονεί-στατικού μοντέλου και της αλληλεξάρτησης του μέγιστου του συντελεστή αντίστασης με τον αριθμό Reynolds, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου συχνότητας, όπως αυτή προκύπτει από την ανάλυση στα πειραματικά δεδομένα.

Από πειράματα σε ταλαντούμενη ροή εντός σωληνώσεων (Hino, Sawamoto, & Takasu, 1976) λαμβάνεται ότι ο κρίσιμος αριθμός Reynolds, στον οποίο η ροή μεταβαίνει σε τυρβώδη, εξαρτάται από την παράμετρο συχνότητας της ταλάντωσης σύμφωνα με τη σχέση $Re \cdot \beta^{-1/2} = const$. Με αφετηρία αυτή την παρατήρηση διερευνάται η ύπαρξη παρόμοιας συμπεριφοράς της τυρβώδους μετάβασης για την περίπτωση σταθερού κυλίνδρου, εντός πλήρως ταλαντούμενης ροής. Η διερεύνηση αυτή βασίζεται μόνο στα μέγιστα των πειραματικών συντελεστών αντίστασης, για κάθε παράμετρο συχνότητας, για οποία ο αντίστοιχος Reynolds είναι ο κρίσιμος. Τα μέγιστα αυτά απεικονίζονται ως οι κορυφές των γραφικών παραστάσεων στο Σχήμα 2.9.

Απομονώνοντας τους μέγιστους συντελεστές αντίστασης για κάθε β και αντιπαραθέτοντας τους σε ένα διάγραμμα, ως προς τις αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου συχνότητας, λαμβάνεται η τάση την οποία οι μέγιστες τιμές ακολουθούν. Τα Σχήματα 3.6 και 3.7 παρουσιάζουν την τάση αυτή και δίνεται η εξίσωση της καμπύλης, η οποία τις περιγράφει καλύτερα.

Στο Σχήμα 3.6, για μέγιστη τιμή της αδιάστατης συχνότητας $\beta = 5260$, παρατηρείται μία σχεδόν γραμμική μεταβολή του μεγίστου του συντελεστή αντίστασης, βάσει της σχέσης:

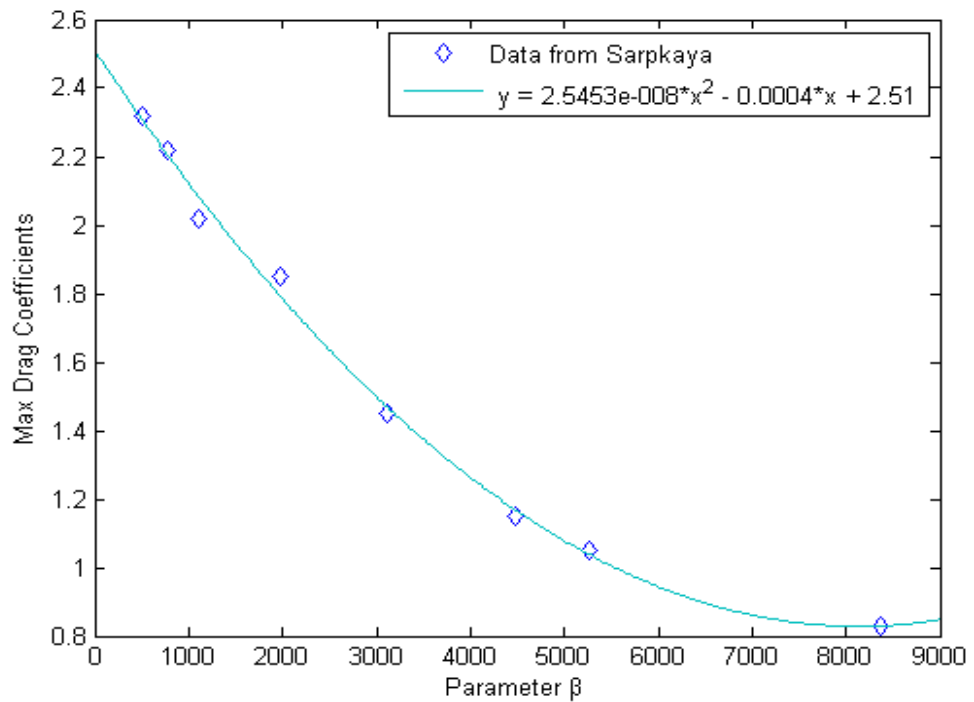
$$CD_{max_{exp}} = -2.7 \cdot 10^{-4} \cdot \beta + 2.3875 \quad [3.41]$$



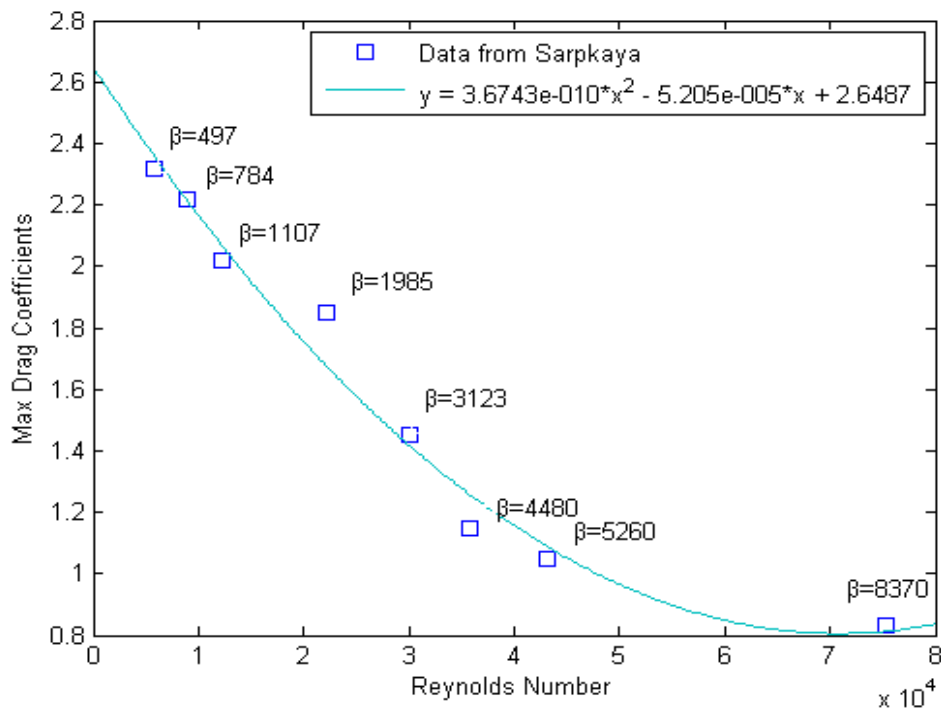
Σχήμα 3.6: Μέγιστα συντελεστών αντίστασης $C_{D_{exp}}$, ως προς επτά τιμές της αδιάστατη παραμέτρου συχνότητας β . Γραμμική προσαρμογή στις τιμές του συντελεστή. Δεδομένα από (Sarpkaya, 1976)

Με τη χρήση επιπλέον της τιμής $\beta = 8370$, παρατηρείται πως ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού προσαρμόζεται ακριβέστερα στις μεταβολές των μεγίστων του συντελεστή αντίστασης. Το Σχήμα 3.7 παρουσιάζει αυτή τη μεταβολή, η οποία περιγράφεται από τη σχέση:

$$CD_{max_{exp}} = 2.5453 \cdot 10^{-8} \cdot \beta^2 - 4 \cdot 10^{-4} \cdot \beta + 2.51 \quad [3.42]$$



Σχήμα 3.7: Μέγιστα συντελεστών αντίστασης $C_{D_{exp}}$, ως προς οκτώ τιμές της αδιάστατη παραμέτρου συχνότητας β . Η συνεχής γραμμή είναι η προσαρμοσμένη στις τιμές καμπύλη. Δεδομένα από (Sarpkaya, 1976)



Σχήμα 3.8: Μέγιστα συντελεστών αντίστασης $C_{D_{exp}}$ συναρτήσει του αριθμού Reynolds, για οκτώ τιμές της αδιάστατη παραμέτρου συχνότητας β . Η συνεχής γραμμή είναι η προσαρμοσμένη στις τιμές καμπύλη. Δεδομένα από (Sarpkaya, 1976)

Θεωρείται η παρόμοιας μορφής, με αυτή σε ροή εντός σωληνώσεων, σχέση:

$$Re \cdot \beta^n = const.$$

Ισχύει:

$$Re = const \cdot \beta^{-n}$$

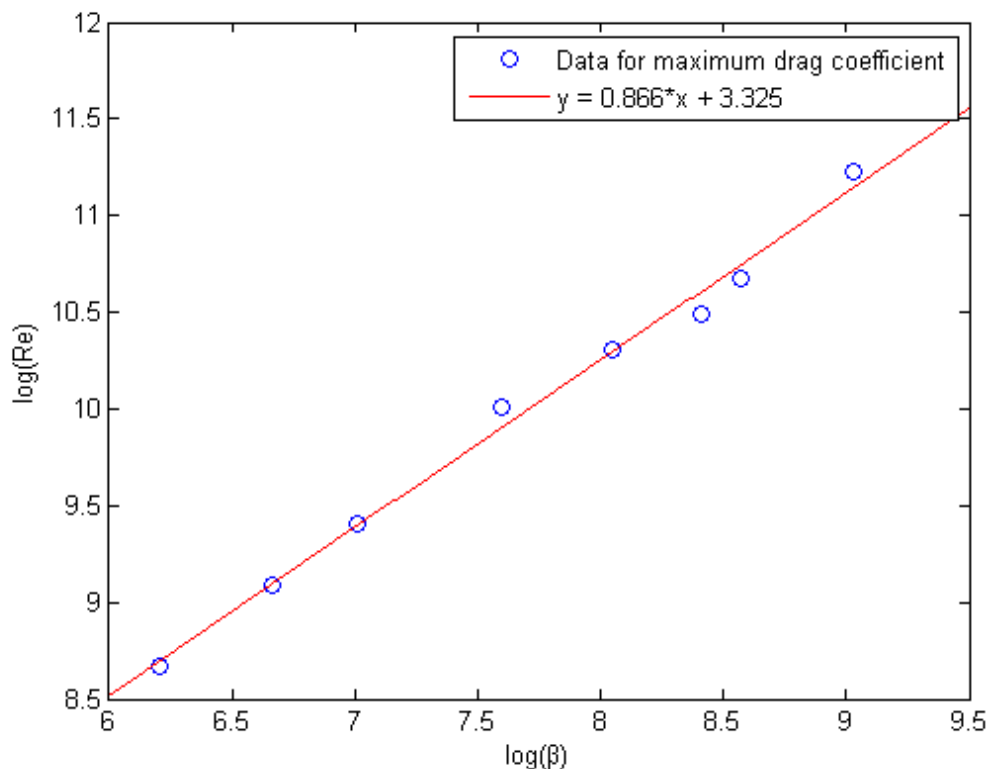
$$\log(Re) = -n \cdot \log(const \cdot \beta)$$

$$\log(Re) = -n \cdot \log(const) - n \cdot \log(\beta)$$

$$\log(Re) = -n \cdot \log(\beta) + S \quad [3.43]$$

όπου “S” μια σταθερή τιμή, ώστε $S = -n \cdot \log(const)$.

Το Σχήμα 3.9 παρουσιάζει τη μεταβολή του λογαρίθμου του Reynolds, στον οποίο έχει καταγραφεί το μέγιστο του συντελεστή αντίστασης για κάθε διαφορετικό β , ως προς το λογάριθμο της κάθε παραμέτρου συχνότητας β . Η γραφική παράσταση της μεταβολής αυτής είναι γραμμική, με την κλίση της να ισούται με το συντελεστή “-n” και τον σταθερό όρο με το “S” της Εξίσωσης 3.43.



