ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ ΚΥΡΑΤΖΟΥΛΗ

ΦΛΩΡΙΝΑ

ΜΑΪΟΣ 2017

Φύλλο εξέτασης

1. Επόπτης: Τσακιρίδου Ελένη

   Βαθμός:_____________

   Υπογραφή : Ημερομηνία:

2. Δεύτερος Βαθμολογητής : Λεμονίδης Χαράλαμπος

   Βαθμός:_____________

   Υπογραφή : Ημερομηνία:

Γενικός βαθμός: ____

Η συγγραφέας βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας κι ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά σε εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή :

Ημερομηνία :

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στο διδακτικό σενάριο που υλοποιήθηκε, κεντρικό θέμα αποτελούσε η έννοια του λόγου και της αναλογίας, κυρίως ποιες στρατηγικές αξιοποιούν οι μαθητές της Στ΄ πριν πραγματοποιηθεί η εισαγωγή στη νέα γνώση και ποιες είναι οι προϋπάρχουσες γνώσεις τους, τις οποίες αξιοποιούν για να επιλύσουν αναλογικές δραστηριότητες.

Οι στόχοι που επιδιώκεται να υλοποιηθούν κατά τη παρέμβαση είναι οι εξής:

- Οι μαθητές να είναι σε θέση να κατασκευάζουν την έννοια του λόγου με πολλαπλασιαστικές ενέργειες.
- Να μπορούν να πραγματοποιούν σμικρύνσεις σχημάτων, διατηρώντας τη φόρμα του σχήματος και αποφεύγοντας τις προσθετικές ενέργειες.
- Να κατανοούν την έννοια του λόγου ως σημαντική για μια οικογένεια ζευγών φυσικών αριθμών, που παράγονται μαζί.

Η μέθοδος που αξιοποιήθηκε για τη συλλογή δεδομένων είναι η «ελεύθερη», άτυπη ή «ανοικτή» μορφή Παρατήρησης Διδασκαλίας. Σε αυτή τη μορφή παρατήρησης, τα δεδομένα συλλέγονται κατά βούληση του παρατηρητή, χωρίς να υπάρχουν συγκεκριμένες κατευθύνσεις και εντολές (Παπαδοπούλου, 2015).

Τα συμπεράσματα, τα οποία προέκυψαν από τα δεδομένα που συλλέχθηκαν, δίνουν πληροφορίες ,τόσο για τις στρατηγικές που οι μαθητές χρησιμοποίησαν, όσο και για την κατανόηση των εννοιών.

Οι στρατηγικές που αξιοποίησαν οι μαθητές στα προβλήματα αναλογίας δεν ήταν οι αναμενόμενες προσθετικές, αλλά αξιοποίησαν πολλαπλασιαστικές ενέργειες κυρίως τη μέθοδο των ισοδύναμων κλασμάτων. Οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης κατανόησαν την έννοια του λόγου και της αναλογίας σχηματικά και μέσα από παραδείγματα. Τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης δεν μπορούν να γενικευτούν, διότι το δείγμα είναι ενδεικτικό και δεν είναι αντιπροσωπευτικό όλων των μαθητών που φοιτούν στη ΣΤ΄ τάξη.

Λέξεις-κλειδιά

Λόγος , αναλογία, ανάλογα ποσά , αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Abstract

The main subject of the teaching proposition was the meaning of ratio and analogy, mostly which strategies are used by the sixth grade students before they enter to the new knowledge and which is the knowledge acquired in the past, that they utilize in order to solve analogical problems.

These are the objects, which will be carried out in this implementation:

- The students will create the notion of ratio by using multiplicative actions.
- They will be able to materialize reduction of shapes, by keeping the form of the shape and avoiding the additive actions.
- They will consider the concept of ratio to be important for a group of couples of nature numbers, which produced together.

The method which has been used in order to collect elements is "free", no typical or "open" type of teaching observation. In this type of observation , the elements are collected in accordance with the observer, without specific guidelines and orders (Papadopoulou, 2015) .

The results emerged by the collected elements, give us information about the strategies having been used by the students and the comprehension of the concepts.

The strategies having been utilized by the students in proportional problems were not the expected additive actions, but they have used multiplicative actions, particularly the method of equivalent fractions. The students of sixth grade understood the concept of ratio and analogy schematically by using examples. The results of the present study cannot be generalized, as the indicative number of students which was the sample and is not representative of the total number of students who study at the sixth grade.

Keywords

Ratio, analogy , proportional amounts, inversely proportional amounts

Πρόλογος

Το θέμα προέκυψε σε συνεργασία με τον επιβλέποντα καθηγητή. Η διαδικασία της παρέμβασης υλοποιήθηκε στα πλαίσια ενός Δημοτικού Σχολείου της Φλώρινας. Το πρόγραμμα ολοκληρώθηκε με την πολύτιμη συνεργασία του διευθυντή του σχολείου, του δασκάλου της τάξης και των συμφοιτητριών μου που διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στο συντονισμό και στην καταγραφή των αποτελεσμάτων της ερευνητικής διαδικασίας.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διευθυντή του 6ου Δημοτικού Σχολείου Φλώρινας κ. Λυγούρα και τον δάσκαλο της Στ2 τάξης κ. Φωτιάδη Κωνσταντίνο για την παραχώρηση των απαραίτητων διδακτικών ωρών για τη διεκπεραίωση της παρέμβασης.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τις συμφοιτήτριες μου Καδρέφτση Ιωάννα, Κυμπρικτσή Κατερίνα, Μαθιουδάκη Όλγα, Μπάκα Χριστίνα, Μπαραμπάνη Φανή, Νέστορα Ιουλία και Τάτσιου Ευθυμία για τη πολύτιμη συμβολή τους στο πρόγραμμα παρέμβασης.

Οι έννοιες του λόγου και της αναλογίας σε μαθητές Δημοτικού

Ο λόγος αποτελεί ένα βασικό θέμα του Αναλυτικού Προγράμματος των Μαθηματικών. Η οικοδόμηση της έννοιας του λόγου είναι σημαντική προκειμένου να δομηθεί στη συνέχεια η έννοιας της αναλογίας, που κατέχει καίρια θέση, όχι μόνο στα Μαθηματικά, αλλά και στον κλάδο των Φυσικών Επιστημών. Μέσω των κλασμάτων, γίνεται η προσέγγιση του λόγου σε όλες τις τάξεις στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και με τα ποσοστά προσεγγίζεται στην Στ' τάξη. Η έννοια της αναλογίας εισάγεται στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου σε προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Εξελίσσεται στην πορεία μέσα από καταστάσεις ισοδυναμίας ή σύγκρισης κλασμάτων, για να φτάσουν να αναπτυχθούν αλγεβρικές σχέσεις, σχέσεις τριγωνομετρίας και θεωρίας πιθανοτήτων (Παπαγεωργίου & Χρίστου, 1999). Παρόλο που η έννοια της αναλογίας εμφανίζεται αρκετά νωρίς, οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες. Από τους Post, Behr και Lesh το 1988 διατυπώθηκε ότι είναι λίγοι οι μαθητές που κάνουν σωστή χρήση του αναλογικού συλλογισμού στη μέση και στην ανώτερη εκπαίδευση (Ηροδότου, Ιωάννου, Κοντογιάννη, Γαγάτσης, 2006).

Η αναλογία αποτελείται από μια ισοδυναμία δύο λόγων (π.χ . $α/β = γ/δ$). Η σχέση μεταξύ αυτών των τεσσάρων στοιχείων διαμορφώνει και το είδος της στρατηγικής, που θα αξιοποιηθεί για να λυθούν τα προβλήματα. Οι σχέσεις αυτές μπορούν να αποτελούν σχέσεις ομοειδών ποσοτήτων και η μια ποσότητα μεταβάλλεται και χαρακτηρίζονται ως σχέσεις «εντός». Από την άλλη πλευρά, στις σχέσεις «εκτός» υπάρχει η σύνδεση ποσοτήτων διαφορετικού είδους, που επιφέρει τη δημιουργία μιας νέας έννοιας. Οι διαδικασίες αυτές αποτελούν τις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων αναλογίας (Ηροδότου, Ιωάννου και συν. 2006).

Η έννοια της αναλογίας εισάγεται με τη μέτρηση ποσοτήτων, με την έννοια του λόγου και με τη μέθοδο του εσωτερικού γινομένου στο Δημοτικό Σχολείο. Υποστηρίζεται ότι η μαθηματική αναλογική σκέψη αποτελεί απλώς την ικανότητα επίλυσης τυπικών αναλογικών έργων (Μοδέστου & Γαγάτσης, 2009).

Πολλές έρευνες στην ψευδαίσθηση της αναλογίας υπέδειξαν πως η μαθηματική αναλογική σκέψη δεν είναι δυνατό να ισχύει απόλυτα. Οι μαθητές ανεξαρτήτου ηλικίας δεν μπορούν να διακρίνουν τα αναλογικά από τα μη αναλογικά προβλήματα, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούν αναλογικές στρατηγικές για την επίλυση μη αναλογικών προβλημάτων. Αυτό αντανακλάται και στο παράδειγμα, στο οποίο οι μαθητές θεωρούν πως διπλασιάζεται το εμβαδόν ενός τετραγώνου όταν διπλασιάζονται οι πλευρές του (Modestou & Gagatsis, 2007).

Πολλά λάθη στο χώρο των Μαθηματικών προκύπτουν από τη τάση να εφαρμόζεται η γραμμική συνάρτηση σε όλες τις καταστάσεις. Αυτές οι γραμμικές σχέσεις αποτελούν ένα βασικό μοντέλο, με το οποίο είναι δυνατή η προσέγγιση των πρακτικών και θεωρητικών προβλημάτων στα Μαθηματικά και την Επιστήμη. Ο αναλογικός συλλογισμός αποτελεί μέχρι και σήμερα ένα καίριο μαθηματικό εργαλείο για να διαχειριστούν φαινόμενα στη Φυσική, τη Χημεία, τα Οικονομικά, την Αστρονομία και σε άλλα πεδία (Μοδέστου, 2004).

Ο αναλογικός συλλογισμός ορίζεται ως ένα είδος μαθηματικού συλλογισμού, ο οποίος περιλαμβάνει «την ικανότητα ταυτόχρονης επεξεργασίας διάφορων πληροφοριών μέσα από πολλαπλές συγκρίσεις και συν-μεταβολές» (Lesh, Post, Behr, 1988). Εστιάζει στη περιγραφή, τη πρόβλεψη και την αξιολόγηση της σχέσης, που δεν επρόκειτο για σχέση μεταξύ δύο αντικειμένων ή εννοιών αλλά για μια σχέση δευτέρου βαθμού. Ο λόγος αποτελεί σχέση ανάμεσα σε δύο ποσότητες και η κατανόηση της αναλογίας εκφράζει την κατανόηση της σχέσης, που υφίσταται ανάμεσα σε δύο σχέσεις. Στις σχέσεις αναλογίας, οι δύο ποσότητες μεταβάλλονται πολλαπλασιαστικά, αφού και οι δυο ποσότητες πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο παράγοντα. Η γραμμική συνάρτηση που εκφράζει αυτή την αναλογική σχέση αποτελεί μια ευθεία, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων (Μοδέστου, 2004).

Κατά τον αναλογικό συλλογισμό, αναγνωρίζονται και μεταφέρονται δομικές πληροφορίες από μια πηγή σε μια άλλη και πραγματοποιείται η αντιστοίχιση μεταξύ των διαδικασιών, καθώς και των μηχανισμών που χαρακτηρίζουν αυτές τις δύο πηγές. Οι πηγές αυτές μπορεί να αποτελούν έννοιες, θεωρίες ή και προβληματικές καταστάσεις, ενώ τις περισσότερες φορές εντάσσονται σε διαφορετικά πεδία με όμοια δομή. Αποτελεί έτσι την ικανότητα συλλογισμού με μοτίβα, που περιλαμβάνει τον εντοπισμό του μοτίβου, ακόμα και σε πιθανή αλλαγή των στοιχείων του (Μοδέστου, 2007).

Η έννοια του αναλογικού αριθμού εμπλέκει ένα πλούσιο ζεύγος από ενσωματωμένες υποδομές και διαδικασίες, που σχετίζεται με μια ευρεία ποικιλία από βασικές, αλλά γεμάτες νόημα έννοιες (π.χ. μέτρηση, πιθανότητα, συστήματα συνεργασίας, γραφήματα κ.λ.π.) (Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E., 1983).

Σε δύο πειράματα αναπτύχθηκε μια συστατική προσέγγιση της αναλογικής εκπαίδευσης. Τα αποτελέσματα έδειξαν μια σημαντική, θετική επίδραση για να εκπαιδεύσει τους μαθητές σε προφορικά αναλογικά προβλήματα, αλλά δεν έχει καμία επίδραση στην αναλογική κατανόηση των μαθητών (Patricia A, Alexander C, White S, Haensly P, Crimmins - Jeanes M, 1987).

Η τάση των μαθητών να διπλασιάζουν το εμβαδόν ενός τετραγώνου, όταν διπλασιαστούν οι πλευρές του είναι το αποτέλεσμα του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας (Modestou & Gagatsis, 2007.) Αποτέλεσμα επίσης είναι ο αναλογικός τρόπος σκέψης των μαθητών σε σταθερά προβλήματα f(x)= ax. Η Μοδέστου το 2007 προτείνει ένα μοντέλο, στο οποίο η μαθηματική αναλογική σκέψη περιγράφεται καλύτερα με ένα μοντέλο με τρεις διαστάσεις, από τις οποίες η πρώτη διάσταση εντάσσεται στο επίπεδο της ψυχολογίας , η δεύτερη εντάσσεται στο επίπεδο των μαθηματικών, ενώ η τρίτη που σχετίζεται με την μετα-αναλογική ενημερότητα έχει μεταγνωστική φύση. Η φύση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, που σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης μαθηματικών αναλογικών έργων αποτελεί βασικό κομμάτι του μοντέλου της μαθηματικής αναλογικής σκέψης αλλά η ολοκλήρωση του μοντέλου γίνεται με άλλες δύο διαστάσεις, που αναφέρονται στην επίλυση λεκτικών και αριθμητικών αναλογιών, σε ένα πλαίσιο μη μαθητικό (αναλογικός συλλογισμός) καθώς και στην ικανότητα διαχωρισμού και επίλυσης καταστάσεων μη αναλογικών (μετα-αναλογική ενημερότητα).

Κατά τον Ben-Chaim (1998) υπάρχουν τρία διαφορετικά είδη προβλημάτων, στα οποία αξιοποιείται ο αναλογικός συλλογισμός (Ηροδότου, Ιωάννου και συν. 2006.):

Α. Προβλήματα άγνωστης ποσότητας, στα οποία τα τρία στοιχεία είναι γνωστά και το τέταρτο στοιχείο της αναλογίας είναι άγνωστο.

Β. Προβλήματα αριθμητικής σύγκρισης των λόγων της αναλογίας, οι οποίοι γίνονται γνωστοί και απαιτείται μόνο η σύγκριση τους.

Γ. Προβλήματα σύγκρισης και ποιοτικής πρόβλεψης, στα οποία πραγματοποιούνται συγκρίσεις που δεν βασίζονται σε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές.

Ευθέως ανάλογα ποσά ονομάζονται στη περίπτωση που ένα ποσό πολλαπλασιάζεται με ένα κλασματικό αριθμό και το δεύτερο ποσό πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό. (Χατζηκυριάκου, 2013)

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά ονομάζονται στη περίπτωση που ένα ποσό πολλαπλασιάζεται με ένα κλασματικό αριθμό και το δεύτερο ποσό διαιρείται με τον ίδιο αριθμό (Χατζηκυριάκου, 2013). Οι έννοιες των μαθηματικών, όπως οι αναλογίες πρέπει να βασίζονται ή και να περιλαμβάνουν τις άτυπες γνώσεις των μαθητών για να είναι δυνατή η επιτυχής ανάπτυξη τους. Οι άτυπες γνώσεις των μαθητών βοηθούν στην ανάπτυξη των μαθηματικών, όμως πολλές φορές καταλήγουν σε παρανοήσεις. Με τον όρο άτυπα μοντέλα ή γνώσεις εννοούνται οι διαδικασίες, που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές με σκοπό την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, πριν τη διδασκαλία των αντίστοιχων εννοιών (Χρίστου & Φιλίππου, 1999).

Οι μαθητές, χωρίς να έχουν διδαχθεί προβλήματα αναλογίας, αξιοποιούν ήδη μια ποικιλία στρατηγικών για την επίλυση τους. Οι έννοιες του λόγου και της αναλογίας αλληλεπιδρούν με τις έννοιες του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Είναι άγνωστο ποια άτυπα μοντέλα συμπεριλαμβάνονται στις έννοιες του λόγου και της αναλογίας και πως βοηθούν στην επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων αναλογίας (Παπαγεωργίου, Χρίστου, 1999) .

Ο Λόγος εκφράζεται ως η αριθμητική σχέση μεταξύ δυο ποσοτήτων και η αναλογία αποτελεί σχέση μεταξύ δυο λόγων. Στην περίπτωση του λόγου δεν υπάρχει διαχωρισμός μιας ποσότητας ή ενός συνόλου αντικειμένων, όπως συναντάται στον ορισμό του μέρους- όλου και του πηλίκου. Οι αναλογικές σχέσεις εκφράζονται με τη σύνδεση δυο λόγων. Οι όροι των δύο λόγων κατατάσσονται ανά δυο σε διαφορετικούς μετρικούς χώρους και η στρατηγική, που θα αξιοποιηθεί για την επίλυση των προβλημάτων αναλογίας συνδέεται με το είδος των σχέσεων, οι οποίες λαμβάνουν χώρα εντός ή ανάμεσα σε αυτούς τους χώρους. Η επιλογή στρατηγικής επηρεάζεται άμεσα από το είδος του προβλήματος και από τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των αριθμητικών δεδομένων. Έχει παρατηρηθεί πως οι μεγαλύτεροι μαθητές αξιοποιούν πιο συχνά την «εντός» στρατηγική παρά την «εκτός» (Μοδέστου & Γαγάτσης, 2009). Οι μαθητές χρησιμοποιούν πολλές στρατηγικές άτυπα για να επιλύσουν προβλήματα αναλογίας χωρίς να έχουν διδαχθεί τις έννοιες. Αυτό έχει τις ρίζες του στις αναπαραστάσεις που έχουν οικοδομήσει οι μαθητές για την έννοια αυτή και υποδηλώνει πως οι μαθητές κατέχουν γνώσεις. Η εύρεση στρατηγικών επίλυσης στηρίζεται στην κατανόηση της εμπλοκής του πολλαπλασιασμού στην έννοια της αναλογίας.

Το κλάσμα, όταν αντιμετωπίζεται σαν λόγος:

Εννοείται η έννοια της σύγκρισης δύο ποσοτήτων. Οι μαθητές καλούνται να αντιληφθούν την έννοια των σχετικών ποσών, προκειμένου να κατανοήσουν πλήρως την έννοια των κλασμάτων ως αναλογίας. Πρέπει να αντιληφθούν πως δυο ποσότητες, που σχετίζονται αναλογικά, μεταβάλλονται μαζί – πολλαπλασιάζονται ή διαιρούνται – ώστε η σχέση τους να παραμένει αμετάβλητη (Γαγάτσης, Ιωάννου, Σιημητρά - Κωνσταντίνου & Χριστοδουλίδου, 2006).

Υπάρχουν τρεις καίριες μορφές άτυπων στρατηγικών, που οι μαθητές αξιοποιούν για την επίλυση προβλημάτων αναλογίας: της επαναληπτικής πρόσθεσης ή αφαίρεσης (ΕΠ), της σύντομης επαναληπτικής πρόσθεσης ή αφαίρεσης (ΣΕΠ) και της αναγωγής στη μονάδα (ΑΣΜ) (Παπαγεωργίου & Χρίστου, 1999). Στην επαναληπτική πρόσθεση ή αφαίρεση γίνεται η επανάληψη μιας απλής πράξης πρόσθεσης ή αφαίρεσης. Η σύντομη μορφή επαναληπτικής πρόσθεσης ακολουθεί τα βήματα της επαναληπτικής πρόσθεσης ή αφαίρεσης, χρησιμοποιώντας στη θέση τους την πράξη του συμπληρωματικού πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης (Χρίστου & Φιλίππου, 1999). Η αναγωγή στη μονάδα θεωρείται η πιο αποδοτική μέθοδος εφόσον υποδηλώνει την κατανόηση της έννοιας του λόγου (Παπαγεωργίου, Χρίστου, 1999). Βασίζεται στις διαδικασίες της επαναληπτικής πρόσθεσης ή αφαίρεσης, όμως η διαίρεση σε αυτή την περίπτωση ταυτίζεται με την έννοια του μερισμού.

Οι δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της δομής της έννοιας της αναλογίας διακρίνονται σε τρεις περιπτώσεις (Παπαγεωργίου, Χρίστου, 1999) :

Η πρώτη περίπτωση δυσκολιών, αφορά την κατανόηση της ποιοτικής σχέσης της έννοιας μεταξύ των συνισταμένων της, με αποτέλεσμα οι μαθητές να αγνοούν τα αριθμητικά δεδομένα και να αξιοποιούν φράσεις του τύπου «περισσότερο» ή «λιγότερο» (Παπαγεωργίου, Χρίστου, 1999).

Στη δεύτερη περίπτωση δυσκολιών, η έννοια της αναλογίας εκλαμβάνεται ως μερικώς ποσοτική σχέση. Οι δυσκολίες αυτές προκύπτουν από την έλλειψη ικανότητας αντίληψης των στοιχείων της αναλογίας και της διάταξης τους, που είχε ως αντίκτυπο τη χρήση μόνο ορισμένων πληροφοριών. Σε αυτή τη φάση οι μαθητές αξιοποιούν στρατηγικές επικέντρωσης, αφού εστιάζουν τη προσοχή τους σε ορισμένες ποσοτικές σχέσεις (Παπαγεωργίου, Χρίστου, 1999).

Η τρίτη περίπτωση δυσκολιών, εμφανίστηκε λόγω της ύπαρξης μιας ποσοτικής προσθετικής σχέσης στη δομή της αναλογίας. Οι μαθητές αυτοί μπορούν να ξεχωρίζουν όλες τις ποσότητες , να δημιουργούν μονάδες και να προσδιορίζουν τη ζητούμενη ποσότητα, αλλά αδυνατούν να αντιληφθούν τη συσχέτιση αυτών των ποσοτήτων πολλαπλασιαστικά και έτσι να αξιοποιούν τη προσθετική στρατηγική στην επίλυση προβλημάτων αναλογίας και να καταλήγουν στην εύρεση ποσοτικών διαφορών μεταξύ των αριθμητικών δεδομένων. Η στρατηγική αυτή εφαρμόζεται διαισθητικά και στηρίζεται σε εμπειρίες προσθετικών διαφορών (Μοδέστου, 2004).

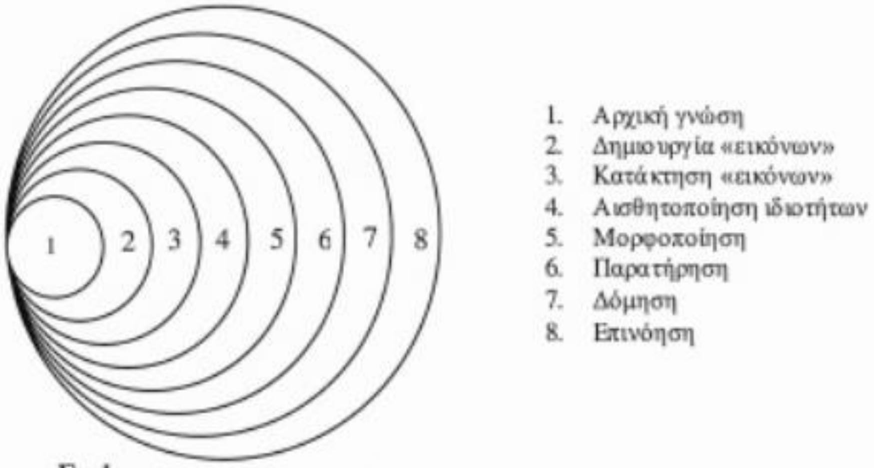
Η πολλαπλασιαστική μορφή μιας αναλογικής σχέσης δημιουργεί διαφορετικές δυσκολίες, που προέρχονται από το βαθμό κατανόησης των σχέσεων πρώτης και δεύτερης τάξης που συνυπάρχουν σε μια αναλογία (Παπαγεωργίου, Χρίστου, 1999).

Έγινε προσπάθεια να αναλυθούν οι ψυχολογικοί και οι εκπαιδευτικοί παράγοντες, που ωθούν τους μαθητές να επιλύουν με αναλογικό τρόπο μη αναλογικά προβλήματα. Το φαινόμενο της ψευδοαναλογίας επεξηγείται μέσα από τις μαθηματικές εμπειρίες των μαθητών, δηλαδή όσες έχουν αποκομίσει από την τάξη των μαθηματικών, από το γραμμικό μοντέλο και από τις μαθηματικές δραστηριότητες, που παρουσιάζουν γραμμικά λάθη (Μοδέστου, 2004).

Σύμφωνα με τον Δημητρίου (1993) η εμφάνιση της αναλογικής σκέψης πραγματοποιείται στην ηλικία των 11-12 ετών, ως αντίληψη των αναλογικών σχέσεων διαισθητικά , ειδικότερα σε προβλήματα ισοδύναμων τάξεων μεταξύ των όρων του, για παράδειγμα 2/4 και 4/8 (Παπαγεωργίου, Χρίστου, 1999).

Ο Kieren (1981) έχει ταυτοποιήσει και συζητήσει τις τέσσερις φάσεις της στελέχωσης της μαθηματικής γνώσης. Αυτές σχετίζονται με τη μαθηματική, οπτική, αναπτυξιακή, γνωστική και συμβολική φύση των μαθηματικών , μαθαίνοντας μηχανισμούς. Τέσσερις μαθηματικές υποκατασκευές του αναλογικού αριθμού αποτελούν το μέτρο , το πηλίκο, η αναλογία και ο τελεστής καθενός, που παρέχει ποσοτική και σχετική αναλογική αριθμητική εμπειρία. Ισότητα και μερισμός είναι δομικοί μηχανισμοί, που χρησιμοποιούνται μέσα από τις τέσσερις υποκατασκευές για να επεκτείνουν εικόνες και να οικοδομήσουν μαθηματικές ιδέες (Mamede , Nunes, Bryant, 2005)

Οι Pirie και Kieren το 1994 αξιοποίησαν ένα μοντέλο κατανόησης των μαθηματικών, το οποίο χαρακτήρισαν ως επαναλαμβανόμενο. Τα στάδια κατανόησης ξεκινούν με την «αρχική γνώση» και καταλήγουν στην «επινόηση» (Γεωργιάδου – Καμπουρίδη, 1999).



Σχ.1

Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα τα σχέδια των παιδιών υποδεικνύουν σε ποιο βαθμό κατανόησαν το λόγο, παρά τις διαφοροποιήσεις, που υπάρχουν στα σχέδια τους. Είναι φυσικό σε μια τάξη «διαφορετικοί άνθρωποι επιτυγχάνουν διαφορετικά επίπεδα κατανόησης των μαθηματικών» (Γεωργιάδου – Καμπουρίδη, 1999).

Ο μαθηματικός και ο αναλογικός συλλογισμός αποτελούν γνωστικές διαδικασίες γι' αυτό και συσχετίζονται και συνδέονται μεταξύ τους και είναι απαραίτητα στοιχεία για την οργάνωση και την οικοδόμηση της εννοιολογικής γνώσης (Μοδέστου, 2007). Η εύρεση μοτίβων μπορεί να αποτελέσει μια σύνδεση ανάμεσα στον μαθηματικό και στον αναλογικό συλλογισμό. Η εύρεση του μοτίβου δεν διαφέρει από την εύρεση της ομοιότητας της δομής ανάμεσα στους όρους μιας τυπικής αναλογίας, που μπορεί να είναι σύμβολα ακόμα και έννοιες. Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να εντοπίζουν την ομοιότητα στη δομή των οπτικών και λεκτικών σχέσεων, ώστε να μπορούν να κατανοήσουν όλες τις σχέσεις που διέπουν μια μαθηματική αναλογία (Μοδέστου, 2007).

Έρευνες

Στην έρευνα του Streefland (1984) για τις ρίζες του λόγου περιγράφει το διδακτικό θέμα «Με το βλέμμα του γίγαντα», με το οποίο τα παιδιά προσέγγισαν τις έννοιες. Διατύπωσε μια θεωρία μάθησης, στην οποία υποστήριξε ότι οι εικόνες, που αντικρίζουν τα παιδιά από τη σύγχρονη πραγματικότητα είναι το πρώτο στάδιο στην οικοδόμηση των εννοιών του λόγου και της αναλογίας. Ακόμη θα πρέπει να υπάρξουν δραστηριότητες, που να ανταποκρίνονται σε διάφορα είδη του λόγου και να προκύπτουν με αυτό τον τρόπο συνδέσεις με άλλες έννοιες. Για να επιτευχθεί λοιπόν αυτό, τα διάφορα μοντέλα , οι κατασκευές και οι διαδικασίες, τα οποία έχουν δημιουργηθεί από τα παιδιά, θα πρέπει να θεμελιώνουν μέσα από την εξέλιξη τους όλη τη πορεία της μάθησης (Γεωργιάδου – Καμπουρίδη, 1999).

Στην έρευνα της Hart το 1988, στην οποία συμμετείχαν μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ηλικίας 11 εώς 16 ετών, διαπιστώθηκε ότι πολλά παιδιά αξιοποίησαν την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση αντί του πολλαπλασιασμού για την επίλυση προβλημάτων του λόγου και της αναλογίας. Δυσκολίες υπήρξαν στη μεγέθυνση σχημάτων σε περιπτώσεις, που ο λόγος ήταν διαφορετικός από 2:1. (Γεωργιάδου – Καμπουρίδη, 1999).

Ο Zhe Chen (1995) διεξήγαγε μια σειρά πειραμάτων για να ανακαλύψει, αν τα άτομα μπορούν να λύσουν προβλήματα μεταφέροντας εννοιολογικές πληροφορίες, που αποκτήθηκαν από σχήματα και για να εξηγήσουν τους μηχανισμούς, που αναπτύσσονται σε αυτή τη διαδικασία. Τα αποτελέσματα έδειξαν τη αξία της ομοιότητας – συγκεκριμένα επιφανειακής και ομοιότητας εγχειρήματος – μεταξύ ενός σχήματος και του προβλήματος, που καθορίζεται.

Οι De Bock et al., (1998, 2002b) αποκάλυψαν την τάση μαθητών ηλικίας 12 με 16 ετών να εφαρμόζουν μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό σε μη αναλογικά προβλήματα εμβαδού. Η παροχή εικόνων δεν επηρέασε τις επιδόσεις των μαθητών, αφού χρησιμοποίησαν μαθηματικούς τύπους (Μοδέστου , 2004).