Σχήμα 3.9: Μέγιστα των συντελεστών αντίστασης $C_{D_{exp}}$ συναρτήσει του λογαρίθμου, των παραμέτρων συχνότητας, στους οποίους αντιστοιχούν και του λογαρίθμου των αντιστοίχων αριθμών Reynolds. Δεδομένα από (Sarpkaya, 1976)

Επομένως,

$$n = -0.866$$

και

$$const = 1.447 \cdot 10^{-4}$$

Αξιοποιώντας τα δεδομένα μόνο για τα μέγιστα των συντελεστών αντίστασης, προκύπτει ότι,

$$Re \cdot \beta^{-0.866} = 1.447 \cdot 10^{-4}$$

ή

$$6910 \cdot Re \cdot \beta^{-0.866} = 1 \quad [3.44]$$

Ο κρίσιμος αριθμός Reynolds για κάθε β συναρτήσει του κρίσιμου Reynolds για σταθερή ροή δίνεται από:

$$Re_{crit} = \frac{\beta^{0.866}}{6910} \cdot Re_{crit_{Qs}} \quad [3.45]$$

Στα πλαίσια δημιουργίας του ημι-εμπειρικού μοντέλου, αναζητήθηκε η κατάλληλη σχέση του Reynolds και της παραμέτρου β , με έναν ισοδύναμο αριθμό Reynolds, για τον οποίο οι μεταβολές στους συντελεστές αντίστασης του μοντέλου συμπίπτουν ποσοτικά με τις πειραματικές. Βάσει της σχέσης που προέκυψε για τα μέγιστα των συντελεστών αντίστασης, η σχέση που προτείνεται είναι της μορφής:

$$Re_{eq} = c \cdot Re \cdot \beta^m \quad [3.46]$$

Ο ισοδύναμος Reynolds " Re_{eq} " εισάγεται στην ημι-εμπειρική σχέση του συντελεστή αντίστασης (Εξίσωση 3.10) και επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία, όπως στο οιονεί-στατικό μοντέλο. Στα αποτελέσματα εισάγεται επιπλέον διόρθωση ως προς το μέγιστο του συντελεστή αντίστασης για κάθε β , βασισμένη στην Εξίσωση 3.42. Ο συντελεστής " c " και ο εκθέτης " m " λαμβάνουν τέτοιες τιμές, ώστε οι προκύπτοντες συντελεστές αντίστασης να ακολουθούν τόσο ποιοτικά όσο και ποσοτικά τις μεταβολές των πειραματικών τιμών, με την ελάχιστη δυνατή απόκλιση.

Σε αντιστοιχία με το οιονεί-στατικό μοντέλο ακολουθείται η παρακάτω σειρά στους υπολογισμούς:

Υπολογίζονται οι στιγμιαίοι αριθμοί Reynolds,

$$Re_{mod} = Re_{eq} |\sin(2\pi\tau)|$$

και ακολουθεί ο προσδιορισμός του στιγμιαίου συντελεστή αντίστασης από τη σχέση

$$C_{d,Eq} = \frac{10}{Re_{mod}^{0.778}} \cdot \left(1 + \frac{Re_{mod}^{1.875} + 0.368 \cdot 10^{-3} \cdot Re_{mod}^{2.55}}{60 + 6.8 \cdot Re_{mod}^{1.15} + 0.4 \cdot 10^{-14} \cdot Re_{mod}^{3.95}} \right) \quad [3.47]$$

$$+0.36 \cdot (1 - \exp(-1.2 \cdot 10^{-24} \cdot Re_{mod}^4))$$

Ο συντελεστής αδράνειας, από τη θεωρία ιδανικού ρευστού λαμβάνεται ως

$$C_m = 2$$

με την ταχύτητα και την επιτάχυνση να υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$V = Kc \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \tau)$$

και

$$\dot{V} = 2 \cdot \pi \cdot Kc \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \tau)$$

Παράγεται η θεωρητική δύναμη με τη χρήση της αδιαστατοποιημένης εξίσωσης Morison και ο μέσος συντελεστής αντίστασης, για τον ισοδύναμο αριθμό Reynolds, εξάγεται με Fourier averaging.

$$F_{th} = \frac{1}{Kc^2} \cdot V \cdot |V| \cdot C_{d_{Eq}} + \frac{\pi}{2 \cdot Kc^2} \cdot \dot{V} \cdot C_m$$

$$C_{D_{Qs_{Eq}}} = \frac{3\pi}{4 \cdot Kc} \cdot \int_0^T F_{th} \cdot V \, d\tau \quad [3.48]$$

Εισάγεται η διόρθωση του μεγέθους του $C_{D_{Qs_{Eq}}}$ με δύο τρόπους, επιμερίζοντας το κύριο ημι-εμπειρικό μοντέλο σε δύο.

Στο **ημι-εμπειρικό μοντέλο 1**, ο συντελεστής αντίστασης λαμβάνεται από τη σχέση

$$C_{D_{mod1}} = C_{D_{Qs_{Eq}}} + (CD_{max_{exp}} - \max(C_{D_{Qs_{Eq}}})) \quad [3.49]$$

στην οποία οι υπολογισμένοι συντελεστές $C_{D_{Qs_{Eq}}}$, για κάθε β , αυξομειώνονται κατά τον όρο της διαφοράς των μεγίστων μεταξύ των υπολογισμένων και των πειραματικών τιμών.

Στο **ημι-εμπειρικό μοντέλο 2**, ο συντελεστής αντίστασης λαμβάνεται από τη σχέση

$$C_{D_{mod2}} = \frac{C_{D_{Qs_{Eq}}}}{\max(C_{D_{Qs_{Eq}}})} \cdot CD_{max_{exp}} \quad [3.50]$$

Ο υπολογισμός του συντελεστή “c” και του εκθέτη “n” της Εξίσωσης 3.46 γίνεται με δοκιμές σε επαναληπτική διαδικασία. Στόχος η ελαχιστοποίηση της απόκλισης μεταξύ των τιμών που εξάγουν οι Εξισώσεις 3.49 και 3.50 αντίστοιχα για κάθε μοντέλο και των πειραματικών μετρήσεων. Σε κάθε επανάληψη υπολογίζεται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα απόκλισης, για κάθε παράμετρο συχνότητας και έπειτα η μέση τιμή αυτών.

$$E(C_D) = \text{mean} \left(\text{rms} \left(C_{D_{mod}}, C_{D_{exp}} \right) \right) \quad [3.51]$$

Ο συνδυασμός των (c, m) για το κάθε μοντέλο, ο οποίος ελαχιστοποιεί το σφάλμα $E(C_D)$ δίνει τον ισοδύναμο Reynolds (Re_{eq}):

$$Re_{eq} = 6200 \cdot Re \cdot \beta^{-0.9} \quad [3.52]$$

- Χωρίς τη διόρθωση των μεγίστων των συντελεστών αντίστασης:

$$E(C_D) = 0.44$$

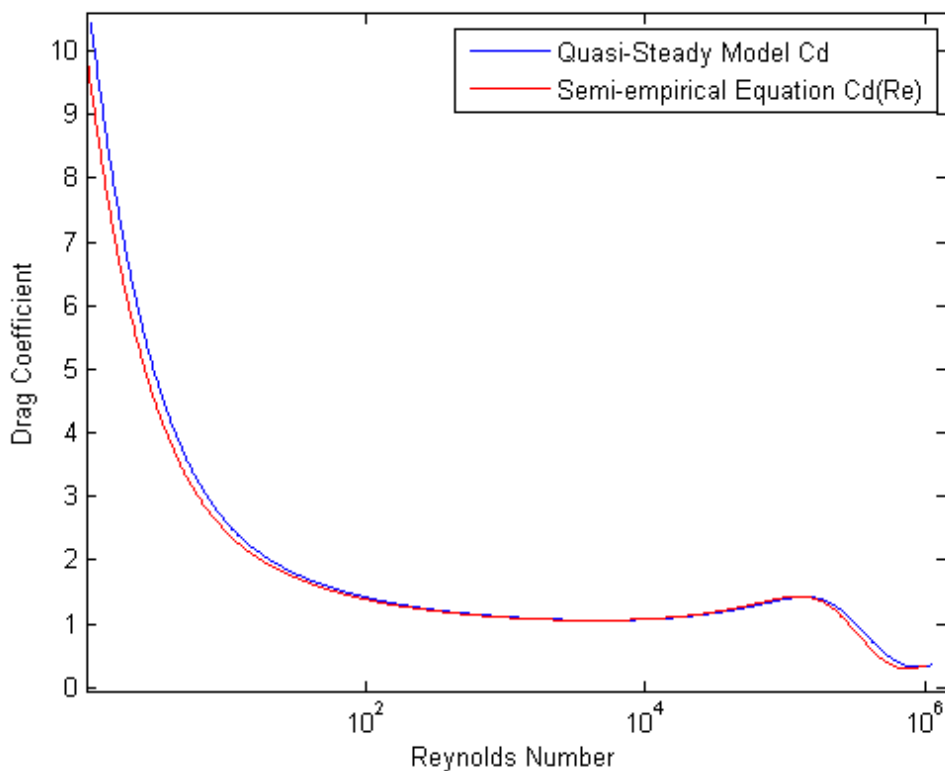
- Με τη χρήση της Εξίσωσης 3.49 (ημι-εμπειρικό μοντέλο 1):

$$E(C_D) = 0.19$$

- Με τη χρήση της Εξίσωσης 3.50 (ημι-εμπειρικό μοντέλο 2):

$$E(C_D) = 0.27$$

Στο Σχήμα 3.10 γίνεται συγκριτική αντιπαράθεση μεταξύ του συντελεστή αντίστασης του οιονεί-στατικού μοντέλου και του συντελεστή αντίστασης από την ημι-εμπειρική Σχέση 3.10, στο σημείο μέγιστης ταχύτητας, για μεγάλο φάσμα τιμών του αριθμού Reynolds. Παρατηρείται πολύ μικρή απόκλιση μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων στις τιμές του Reynolds μεγαλύτερες του 10.



Σχήμα 3.10: Συγκριτική αντιπαράθεση των μέσων τιμών του συντελεστή αντίστασης $C_{D_{qs}}$ και του συντελεστή αντίστασης για μέγιστο Reynolds $C_d(Re)$.

Η απευθείας αντικατάσταση του Re_{eq} , αντί του Re_{mod} στην Εξίσωση 3.47, διευκολύνει και επιταχύνει την υπολογιστική διαδικασία. Ο μέσος συντελεστής αντίστασης για κάθε ταλάντωση, λαμβάνεται άμεσα από τη σχέση:

$$C_{D_{Eq}} = \frac{10}{Re_{eq}^{0.778}} \cdot \left(1 + \frac{Re_{eq}^{1.875} + 0.368 \cdot 10^{-3} \cdot Re_{eq}^{2.55}}{60 + 6.8 \cdot Re_{eq}^{1.15} + 0.4 \cdot 10^{-14} \cdot Re_{eq}^{3.95}} \right) + 0.36 \cdot (1 - \exp(-1.2 \cdot 10^{-24} \cdot Re_{eq}^4)) \quad [3.53]$$

όπου

$$Re_{eq} = 6200 \cdot Re \cdot \beta^{-0.9}$$

και με τη χρήση της Εξίσωσης 3.50 για διόρθωση των μεγίστων του συντελεστή αντίστασης, διαμορφώνεται ένα τρίτο μοντέλο, το **ημι-εμπειρικό μοντέλο3**, στο οποίο ο συντελεστής αντίστασης προκύπτει από τη σχέση

$$C_{D_{mod3}} = \frac{C_{D_{Eq}}}{\max(C_{D_{Eq}})} \cdot CD_{max_{exp}} \quad [3.54]$$

με

$$E(C_D) = 0.27$$

Τα παραπάνω μοντέλα απευθύνονται σε όλες τις διαφορετικές παραμέτρους συχνότητας για το διάστημα $497 \leq \beta \leq 8370$. Για κάθε β ξεχωριστά, διαφορετικός συνδυασμός (c, m) δίνει το βέλτιστο αποτέλεσμα. Στον Πίνακα 4.1 παρατίθενται οι αντίστοιχες σχέσεις του Re_{eq} , για κάθε διαφορετικό β .

Πίνακας 4.1: Βέλτιστη σχέση του Re_{eq} για κάθε διαφορετικό β , με το αντίστοιχο σφάλμα απόκλισης.