Σύμφωνα με τον Κωνσταντίνο Χρίστου και τον Γιώργο Φιλίππου το 1999, στα πλαίσια μελέτης στο Πανεπιστήμιο Κύπρου, στο τμήμα των Επιστημών της Αγωγής, εξακριβώθηκε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν σχέσεις αναλογιών, πριν ακόμα διδαχθούν προβλήματα αναλογίας. Ήδη από την επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, οι μαθητές έχουν διαμορφώσει ένα μοντέλο επίλυσης προβλημάτων αναλογίας. Οι μαθητές αξιοποίησαν πολλαπλασιαστικές ή προσθετικές στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων αναλογίας. Στις πολλαπλασιαστικές στρατηγικές ανήκουν η αναγωγή στη μονάδα, που προϋποθέτει την κατανόηση ορισμένων δομών αναλογίας, η μέθοδος των τριών και η μέθοδος των ισοδύναμων κλασμάτων. Στις προσθετικές στρατηγικές, εννοείται η στρατηγική της επαναληπτικής πρόσθεσης, κατά την οποία προκύπτουν κλάσεις ισοδυναμίας και ζεύγη. Οι μαθητές, που δεν σκέφτονται με τον αναλογικό τρόπο σκέψης υιοθετούν τις προσθετικές στρατηγικές, στις οποίες δεν εμπλέκονται πολλαπλασιαστικές διαδικασίες. Οι μαθητές, που συμμετείχαν στην έρευνα αξιοποίησαν μια πληθώρα λύσεων, λόγω της δομής των προβλημάτων αναλογίας.

Στη μελέτη του Κωνσταντίνου Χρίστου και της Ελένης Παπαγεωργίου το 1999, διερευνήθηκε ο βαθμός κατανόησης της έννοιας της αναλογίας από τους μαθητές της Ε΄ και της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου και οι στρατηγικές, που αξιοποιούν για την επίλυση προβλημάτων αναλογίας. Συμπερασματικά, διαπιστώθηκε πως οι μαθητές αξιοποιούν διαφορετικές στρατηγικές, ανάλογα με τη μορφή του προβλήματος και των αριθμών του προβλήματος. Χρησιμοποίησαν περισσότερο την αναγωγή στη μονάδα, επειδή είχαν έρθει νωρίτερα σε επαφή με προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Σύμφωνα με την πειραματική προσέγγιση της Βαρβάρας Γεωργιάδου –Καμπουρίδη το 1999, στο Πανεπιστήμιο Πατρών, η έννοια του λόγου εκλαμβάνεται διαισθητικά από τους μαθητές, ενώ στη πορεία οι μαθητές οδηγούνται στη συνειδητοποίηση της. Επιπλέον, θα ήταν δυνατό η διδασκαλία του να συνδεόταν με τα κλάσματα, τους δεκαδικούς αριθμούς, τα ποσοστά και τις κλίμακες για τη καλύτερη κατανόηση του. Η διδακτική αυτή παρέμβαση στόχευε στη διερεύνηση της αντίληψης της έννοιας του λόγου από τα οκτάχρονα παιδιά. Έτσι η δασκάλα – ερευνήτρια χρησιμοποίησε την ιστορία ενός γίγαντα και ενός φούρναρη και επεδίωξε τη δημιουργία μιας ανοιχτής μαθησιακής κατάστασης. Τα παιδιά αναπαρίσταναν σκηνές της ιστορίας σε ζωγραφιές και με αυτό τον τρόπο δόθηκαν στοιχεία για τους διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης της έννοιας του λόγου. Μέσα από συζητήσεις με την εκπαιδευτικό-ερευνήτρια προέκυψαν και στοιχεία για την εξέλιξη των αντιλήψεων των παιδιών, όσον αφορά την συγκεκριμένη έννοια. Η πειραματική διδακτική προσέγγιση έλαβε χώρα σε ένα 12θέσιο σχολείο της Πάτρας και συγκεκριμένα σε μια τρίτη τάξη για δύο διδακτικές ώρες. Σε πρώτη φάση, έγινε η κατασκευή της ιστορίας με τη βοήθεια των παιδιών και στη συνέχεια, έγιναν συζητήσεις, συγκρίσεις και συσχετισμοί και διαμορφώθηκε η ιστορία μέσα από εκτιμήσεις μεγεθών. Σε δεύτερη φάση, οι μαθητές επέλεξαν την αγαπημένη τους σκηνή από την ιστορία και έγιναν διάλογοι και συζητήσεις με την εκπαιδευτικό-ερευνήτρια (Γεωργιάδου – Καμπουρίδη, 1999).

Οι Γαγάτσης, Ηροδότου, Ιωάννου, Κοντογιάννη το 2006, από το τμήμα Επιστημών της Αγωγής του Πανεπιστημίου Κύπρου, διερεύνησαν τη σχέση ανάμεσα στα λεκτικά και αριθμητικά προβλήματα αναλογίας και τις στρατηγικές, που αξιοποιούν οι Κύπριοι μαθητές της Ε’ και της Στ’ Δημοτικού και κατέληξαν πως οι μαθητές αξιοποιούν διαφορετικές στρατηγικές. Οι μαθητές και των δύο τάξεων επιλέγουν την εύρεση του παράγοντα αλλαγής, ενώ οι μαθητές της Στ’ αξιοποιούν επιπλέον και τη μέθοδο των τριών.

Οι εικόνες από τη σύγχρονη πραγματικότητα είναι το πρώτο στάδιο για την κατανόηση των εννοιών του λόγου και της αναλογίας. Οι μαθητές αξιοποιούν πολλαπλασιαστικές ή προσθετικές στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων αναλογίας, ανάλογα με τη μορφή του προβλήματος και των αριθμών του προβλήματος, είτε είναι αριθμητικό είτε λεκτικό. Η διδασκαλία του λόγου πρέπει να συνδέεται με τα κλάσματα, τους δεκαδικούς αριθμούς, τα ποσοστά και τις κλίμακες για τη καλύτερη κατανόηση του. Στη Στ΄ τάξη οι μαθητές αξιοποιούν και τη μέθοδο των τριών για την επίλυση αναλογικών προβλημάτων. Σημαντική είναι η διαθεματικότητα, ώστε οι μαθητές να συνδέσουν την έννοια της αναλογίας με εμπειρίες της καθημερινής ζωής.

Η Θέση του Λόγου και της Αναλογίας στο ΔΕΠΠΣ

Στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) προβλέπεται πως η διδασκαλία των λόγων και των αναλογιών πραγματοποιείται μόνο στη ΣΤ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου.

Οι γενικοί στόχοι που έχουν τεθεί είναι :

η αναγνώριση της απλής μεθόδου των τριών και η κατανόηση και η εφαρμογή των εννοιών του λόγου, της αναλογίας και του ποσοστού. Η προσέγγιση των ανάλογων ποσών γίνεται με την μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.

Οι επιμέρους στόχοι που έχουν τεθεί είναι :

- η αναγνώριση της έννοιας του λόγου και της αναλογίας και η εύρεση του άγνωστου όρου μιας αναλογίας με τη μέθοδο «χιαστί»,
- η αναγνώριση της έννοιας του ποσοστού ως λόγου, ως πηλίκου και ως δεκαδικού,
- η ικανότητα να επιλύουν απλά προβλήματα ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών.

Η διδασκαλία του λόγου και των αναλογιών πραγματοποιείται μέσα από την 3η θεματική ενότητα του σχολικού βιβλίου της ΣΤ’ που περιλαμβάνει τα εξής κεφάλαια:

30. Σου δίνουμε τον… λόγο μας (Λόγος δύο μεγεθών).

31. Από τον λόγο στην αναλογία… τι γλυκό! (Από τους λόγους στις αναλογίες).

32. Αναλογία; Χιαστί θα βρω το x! (Αναλογίες).

33. Εκφράζομαι …. ακριβώς ! (Σταθερά και μεταβλητά ποσά).

34. Όταν ανεβαίνω… ανεβαίνεις (Ανάλογα ποσά).

35. Η εύκολη λύση! (Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά).

36. Μαζί δεν κάνουμε και χώρια δεν μπορούμε! (Αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα ποσά).

37. Παίρνοντας αποφάσεις ! (Λύνω προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά).

38. Η απλή μέθοδος των τριών (Η απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά).

39. Είναι απλό όταν ξέρω τις τρεις τιμές! (Η απλή μέθοδος των τριών στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά).

40. Συγκρίνω πο(σωστά) % (Εκτιμώ το ποσοστό).

41. Παίζοντας με τα ποσοστά (Βρίσκω το ποσοστό).

42. Ποσοστά της αλλαγής (Λύνω προβλήματα με ποσοστά : Βρίσκω την τελική τιμή).

43. Από πού έρχομαι; (Λύνω προβλήματα με ποσοστά : Βρίσκω την αρχική τιμή).

44. Για να μη λέμε πολλά… (Λύνω προβλήματα με ποσοστά : Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό).

Σε αυτά τα κεφάλαια αποσαφηνίζονται τα εξής:

Λόγος, αναλογία, σταυρωτά γινόμενα, ποσά : σταθερά και μεταβλητά, ανάλογα ποσά, αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα ποσά, διαδικασία αναγωγής στη μονάδα, σχηματισμός αναλογίας, απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά, απλή μέθοδος των τριών στα αντίστροφα ποσά, ποσοστά, διαδικασία εύρεσης της τελικής τιμής, διαδικασία εύρεσης της αρχικής τιμής, διαδικασία εύρεσης του ποσοστού στα εκατό.

Το ΔΕΠΠΣ Μαθηματικών προτείνει ορισμένες ενδεικτικές δραστηριότητες:

Τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά να προσεγγιστούν με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.

Συλλογή πληροφοριών και συζήτηση για τις διατροφικές ανάγκες των παιδιών (ποσοστά, θερμίδες, θρέψη, καταναλωτής, υγεία) και με διαθεματικότητα θα προκύψουν συνδέσεις με τα μαθήματα της Κοινωνικής και Πολιτικής Αγωγής, των Φυσικών και της Γλώσσας.

Δραστηριότητες με προεκτάσεις:

«Ισότητα των φύλων»: Εφαρμογή της αναλογίας σε ένα τόσο σημαντικό θέμα, όπως είναι η Δημοκρατία και άνοιγμα σε άλλες θεματικές περιοχές. Προκύπτει σύνδεση με το μάθημα της Κοινωνικής και Πολιτικής Αγωγής με την ενότητα 1 της 2ης θεματικής ενότητας «Κράτος και Πολίτευμα».

«Αγωγή Υγείας»: Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα των σφυγμών ως δείκτης της καλής φυσικής κατάστασης του ατόμου. Επίσης, μπορεί να συζητηθεί η χρησιμότητα των ανάλογων ποσών στο κλάδο της ιατρικής για τους ποικίλους δείκτες στο αίμα και για τις μετρήσεις δοσολογίας φαρμάκων και άλλα συναφή ζητήματα. Προκύπτει σύνδεση με το μάθημα των Φυσικών με την ενότητα 8 «Κυκλοφορικό».

«Ποσοστά στον τύπο»: Οι μαθητές συνδέουν τα ποσοστά με δραστηριότητες οικονομικές και κοινωνικές. Προκύπτει σύνδεση με το μάθημα της Κοινωνικής και Πολιτικής Αγωγής με την ενότητα 4 της 1ης θεματικής ενότητας «Οργάνωση κοινωνικής και πολιτικής ζωής».

«Ποσοστά της καρδιάς»: Θα προκύψουν συνδέσεις των ποσοστών με αξιοπερίεργα φαινόμενα της φύσης. Βλέποντας το ποσοστό μείωσης στα εκατό των παλμών κάθε ζώου, τα παιδιά θα υπολογίσουν ποια είναι η μείωση των παλμών, ώστε να βρουν τους καρδιακούς παλμούς, όταν το ζώο είναι σε κατάδυση. Προκύπτει σύνδεση με το μάθημα το μάθημα των Φυσικών με την ενότητα 8 «Κυκλοφορικό».

Ερευνητικές υποθέσεις

Σε αυτή την εργασία θα γίνει προσπάθεια να απαντηθούν τα εξής ερωτήματα:

- Ποιες στρατηγικές αξιοποιούν οι μαθητές όταν λύνουν αριθμητικά προβλήματα αναλογίας;
- Σε ποιο βαθμό κατανοούν οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης την έννοια της αναλογίας;

Τα ερευνητικά αυτά ερωτήματα απαντήθηκαν στη διαδικασία της παρέμβασης:

Οι στρατηγικές, που αξιοποίησαν οι μαθητές στα προβλήματα αναλογίας δεν ήταν οι αναμενόμενες προσθετικές αλλά αξιοποίησαν πολλαπλασιαστικές ενέργειες. Σύμφωνα με την έρευνα της Hart το 1988, πολλά παιδιά εμφάνισαν δυσκολίες στη μεγέθυνση σχημάτων και αξιοποίησαν τη επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.

Οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης κατανόησαν την έννοια της αναλογίας σχηματικά και με τη χρήση παραδειγμάτων ήρθαν σε επαφή με τις ιδιότητες της αναλογίας. Επιπλέον, μέσα από τη παρατήρηση των εικόνων με σκοπό να επιλέξουν τη σωστή σμίκρυνση της Μόνα Λίζα, έγινε αντιληπτό πως οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν καθόλου ακόμα και εμπειρικά να εντοπίσουν τη σωστή σμίκρυνση, χωρίς να καταφύγουν σε μετρήσεις. Σύμφωνα με τον Steefland το 1984 οι εικόνες, που αντικρίζουν τα παιδιά από τη σύγχρονη πραγματικότητα είναι το πρώτο στάδιο στην οικοδόμηση των εννοιών του λόγου και της αναλογίας.

Μέθοδος

Διεκπεραιώθηκε ένα διδακτικό σενάριο πάνω στη διδασκαλία του λόγου και της Αναλογίας σε μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού, που δεν είχαν διδαχθεί από πριν τη συγκεκριμένη διδακτική ενότητα. Αυτό το πρόγραμμα παρέμβασης εφαρμόστηκε στους μαθητές της ΣΤ΄ τάξης του $6^{ου}$ Δημοτικού Σχολείου Φλώρινας, στο οποίο ακολουθήθηκε η απλή καταγραφή του τρόπου σκέψης των μαθητών. Εξετάστηκαν οι γνώσεις, που κατείχαν οι μαθητές πάνω στην έννοια της σμίκρυνσης και της μεγέθυνσης. Αξιοποιήθηκε η «ελεύθερη», άτυπη ή «ανοικτή» μορφή Παρατήρησης Διδασκαλίας, που αποτελεί την πιο απλή μέθοδο για τη συλλογή δεδομένων. Σε αυτή τη μορφή παρατήρησης, προσλαμβάνονται, κατατάσσονται, ταξινομούνται και στη πορεία αναλύονται και ερμηνεύονται τα δεδομένα κατά βούληση του παρατηρητή, χωρίς να περιορίζεται ακολουθώντας προκαθορισμένες εντολές (Παπαδοπούλου, 2015).

Συμμετέχοντες

Το κοινωνικο-πολιτισμικό κεφάλαιο των μαθητών δεν διέφερε σημαντικά μόνο η μαθήτρια Η. είχε διαφορετικό πολιτισμικό κεφάλαιο. Η συγκεκριμένη μαθήτρια δεν διαθέτει επίθετο ελληνικής καταγωγής. Στο πρόγραμμα συμμετείχαν 20 μαθητές ηλικίας 11 ετών, αγόρια και κορίτσια που φοιτούσαν στη ΣΤ΄ τάξη. Η τάξη επιλέχθηκε, διότι στη Στ΄ διδάσκεται η έννοια του λόγου και της αναλογίας στην ενότητα 3, ενώ στην Ε΄ τάξη οι μαθητές είχαν έρθει σε επαφή με την έννοια της σμίκρυνσης και της μεγέθυνσης. Το σχολείο επιλέχθηκε, λόγω της συνεργασίας του με το Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας στα πλαίσια της πρακτικής άσκησης. Ο συνολικός αριθμός των μαθητών αποτέλεσε ένα σημαντικό παράγοντα επιλογής του συγκεκριμένου τμήματος.

Το ζητούμενο ήταν η παρατήρηση του τρόπου σκέψης των μαθητών και ο εντοπισμός των ομοιοτήτων και των διαφορών στον τρόπο σκέψης τους. Οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά αλλά και ομαδικά σε ορισμένες εργασίες. Οι μαθητές, όσον αφορά την ομαδική εργασία δεν συζήτησαν αρκετά με τους συμμαθητές τους και αυτό οφείλεται, στο ότι έχουν συνηθίσει να εργάζονται ατομικά. Ορισμένες συζητήσεις, που έγιναν μεταξύ των μαθητών σε ομαδικό επίπεδο δεν χαρακτηρίστηκαν από επιχειρηματολογία και επιμονή στην άποψη τους.

Μέσα συλλογής δεδομένων

Τα δεδομένα που προέκυψαν από τη παρέμβαση συλλέχθηκαν με απλή καταγραφή και προέκυψαν από τις απαντήσεις, που έδωσαν οι μαθητές στο χαρτί. Δόθηκαν στους μαθητές κόλλες Α4 και έλυσαν τις ασκήσεις. Οποιαδήποτε σκέψη τους, έστω κι αν εκφράστηκε προφορικά, λήφθηκε υπόψη από τις συντονίστριες φοιτήτριες, που τοποθετήθηκαν μία σε κάθε ομάδα μαθητών.

Η παρέμβαση ξεκίνησε με τη παρουσίαση μιας εικόνας, που απεικόνιζε το πάρκο Ντάνξια Σαν και λειτούργησε ως αφόρμηση για τους μαθητές, προκειμένου να κατανοήσουν την αξία της σμίκρυνσης. Ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν την εικόνα και να διαπιστώσουν αν οι πραγματικές διαστάσεις του εικονιζόμενου αντικειμένου είναι αυτές, που παρουσιάζονται στην εικόνα. Οι μαθητές παρατήρησαν την εικόνα και κατανόησαν πως η έκταση του δεν μπορούσε να αποδοθεί στο χαρτί, χωρίς να πραγματοποιηθεί η σμίκρυνση του τοπίου. Έτσι εισήχθη η έννοια της σμίκρυνσης, από τους ίδιους τους μαθητές. Αυτό φανέρωσε και μια προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών για την έννοια της σμίκρυνσης και τη χρησιμότητα της στην αποτύπωση αντικειμένων σε πραγματικές διαστάσεις μιας κόλλας Α4. Οι μαθητές εντυπωσιάστηκαν από τα χρώματα της εικόνας και έγινε αντιληπτό το βάθος και η απέραντη έκταση του πάρκου και η αξία της σμίκρυνσης, που έδωσε τη δυνατότητα να αποδοθεί στις διαστάσεις αυτές.

Στη συνέχεια πραγματοποιούνται οι πρώτες 7 φάσεις, στις οποίες οι ίδιοι μαθητές καλούνται να καταλάβουν τη χρησιμότητα της σμίκρυνσης και τη διαδικασία εύρεσης της αναλογίας, όσον αφορά τις διαστάσεις ενός σχήματος.

Φάση 1

Σμίκρυνση ενός ορθογωνίου (Ατομική έρευνα)

Εισαγωγή στο θέμα

Η εισαγωγική κατάσταση εκκίνησης είναι:

«Παρατηρήστε αυτό το ορθογώνιο και σχεδιάστε το, σμικρύνοντας το σε ένα χαρτί»
Σε αυτή τη φάση ο κάθε μαθητής εργάζεται ατομικά.

Εξέλιξη

Τοποθετείται στον πίνακα ένα ορθογώνιο (όχι με τετραγωνισμένο χαρτί), του οποίου οι διαστάσεις είναι 46εκ. και 23εκ. (διαστάσεις που δεν δίνονται στους μαθητές). Οι αριθμοί επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην έχουν κοινούς διαιρέτες άλλους πέρα του 23 (και του 1),έτσι ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν να τους σμικρύνουν, χωρίς να περάσουν από την έννοια της κλίμακας.

Οι διαστάσεις του τετραδίου δεν επαρκούν για την αναπαραγωγή του ίδιου ορθογωνίου. Ο όρος σχεδιάστε δεν επαρκεί, αλλά είναι ζητούμενο οι μαθητές να τον τροποποιήσουν από τις παρατηρήσεις τους και να πουν «δεν μπορούμε να το σχεδιάσουμε, διότι το χαρτί μας είναι μικρότερο … άρα πρέπει να σχεδιάσουμε σμικρύνοντας».

Οι μαθητές έχουν προσκληθεί να παρατηρήσουν και να σχεδιάσουν (μια σμίκρυνση). Δεν προϋποθέτει κάτι, πέρα από την αναγνώριση του ορθογωνίου από τους μαθητές. Η οπτική, ολιστική εκτίμηση καταλήγει για κάθε μαθητή σε ένα σχέδιο του ορθογωνίου, που τον ικανοποιεί στην πρώτη ματιά.

Φάση 2

Σύγκριση των ορθογωνίων σε σμίκρυνση

Εξέλιξη

Δοθείσα αποστολή «Συγκρίνετε τα σχέδια σας». Σε αυτή τη φάση οι μαθητές υποστηρίζουν την επιλογή τους έναντι της υπόλοιπης ομάδας. Οι μαθητές επιχειρηματολογούν ατομικά.

Παρατηρούν και συγκρίνουν το σχέδιο τους με εκείνο των άλλων συμμαθητών της ομάδας τους.

Μέσα από αυτή την πρώτη αποκέντρωση του καθένα στις δραστηριότητες των άλλων υπάρχει καθολική ανάδυση μιας «ομοιότητας» να σεβαστεί, με αντίληψη των προς αναζήτηση συνθηκών, που σχετίζονται με το μήκος, το πλάτος αλλά με ξεχωριστό τρόπο, χωρίς να τίθενται σε σχέση, ρητά, οι 2 διαστάσεις του ορθογωνίου.

Η προηγούμενη αποστολή ολοκληρώθηκε «διαλέξτε ένα σχέδιο ανά ομάδα». Επιλέχθηκε ένα από κάθε ομάδα, οι μαθητές διαφώνησαν μέχρι να καταλήξουν σε μια κοινή επιλογή. Σε αυτή τη δραστηριότητα, οι μαθητές προσπαθώντας να επιλέξουν εργάζονται ομαδικά.

Η πορεία των μαθητών

Πρόκειται για την επιλογή ενός κριτηρίου, συνειδητό ή μη, ρητό ή μη. Πρόκειται για την ενθάρρυνση σε μια έρευνα με επιχειρήματα, με συζήτηση για να δώσει μια κοινή συμπεριφορά, που τους ικανοποιεί όλους υπό την οπτική γωνία της «ομοιότητας».

Εδώ υπάρχει μια ανταλλαγή, που είναι ανταλλαγή απόψεων της έρευνας – αναζήτησης ενός κοινού κριτηρίου, κοινού κανόνα.

Το κριτήριο επιλογής είναι αποκεντρωμένο από τον καθένα /την καθεμία στους άλλους, πρόκειται για μια επιλογή, της οποίας η επικύρωση δεν μπορεί να αμφισβητηθεί από την ομάδα, στην οποία ανήκει ο μαθητής. Η αναμέτρηση εγώ/οι άλλοι προσανατολίζεται προς μια κοινή γνώμη.

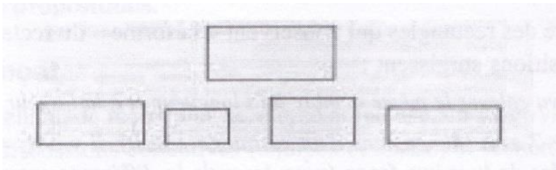
Ωστόσο, ορισμένες ομάδες έχουν την ανησυχία μια αναφοράς στο δοθέν ορθογώνιο (το αντικείμενο μελέτης).

Φάση 3 Από τον εμπειρισμό στο ποσοτικό

Εισαγωγή στο θέμα

Εξέλιξη

Στον πίνακα, τοποθετείται το αρχικό ορθογώνιο, από τον δάσκαλο και από κάτω τα ορθογώνια που επέλεξαν οι ομάδες



Η εντολή είναι *Παρατηρήστε και Συγκρίνετε* τα ορθογώνια, που επιλέχθηκαν από τις ομάδες. Κάθε ομάδα καλείται να δικαιολογήσει την επιλογή της. Σε αυτή την περίπτωση, μπροστά στα ορθογώνια οι μαθητές θα διαπιστώνουν ότι έκαναν λάθος και ότι υπάρχει κάτι άλλο που πρέπει να βρουν, πάνω στο οποίο πρέπει να βασιστούν. Η ομαδική οπτική της επιλογής της κάθε ομάδας τίθεται σε αμφισβήτηση. Περνάμε από ένα «εγώ» υποκειμενικό σε ένα «εμείς» υποκειμενικό, που αποκαλύπτεται ως αναξιόπιστο. Η οπτική του καθένα, αντιμέτωπη με τις οπτικές των άλλων, όλων των άλλων, παραδέχεται την αναποτελεσματικότητά της. Η υποχρέωση έγινε (στον καθένα και σε όλους μαζί) να αποκεντρωθούμε. Είναι το αντικείμενο αυτό καθαυτό (το αρχικό ορθογώνιο), απρόσωπο, αλλά δοθέν σε όλους ως πραγματική κατάσταση (ασυζητητί) που μπορεί να οδηγήσει σε κάτι άλλο… το οποίο θα μεταφραστεί, από κάτι άλλο.

- Ορισμένοι μαθητές προσπαθούν να διορθώσουν το ορθογώνιο της ομάδας τους.
- Άλλοι θέλουν να μετρήσουν τις διαστάσεις του δοθέντος ορθογωνίου.
- Άλλοι θέλουν να μάθουν τις διαστάσεις του δοθέντος ορθογωνίου.

Η αντιπαραβολή πέρασε από το επίπεδο εγώ/οι άλλοι στο επίπεδο εγώ/οι άλλοι/αντικείμενο. Σε αυτή τη φάση, υπάρχει αντίληψη της αδυναμίας του ποιοτικού (ακόμη και όταν είναι ομαδικό) και ανάδυση του περάσματος στο ποσοτικό (αναζητούμε να μετρήσουμε), παρατήρηση και δράση θα οδηγήσουν στους αριθμούς.

Φάση 4

Ανάδυση των υποθέσεων

Εισαγωγή στο θέμα

«Τι πρέπει να κάνεις για να σχεδιάσεις τα κατάλληλα ορθογώνια ?» Οι μαθητές ατομικά προτείνουν ενδεικτικές σμικρύνσεις του αρχικού σχήματος και εντοπίζουν ένα σταθερό κριτήριο δράσης για την δημιουργία της σωστής σμίκρυνσης.

Εξέλιξη

Δηλαδή τα ορθογώνια που διατηρούν το σχήμα «φόρμα» του αρχικού ορθογωνίου. Προτάσεις οι οποίες προκύπτουν:

- Θα αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό από το μήκος και το πλάτος.
- Μεταξύ 7 και 3 (διαστάσεις του ορθογωνίου σε σμίκρυνση) είναι 4. Κάνουμε τα ορθογώνια με τον ίδιο τρόπο (για τα οποία η διαφορά ανάμεσα στο μήκος και το πλάτος είναι 4). Παράδειγμα 2 και 6, 4 και 8 κ.λπ.

Αυτές οι πρώτες αντιδράσεις των μαθητών χαρακτηρίζουν τις λειτουργικές προσθετικές ενέργειες, είναι σημαντικό να εκφραστούν, για να γίνει καλύτερος ο προσδιορισμός αυτού που θα ακολουθήσει αργότερα. Ο δάσκαλος θα πρέπει να ενθαρρύνει τον σχεδιασμό των προτεινόμενων ορθογωνίων από τους μαθητές για να δουν οι μαθητές τις παραμορφώσεις τους ή όχι.

- Θα διαιρέσουμε 46 και 23 με τον ίδιο αριθμό (παράδειγμα 5) και θα πάρουμε τα αποτελέσματα (δηλαδή τα πηλίκα) 9 και 4.

Είμαστε στη περίπτωση γέννησης τελεστικών υποθέσεων, που προτείνονται από δύο δοθέντες αριθμούς, να βρεθούν δύο άλλοι γεννηθέντες από μια νέα προβληματική. Είναι η πλέον αποφασιστική φάση στην δημιουργία-κατασκευή μιας νέας έννοιας.

Αυτές οι υποθέσεις, που εκπέμπονται από τους μαθητές θα αποτελέσουν τα θεμελιώδη υλικά, με τα οποία ο δάσκαλος θα αναλάβει-όχι για να τα χειριστεί μόνος του- αλλά για να τα στείλει ξανά στην τάξη, να τα θέσει σε επαλήθευση, να τα συγκρίνει…

Φάση 5

Έρευνα μιας αξιόπιστης υπόθεσης

Εισαγωγή στο θέμα

«Τοποθετούνται στον πίνακα τα ζεύγη των φυσικών που επιλέχθηκαν, χύμα:

6 και 3, 9 και 4, 11 και 5, 13 και 7, 8 και 4, 8 και 3…». Δικαιολογείστε, συγκρίνετε, ελέγξτε αυτές τις προτάσεις.

Σε αυτή τη φάση οι μαθητές ατομικά και ομαδικά ελέγχουν τις υποθέσεις τους.

Εξέλιξη

Τώρα υπάρχει ένα συνεχές πήγαινε-έλα με τρόπο επιταχυνόμενο και έντονο από τις ομαδικές συζητήσεις (ομάδες της τάξης) και ατομική έρευνα, ο καθένας θέλοντας να δει, υπολογίσει, ελέγξει, συγκρίνει τα δικά του αποτελέσματα με εκείνα των άλλων και με τις διαστάσεις του δοθέντος ορθογωνίου.

Ο δάσκαλος οφείλει να πιέσει την απαίτηση, για κάθε πρόταση, μέχρι να γυρίσει στο να κάνει, δηλαδή να ζητήσει από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις δικές τους υποθέσεις για να παράγουν περισσότερα ορθογώνια σε σμίκρυνση και να τα συγκρίνουν κάθε φορά με το αρχικό ορθογώνιο (υπό την οπτική της ομοιότητας).

- Αν βγάλουμε 20 από το 46 και το 23, το ορθογώνιο θα είναι 26 και 3 και δεν μοιάζει καθόλου με το δοθέν ορθογώνιο.
- Ψάχνοντας τα πηλίκα του 46 και 23 με το 5, βρίσκουμε 9 και 4. Αυτή η υπόθεση οδηγεί στην έννοια της κλίμακας, δεν μπορεί να λειτουργήσει εδώ, αν δεν εργαστούμε μόνο στους φυσικούς, όπως είναι η περίπτωση μας. Πως μπορούμε να φανερώσουμε το λάθος της συγκεκριμένης λύσης; Ο δάσκαλος κάνοντας έτσι, ξεκινώντας από το 46 και το 23 βρίσκει 9 και 4, αλλά αν από το 9 και 4 θέλαμε να βρούμε το αρχικό ορθογώνιο, πως θα το κάναμε;
  Απάντηση, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε 9 και 4 με το 5 και έχουμε 45 και 20 που δεν είναι κατάλληλα.

Διατύπωση Υποθέσεων
Σε αυτό το σημείο ο δάσκαλος πρέπει να αποδείξει την ικανότητά του όχι για να πει ότι υπάρχει ένα λάθος, αλλά να στείλει τον μαθητή σε μια δραστηριότητα που θα είναι αντιφατική με την λογική, που προτείνεται από τον μαθητή.
Σιγά – σιγά με την απόρριψη ορισμένων υποθέσεων, βλέπουμε τους μαθητές να κατανοούν ότι το μήκος θα είναι το διπλάσιο του πλάτους, προσπαθώντας με τους νέους αριθμούς, σχεδιάζοντας τα αντίστοιχα ορθογώνια, συγκρίνοντας με το ορθογώνιο του πίνακα.
Οι διορθώσεις γίνονται στους φυσικούς αριθμούς, που σημειώθηκαν στον πίνακα, όπου προστίθενται νέα ζεύγη, χωρίς απαραίτητα τον σχεδιασμό των ορθογωνίων- επίσης και ζεύγη που κάνουν μεγέθυνση πχ 30 και 60 και του ζεύγους 1 και 2 που αντιστοιχεί στο μικρότερο δυνατό ορθογώνιο (αν μιλάμε για φυσικούς).