β	Re_{eq}	$E(C_D)$
497	$7200 \cdot Re \cdot \beta^{-0.9}$	0.17
1107	$7100 \cdot Re \cdot \beta^{-0.9}$	0.13
1985	$6700 \cdot Re \cdot \beta^{-0.9}$	0.15
3123	$6900 \cdot Re \cdot \beta^{-0.9}$	0.13
4480	$5900 \cdot Re \cdot \beta^{-0.9}$	0.15
5260	$4400 \cdot Re \cdot \beta^{-0.9}$	0.2

Σε κάθε περίπτωση η διόρθωση του μεγέθους των συντελεστών προέρχεται από τη χρήση της εξίσωσης 3.50.

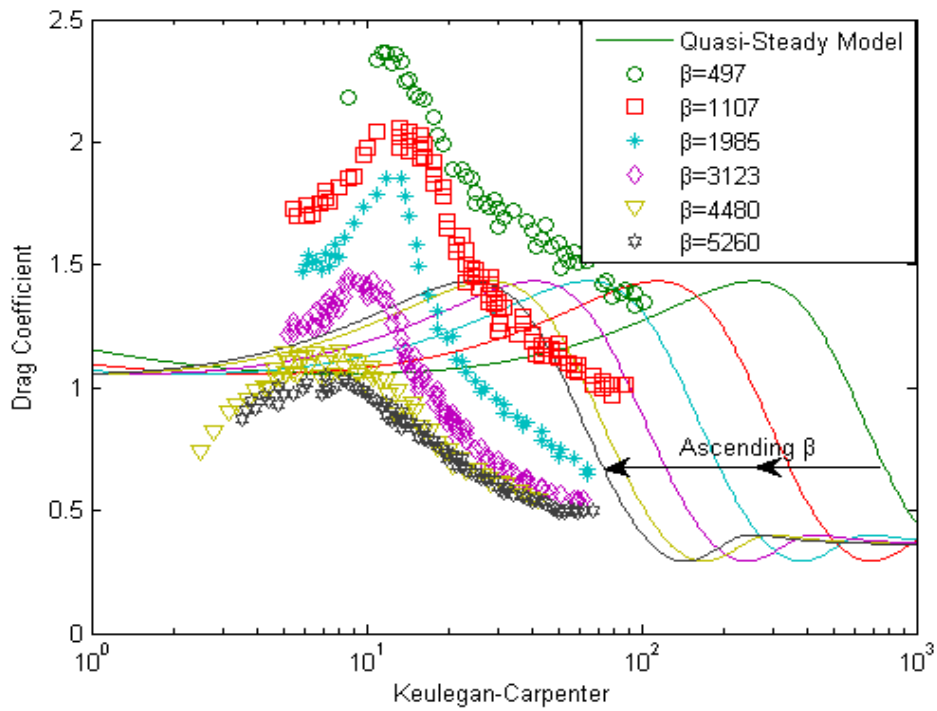
4. Αποτελέσματα και συζήτηση

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται και ερμηνεύονται τα αποτελέσματα, τα οποία λαμβάνονται από το οιονεί-στατικό μοντέλο και τα τρία προτεινόμενα ημι-εμπειρικά μοντέλα. Από τα πρώτα αποτελέσματα του οιονεί-στατικού μοντέλου παρατηρήθηκε πως ο συντελεστής αδράνειας δεν επιδέχεται καμία μεταβολή, σε σχέση με την αρχική σταθερή τιμή του. Ως εκ τούτου, η συγκρότηση των ημι-εμπειρικών μοντέλων και όλα τα αποτελέσματα απευθύνονται αποκλειστικά στο συντελεστή αντίστασης. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων βασίστηκε αποκλειστικά στα πειραματικά δεδομένα του (Sarkaya, 1976), ώστε να αποφευχθεί η σύγχυση με μετρήσεις διαφορετικών πειραματικών διατάξεων. Επίσης, τα δεδομένα αυτά αφορούν σε μέτριες τιμές τις παραμέτρου συχνότητας ($\beta = 497$), έως πολύ μεγάλες ($\beta = 8370$).

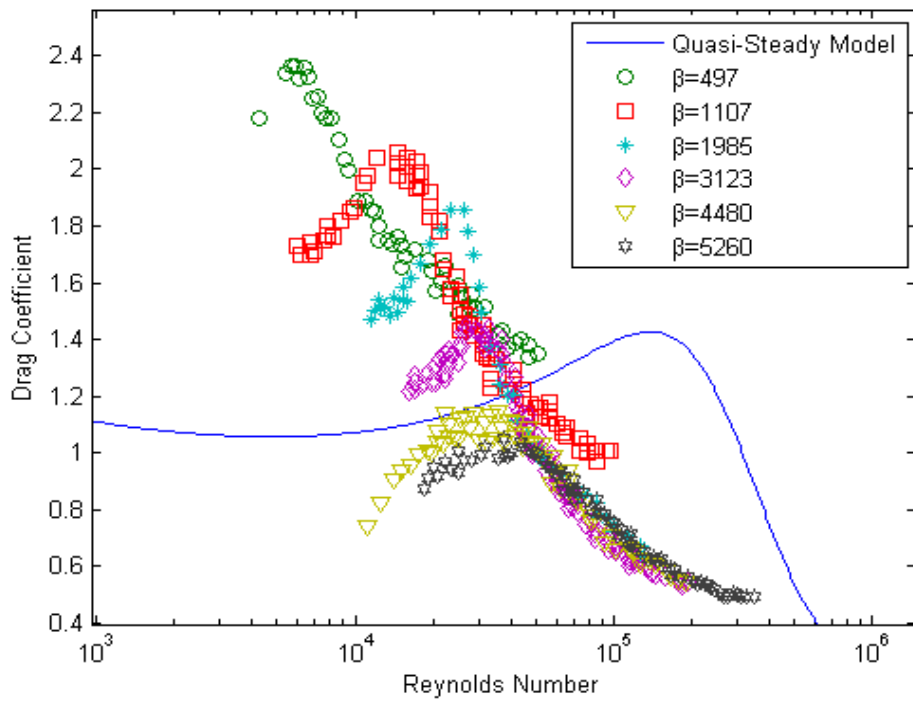
Οιονεί-στατικό μοντέλο

Στο Σχήμα 4.1, με τη μπλε συνεχή γραμμή, παρουσιάζονται οι μέσοι συντελεστές αντίστασης συναρτήσει του αριθμού Keulegan-Carpenter της ταλάντωσης, όπως προκύπτουν από το οιονεί-στατικό μοντέλο. Παρατηρείται ποιοτική συμφωνία μεταξύ υπολογισμένων και πειραματικών τιμών, με έντονη ποσοτική απόκλιση. Με την αύξηση της παραμέτρου συχνότητας β , το μέγιστο του $C_{D_{Qs}}$ μετακινείται σε χαμηλότερους αριθμούς Kc . Επιπλέον, οι πειραματικοί συντελεστές αντίστασης μεταβάλλονται και κατά μέγεθος για κάθε β , ενώ τα αποτελέσματα του οιονεί-στατικού μοντέλου παραμένουν σταθερά. Μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των υπολογισμένων $C_{D_{Qs}}$ και πειραματικών $C_{D_{exp}}$ τιμών παρατηρείται έντονη ποιοτική συμφωνία. Ο συντελεστής αντίστασης ξεκινά από κάποια χαμηλή τιμή, εμφανίζει μέγιστο (“κορυφή”) σε κάποιον αριθμό Kc και έπειτα φθίνει. Η κορυφή αναπαριστά το σημείο μετάβασης του οριακού στρώματος από στρωτό σε τυρβώδες.

Η κορυφή αυτή για τους υπολογισμένους συντελεστές αντίστασης παρουσιάζεται σε συγκεκριμένο αριθμό Reynolds, $Re \sim 2 \cdot 10^5$. Το σχήμα 4.2 απεικονίζει αυτή τη μεταβολή του $C_{D_{Qs}}$ συναρτήσει του αριθμού Reynolds, για διάφορες τιμές του β . Ανεξαρτήτως των παραμέτρων της ροής τα αποτελέσματα αναπαριστώνται με την ίδια καμπύλη, σε αντίθεση με τους πειραματικούς συντελεστές αντίστασης, $C_{D_{exp}}$, οι οποίοι επηρεάζονται από την παράμετρο συχνότητας, κατά τρόπο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 4.1: Συντελεστές αντίστασης οιονεί-στατικού μοντέλου $C_{D_{Qs}}$ σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα $C_{D_{exp}}$ συναρτήσει της παραμέτρου Kc . Δεδομένα από (Sarpkaya, 1976)

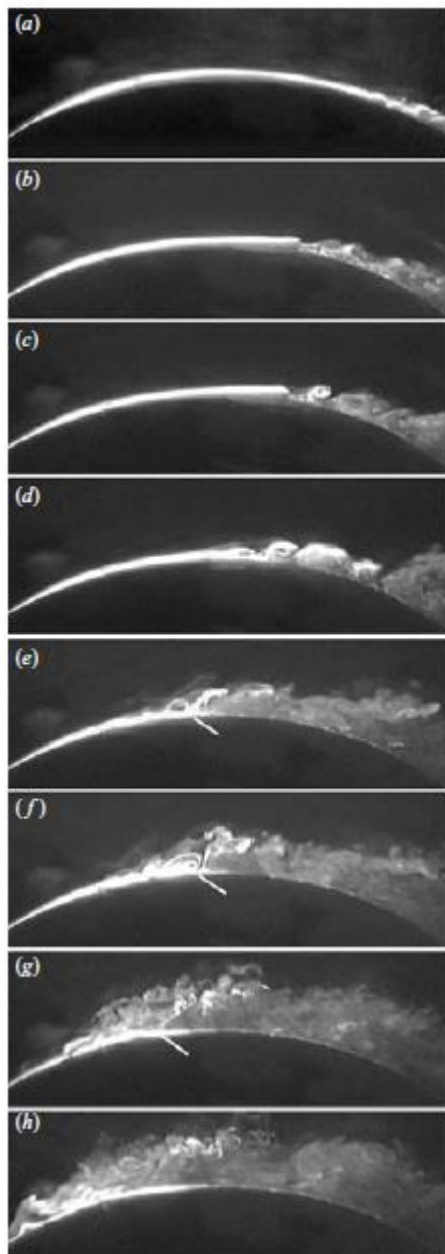


Σχήμα 4.2: Συντελεστές αντίστασης οιονεί-στατικού μοντέλου $C_{D_{Qs}}$ σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα $C_{D_{exp}}$ συναρτήσει του αριθμού Re . Δεδομένα από (Sarpkaya, 1976)

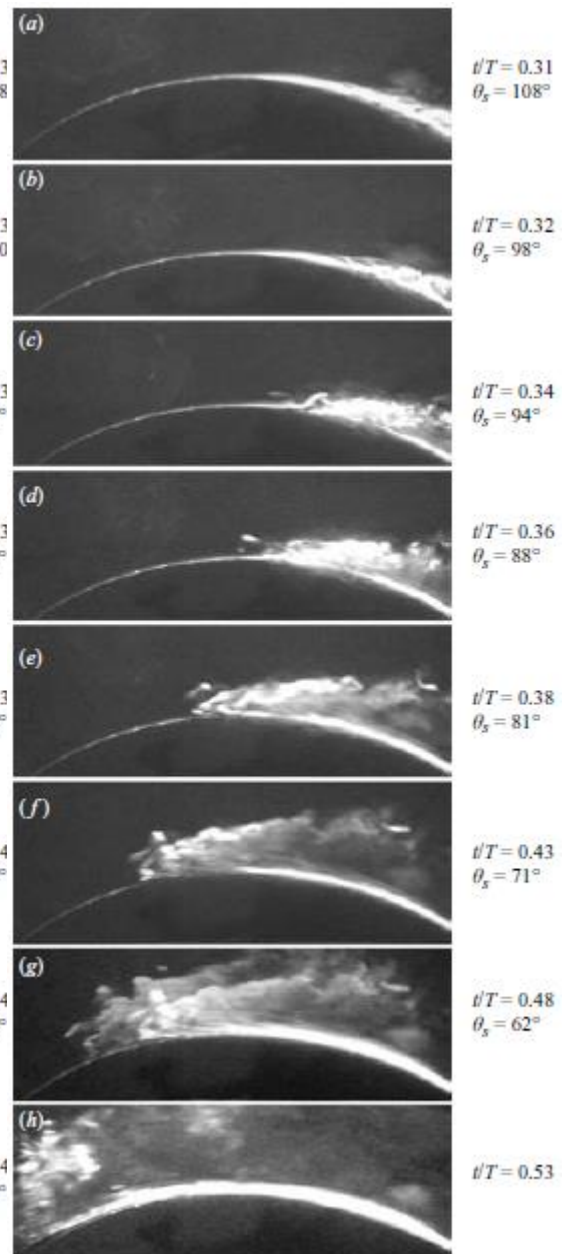
Αυτό που συμπεραίνεται από τα δύο Σχήματα 4.1 και 4.2, είναι πως το οιονεί στατικό μοντέλο αδυνατεί να ακολουθήσει τη μεταβολή του σημείου τυρβώδους μετάβασης, των πραγματικών δεδομένων.