Φάση 6
Αναπαραστάσεις και Διατυπώσεις (Ομαδικά στην Τάξη)
Εισαγωγή στο θέμα

Εξέλιξη
1) Οργάνωση, αναπαράσταση των αποτελεσμάτων.

Ο δάσκαλος σημείωσε όλα τα αποτελέσματα (ώστε να είναι ξεκάθαρο), περισσότεροι τρόποι οργάνωσης των αποτελεσμάτων δίνονται

«απόδειξη των ζευγών των φυσικών, που εκπροσωπούν το κάθε ορθογώνιο».

Απ' όπου η σειρά των ζευγών: 4,2 6,3 8,4 … 46,23.

Ο δάσκαλος μπορεί να εισάγει τις παρενθέσεις για να διακρίνει το κάθε ζεύγος (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (14,7), … (46,23)

Επίσης σε πίνακα

4	6	8	10	14	60	46
2	3	4	5	7	30	23

2) Επεξήγηση, διατύπωση

Το βάρος τίθεται στην αιτιολόγηση των τρόπων αναπαράστασης των σειρών των αριθμών και η επιστροφή στο «πως κάθε φορά αποκτήθηκαν οι αριθμοί». Ερευνήθηκε ο τρόπος σκέψης, με τον οποίο προέκυψαν οι διαστάσεις του κάθε ορθογωνίου.

Η προσθετική γραφή θα πάρει τα πάνω της για ορισμένους

(έβαλα 6 και 3 διότι 3+3=6).

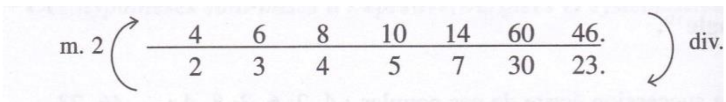
Ο στόχος επιτεύχθηκε όταν όλοι οι μαθητές κατανόησαν το γεγονός ότι

- 2 και 4 διότι 2x2 = 4
- 3 και 6 διότι 3x2 = 6
- 7 και 14 διότι 7x2=14
- 23 και 46 διότι 23x2=46

Η αυξανόμενη αντίληψη ενός αμετάβλητου τελεστή αρχίζει να φαίνεται, πολλαπλασιαστικός τελεστής, διότι κάθε πλάτος βρίσκεται πολλαπλασιαζόμενο με το 2 για να δώσει το αντίστοιχο μήκος.

Ο δάσκαλος σημείωσε ότι 3 πολ.2 =6 η αντιστοιχία, που αποδεικνύεται για όλα τα ζεύγη των φυσικών, που βρέθηκαν.

Έτσι προκύπτει και ο συμβολισμός «πολλαπλασιασμός x 2» όπου οι μαθητές βλέπουν καθαρά ότι είναι άχρηστο να την επαναλάβουν, διότι είναι το ίδιο κάθε φορά. Οι μαθητές, που σημείωσαν ότι μπορούμε να διαιρούμε με το 2 στην άλλη κατεύθυνση, ο δάσκαλος εισάγει τον συμβολισμό «διαιρ.2», που σημειώνει στον πίνακα.



- Ένας αμετάβλητος τελεστής αναδύεται από τα ζεύγη των αριθμών.

  Δίνονται και άλλες διατυπώσεις περισσότερο γενικές, το μήκος είναι, κάθε φορά 2 φορές το πλάτος. Ο δάσκαλος πρότεινε να συμβολίζουν το μήκος με Μ και το πλάτος με π.

  Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε Μ = π x 2 και η αντιστοιχία

  π πολ.2 Μ δηλ. Μ = π x 2

Είναι καθαρό ότι προσεγγίζουμε την αριθμητική συνάρτηση (από Ν σε Ν), διότι εμπλέκεται μια αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων φυσικών αριθμών- και ήταν σημαντικό οι μαθητές να αντιληφθούν ότι μπορούμε να βρούμε πάντα και άλλα ζεύγη φυσικών, που θα μεγαλώσουν τον πίνακα της αντιστοιχίας, γεγονός που το είχαν ξεκινήσει, όταν έδωσαν και άλλα ζεύγη φυσικών αριθμών.

Ακριβολογώντας, μεταξύ συμβολισμών και εννοιών, η επιλογή της γραφής πολ.2 ή διαιρ.2 δίνει πλεονέκτημα, ιδιαίτερα στον πίνακα αντιστοιχίας, να εκφραστεί η τελεστική σχέση μεταξύ δύο σειρών αριθμών και χωρίς να αποτελεί φρένο, επιτρέπει στους μαθητές να ξεκινήσουν να κατασκευάζουν την έννοια της συνάρτησης.
Μάλλον είναι καλύτερη η γραφή πολ.2 από το x2.

- Στην πραγματικότητα «πολ.2» έχει έννοια τελεστή, εκφράζει την τελεστική σχέση, που επιτρέπει από έναν αριθμό (π.χ. 3), να βρούμε έναν άλλο (6) που ανοίγει την έννοια της αριθμητικής συνάρτησης.
- Αντίθετα το σύμβολο «x» (πολλαπλασιασμός) παραπέμπει στην έννοια της πράξης (πολλαπλασιασμός), η οποία παίζει απευθείας σε ένα ζεύγος αριθμών (3,2) για να τον αντιστοιχήσει σε έναν τρίτο αριθμό 6.

  Στην πρώτη περίπτωση (πολ.2) πρόκειται για τον σχεδιασμό μια εφαρμογής Ν σε Ν. Στην δεύτερη περίπτωση «x» πρόκειται για το σύμβολο που εκφράζει έναν νόμο σύνθεσης εσωτερικό, ορισμένο, ως εφαρμογή του ΝxΝ στο Ν.

Τα δύο σύμβολα μπορούν να συνδυαστούν χωρίς αμφιβολία στην παρακάτω έκφραση:
3 πολ.2 κάνει 6 έτσι ώστε 3x2 = 6
Με την πρώτη έκφραση εμφανίζεται η τελεστική συνάρτηση (δρα σε έναν αριθμό για να τον μετατρέψει σε έναν άλλο). Με 3x2=6 εμφανίζεται το γεγονός ότι σε ένα ζεύγος 2 αριθμών αντιστοιχούμε έναν τρίτο αριθμό.

Φάση 7
Έννοια του σταθερού λόγου
Εισαγωγή στο θέμα
Σε συνέχεια των προηγούμενων φάσεων, που αναδύουν την σημειούμενη συνάρτηση «πολ.2», η οποία στη μέτρηση κάθε πλάτους ενός ορθογωνίου σε σμίκρυνση (ή μεγέθυνση) από ένα δοθέν ορθογώνιο αντιστοιχεί το μέτρο του μήκους της, μπορεί να εγκατασταθεί η ιδέα στους μαθητές ότι για κάθε ορθογώνιο το μήκος είναι το διπλάσιο του πλάτους, ρίσκο που εμφανίζεται συχνά.

Εξέλιξη
Πρέπει λοιπόν πολύ γρήγορα να προλάβουμε αυτό το ρίσκο και να προτείνουμε ως επένδυση άλλες καταστάσεις σμίκρυνσης (μεγέθυνσης) με ορθογώνια, για τα οποία
Μ = πx3 (παράδειγμα 21 εκ και 7 εκ.)
Ή Μ = πx4 (παράδειγμα 44εκ. και 11εκ.)
Αλλά επίσης Μ = πxΜ (ένα τετράγωνο που είναι ένα ιδιαίτερο ορθογώνιο)

Σε αυτή τη φάση, οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν σμικρύνσεις με βάση τις σχέσεις μήκους- πλάτους, που δίνονται παραπάνω. Ο καθένας ατομικά προτείνει τις δικές του προτεινόμενες σμικρύνσεις, που εκφράζουν τις παραπάνω σχέσεις.
Στο πέρας αυτών των προσπαθειών, καταλήγουμε στη σύνθεση. Στον πίνακα φαίνονται, για κάθε είδος ορθογωνίου, ορισμένα ορθογώνια σε σμίκρυνση (ή μεγέθυνση), ο πίνακας αντιστοιχίας και η έκφραση της αριθμητικής συνάρτησης, που αντιστοιχεί.

$$\text{m.2} \quad \begin{array}{c} 2\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 10\ \dots\ 46\ \dots\ 60\ \dots \\ \hline 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \dots\ 23\ \dots\ 30\ \dots \end{array} \quad \text{div. 2}$$

soit $l \xrightarrow{m.2} L$ tel que $L = l \times 2$

$$\text{m.3} \quad \begin{array}{c} 3\ \ 6\ \ 9\ \ 12\ \ 15\ \dots\ 21\ \dots\ 90\ \dots \\ \hline 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \dots\ 7\ \dots\ 30\ \dots \end{array} \quad \text{div. 3}$$

soit $l \xrightarrow{m.3} L$ tel que $L = l \times 3$

$$\text{m.4} \quad \begin{array}{c} 4\ \ 8\ \ 12\ \ 16\ \dots\ 44\ \dots\ 120\ \dots \\ \hline 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \dots\ 11\ \dots\ 30\ \dots \end{array} \quad \text{div. 4}$$

soit $l \xrightarrow{m.4} L$ tel que $L = l \times 4$

$$\text{m.1} \quad \begin{array}{c} 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \dots\ 11\ \dots\ 30\ \dots \\ \hline 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \dots\ 11\ \dots\ 30\ \dots \end{array} \quad \text{div. 1}$$

soit $l \xrightarrow{m.1} L$ tel que $L = l \times 1$

Λαμβάνοντας απόσταση από τις διαφορετικές συναρτήσεις, οι μαθητές οδηγήθηκαν να αντιληφθούν αυτό, που αντιστοιχεί σε κάθε οικογένεια ορθογωνίων. Είναι ο συντελεστής (της ομοιότητας) 2, 3, 4 ή 1. Αυτό τους οδηγεί να πουν για καθεμία «είναι η οικογένεια 2, η οικογένεια 4 κ.λπ,.».
Αυτή η απόσταση δεν θα μπορούσε να γίνει νωρίτερα, διότι το 2 δεν μπορούσε να εμφανιστεί ως χαρακτηριστικό της οικογένειας των ορθογωνίων, αυτή η οικογένεια δεν είχε γίνει ακόμη αντιληπτή ως μια οικογένεια ανάμεσα σε άλλες.
Είναι η πολλαπλότητα των δυνατών οικογενειών, που επιτρέπει την κατασκευή της έννοιας της οικογένειας και να εξάγει για καθεμία το χαρακτηριστικό της.
Στην έκφραση «πολ.2», ο φυσικός αριθμός 2 αποκτά μια σημασία για τους μαθητές, είναι αυτή του λόγου μεταξύ του μήκους και του πλάτους του κάθε ορθογωνίου.
Είμαστε σε θέση να συνδέσουμε στο 2 τις οικογένειες των ζευγών των φυσικών, που έχουν αποδειχθεί οικογένεια θεωρούμενη ως σύνολο ζευγών. Για να αναπαραστήσουμε αυτή την έννοια των ζευγών, ο δάσκαλος ζήτησε να σημειώσουμε μέσα σε παρενθέσεις {…} για να δηλωθεί η συμβολική αναπαράσταση ενός συνόλου.

Όπου 2 αναπαριστάνει το σύνολο {(2,1), (4,2), (6,3), …, (46,23), ….}και το ίδιο για τις άλλες οικογένειες.

Σημείωση: Ο λόγος μεταξύ δύο φυσικών β και α είναι η τιμή του αριθμού υ έτσι

β=αxυ δηλ. α πολ.υ δίνει β.

Αντίστροφα αυτό δηλώνει ότι β είναι πολλαπλάσιο του α.

Η έννοια του λόγου έτσι προσεγγισμένη θα επιτρέψει αργότερα, μετά την εργασία στην αναλογία, την εισαγωγή νέων αριθμών (ρητοί), που θα εμπλουτίσουν το πεδίο της χρήσης του.

Στη συνέχεια , δόθηκε σε κάθε ομάδα μια εικόνα, που απεικόνιζε το γνωστό πίνακα της Μόνας Λίζα ή Τζιοκόντα του διάσημου ζωγράφου Λεονάρντο Ντα Βίντσι και δυο σμικρύνσεις του. Ήταν ένα παράδειγμα επεξεργασίας των διαστάσεων των εικόνων στο Word και τις επιπτώσεις στην ποιότητα της εικόνας, αν αλλάξει ο λόγος μεταξύ του μήκους και του πλάτους. Οι μαθητές εντόπισαν τη σωστή σμίκρυνση του σχήματος, προβάλλοντας τα επιχειρήματα τους. Στο παράρτημα, που ακολουθεί στο τέλος παρουσιάζεται το φύλλο με τις εικόνες, που δόθηκε στις ομάδες.

Στις υπόλοιπες 6 φάσεις εφαρμόζουν όσα διενεργήθηκαν στο πρώτο μέρος του διδακτικού σεναρίου σε μια σύνθετη δραστηριότητα, στην οποία δημιουργούν πάζλ, βρίσκοντας την αναλογία των σχημάτων. Όλες οι δραστηριότητες, που περιλαμβάνονται στις φάσεις αποτελούν μια πρόταση διδακτικού σεναρίου για τη διδασκαλία του λόγου και της αναλογίας.

Η έννοια της αναλογίας

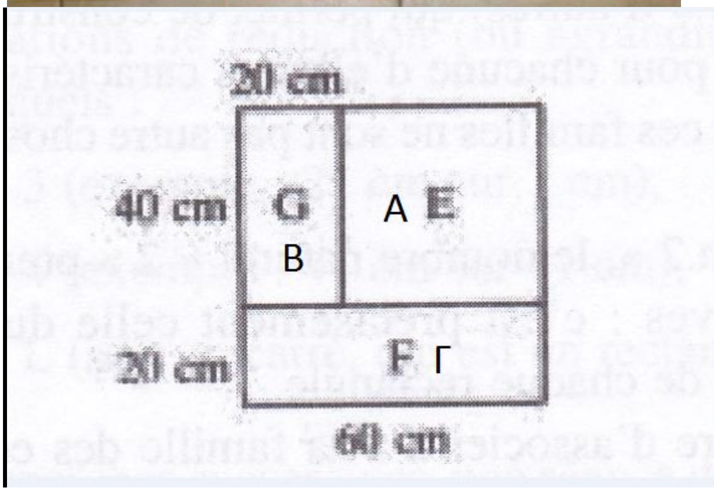
Φάση 1, Σμίκρυνση των κομματιών του παζλ

Εισαγωγή στο θέμα

Σε αυτή τη φάση, αυτό που ακολουθεί παρουσιάζεται ως δημιουργική εργασία των εννοιών, που κατασκευάστηκαν προηγούμενα (έννοια του λόγου). Η κάθε ομάδα αναλαμβάνει τη σμίκρυνση ενός κομματιού του παζλ, ο κάθε μαθητής όμως, εργάζεται ατομικά για να δημιουργήσει τη σμίκρυνση του κομματιού.

Εξέλιξη

Ο δάσκαλος παρουσιάζει στον πίνακα ένα απλό παζλ.



Οι διαστάσεις δίνονται στους μαθητές. Η τάξη χωρίζεται σε ομάδες. Ζητείται από κάθε ομάδα να βρει μια οικογένεια ορθογωνίων σε σμίκρυνση, ξεκινώντας από ένα συγκεκριμένο κομμάτι του παζλ (το ίδιο κομμάτι μπορεί να δοθεί σε περισσότερες ομάδες). Κάθε μαθητής οφείλει να κάνει τη δική του σμίκρυνση και να κόψει τα παραχθέντα ορθογώνια, σημειώνοντας κάθε φορά τις αντίστοιχες διαστάσεις.