Σχετική βιβλιογραφική αναζήτηση υποδεικνύει πως ο κρίσιμος Reynolds, της τυρβώδους μετάβασης του οριακού στρώματος επάνω στον κύλινδρο, εξαρτάται από τη συχνότητα της ταλάντωσης. Ο (Sarkaya, 2006) χρησιμοποίησε μεθόδους οπτικοποίησης της ροής γύρω από λείο κυκλικό κύλινδρο και μελέτησε τις δομές αποκόλλησης που δημιουργούνται στο οριακό στρώμα, για σταθερή τιμή της παραμέτρου Stokes $\beta = 6815$, με αυξανόμενο τον αριθμό Kc . Αποτυπώνοντας διάφορα στιγμιότυπα της ταλάντωσης, από τα πρώτα στάδια της επιτάχυνσης, μέχρι τα πρώτα στάδια της επιβράδυνσης, δείχνει πως μετακινείται το μέτωπο της αποκόλλησης και ποια η συμπεριφορά της τυρβώδους μετάβασης στο οριακό στρώμα.

Στα Σχήματα 4.3 και 4.4 παρουσιάζεται η μεταβολή της γωνιάς αποκόλλησης του οριακού στρώματος θ_s , ως προς το μέτωπο της ροής, με τον αδιαστατοποιημένο χρόνο ταλάντωσης t/T , όπου T η περίοδος της ταλάντωσης. Παρατηρείται ταχύτερη μετατόπιση του σημείου αποκόλλησης, καθώς και τυρβώδη μετάβαση πριν ακόμα η ροή φτάσει στο μέγιστο της ταχύτητας. Οι αριθμοί Reynolds στους οποίους συμβαίνει η μετάβαση είναι σαφώς μικρότεροι από τους αντίστοιχους για χρονικά σταθερή ροή. Με την αύξηση της παραμέτρου συχνότητας το σημείο μετάβασης μετακινείται σε χαμηλότερους αριθμούς Keulegan-Carpenter, όπως φαίνεται και στα Σχήματα 2.9 και 4.1.



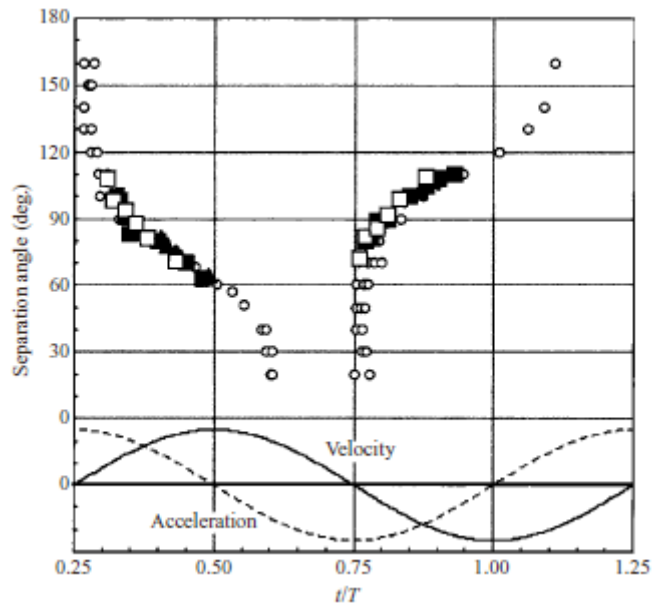
Σχήμα 4.3: Εξέλιξη της ανάπτυξης του οριακού στρώματος σε οχτώ διαδοχικές στιγμές (t/T) για $Kc=3.95$ και $Re=27000$, με τις αντίστοιχες γωνίες αποκόλλησης του οριακού στρώματος θ_s . Γίνεται ορατή η διάσπαση των στρωτών δομών.



Σχήμα 4.4: Εξέλιξη της ανάπτυξης του οριακού στρώματος σε οχτώ διαδοχικές στιγμές (t/T) για $Kc=4.45$ και $Re=30300$, με τις αντίστοιχες γωνίες αποκόλλησης του οριακού στρώματος θ_s . Εμφανής η ταχύτατη τυρβώδης μετάβαση.

Η ταλάντωση ξεκινά σε χρόνο $t/T = 0.25$, όπου η επιτάχυνση είναι μέγιστη και κατά $\Delta(t/T) = 0.25$ ($t/T = 0.5$), βρίσκεται στο σημείο μέγιστης ταχύτητας, όπου η ροή αρχίζει να επιβραδύνει. Στην περίπτωση του $Kc = 4.45$ (Σχήμα 4.4), η αποκόλληση που πρωτοεμφανίζεται στο αρχικό στάδιο της επιτάχυνσης, σε $t/T = 0.27$ και γωνία περίπου $\theta_s = 160^\circ$, μετακινείται ταχύτατα προς τα ανάντη μέρη του κυλίνδρου και μόλις σε $\Delta(t/T) =$

0.09 ($t/T = 0.36$) εμφανίζεται σε $\theta_s = 88^\circ$. Με περαιτέρω επιτάχυνση της ροής, το μέτωπο της αποκόλλησης μετακινείται με πιο αργό ρυθμό, διότι η επιτάχυνση και η ταχύτητα φτάνουν στο 70% της μέγιστης τιμής τους σε περίπου $t/T = 0.375$. Στο Σχήμα 4.5 παρατίθενται οι γωνίες αποκόλλησης και οι αντίστοιχοι αδιάστατοι χρόνοι, όπως εντοπίστηκαν από τον Sarpkaya.



Σχήμα 4.5: Γωνία αποκόλλησης του οριακού στρώματος, θ° , συναρτήσει του αδιάστατου χρόνου ταλάντωσης, για $Kc = 3.56$, $Re = 23500$ (πληρωμένα τετράγωνα), $Kc = 3.95$, $Re = 27000$ (κύκλοι), $Kc = 4.45$, $Re = 30300$ (κενά τετράγωνα). (Sarpkaya, 2006)

Η επίδραση της συχνότητας ταλάντωσης δικαιολογεί την εμφάνιση των μεγίστων του συντελεστή αντίστασης σε διαφορετικό Re_{crit} και ως ένα βαθμό επηρεάζει το μέγεθος του συντελεστή αντίστασης. Μια επιπλέον συνιστώσα αιτία του διαφορετικού μεγέθους τιμών αποτελεί το διαφορετικό πεδίο ροής, το οποίο συναντά ο κύλινδρος εντός της ταλαντούμενης ροής σε σύγκριση με αυτό για σταθερή ροή. Κατά τη διάρκεια μιας ταλάντωσης δημιουργούνται στον ομόρου δίνες, οι οποίες παραμένουν στη ροή για κάποιο χρονικό διάστημα. Όταν η ροή επιστρέφει, ο κύλινδρος συναντά το ιστορικό της ταλάντωσης, δηλαδή εναπομείναντες διαταραχές στο πεδίο ροής.

Στα αρχικά στάδια της επιτάχυνσης, οι δίνες στα κατάντη του κυλίνδρου δεν έχουν ακόμα αναπτυχθεί πλήρως. Επιπλέον, οι δίνες οι οποίες αναπτύχθηκαν κατά την επιβράδυνση και κυρίως λίγο πριν την αλλαγή κατεύθυνσης του κυλίνδρου, συναντώνται κατά μέτωπο του κυλίνδρου και οδηγούν στην εμφάνιση χαμηλής πίεσης. Ο συνδυασμός αυτός αποτρέπει τη δύναμη αντίστασης από το να αναπτύξει υψηλές τιμές. Καθώς η ταχύτητα αυξάνει, οι προϋπάρχουσες δίνες στα ανάντη της ροής απομακρύνονται από το κέντρο του κυλίνδρου και κινούνται προς την περιφέρεια, χάνοντας την επίδραση τους στην κατανομή της πίεσης. Ωστόσο, συνεχίζουν να επηρεάζουν τη διαμόρφωση του οριακού στρώματος. Συγχρόνως, οι δίνες στα κατάντη μέρη του κυλίνδρου έχουν αναπτυχθεί πλήρως συμβάλλοντας σε μια μεγαλύτερη δύναμη αντίστασης. Όταν η ταχύτητα φτάνει κοντά στη μέγιστη τιμή της, οι προϋπάρχουσες δίνες έχουν πλήρως ή σε μεγάλο βαθμό

παρασυρθεί μακριά από τον κύλινδρο ή διαχυθεί. Ο βαθμός στον οποίο συμβαίνει αυτό εξαρτάται από τις παραμέτρους β και Kc της ροής.

Τα παραπάνω φαινόμενα δεν είναι εμφανή σε κάθε ταλάντωση και διαφοροποιούνται ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του πεδίου ροής. Όταν η συχνότητα της ταλάντωσης είναι πολύ μικρή και συγχρόνως το πλάτος της μεγάλο (μικρό β και μεγάλο Kc), ο χρόνος επιστροφής της ροής στο ίδιο σημείο είναι αρκετός, ώστε οι όποιες δίνες πιθανόν έχουν δημιουργηθεί κατά την προηγούμενη ταλάντωση, να έχουν διαχυθεί. Επομένως, έχουν μηδενική επίδραση στη διαμόρφωση της δύναμης αντίστασης επάνω στον κύλινδρο. Στην ακραία αυτή περίπτωση η ροή προσεγγίζει αυτή της σταθερής ταχύτητας.

Δεδομένων των συνθηκών της ροής, εκλύονται στο απόρου δίνες με συχνότητα η οποία αδιάστατα παριστάνεται με τον αριθμό Strouhal. Εάν, η συχνότητα έκλυσης δινών είναι μικρότερη από τη συχνότητα της ταλάντωσης (ρευστού ή κυλίνδρου) και πιο συγκεκριμένα από τη συχνότητα αλλαγής κατεύθυνσης της ροής, τότε δεν προλαβαίνουν να δημιουργηθούν στρόβιλοι. Μια εκτίμηση για τα αν αναπτύσσονται ή όχι δίνες στη ροή μπορεί να γίνει με τον υπολογισμό του λόγου συχνοτήτων f_r (λόγος της συχνότητας έκλυσης δινών προς τη συχνότητα της ταλάντωσης). Για να εξασφαλιστεί ότι εντός ενός κύκλου ταλάντωσης εκλύθηκε τουλάχιστον ένας στρόβιλος, θα πρέπει ο λόγος αυτός να ισούται με 2. Ισχύει:

$$St = \frac{f_{st} D}{U}$$

Με κατάλληλες πράξεις και απλοποιήσεις εξάγεται η σχέση για το λόγο συχνοτήτων:

$$f_r = \frac{f}{f_{st}} = \frac{\beta}{St \cdot Re_{max}} \quad [4.1]$$

και εφόσον ο Re_{max} αντιστοιχεί μόνο στη στιγμή μέγιστης ταχύτητας γίνεται η κατάλληλη διόρθωση με τον Reynolds, ο οποίος αντιστοιχεί στη μέση ταχύτητα ενός κύκλου ταλάντωσης. Με τη μέση ταχύτητα να ισούται με $U_{mean} = 2/\pi \cdot U_{max}$ και αντίστοιχα $Re_{mean} = 2/\pi \cdot Re_{max}$, η Εξίσωση 4.1 τελικά παίρνει τη μορφή:

$$f_r = \frac{f}{f_{st}} = \frac{\pi}{2 \cdot St \cdot Kc} \quad [4.2]$$

Δεδομένου ότι η παράμετρος Strouhal, για το μεγαλύτερο εύρος τιμών του αριθμού Reynolds, ισούται με 0.2 (κάτι το οποίο δεν ισχύει για μεγάλες τιμές του Reynolds (βλ. σχήμα 2.3)), με αντικατάσταση της τιμής αυτής στην [4.2], εξίσωσής της με την τιμή $f_r = 2$ και επίλυση ως προς την παράμετρο Keulegan-Carpenter, λαμβάνεται:

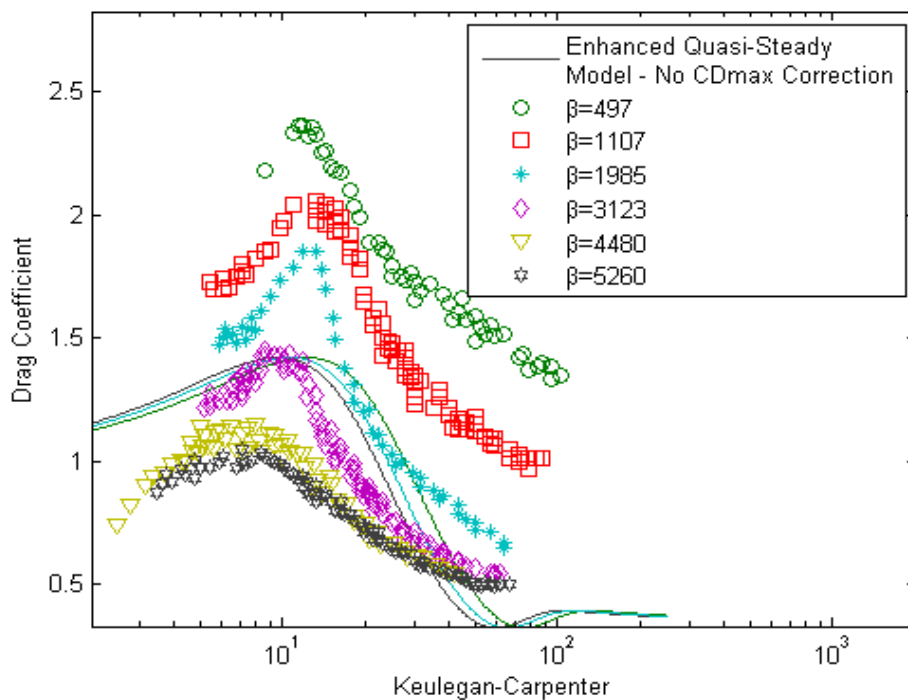
$$Kc \sim 4$$

Η τιμή αυτή αποτελεί το θεωρητικό κατώφλι, κάτω του οποίου δε δημιουργούνται δίνες κατά την ταλάντωση. Ωστόσο, σε πραγματική εφαρμογή η τιμή αυτή δεν είναι αυστηρώς καθορισμένη και εξαρτάται από τη συχνότητας ταλάντωσης.

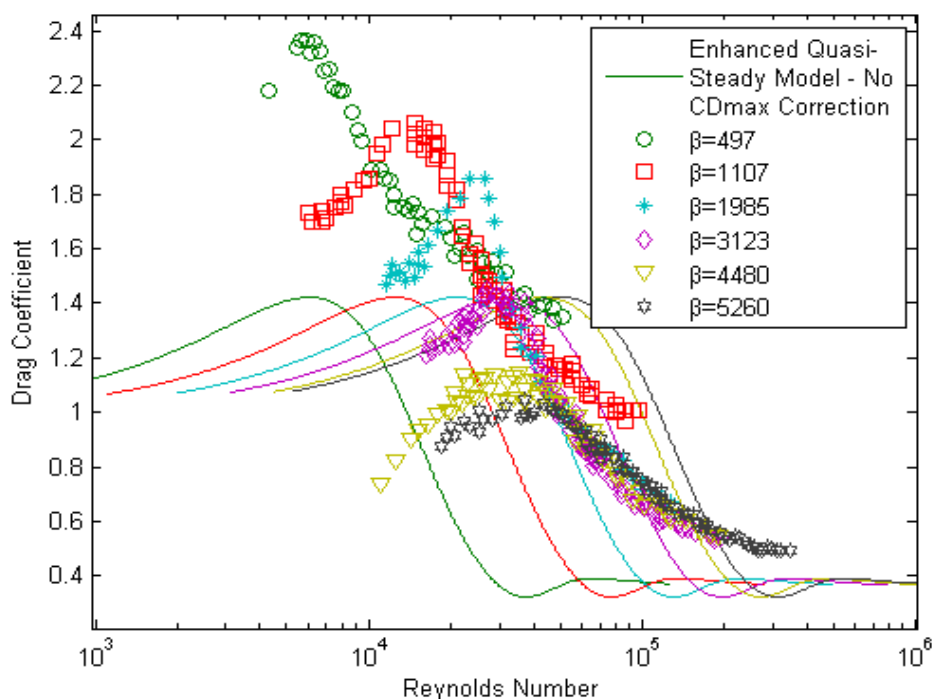
Ημι-εμπειρικό μοντέλο

Στο ημι-εμπειρικό μοντέλο, ο Reynolds που αντιστοιχεί σε κάθε συνδυασμό (β , Kc) στο οιονεί-στατικό μοντέλο, αντικαθίσταται από τον ισοδύναμο $Re_{eq} = 6200 \cdot Re \cdot \beta^{-0.9}$. Τα Σχήματα 4.6 και 4.7 παρουσιάζουν τα αποτελέσματα που εξάγει το ημι-εμπειρικό μοντέλο, με τη χρήση του ισοδύναμου Reynolds. Στα αποτελέσματα δεν περιλαμβάνεται η διόρθωση ως προς τα μέγιστα των συντελεστών αντίστασης. Το σφάλμα απόκλισης, στη μορφή που δίνεται από τη Σχέση 3.50 ισούται με $E(C_D) = 0.44$.

Στο Σχήμα 4.6 παρατίθενται οι συντελεστές μόνο για $\beta = 497, 1985$ και 5260 , για την αποφυγή σύγχυσης μεταξύ των τιμών.



Σχήμα 4.6: Συντελεστές αντίστασης ημι-εμπειρικού μοντέλου, προ διόρθωσης ως προς τις μέγιστες τιμές, σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα $C_{D,exp}$, συναρτήσει του αριθμού Kc . Δεδομένα από (Sarpkaya, 1976)



Σχήμα 4.7: Συντελεστές αντίστασης ημι-εμπειρικού μοντέλου, προ διόρθωσης ως προς τις μέγιστες τιμές, σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα $C_{D_{exp}}$, συναρτήσεως του αριθμού Re . Δεδομένα από (Sarpkaya, 1976)

Παρατηρείται ότι οι κορυφές των γραφικών παραστάσεων, των υπολογισμένων συντελεστών αντίστασης, εμφανίζονται σε αριθμούς Reynolds και Keulegan-Carpenter πολύ κοντά με τους αντίστοιχους των μετρημένων συντελεστών. Η μικρή απόκλιση οφείλεται στο γεγονός ότι η σχέση του Re_{eq} είναι τέτοια, ώστε το σύνολο των κορυφών και όχι ξεχωριστά για κάθε τιμή του β , να συμβαδίζει με τα πειραματικά δεδομένα. Η χρήση ακόμα και της Εξίσωσης 3.45 δεν θα μπορούσε να αποδώσει με απόλυτη ακρίβεια τη μετάβαση του οριακού στρώματος, διότι δεν αποτυπώνει τα πειραματικά δεδομένα, αλλά την προσαρμογή μιας ευθείας σε αυτά. Επίσης είναι εμφανής η ταχύτερη μετάβαση από υποκρίσιμο σε κρίσιμο καθεστώς ροής, την οποία ακολουθούν οι συντελεστές του ημι-εμπειρικού μοντέλου (πιο απότομη κλίση κυρίως στις μικρότερες συχνότητες).

Ημι-εμπειρικό μοντέλο 1

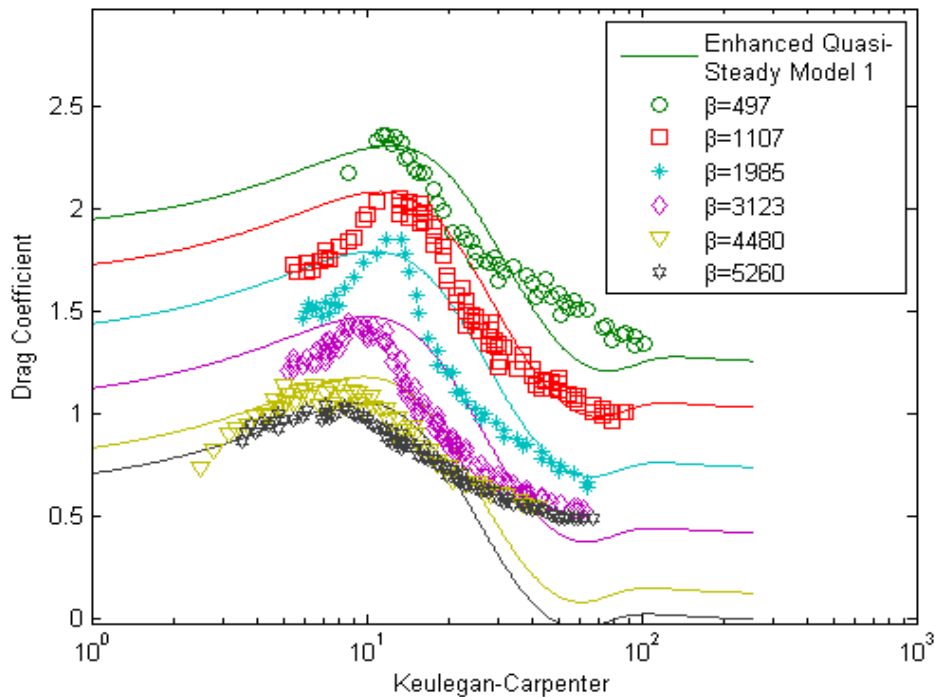
Τα αποτελέσματα του μοντέλου προέρχονται από τη χρήση της σχέσης:

$$C_{D_{mod1}} = C_{D_{Qs_{Eq}}} + (C_{D_{max_{exp}}} - \max(C_{D_{Qs_{Eq}}}))$$

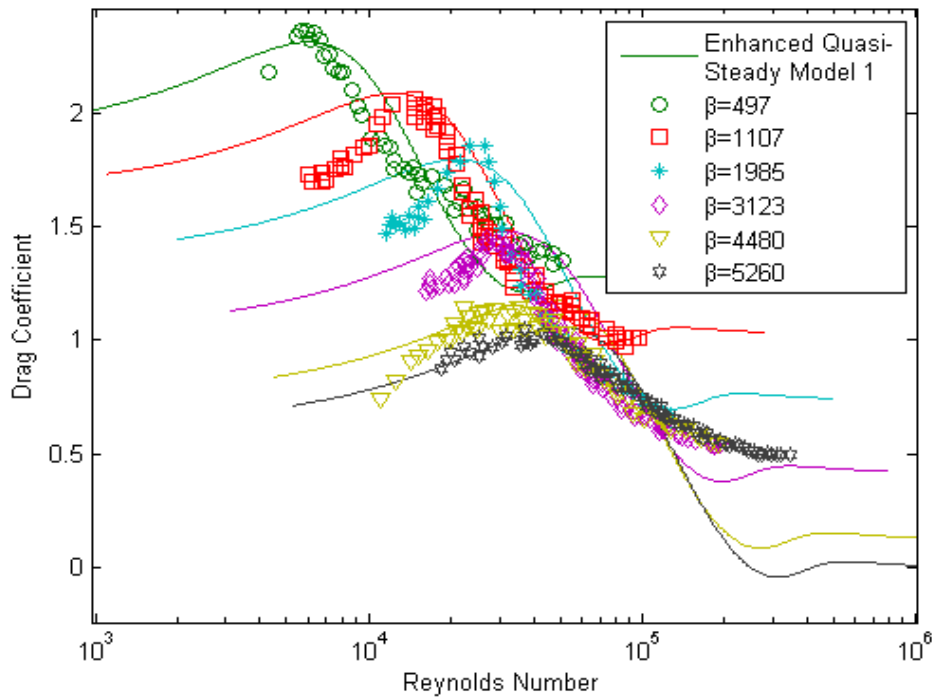
Στα Σχήματα 4.8 και 4.9, με συνεχή γραμμή, παρουσιάζονται τα διορθωμένα, ως προς τα μέγιστα των συντελεστών αντίστασης, αποτελέσματα χρήσης του «ημι-εμπειρικού μοντέλου 1», συναρτήσεως των αριθμών Keulegan-Carpenter και Reynolds αντίστοιχα. Σε σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα πειραματικά δεδομένα παρατηρείται πολύ καλή