Στη συνέχεια, πραγματοποιείται σύγκριση σε κάθε ομάδα, με στόχο την εξακρίβωση της ακρίβειας των αποκτηθέντων ορθογωνίων (δηλαδή τη διατήρηση του λόγου μήκους/πλάτους). Στη συνέχεια, κάθε ομάδα θα τοποθετήσει στον πίνακα την αντιστοιχία των αποκτηθέντων διαστάσεων και την έκφραση του κοινού λόγου, που χαρακτηρίζει την οικογένεια των ορθογωνίων (λόγος 1 για Β(E), λόγος 2 για A(G), λόγος 3 για Γ (F). Για ευκολία δόθηκαν οι ονομασίες A, B,Γ στα σχήματα.

Φάση 2, Εμπειρική Επανασύνδεση του παζλ σε σμίκρυνση

Εισαγωγή στο θέμα

Όλα τα κομμάτια σε σμίκρυνση (κομμένα) της οικογένειας Α (G) τοποθετούνται σε στοίβα.

Όλα τα κομμάτια σε σμίκρυνση (κομμένα) της οικογένειας Β (E) τοποθετούνται σε στοίβα.

Όλα τα κομμάτια σε σμίκρυνση (κομμένα) της οικογένειας Γ (F) τοποθετούνται σε στοίβα.

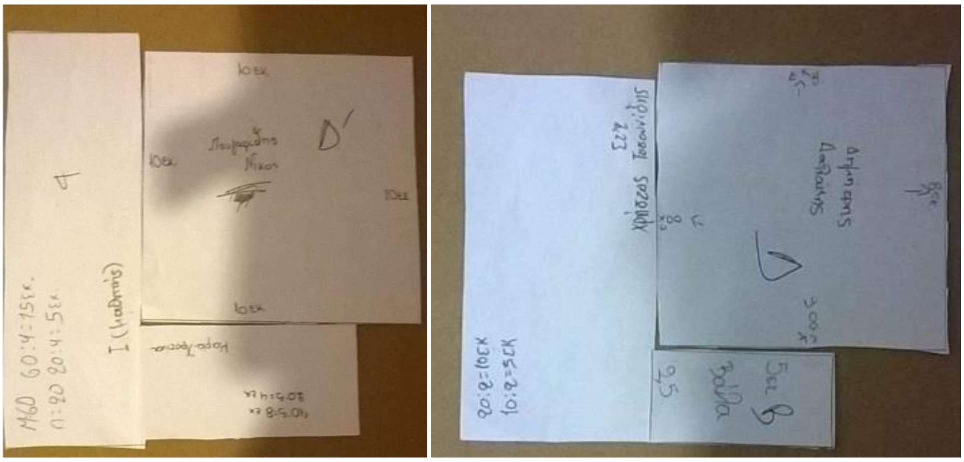
Εξέλιξη

Κάθε ομάδα παρουσίασε στις άλλες τι έκανε και τα συμπεράσματα, στα οποία κατέληξε. Οι πίνακες αντιστοιχίας τοποθετούνται σε κοινή θέα.

Ο δάσκαλος ζήτησε από 3 μαθητές να έρθουν να πάρουν ο καθένας ένα ορθογώνιο από κάθε οικογένεια για να επανασυνδέσουν στον πίνακα ένα νέο παζλ.

Παρατηρούμε «Δεν γίνεται».

Για παράδειγμα



«Ωστόσο είχαμε επιβεβαιώσει σε κάθε ομάδα, πως ότι είχαμε κάνει ήταν καλό».

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε καλά αυτή τη στιγμή του «σοκ», κατά την οποία συνειδητοποιούν πως αυτή η κατάσταση έκπληξης θα αποτελέσει την αρχή μιας νέας έρευνας. Δοκιμάσαμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις με τα κομμάτια ένα από κάθε σωρό, ίσως ένα παζλ να είναι σωστό.

Φάση 3, Έρευνα μιας λειτουργικής ενέργειας σμίκρυνσης του παζλ

Εισαγωγή

Προτείνεται ατομική έρευνα.

Εξέλιξη

Η άμεση πρόσβαση στους σωρούς των ορθογωνίων, μπορεί να επιτρέψει μια εμπειρική διαχείρισή τους.

Γεννιούνται πολλαπλές ενέργειες:

- Κάποιοι χρησιμοποιούν διαισθητικά την έννοια της κλίμακας, π.χ. διαιρώντας δια 4 ή δια 10 τις διαστάσεις του παζλ (οι διαστάσεις επιλέχθηκαν, ώστε αυτό να είναι εύκολο, γεγονός που δεν ήταν εύκολο με τις διαστάσεις 23 και 46, που προτάθηκαν για την έννοια του λόγου).
- Άλλοι ξεκινώντας από το Α παρατηρώντας ότι το πλάτος του Α είναι το ίδιο με εκείνο του Γ, βρίσκουν το αντίστοιχο μήκος του Γ, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση «πολ.3», δηλαδή λαμβάνοντας υπόψη τον καθαρό λόγο μήκους/πλάτους του Γ. Όσον αφορά την αντίστοιχη σμίκρυνση του Β, δύο τρόποι για να τη βρεις
- είτε λαμβάνοντας ως πλευρά το μήκος του Α (δηλ. 40)
- είτε με αφαίρεση του μήκους του Γ και του πλάτους του Α (δηλαδή 60-20) .

Άλλοι λαμβάνοντας υπόψη άμεσα τους λόγους μεταξύ των τριών διαστάσεων του παζλ

(20 «πολ.2» 40 αλλά επίσης 20 «πολ.3» 60.

Και αναζητούν τις τριάδες που έχουν τους ίδιους λόγους.

Πχ

			4	6	10
m.3	m.2	40	8	12	20
		60	12	18	30

Άλλοι κατασκευάζουν ένα ορθογώνιο Α' της οικογένειας Α μετά το τετράγωνο Β' που έχει ως πλευρά το μήκος του Α', μετά το ορθογώνιο Γ' που έχει ως μήκος το άθροισμα των πλατών του Α' και Β' και ως πλάτος αυτό του Α'.

Άλλοι χρησιμοποιούν διαφορετικούς συνδυασμούς.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι οι διαφορετικές ενέργειες, που έγιναν κάνουν χρήση των ιδιοτήτων της αναλογίας και θα ήταν κρίμα να μην εξειδικεύσουμε, διότι οι μαθητές ήταν η μηχανή των δράσεων, που τις επιβεβαιώνουν. Τα υλικά και τα κίνητρα είναι εδώ.

Φάση 4 , Συνειδητοποίηση των συνθηκών σμίκρυνσης ενός παζλ

Εισαγωγή στο θέμα

Σύγκριναν σε μικρές ομάδες τα παζλ τους και τον τρόπο, με τον οποίο τα κατασκεύασαν. Πραγματοποιούνται συγκρίσεις στα πλαίσια της ομάδας, ο καθένας καλείται να υποστηρίξει την επιλογή του.

Εξέλιξη

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι η επίτευξη μιας δράσης από έναν μαθητή «σμίκρυνση ενός παζλ» και η ικανότητα έκφρασης -μετά-ανάλυσης- του τρόπου, με τον οποίον το έκαναν είναι 2 σημεία, στιγμές της νοερής διαδικασίας διαφορετικής, όπου το $1^{ο}$ δεν συνεπάγεται το $2^{ο}$.

Η $2^{η}$ στιγμή (λεκτική ανασύνθεση και επεξήγηση της δράσης, που έλαβε χώρα) είναι μια συγκεκριμένη δουλειά (η οποία πηγάζει από την «διαλογιζόμενη αφαίρεση» του Πιαζέτ) με διαφορετικά επίπεδα. Σε ένα πρώτο χρόνο, ο κάθε μαθητής καλείται να βρει την σειρά των δράσεων, που έλαβαν χώρα από αυτόν. Έχοντας κατασκευάσει με επιτυχία ένα προϊόν (το παζλ σε σμίκρυνση) επικεντρώνεται σε αυτό το τελικό προϊόν και ξεχνάει (ασυνείδητα) πως το έκανε. Οφείλει να κάνει λοιπόν μια επανατοποθέτηση χρονολογική των δράσεών του. Αλλά σε αυτό το στάδιο σύγκρισης σε μικρές ομάδες, δεν είναι χρήσιμο να βαρύνει πολύ αυτή η απαίτηση. Ο στόχος είναι να φέρουμε στην συνειδητή επιφάνεια τις στιγμές, τα στοιχεία των δράσεων, που έλαβαν χώρα. Μπορεί να υπάρξει μια συλλογική στιγμή, όπου παρουσιάζονται σε όλη την τάξη τα διαφορετικά παζλ, που έγιναν.

Στόχος

Η συλλογική συνειδητοποίηση ότι είναι δυνατόν να κατασκευάσεις καλά παζλ και ότι μπορούμε να φτιάξουμε πολλά, όλα διαφορετικά. Για ποιο λόγο αυτά είναι καλά, και τα πρώτα δεν ήταν; Αυτή η ερώτηση θα ανοίξει την πλέον σημαντική φάση, αυτή του συστηματικού γυρίσματος στις δράσεις, που είχαν οδηγήσει σε αυτά τα παζλ τα πετυχημένα, στην ανάλυση των δράσεων δηλαδή, σε αυτό που ο Πιαζέτ ονομάζει «εσωτερίκευση του συντονισμού των δράσεων». Επιστροφή σε μια ατομική στιγμή, όπου ζητείται σε κάθε μαθητή να σημειώσει τους αριθμούς, που αντιστοιχούν στις διαστάσεις του παζλ τους και τους αριθμούς, που αντιστοιχούν στις διαστάσεις του παζλ Π του δοθέντος . Στη συνέχεια, να οργανωθούν αυτές οι 2 λίστες αριθμών, ώστε να αναδυθούν οι αντιστοιχίες.

Φάση 5, Διαμόρφωση Επαναληπτικών πινάκων

Εισαγωγή στο θέμα

Μια συλλογική φάση, όπου στον πίνακα μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τις λίστες όλων των τριάδων, που βρέθηκαν από όλους τους μαθητές.

Εξέλιξη

Μπορούμε επίσης, να εμφανίσουμε στους 3 πίνακες τις αντιστοιχίες, που υπήρξαν στην αρχή (σμικρύνσεις των κομματιών Ε (Β), F(Γ), G(A)), τα ζεύγη των φυσικών, που συνιστούν τα πετυχημένα παζλ, ζεύγη, που βρίσκουμε στον μεγάλο πίνακα των τριάδων.

Για παράδειγμα

Οικογένεια (Ε) Β		Οικογένεια (F) Γ		Οικογένεια (G) Α	
40	40	20	60	20	40
2	2	5	15	4	8
4	4	4	12	10	20
8	8	10	30	12	24
10	10	12	36	15	30
20	20				

Λίστα με τις τριάδες

20	4	6	2	5	10	40…
40	8	12	4	10	20	80
60	12	18	6	15	30	120

Μετά από αυτή τη φάση της διαπίστωσης, της λήψης σε γνώση των ληφθέντων αποτελεσμάτων (παζλ και πίνακας αντιστοιχίας), θα περάσουμε στην φάση την πλέον σημαντική, την συστηματική ανάλυση των ιδιοτήτων, που χρησιμοποιήθηκαν- στα διαφορετικά είδη των ενεργειών, που έγιναν και προκλήθηκε ακόμη λίγη σύγχυση.

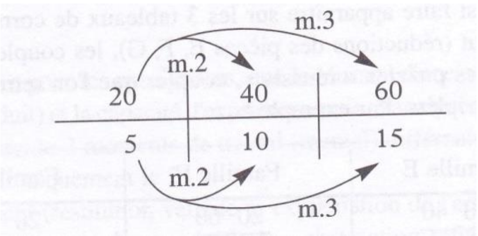
Θα ρωτήσουμε αυτή τη φορά, ξεκάθαρα τους μαθητές να γράψουν αυτό που έκαναν, ώστε να αποκτήσουν το παζλ τους, επαναθέτοντας όσο πιο ακριβέστερα γίνεται την διαδοχή των δράσεών τους, ώστε να βρίσκουν σε κάθε φάση, την τελεστική του μετάφραση (αριθμητικά) και να το προσδιορίζουν στον πίνακα των αντιστοιχιών, που διαμορφώθηκε από τον καθένα για το δικό του παζλ.

Πίνακας

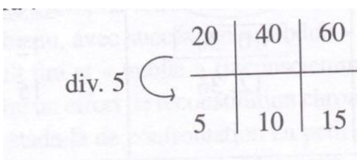
Διάσταση του αρχικού παζλ Π	20	40	60
Διαστάσεις του παζλ σε σμίκρυνση	5	10	15

Ας κοιτάξουμε λίγο πιο κοντά.

- Αν ένας μαθητής ξεκίνησε να κατασκευάζει ένα ορθογώνιο της οικογένειας G(A) (του 5 στο 10), δηλαδή λαμβάνοντας υπόψη τον λόγο 2 και στη συνέχεια φτιάχνει το αντίστοιχο ορθογώνιο της οικογένειας F (Γ), λαμβάνοντας το ίδιο πλάτος (5) αλλά για μήκος 15 εφόσον 5«πολ.3»15 ο πίνακας θα συμπληρωνόταν με τον εξής τρόπο:



- Αν ένας μαθητής χρησιμοποιούσε απευθείας την κλίμακα διαιρώντας με το 5 τις διαστάσεις του Π (αρχικού παζλ) θα είχαμε:



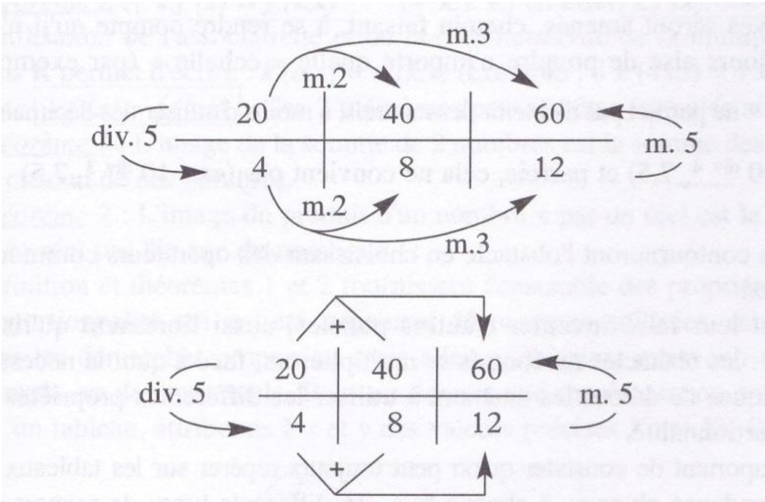
- Όταν χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι 20+40=60 μπορούμε να αποκτήσουμε το μήκος της πλευράς του παζλ 4+8=12.

  Αυτή η ιδιότητα μπορεί να σημειωθεί στον πίνακα αντιστοιχιών (βλ. παρακάτω δεύτερο σχήμα).

Φάση 6, Σύνολο των ιδιοτήτων της αναλογίας

Γίνεται επεξήγηση των ιδιοτήτων της αναλογίας, που παρουσιάζονται παρακάτω μέσα από παραδείγματα. Έτσι οι μαθητές κατανοούν πως οι σχέσεις μεταξύ των πλευρών παραμένουν σταθερές και στις σμικρύνσεις των κομματιών του παζλ, οι οποίες θα προκύψουν.

Για παράδειγμα



Κάθε ιδιότητα συνδέεται με μια ενέργεια τελεστική (λειτουργική) καλά στοχευμένη.