ποιοτική και ποσοτική συμφωνία. Δεδομένου ότι η διόρθωση αφορά τις μέγιστες τιμές των συντελεστών, εμφανίζεται καλύτερη ποσοτική συνάφεια στην περιοχή κοντά σε αυτές, για όλες τις συχνότητες ταλάντωσης. Για μεγάλες παραμέτρους συχνότητας, $\beta = 4480$ και $\beta = 5260$ και υψηλές τιμές των παραμέτρων Re και Kc , τα αποτελέσματα που εξάγονται από το μοντέλο εμφανίζουν τη μέγιστη απόκλιση από τις πειραματικές τιμές. Συνολικά, για όλους τους συντελεστές αντίστασης το σφάλμα απόκλισης, στη μορφή που δίνεται από τη Σχέση 3.50, ισούται με $E(C_D) = 0.19$.

Η διόρθωση που εισάγει το μοντέλο αυτό βασίζεται στην αύξηση των συντελεστών, κατά τον όρο της διαφοράς των μεγίστων μεταξύ των υπολογισμένων και των πειραματικών τιμών. Ως εκ τούτου, η διαφορά μεταξύ της μέγιστης και ελάχιστης τιμής των συντελεστών παραμένει σταθερή. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο, για $\beta = 5260$, οι συντελεστές αντίστασης, για του μεγαλύτερους των Keulegan-Carpenter, λαμβάνουν τιμές κοντά στο μηδέν, ακόμα και αρνητικές. Αυτή η συμπεριφορά λαμβάνεται υπόψη και εξαλείφεται στο δεύτερο ημι-εμπειρικό μοντέλο.



Σχήμα 4.8: Συντελεστές αντίστασης από «ημι-εμπειρικό μοντέλο 1», $C_{D_{mod1}}$, σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα $C_{D_{exp}}$, συναρτήσει του αριθμού Kc . Δεδομένα από (Sarpkaya, 1976)



Σχήμα 4.9: Συντελεστές αντίστασης από «ημι-εμπειρικό μοντέλο 1», $C_{D_{mod1}}$, σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα $C_{D_{exp}}$, συναρτήσει του αριθμού Re . Δεδομένα από (Sarpkaya, 1976)

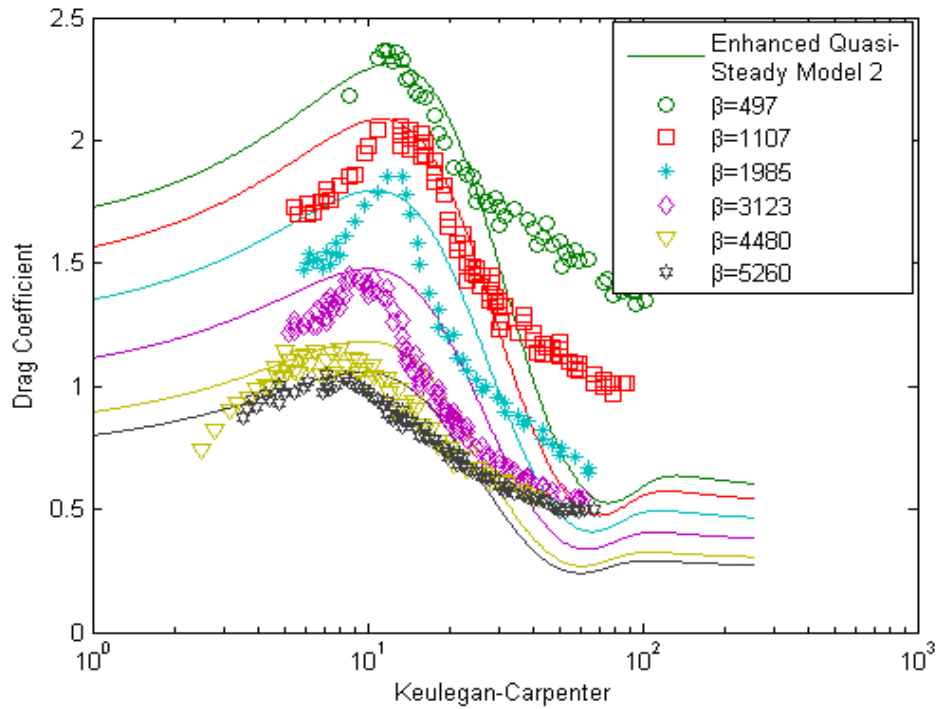
Ημι-εμπειρικό μοντέλο 2

Τα αποτελέσματα του μοντέλου προέρχονται από τη χρήση της σχέσης:

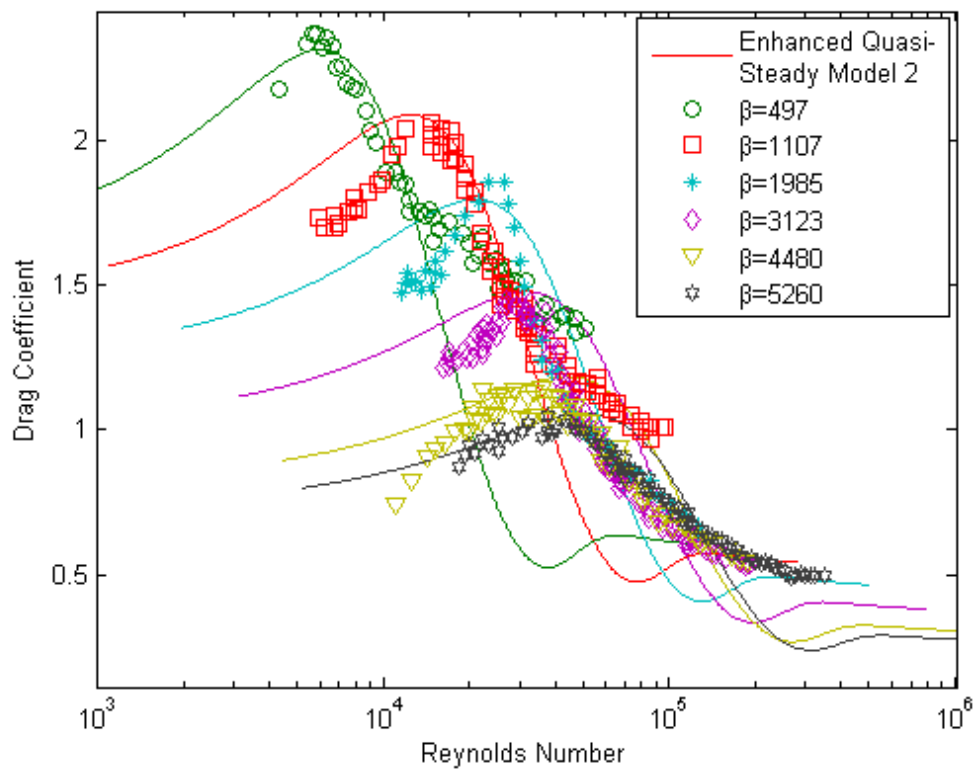
$$C_{D_{mod2}} = \frac{C_{D_{Qs_Eq}}}{\max(C_{D_{Qs_Eq}})} \cdot C_{D_{maxexp}}$$

Στα Σχήματα 4.10 και 4.11, με συνεχή γραμμή, παρουσιάζονται τα διορθωμένα, ως προς τα μέγιστα των συντελεστών αντίστασης, αποτελέσματα χρήσης του ημι-εμπειρικού μοντέλου 1, συναρτήσει των αριθμών Keulegan-Carpenter και Reynolds αντίστοιχα. Η ποιοτική και ποσοτική συμφωνία, μεταξύ υπολογισμένων και πειραματικών τιμών, είναι σχεδόν εξίσου καλή με το πρώτο μοντέλο (σφάλμα απόκλισης $E(C_D) = 0.27$). Παρατηρείται, ωστόσο, ότι χάνεται η πολύ καλή ποσοτική συμφωνία στις μεγάλες τιμές των Re και Kc , για τις χαμηλότερες παραμέτρους συχνότητας. Για τις τιμές αυτές εμφανίζεται η μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ των συντελεστών που εξάγει το μοντέλο και των πειραματικά προσδιορισμένων. Αντιθέτως, το μοντέλο αποδίδει περισσότερο αξιόπιστα αποτελέσματα, σε σύγκριση με το «ημι-εμπειρικό μοντέλο 1», για μεγάλες συχνότητες ταλάντωσης ($\beta = 4480, 5260$). Οι κλίσεις των γραφικών παραστάσεων των πειραματικών δεδομένων διαφέρουν σε μικρό βαθμό από τις αντίστοιχες των υπολογισμένων

συντελεστών, υποδεικνύοντας ότι τα σημεία μετάβασης της ροής, στα διάφορα καθεστώτα ροής, δεν ακολουθούνται πιστά από το μοντέλο.



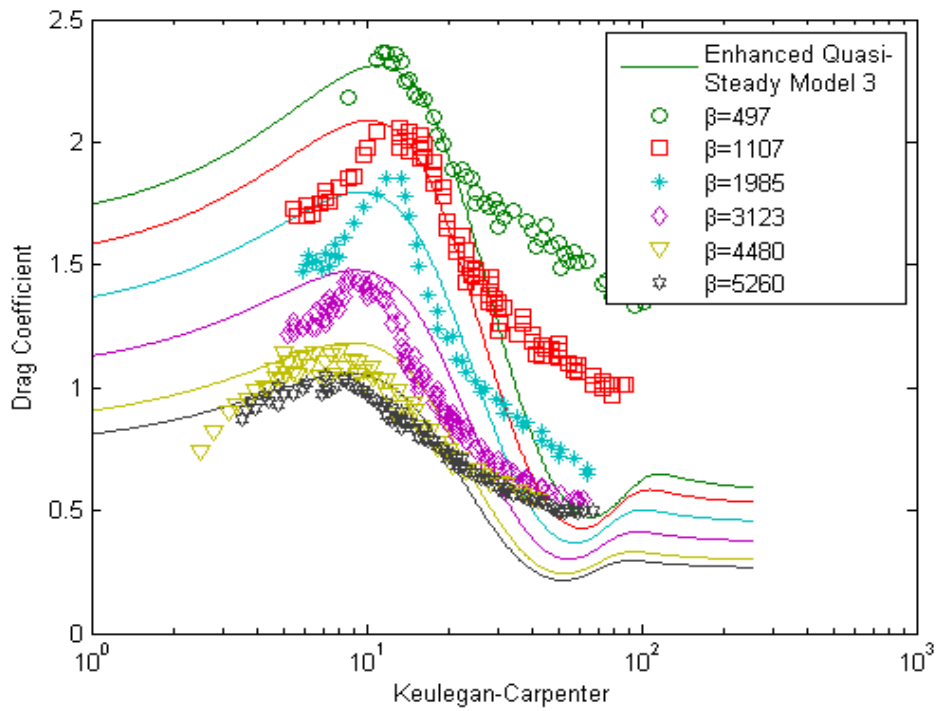
Σχήμα 4.10: Συντελεστές αντίστασης από «ημι-εμπειρικό μοντέλο 2», $C_{D_{mod2}}$, σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα $C_{D_{exp}}$, συναρτήσει του αριθμού Kc . Δεδομένα από (Sarpkaya, 1976)



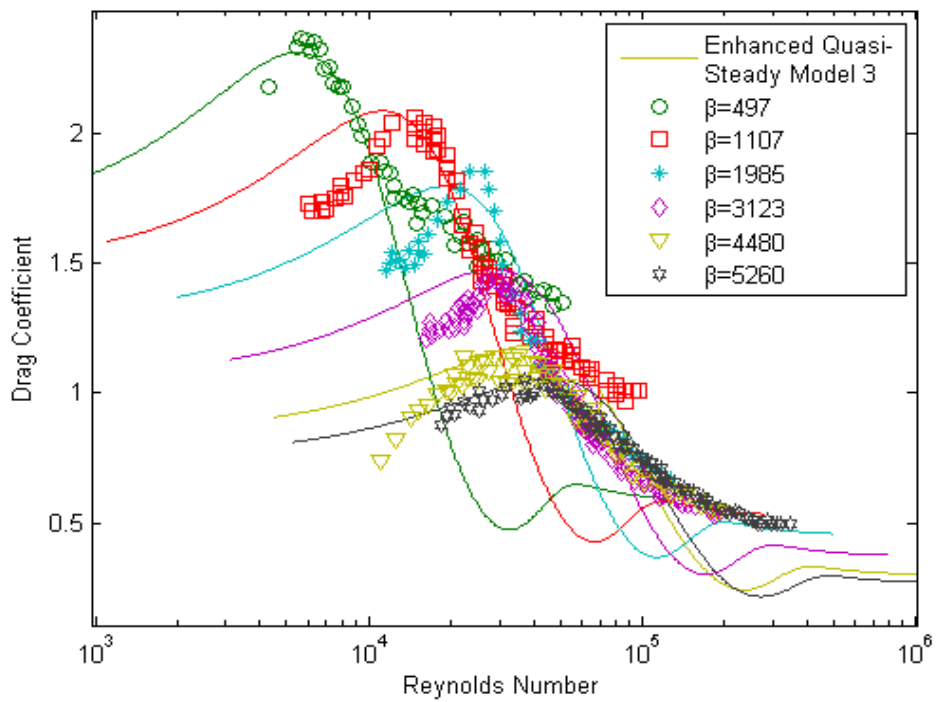
Σχήμα 4.11: Συντελεστές αντίστασης από «ημι-εμπειρικό μοντέλο 2», $C_{D_{mod2}}$, σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα $C_{D_{exp}}$, συναρτήσει του αριθμού Re . Δεδομένα από (Sarpkaya, 1976)

Ημι-εμπειρικό μοντέλο 3

Στα Σχήματα 4.12 και 4.13, με συνεχή γραμμή, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα χρήσης του «ημι-εμπειρικού μοντέλου 3», σε αντιπαράθεση με τα πειραματικά δεδομένα. Παρατηρείται ότι οι γραφικές παραστάσεις των συντελεστών αντίστασης είναι πανομοιότυπες αυτών που εξήχθησαν από το «ημι-εμπειρικό μοντέλο 2», με το σφάλμα απόκλισης μεταξύ υπολογισμένων και πειραματικών τιμών να είναι το ίδιο $E(C_D) = 0.27$.



Σχήμα 4.12: Συντελεστές αντίστασης από «ημι-εμπειρικό μοντέλο 3», $C_{D_{mod3}}$, σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα $C_{D_{exp}}$, συναρτήσει του αριθμού Kc . Δεδομένα από (Sargkaya, 1976)



Σχήμα 4.13: Συντελεστές αντίστασης από «ημι-εμπειρικό μοντέλο 3», $C_{D_{mod3}}$, σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα $C_{D_{exp}}$, συναρτήσει του αριθμού Re . Δεδομένα από (Sargkaya, 1976)

5. Συμπεράσματα - Προτάσεις

Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε η ακρίβεια με την οποία ένα οιονεί στατικό μοντέλο, βασιζόμενο σε αναλυτικές σχέσεις, θα μπορούσε να αποδώσει τις τιμές των συντελεστών αντίστασης και αδράνειας, για ταλαντούμενη ροή γύρω από κύλινδρο. Με βάση το μοντέλο αυτό δημιουργήθηκαν επιπλέον τρία ημι-εμπειρικά μοντέλα. Τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με πειραματικά δεδομένα, προερχόμενα από συγκεκριμένη πειραματική διαδικασία (Sargkaya, 1976), επομένως η αξιολόγηση τους ενέχει υποκειμενικότητα και περιορίζεται σε συγκεκριμένες τιμές των αδιάστατων παραμέτρων συχνότητας β και περιόδου Kc . Τα κυριότερα συμπεράσματα, τα οποία εξάχθηκαν, μελετώντας τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

- Το οιονεί στατικό μοντέλο, το οποίο αναπτύχθηκε, αδυνατεί να αποδώσει αξιόπιστα τις τιμές των συντελεστών αντίστασης και αδράνειας. Η ίδια η φύση της ταλαντούμενης ροής συμβάλει, ανάλογα με τη συχνότητα ταλάντωσης, στην ταχύτερη μετάβαση του οριακού στρώματος σε τυρβώδες, σε σχέση με τη ροή σταθερής ταχύτητας. Αυτό σε συνδυασμό με το ιστορικό της ταλάντωσης αποτελούν τους βασικότερους λόγους για τους οποίους το οιονεί-στατικό μοντέλο αποτυγχάνει.
- Ο συντελεστής αντίστασης ταλαντούμενης ροής, συναρτήσει του β , δε μεταβάλλεται τυχαία, αλλά ακολουθεί συγκεκριμένη τάση. Η γραμμική σχέση που περιγράφει τη μεταβολή του κρίσιμου Reynolds με την αδιάστατη συχνότητα έχει προσδιοριστεί στην παρούσα εργασία.
- Τα ημι-εμπειρικά μοντέλα μπορούν να αποδώσουν τις τιμές των συντελεστών με ικανοποιητική ακρίβεια. Ωστόσο, η αναλυτική προσέγγιση που ακολουθήθηκε αδυνατεί να μηδενίσει τις αποκλίσεις μεταξύ πειραματικών και υπολογισμένων τιμών.

Προτάσεις προς περαιτέρω διερεύνηση:

Προτείνεται να μελετηθεί η χρήση μιας διαφορετικής μορφής σχέση του ισοδύναμου Reynolds, η οποία πιθανόν να εμφανίζει καλύτερη προσαρμοστικότητα στα πειραματικά δεδομένα και τις διακυμάνσεις τους.

Επίσης, προτείνεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων με δεδομένα διαφορετικών πειραματικών διατάξεων και μικρότερων παραμέτρων συχνότητας.

Βιβλιογραφία

- Bearman, P. W., Graham, J. M., Obasaju, E. D., & Drosopoulos, D. (1984). The influence of corner radius on the forces experienced by cylindrical bluff bodies in oscillatory flow. *Applied Ocean Research*, 6, 83-89.
- Chhabra, R., Agarwal, L., & Sinha, N. K. (1998). Drag on non-spherical particles: an evaluation of available methods. *Powder Technology*, 288-295.
- Cho, K., Pak, B., Cho, Y., & Park, N. (1991). Hydrodynamics of large aspect ratio circular cylinders moving vertically in a viscoelastic fluid. *ASME Annual Winter Meeting*. Atlanta.
- Clauss, G. (1992). *Offshore structures: Volume 1: Conceptual Design and Hydromechanics*. Springer-Verlag.
- Clift, R., Grace, J. R., & Weber, M. E. (1978). *Bubbles, Drops and Particles*. New York: Academic Press, Dover Publications.
- Frigaard, P. (1989). *Wave Loads on Cylinders*. Aalborg: University of Aalborg.
- Ganser, G. H. (1993). A rational approach to drag prediction of spherical and nonspherical particles. *Powder Technology*, 143-152.
- Gudmestad, O. T., & Moe, G. (1996). Hydrodynamic Coefficients for Calculation of Hydrodynamic Loads on Offshore Truss Structures. *Elsevier Science Limited*, 745-758.
- Hino, M., Sawamoto, M., & Takasu, S. (1976). Experiments on transition to turbulence in an oscillatory pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 75, part 2, 193-207.
- Hui, S. X. (2003). *A Study of Turbulent Flow with the Effect of Vegetation*. Singapore: National University of Singapore; Department of Civil Engineering.
- Isaacs, J. L., & Thodos, G. (1967). The free-settling of solid cylindrical particles in the turbulent regime. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 150-155.
- Journée, J., & Massie, W. (2001). *OFFSHORE HYDROMECHANICS*. Delft: Delft University of Technology.
- Kelbaliyev, G. (2011). Drag coefficients of variously shaped solid particles, drops, and bubbles. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 248-266.
- Keulegan, G. H., & Carpenter, L. H. (1958). Forces on Cylinders and Plates in an Oscillating Fluid. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 423-440.
- Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*. Dover Publications.
- Lienhard, J. H. (1966). *Synopsis of Lift, Drag and Vortex Frequency Data for Rigid Circular Cylinders*. Washington: Technical Extension Service, Washington State University.

- Loth, E. (2009). *Computational Fluid Dynamics of Bubbles, Drops and Particles*. University of Illinois.
- Madhav, G. V., & Chhabra, R. P. (1994). Drag on non-spherical particles in viscous fluids. *Int. Journal of Mineral Processing*, 15-29.
- Michaelides, E. (2006). *Particles, Bubbles and Drops - Their Motion, Heat and Mass Transfer*. New Jersey: World Scientific Publishing.
- Morison, J. R., O'Brien, M. P., Johnson, J. W., & Schaaf, S. A. (1950). The force exerted by surface waves on piles. *Journal of Petroleum Technology*, vol2, 149–154.
- Pruppacher, H. R. (1970). Some relations between drag and flow pattern of viscous flow past a sphere and a cylinder at low and intermediate Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 781-790.
- Relf, E. F. (1914). *Reports and Memoranda*.
- Sarpkaya, T. (1986). Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 61-71.
- Sarpkaya, T. (1976). *Vortex Shedding and Resistance in Harmonic Flow about Smooth and Rough Circular Cylinders at High Reynolds Numbers*. Naval Postgraduate School.
- Sarpkaya, T. (2006). Structures of separation on a circular cylinder. *Jurnal of Fluid Mechanichs*, vol 567, 281-297.
- Singh, S., & Mittal, S. (2006). *Flow Past a Cylinder: Shear Layer Instability and Drag Crisis*. Kanpur, India: Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology.
- Tritton, D. (1959). Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 547-567.
- Wieselsberger, C. (1921). Neuere Festellungen über die Gesetze des Flüssigkeits-und Luftwiderstands. *Physik*, 321-328.

Παράρτημα

Περιλαμβάνονται κατά σειρά τα αρχεία του “Matlab”:

- «Αξιολόγηση σχέσεων του C_d με τον Re ». Ο κώδικας αυτός χρησιμοποιήθηκε για την αξιολόγηση των διάφορων θεωρητικών και ημι-εμπειρικών σχέσεων του συντελεστή αντίστασης σταθερής ροής συναρτήσει του αριθμού Reynolds.
- «Εκτίμηση συντελεστών – Μέθοδος Fourier Averaging». Ο κώδικας αυτός υπολογίζει τους συντελεστές της εξίσωσης Morison με τη χρήση της μεθόδου Fourier Averaging, για το οιονεί-στατικό μοντέλο.
- «Εκτίμηση συντελεστών – Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων». Ο κώδικας αυτός υπολογίζει τους συντελεστές της εξίσωσης Morison με τη χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, για το οιονεί-στατικό μοντέλο.
- «Διερεύνηση συντελεστή και εκθέτη ημι-εμπειρικού μοντέλου». Με τη χρήση αυτού του κώδικα υπολογίζονται ο συντελεστής και ο εκθέτης της προτεινόμενης σχέσης του ισοδύναμου Reynolds, $Re_{eq} = c \cdot Re \cdot \beta^m$ και το σφάλμα απόκλισης $E(CD)$ για κάθε διαφορετικό συνδυασμό (c, m)
- «Μέγιστοι C_d για διαφορετικά β , με Reynolds και Kc ». Στον κώδικα αυτό διερευνάται η σχέση μεταξύ των παραμέτρων της ροής για τις μέγιστες τιμές του συντελεστή αντίστασης του κάθε διαφορετικού β .