Σε αυτή τη φάση οι μαθητές θα γνωρίσουν τις εξής ιδιότητες της αναλογίας:

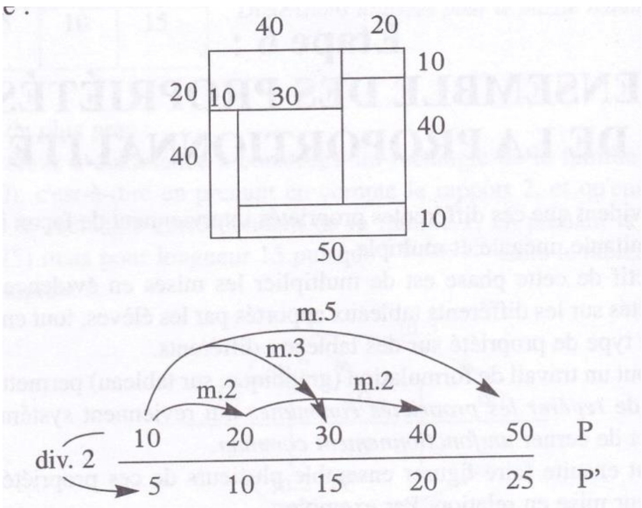
Α) Ο λόγος των διαστάσεων ενός δοθέντος παζλ π και οι αντίστοιχες διαστάσεις ενός παζλ σε σμίκρυνση είναι ο ίδιος (το αντίστροφο αυτού του λόγου είναι η κλίμακα).

Β) Οι καθαροί λόγοι σε κάθε ορθογώνιο του δοθέντος παζλ Π διατηρούνται για τα αντίστοιχα ορθογώνια του κάθε παζλ σε σμίκρυνση π (ή σε μεγέθυνση).

Γ) Αν μια διάσταση του παζλ π είχε αποκτηθεί με πρόσθεση (ή αφαίρεση) των άλλων δύο διαστάσεων του ίδιου παζλ , ισχύει το ίδιο για τις αντίστοιχες διαστάσεις του παζλ σε σμίκρυνση (ή μεγέθυνση).

Άλλες συναρτήσεις μπορούν να περιλαμβάνουν την σμίκρυνση (ή μεγέθυνση), θέτοντας άλλους απλούς λόγους.

Παράδειγμα



Οι μαθητές θα οδηγούνταν να αντιληφθούν ότι δεν είναι πάντοτε απλό να πάρουμε οποιαδήποτε κλίμακα (πχ «διαιρ.4» δεν επιτρέπει να λάβουμε φυσικούς εκτός αν χρησιμοποιήσουμε τους δεκαδικούς) (πχ 30«διαιρ.4» 7,5.)

Σχεδιασμός της έρευνας και διαδικασία συλλογής δεδομένων

Κύριες συνθήκες : Οι εργασίες πραγματοποιήθηκαν ακριβώς με τη σειρά που παρατίθενται και η μια διαδεχόταν την επόμενη, όταν ολοκληρωνόταν από τους μαθητές. Οι συνθήκες ήταν ευνοϊκές, δεδομένου πως οι μαθητές ήταν συνεργάσιμοι και με προθυμία ακολούθησαν τις οδηγίες. Η διάταξη των θρανίων παρέμεινε ίδια, διότι ήταν χωρισμένοι οι μαθητές σε ομάδες, γεγονός που διευκόλυνε στη διεκπεραίωση της διαδικασίας και στην καταγραφή του τρόπου δράσης τους.

Αντισταθμιστικές συνθήκες : Για την αποφυγή σφαλμάτων, δόθηκαν στους μαθητές απλές και κατανοητές οδηγίες για τη πραγματοποίηση των εργασιών. Επίσης, σε κάθε ομάδα υπήρχε μια φοιτήτρια και για τη διευκόλυνση της καταγραφής του τρόπου σκέψης των μαθητών, αλλά και για το συντονισμό των εργασιών σε όλες τις ομάδες.

Χρόνος παρουσίασης και χρόνος μεταξύ των συνθηκών : Ο χρόνος παρουσίασης ήταν αρκετά σύντομος και απαντήθηκαν και ερωτήσεις με τυχόν απορίες των μαθητών. Η κάθε δραστηριότητα δεν πραγματοποιήθηκε σε συγκεκριμένο χρόνο, αλλά δόθηκε ο απαραίτητος χρόνος σε όλους τους μαθητές για να ολοκληρώσουν τη κάθε δραστηριότητα. Όλες οι εργασίες ολοκληρώθηκαν μέσα σε τέσσερις διδακτικές ώρες.

Οδηγίες προς τους συμμετέχοντες και εκπαίδευση πριν τη συλλογή των δεδομένων : Οι μαθητές έλαβαν σαφείς οδηγίες για τη πραγματοποίηση των εργασιών και μέσα από τη παρουσίαση των σχημάτων στον πίνακα κατανόησαν καλύτερα τη διαδικασία, που θα έπρεπε να ακολουθήσουν. Ορισμένοι χρειάστηκαν μια επιπλέον καθοδήγηση, η οποία όμως, ωστόσο δεν εμπόδισε τους μαθητές να οδηγηθούν σε μια δική τους λύση. Δεν πραγματοποιήθηκε κάποια εκπαίδευση, πριν τη διεκπεραίωση των εργασιών, διότι οι μαθητές από προηγούμενη τάξη είχαν εξοικειωθεί με την έννοια της σμίκρυνσης και της μεγέθυνσης.

Αποτελέσματα

Στην αρχή οι μαθητές αμέσως κατάλαβαν πως το αντικείμενο, που θα μας απασχολήσει θα είναι η σμίκρυνση, καθώς αντιλήφθηκαν πως το πάρκο Ντάνξια Σαν, που βρίσκεται στην Κίνα και έχει έκταση τόσες χιλιάδες χιλιόμετρα δεν θα μπορούσε να χωρέσει σε μια κόλλα Α4.

Στη **1η φάση** τους δόθηκε ένα ορθογώνιο στον πίνακα να το παρατηρήσουν και να το σχεδιάσουν κάνοντας σμίκρυνση στο χαρτί.

«Πρέπει να κάνουμε σμίκρυνση της εικόνας σαν τους χάρτες.» ισχυρίστηκε ο Ν. στην περίπτωση αυτή τα παιδιά κατανοούν πως έπρεπε να κάνουν σμίκρυνση για να το ζωγραφίσουν στο φύλλο.

« Να το κάνουμε πιο μικρό με τις ίδιες ψεύτικες διαστάσεις.» αξιοποιώντας χάρακες, μολύβια και χαρτιά μια ομάδα αγοριών ισχυρίστηκε σύμφωνα με τον Φ.

Η Ευ. αναρωτήθηκε αν οι διαστάσεις θα έπρεπε να είναι συγκεκριμένα εκατοστά.

«Εάν δεν μας δίνονται δύο αριθμοί, στους οποίους θα πρέπει να εστιάσουμε, μπορούμε να κάνουμε σμίκρυνση με τους πιο μικρούς αριθμούς.» διατύπωσε η Μ.

Αρχικά, διατύπωσαν τις παραπάνω σκέψεις και στη συνέχεια πρότειναν τη δική τους σμίκρυνση.

Στη **2η φάση** ο κάθε μαθητής πρότεινε τη δική του εκδοχή (σμίκρυνση) και στο τέλος η κάθε ομάδα επέλεξε ένα από όλα τα σχήματα που κατασκεύασε ο καθένας.

Στην Α΄ ομάδα ένας μαθητής ο Α. διατύπωσε το σκεπτικό ότι η σμίκρυνση είναι 4,6 Χ 9,5 και μέσω του πολλαπλασιασμού τους με τον αριθμό 5 μας δίνουν τις διαστάσεις του μεγάλου ορθογωνίου. Μια μαθήτρια η Μ. υποστήριξε πως θα προκύψει η σμίκρυνση, αν διαιρέσουμε τις διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου με έναν αριθμό με το 2 , το 3 ή το 4. Μια μαθήτρια η Ελ. ισχυρίστηκε ότι μπορούμε να κάνουμε πολλές φορές σμίκρυνση, ανάλογα με το πόσες φορές θέλουμε να μικρύνουμε το ορθογώνιο και μπορεί να γίνει διαιρώντας με το 2,3,4,5,6 κ.τ.λ. , αν βέβαια αυτοί οι αριθμοί διαιρούν τον αριθμό του μήκους των πλευρών. Η ομάδα κατέληξε στην πρώτη επιλογή του Α., η οποία είναι ασταθής, διότι αν πολλαπλασιάσουμε επί 5 τους αριθμούς προκύπτουν οι αριθμοί 23 και 47,5, που διαφέρει από το 46 και δεν είναι κατάλληλοι.

Στη Β΄ ομάδα μια μαθήτρια η Η. υποστήριξε πως πρέπει να διαιρέσουμε διά 4, γιατί το σχήμα έχει 4 διαστάσεις. Στη συνέχεια, κατανόησε πως δεν διαιρούνται οι αριθμοί με το 4 και είπε πως πρέπει να διαιρέσουμε με το 3ή με το 2. Οι υπόλοιποι μαθητές και μαθήτριες της ομάδας είπαν πως θα πρέπει να διαιρέσουμε με το δυο και τις δυο διαστάσεις και στη συνέχεια, μια μαθήτρια η Β. πρότεινε πως θα πρέπει να συνεχίσουμε να διαιρούμε τι διαστάσεις δια δύο για να προκύψει ένα ακόμα πιο μικρό σχήμα. Στο τέλος, η ομάδα κατέληξε πως θα πρέπει να διαιρέσουμε τις διαστάσεις του σχήματος διά δύο και έτσι να προκύψει ένα σχήμα με πλευρές 23 και 11,5.

Στη Γ΄ ομάδα μια μαθήτρια η Γ. υποστήριξε πως θα πρέπει να προκύψουν οι ίδιες διαστάσεις σε πιο μικρό και έτσι να διαιρέσουμε με το 2 και πως αν ήταν τετράγωνο θα έπρεπε να το διαιρέσουμε με το 4. Δύο άλλες μαθήτριες η Α. και η Ευ. συμφώνησαν πως, αφού τα εκατοστά του αρχικού ορθογωνίου δεν χωράνε στο χαρτί τα διαιρώ με το δύο και προκύπτουν 23 εκατοστά η βάση και 11,5 το ύψος. Έτσι προέκυψαν οι μισές διαστάσεις και χωράνε στο χαρτί. Ένας μαθητής ο Γ. πρότεινε να διαιρέσουμε με το 4 ώστε να προκύψει μια μικρότερη σμίκρυνση. Ένας άλλος μαθητής ο Ι. ισχυρίστηκε πως η μια θα πρέπει να είναι διπλάσια της άλλης και είτε θα προκύψουν οι διαστάσεις 23 και 11,5, είτε τυχαίες όπως το 10 και το 5 . Στο τέλος, κατέληξαν πως αν διαιρεθούν οι διαστάσεις του αρχικού σχήματος με το δύο, θα προκύψει ένα ορθογώνιο σε σμίκρυνση.

Στη Δ' ομάδα ένας μαθητής ο Φ. ισχυρίστηκε πως το σχήμα είναι τετράγωνο και ότι δεν μοιάζει με ορθογώνιο και έδωσε μια σμίκρυνση 10 Χ 10. Οι υπόλοιποι 3 μαθητές κατέληξαν στις διαστάσεις 10 και 5, υποστηρίζοντας πως η περίμετρος του σχήματος (10+5+10+5) = 30, που είναι κοντά στο 23 και στο 46 , δηλαδή στις διαστάσεις του ορθογωνίου. Στην ομαδική επιλογή επικράτησε αυτή η άποψη ως η άποψη της πλειοψηφίας.

Δεν υπήρξαν ανταλλαγές μεταξύ των ομάδων και δεν υπήρξαν διαφωνίες στην ομαδική επιλογή. Οι μαθητές ήταν πολύ διαλλακτικοί και δεν επέμεναν στη δική τους εκδοχή.

Στην **3η φάση** της σύγκρισης των ομαδικών ορθογωνίων, απορρίφθηκε μόνο η πρόταση της πρώτης ομάδας καθώς αν πολλαπλασιάσουμε τις διαστάσεις δεν μας οδηγούν στο αρχικό ορθογώνιο διότι 9,5 Χ 5 = 47,5, ενώ το μήκος γνωρίζουμε πως είναι 46 εκατοστά . Οι υπόλοιπες ομάδες κατέληξαν στο ζητούμενο συμπέρασμα πως το μήκος είναι διπλάσιο του πλάτους.

Στη **4η φάση** οι μαθητές έκαναν τις δικές τους υποθέσεις, για το ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις μιας ενδεχόμενης σμίκρυνσης του δοθέντος ορθογωνίου. Παρατηρήθηκε πως οι μαθητές δεν κατέφυγαν σε προσθετικές ενέργειες και οι υποθέσεις τους, όπως φαίνεται και από πάνω βασίζονται στη διαίρεση και σε τυχαίες τιμές, διατηρώντας όμως τη σχέση μήκους- πλάτους, όπως ίσχυε στο αρχικό ορθογώνιο (Μ= 2Χπ). Συγκεκριμένα ο μαθητής Ι. ισχυρίστηκε πως η μια θα πρέπει να είναι διπλάσια της άλλης και θα προκύψουν οι τυχαίες διαστάσεις 10 Χ 5 .

Στη **5η φάση** εξέτασαν τις υποθέσεις τους και υποστήριξαν πως μπορούμε να μικρύνουμε ακόμα πιο πολύ το σχήμα, διαιρώντας με ακόμα μεγαλύτερο αριθμό. Συγκεκριμένα ο μαθητής Γ. πρότεινε να διαιρέσουμε με το 4, ώστε να προκύψει μια μικρότερη σμίκρυνση. Η Μ. υποστήριξε πως η σμίκρυνση θα προκύψει μέσω της διαίρεσης των διαστάσεων του αρχικού ορθογωνίου με έναν αριθμό με το 2 , το 3 ή το 4. Η Ελ. πρότεινε τη σμίκρυνση 6Χ4 ως τυχαίες διαστάσεις, οι οποίες αν διαιρεθούν με το 2 θα προκύψει η σμίκρυνση 3Χ2. Το σχήμα 10Χ5 δεν ήταν εύκολο να γίνει αντιληπτό από όλους τους μαθητές, διότι έπρεπε να κατανοήσουν πως αυτοί οι δυο αριθμοί προκύπτουν, λόγω της σχέσης που έχουν μεταξύ τους και όχι επειδή διαιρέσαμε με κάποιο αριθμό και το μήκος και το πλάτος του αρχικού ορθογωνίου.

Στην **6η φάση** οι νέες διατυπώσεις και αναπαραστάσεις βασίστηκαν στις ήδη υπάρχουσες διατυπώσεις. Η ομάδα Α στη διαδικασία της σμίκρυνσης διαιρούσαν κάθε φορά τις τιμές με το δυο και στη διαδικασία της μεγέθυνσης πολλαπλασίαζαν επί 2 και βρήκαν τιμές ακόμα πιο μεγάλες. Στο πίνακα τοποθετήθηκαν και τα ζεύγη, που είχαν προκύψει νωρίτερα.

Η ομάδα Β βασίστηκε και στις υπάρχουσες διατυπώσεις αλλά, δημιούργησε και νέες διαστάσεις σμίκρυνσης και μεγέθυνσης, ακολουθώντας μόνο τη σχέση που συνδέει το μήκος με το πλάτος δηλαδή, πήραν ένα τυχαίο πλάτος και το μήκος του ήταν το διπλάσιο του.

Η ομάδα Γ, όπως και η Β βρήκε και άλλους πιθανούς συνδυασμούς καταλήγοντας σε ακόμα μικρότερες για τη σμίκρυνση και σε ακόμα μεγαλύτερες για τη μεγέθυνση τιμές, βασιζόμενη μόνο στη σχέση μήκους- πλάτους.

Η ομάδα Δ, όπως και η ομάδα Α συμπεριέλαβαν όσα είχαν προκύψει και στη σμίκρυνση, διαιρούσαν κάθε φορά τις τιμές με το δυο και στη μεγέθυνση πολλαπλασίαζαν επί 2 και προέκυπταν άλλες διαστάσεις ακόμα μικρότερες ή ακόμα μεγαλύτερες αντίστοιχα.

Στην **7η φάση** έγινε μια προσπάθεια να κατανοήσουν οι μαθητές πως η σχέση του μήκους και του πλάτους δεν είναι πάντα ίδια. Τους δόθηκαν οι σχέσεις Μ=πΧ3, Μ= πΧ4, Μ=ΠΧΜ και έπρεπε να δημιουργήσουν ζεύγη μήκους - πλάτους.