Αξιολόγηση σχέσεων του C_d με τον Re .

```
Re=logspace(-1:7:1000);

Cd1=50*(Re.^-0.43)+0.7*(1-exp(-Re./15000));

% Συνεχής σχέση του Kelbaliyev %
Cd2=(10.*(Re.^-0.778)).*(1+(Re.^1.875+0.368*(10^-3)*Re.^2.55)./(60+6.8*Re.^1.15+0.4*(10^-14)*Re.^3.95))+0.36*(1-exp(-1.2*(10^-24)*Re.^4));

Cd3=arrayfun(@ (Re) Cd3 (Re), Re); % Σχέση του Su Xiao Hui

Cd4=arrayfun(@ (Re) Cd4 (Re), Re); %Clift et al από "Drag coefficient and settling velocity for particles of cylindrical shape"

% Σχέση των Clift-Gauvin %
Cd5=(24./Re).*(1+0.15.*Re.^0.687)+0.42./(1+42500./Re.^1.16);

Cd6=(24./Re).*(1+0.604.*Re.^0.529); % Σχέση των Madhav - Chhabra από "Drag on non-spherical particles in viscous fluids"
```

```

Dir=abs(100.*((Cd2-Cd3)./Cd3)); % Επί τις εκατό απόκλιση της κάθε
τιμής από την αξιόπιστη τιμή Cd2

A=xlsread('Cd-Re_Tritton.xlsx'); %Εισαγωγή δεδομένων από Tritton
Re1=A(:,1);
Cd=A(:,2);

C=xlsread('Re-Cd Data from Relf-Wiesels.xlsx');
R_e=C(:,1);
C_d=C(:,2);

loglog(R_e,C_d, '.',Re,Cd2,Re,Cd3,'k',Re,Cd4,'g',Re,Cd5,'m')
xlabel('Reynolds Number')
ylabel('Drag Coefficient')

```

Εκτίμηση Συντελεστών - Μέθοδος Fourier Averaging

```

Kc =logspace(0,2,100);
Beta =3123;

t=0.001:0.001:1; % Αδιάστατος χρόνος ταλάντωσης

for i=1:length(Beta)
    for j=1:length(Kc)
        u=Kc(j)*sin(2*pi*t); % Αδιάστατη ταχύτητα
        du=2*pi*Kc(j)*cos(2*pi*t); % Αδιάστατη επιτάχυνση
        Re_max=Kc(j)*Beta(i);
        Re=abs(Re_max*sin(2*pi*t)); % Αριθμός Reynolds κατά τη
        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%διάρκεια της ταλάντωσης

        Cm=2; % Επιλεγμένη σταθερή τιμή του Cm

        % Ημι-εμπειρική σχέση του συντελεστή αντίστασης με τον
        %Reynolds
        Cd=(10./(Re.^0.778)).*(1+(Re.^1.875+0.368e-3*Re.^2.55)./...
        (60+6.8*Re.^1.15+0.4e-14*Re.^3.95))+0.36*(1-exp(-1.2*(10^-
        24)*Re.^4));

        F_drag=1/(Kc(j)^2)*u.*abs(u).*Cd; % Συνιστώσα αντίστασης
        F_inertia=(pi/(2*Kc(j)^2))*du.*Cm; % Συνιστώσα αδράνειας
        F_th=F_drag+F_inertia; % Συνολική θεωρητική
        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% δύναμη
    end
end

```

```

        CD(j)=(3*pi/(4*Kc(j)))*trapz(t,F_th.*u); % Προσαρμοσμένοι
        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% συντελεστές
        CM(j)=(1/(pi^3))*trapz(t,F_th.*du);

F_mor=(1/(Kc(j)^2)*u.*abs(u).*CD(j)+pi/(2*Kc(j)^2)*du*CM(j));
        F_CD=pi/(Kc(j)^2)*u.*abs(u).*CD(j);

        end

end

CD, CM;

```

Εκτίμηση Συντελεστών – Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

```

Kc =logspace(0,2,100);

Beta =196;

t=0.001:0.001:1; % Αδιάστατος χρόνος ταλάντωσης

for i=1:length(Beta)
    for j=1:length(Kc)

        for i=1:length(Beta)
            for j=1:length(Kc)
                u=Kc(j)*sin(2*pi*t); % Αδιάστατη ταχύτητα
                du=2*pi*Kc(j)*cos(2*pi*t); % Αδιάστατη επιτάχυνση
                Re_max=Kc(j)*Beta(i);
                Re=abs(Re_max*sin(2*pi*t)); % Αριθμός Reynolds κατά τη
                %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% διάρκεια της ταλάντωσης

                Cm=2; % Επιλεγμένη σταθερή τιμή του Cm

                % Ημι-εμπειρική σχέση του συντελεστή αντίστασης με τον
                %Reynolds
                Cd=(10./(Re.^0.778)).*(1+(Re.^1.875+0.368e-3*Re.^2.55)./...
                (60+6.8*Re.^1.15+0.4e-14*Re.^3.95))+0.36*(1-exp(-1.2*(10^-
                24)*Re.^4));

                F_drag=1/(Kc(j)^2)*u.*abs(u).*Cd; % Συνιστώσα αντίστασης

```

```

F_inertia=(pi/(2*Kc(j)^2))*du.*Cm; % Συνιστώσα αδράνειας
F_th=F_drag+F_inertia; % Συνολική θεωρητική
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% δύναμη

a=(1/Kc(j)^2)*sum(u.^4); % Συντελεστές της μεθόδου
b=(pi/(2*Kc(j)^2))*sum(u.*abs(u).*du); % τετραγώνων για τον
c=sum(F_th.*u.*abs(u)); % υπολογισμό των συντελεστών
d=(1/Kc(j)^2)*sum(u.*abs(u).*du); % αντίστασης και αδράνειας
e=(pi/(2*Kc(j)^2))*sum(du.^2);
f=sum(F_th.*du);

CD(j)=(b*f-c*e)/(b*d-a*e); % Προσαρμοσμένοι συντελεστές
CM(j)=(d*c-a*f)/(b*d-a*e); % αντίστασης και αδράνειας

F_mor=(1/(Kc(j)^2)*u.*abs(u).*CD(j)+pi/(2*Kc(j)^2)*du*CM(j));
F_CD=pi/(Kc(j)^2)*u.*abs(u).*CD(j);

end

end
CD, CM;

```

Διερεύνηση συντελεστή και εκθέτη ημι-εμπειρικού μοντέλου

```

A=xlsread('Kc_CD_1985.xlsx'); % Εισαγωγή πειραματικών δεδομένων για
B=xlsread('Kc_CD_497.xlsx'); % Kc και Cd για διάφορες τιμές της
C=xlsread('Kc_CD_4480.xlsx'); % παραμέτρου β
D=xlsread('Kc_CD_5260.xlsx');
E=xlsread('Kc_CD_1107.xlsx');
F=xlsread('Kc_CD_3123.xlsx');

Beta =[1985 497 4480 5260 1107 3123];

t=0.01:0.01:1;

coef=50:50:100; % Συντελεστής σχέσης Re_max

for k=1:length(coef)

    ex=0.05:0.05:0.8; % Εκθέτης σχέσης Re_max

    for n=1:length(ex)
        CDmod=[]; % Καθαρισμός των τιμών των πινάκων CDmod και CD
        CD=[];
    end

    for i=1:length(Beta)

        if i==1
            Kc=A(:,1);

```

```

CD_ex=A(:,2); % Με CD_e συμβολίζονται οι πειραματικές τιμές
elseif i==2
Kc=B(:,1);
CD_ex=B(:,2);
elseif i==3
Kc=C(:,1);
CD_ex=C(:,2);
elseif i==4
Kc=D(:,1);
CD_ex=D(:,2);
elseif i==5
Kc=E(:,1);
CD_ex=E(:,2);
else
Kc=F(:,1);
CD_ex=F(:,2);

end

for j=1:length(Kc)

    for i=1:length(Beta)
for j=1:length(Kc)
    u=Kc(j)*sin(2*pi*t); % Αδιάστατη ταχύτητα
    du=2*pi*Kc(j)*cos(2*pi*t); % Αδιάστατη επιτάχυνση
    Re_max=Kc(j)*Beta(i);
    Re=abs(Re_max*sin(2*pi*t)); % Αριθμός Reynolds κατά τη
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%διάρκεια της ταλάντωσης

    Cm=2; % Επιλεγμένη σταθερή τιμή του Cm

    % Ημι-εμπειρική σχέση του συντελεστή αντίστασης με τον
    %Reynolds
    Cd=(10./(Re.^0.778)).*(1+(Re.^1.875+0.368e-3*Re.^2.55)./...
(60+6.8*Re.^1.15+0.4e-14*Re.^3.95))+0.36*(1-exp(-1.2*(10^-
24)*Re.^4));

    F_drag=1/(Kc(j)^2)*u.*abs(u).*Cd; % Συνιστώσα αντίστασης
    F_inertia=(pi/(2*Kc(j)^2))*du.*Cm; % Συνιστώσα αδράνειας
    F_th=F_drag+F_inertia; % Συνολική θεωρητική
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% δύναμη

    a=(1/Kc(j)^2)*sum(u.^4); % Συντελεστές της μεθόδου
    b=(pi/(2*Kc(j)^2))*sum(u.*abs(u).*du); % τετραγώνων για τον
    c=sum(F_th.*u.*abs(u)); % υπολογισμό των συντελεστών
    d=(1/Kc(j)^2)*sum(u.*abs(u).*du); % αντίστασης και αδράνειας
    e=(pi/(2*Kc(j)^2))*sum(du.^2);
    f=sum(F_th.*du);

    CD(j)=(b*f-c*e)/(b*d-a*e); % Προσαρμοσμένοι συντελεστές
    CM(j)=(d*c-a*f)/(b*d-a*e); % αντίστασης και αδράνειας

end

```

```

CDmax=2.5453*10^-8*Beta(i).^2-4.1*10^-4*Beta(i)+2.51;

CDmm=max(CD);

Cdmod1=(CD./max(CD)).*CDmax % Συντελεστής αντίστασης ημι-εμπειρικού
CDmod2=CD+(CDmax-CDmm); % μοντέλου με 2 τρόπους υπολογισμού

CDmo=CDmod1(:); % ή CDmod2

if i==1
    Rms=(sum((CDmo-CD_e).^2))./length(CDmo).^0.5;
elseif i==2
    Rms=(sum((CDmo-CD_e).^2))./length(CDmo)^0.5;
elseif i==3
    Rms=(sum((CDmo-CD_e).^2))./length(CDmo).^0.5;
elseif i==4
    Rms=(sum((CDmo-CD_e).^2))./length(CDmo).^0.5;
elseif i==5
    Rms=(sum((CDmo-CD_e).^2))./length(CDmo).^0.5;
else
    Rms=(sum((CDmo-CD_e).^2))./length(CDmo).^0.5;
end
Er(i)=Rms; % Μέσο τετραγωνικό σφάλμα απόκλισης
% των υπολογισμένων από τις
% μετρημένες τιμές για κάθε β
end

Error(n)=mean(Er); % Μέση τιμή μεταξύ όλων των
% rms για όλα τα β

end

Err(k)=min(Error);
Error;
end

Dev=min(Err)

```


Μέγιστοι C_d για διαφορετικά β , με Reynolds και Kc

```
B=xlsread('CDmax-Kc_Dif_Betas.xlsx');
Beta=B(:,1);
CDmax=B(:,2);
KC=B(:,3);
Re_max=B(:,4);

% plot(Beta,CDmax,'d')
% xlabel('Parameter  $\beta$ ')
% ylabel('Max Drag Coefficients')

plot(Beta,CDmax,'s')
xlabel('Reynolds Number')
ylabel('Max Drag Coefficients')
```