Οι μαθητές της Α ομάδας κατέληξαν σε αποτελέσματα σύμφωνα με τη προπαίδεια και σε πολλές περιπτώσεις διάλεγαν τυχαία κάποιους αριθμούς για το μήκος και έβρισκαν το αντίστοιχο πλάτος.

Η Β ομάδα όπως και η Α δεν αντιμετώπισε δυσκολίες και δημιούργησαν και αυτοί ζεύγη βασιζόμενα σε πολλαπλασιαστικές ενέργειες (πολλαπλασιάζω το πλάτος με έναν αριθμό και μου δίνει το μήκος). Η Η. τοποθέτησε αντίθετα τις τιμές του μήκους και του πλάτους, με αποτέλεσμα να προκύψει μεγαλύτερο πλάτος.

Στην Γ ομάδα, που αποτελούνταν από αγόρια και κορίτσια αντιμετώπισαν δυσκολία στη δημιουργία πίνακα με ζεύγη για τη σχέση Μήκος = πλάτος Χ Μήκος . Ο εκπαιδευτικός τους παρακίνησε λέγοντας πως το μήκος επί κάποιον αριθμό θα μας δίνει το ίδιο μήκος. Ποιος αριθμός όταν τον πολλαπλασιάσουμε με έναν οποιοδήποτε αριθμό μας δίνει τον ίδιο αριθμό; Τότε, οι μαθητές αντιλήφθηκαν τι έπρεπε να σκεφτούν και κατάφεραν να κατασκευάσουν ζεύγη αριθμών.

Στην Δ ομάδα ένα μαθητής ο Φ. δυσκολεύτηκε στη σχέση Μ=πΧ3 κατασκεύασε ένα πίνακα με τιμές, που άλλοτε ανταποκρίνονταν σε αυτή τη σχέση και άλλοτε στη σχέση Μ=πΧ2. Ένας άλλος μαθητής ο Α. αντιμετώπισε δυσκολία στη σχέση Μ=π Χ Μ , καθώς θεώρησε το μήκος σταθερό και διαιρούσε κάθε φορά με το δύο το πλάτος. Ένας άλλος μαθητής ο Δ., ενώ κατανόησε τη σχέση(Μ= π Χ 3) τοποθέτησε αντίθετα τις τιμές του μήκους και του πλάτους.

Στη συνέχεια, δόθηκαν 3 εικόνες σε κάθε ομάδα, που απεικόνιζαν τη Μόνα Λίζα. Έπρεπε οι μαθητές να κατανοήσουν πως σε σμίκρυνση μιας εικόνας σε ένα αρχείο Word οι διαστάσεις της φωτογραφίας θα πρέπει να είναι ανάλογες, ώστε να μην αλλοιωθεί η ανάλυση της εικόνας. Σε αυτή την άσκηση οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν τη σωστή σμίκρυνση ανάμεσα σε δυο προτεινόμενες εικόνες.

Η Α ομάδα υποστήριξε πως σε μια διαδικασία σμίκρυνσης δεν μικραίνουμε μόνο το πλάτος αλλά και το μήκος.

Η Β ομάδα ισχυρίστηκε πως η δεξιά εικόνα είναι η σωστή και η πρωτότυπη, ενώ στην αριστερή υπάρχει σμίκρυνση μόνο στο μήκος και της έχουν αυξήσει το πλάτος.

Η Γ ομάδα αποπειράθηκε να μετρήσει τα σχήματα και έτσι κατέληξε στη δεξιά εικόνα, επειδή η αριστερή έχει μικρότερο μήκος, απ’ όσο θα έπρεπε να έχει.

Η Δ ομάδα καταφεύγοντας σε μετρήσεις, διάλεξε τη δεξιά φωτογραφία, γιατί ο αριθμός του μήκους και του πλάτους είναι πιο κοντά στο μισό των διαστάσεων της αρχικής φωτογραφίας.

Στη συνέχεια θα εστιάσουμε σε δραστηριότητες που σχετίζονται με την αναλογία.

Στην $1^{η}$ φάση, κατά την οποία έπρεπε η κάθε ομάδα να πραγματοποιήσει τη σμίκρυνση ενός κομματιού του παζλ:

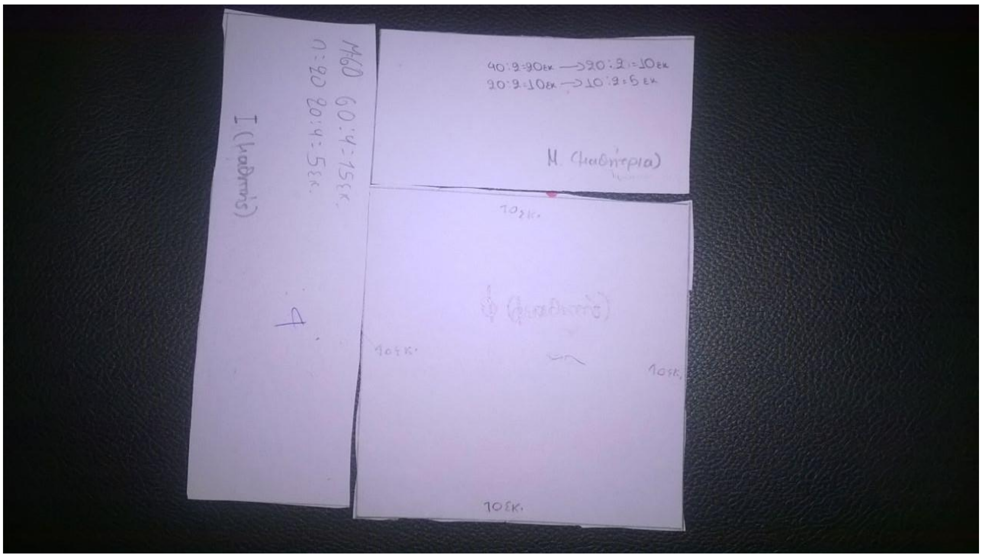
Η Α ομάδα, στην οποία δόθηκε το σχήμα G (A) με διαστάσεις 40Χ20 κατέληξε σε σμικρύνσεις, διαιρώντας δια δύο και ξανά διά δυο και ξανά διά δύο, δημιουργώντας έτσι σμικρύνσεις με διαστάσεις 20Χ10,10Χ5 , 5Χ 2,5. Η Ελ. πρότεινε να διαιρέσουν ξανά με το δύο και έτσι προέκυψαν οι διαστάσεις 10Χ5. Η Μ. υποστήριξε πως πρέπει να είναι ακόμα πιο μικρό το σχήμα, που θα προκύψει ,όσο το δυνατόν πιο μικρό και έτσι πρότεινε να διαιρεθούν πάλι διά δύο και προέκυψαν οι διαστάσεις 5Χ 2,5.

Η Β ομάδα, στην οποία δόθηκε το σχήμα G (A) με διαστάσεις 40Χ20 κατασκεύασαν τις ίδιες σμικρύνσεις, αλλά υπήρχαν και δυο μαθήτριες η Η. και η Β., που διαίρεσαν διά 5 και έτσι προέκυψαν οι διαστάσεις 8Χ4 και μια άλλη μαθήτρια η Μ., η οποία διαίρεσε με το 10, αφαιρώντας απλώς τα μηδενικά από τις διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου και κατέληξε σε ένα σχήμα 4Χ2.

Η ομάδα Γ, στην οποία δόθηκε το σχήμα F (Γ) με διαστάσεις 60Χ20,σε όλη την ομάδα διαίρεσαν διά 4 και τις δυο πλευρές και βρήκαν τις διαστάσεις 15 Χ5, εκτός από ένα μαθητή τον Γ., ο οποίος διαίρεσε με το 5 και βρήκε ως διαστάσεις του ορθογωνίου 12Χ4.

Η ομάδα Δ, στην οποία δόθηκε το σχήμα Ε (Β) δεν δόθηκαν οι διαστάσεις και έπρεπε οι μαθητές να τις υπολογίσουν. Βρήκαν ότι, αφού το σχήμα είναι τετράγωνο θα πρέπει όλες οι πλευρές να είναι ίσες οπότε στο σχήμα θα είναι 60-20 από τη πλευρά του G (A) άρα 40. Όλοι οι μαθητές κατέληξαν στη σμίκρυνση 20Χ20 ως τις μισές διαστάσεις του σχήματος και στη πορεία κάποιοι πρότειναν και άλλες διαστάσεις ο Δ. 8Χ8 διαιρώντας με το 5 τις αρχικές διαστάσεις, ο Φ. και ο Ν. 10Χ10 με τη διαίρεση διά 4 των αρχικών διαστάσεων.

Στη 2^{η} φάση, τα παιδιά πραγματοποίησαν μια εμπειρική επανασύνδεση των κομματιών σε σμίκρυνση, βρήκαν μόνο μια σύνθεση σωστή (Α : 10Χ5, Β: 10Χ10, Γ: 15Χ5), η οποία παρουσιάζεται παρακάτω. Ήταν σε θέση ο καθένας να αναλύει τον τρόπο σκέψης του τη διαδικασία που προηγήθηκε πριν προκύψει κάποιο αποτέλεσμα.



Σε αυτή την εικόνα παρουσιάζεται η μόνη επιτυχημένη επανασύνδεση των κομματιών που προέκυψε από τη σμίκρυνση ενός κομματιού του παζλ από κάθε ομάδα.

Στην επόμενη φάση, οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσει ο καθένας μια σμίκρυνση και των τριών κομματιών του παζλ. Στην Α ομάδα ένας μαθητής ο Χ. και μια μαθήτρια η Μ. αξιοποίησαν την ήδη υπάρχουσα σύνθεση, που προέκυψε νωρίτερα και πήραν τις μισές διαστάσεις , βρήκαν δηλαδή Α: 5Χ2,5, Β:5Χ5 , Γ : 7,5Χ 2,5. Μια μαθήτρια η Ελ. ισχυρίστηκε πως έπρεπε στην αρχή να διαιρέσει διά 2 και στη συνέχεια έπρεπε με το 5 για να γίνει ακόμα πιο μικρό. Έτσι κατέληξε στις διαστάσεις Α: 4Χ2 , Β: 4Χ4 , Γ : 6Χ2.

Στη Β ομάδα μια μαθήτρια η Β. διαιρώντας διά 10 κατέληξε στις παραπάνω διαστάσεις. Δυο άλλες μαθήτριες η Μ. και η Μ. πρότειναν να διαιρεθούν όλες οι διαστάσεις με το 5 και προέκυψαν τα εξής Α: 8Χ4 , Β: 8Χ8 , Γ : 12 Χ 4. Αντιθέτως, η Η. θέλησε να επιλέξει τυχαία ένα αριθμό το 11,5 και έτσι κατέληξε πως το Α είναι 8,2 Χ3,3 επειδή το άθροισμα τους θα είναι 11,5 , το Β θα είναι 8,2 Χ 8,2 οπότε το Γ θα είναι 11,5 Χ3,3.

Στη Γ ομάδα, ένα μαθητής ο Ι. ταύτισε τα σχήματα Α και Γ και απέδωσε τις ίδιες διαστάσεις 2,5Χ5 από το αποτέλεσμα του παζλ σε σμίκρυνση, που πέτυχε στην επανασύνδεση, διαιρώντας τις διαστάσεις του με το 2. Τρεις μαθήτριες η Γ, η Α, η Ευ. πήραν τις μισές διαστάσεις, βρήκαν δηλαδή Α: 5Χ2,5, Β:5Χ5, Γ: 7,5Χ 2,5. Ένας μαθητής ο Γ. διαίρεσε διά 6 τις αρχικές διαστάσεις και έτσι προέκυψαν το Α: 3,3 Χ 6,7 , το Β: 6,7Χ6,7 και το Γ: 10Χ 3,3.

Στην ομάδα Δ απέδωσαν τις μισές διαστάσεις του παζλ σε σμίκρυνση, βρήκαν Α: 5Χ2,5, Β:5Χ5, Γ: 7,5Χ 2,5, εκτός από τον Α. ο οποίος διαίρεσε τις διαστάσεις του αρχικού παζλ με το 10 και πρέκυψαν οι διαστάσεις Α: 4Χ2 , Β: 4Χ4 , Γ : 6Χ2.

Στη 4η φάση, οι μαθητές ανακάλεσαν τον τρόπο δράσης τους και διαπίστωσαν, γιατί ορισμένες σμικρύνσεις δεν ήταν σωστές. Ήταν σε θέση να εκφράσουν τον τρόπο δράσης τους.

Στην 5η φάση, ο εκπαιδευτικός δημιούργησε πίνακες από τα αποτελέσματα των μαθητών και διατυπώθηκαν οι σχέσεις, που διέπουν το μήκος και το πλάτος του κάθε σχήματος και οι σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων των υπολοίπων κομματιών του παζλ. Οι μαθητές κατανόησαν μέσα από τους πίνακες τις σχέσεις μήκους – πλάτους.

Στην τελευταία φάση, επεξηγήθηκαν οι ιδιότητες της αναλογίας, οι οποίες έγιναν κατανοητές από τους μαθητές μέσα από παραδείγματα. Η πρώτη ιδιότητα, έγινε κατανοητή στους μαθητές από τις σμικρύνσεις, που κατασκεύασαν σε προηγούμενη φάση και κατανόησαν πως ο λόγος παρέμεινε σταθερός. Η δεύτερη ιδιότητα του σταθερού λόγου σε κάθε ορθογώνιο του δοθέντος παζλ και των αντίστοιχων σμικρύνσεων, τεκμηριώθηκε με την αναφορά των λόγων των κομματιών σε σμίκρυνση και αντιλήφθηκαν ότι ο λόγος παρέμεινε σταθερός και στις αντίστοιχες σμικρύνσεις. Η τρίτη ιδιότητα των σχέσεων μιας πλευράς με τις υπόλοιπες διαστάσεις, παραμένει σταθερή και στη σμίκρυνση και στη μεγέθυνση τεκμηριώθηκε με βάση το παζλ, με αριθμητικά παραδείγματα (αν προστεθεί το 20 με το 40 θα μας δώσει τη μεγαλύτερη πλευρά 60 και ως σμίκρυνση 5 και 10 θα μας δώσει 15 ως σμίκρυνση της μεγαλύτερης πλευράς). Έτσι, οι μαθητές κατανόησαν πως δεν αρκούσε να διαιρεθούν όλες οι διαστάσεις με τον ίδιο αριθμό αλλά, να επαληθευτούν και οι σχέσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης μεταξύ των πλευρών, οι οποίες θα πρέπει να είναι ίδιες και στις σμικρύνσεις των κομματιών του παζλ, οι οποίες θα προκύψουν.

Συμπεράσματα

Ο Steefland το 1984 διατύπωσε ότι οι εικόνες, που αντικρίζουν τα παιδιά από τη σύγχρονη πραγματικότητα είναι το πρώτο στάδιο στην οικοδόμηση των εννοιών του λόγου και της αναλογίας. Στην παρέμβαση μου μετά την ολοκλήρωση της έβδομης φάσης, μέσα από τη παρατήρηση των εικόνων, με σκοπό να επιλέξουν τη σωστή σμίκρυνση της Μόνα Λίζα, έγινε αντιληπτό πως οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν καθόλου ακόμα και εμπειρικά να εντοπίσουν τη σωστή σμίκρυνση, χωρίς να καταφύγουν σε μετρήσεις.

Σύμφωνα με την έρευνα της Hart το 1988, πολλά παιδιά εμφάνισαν δυσκολίες στη μεγέθυνση σχημάτων σε περιπτώσεις, που ο λόγος ήταν διαφορετικός από 2:1 και αξιοποίησαν τη επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Στα πλαίσια της δικής μου παρέμβασης, οι μαθητές αξιοποίησαν πολλαπλασιαστικές ενέργειες και δεν συνάντησαν δυσκολίες στα σχήματα που ο λόγος ήταν 1:1 και 3: 1 στη περίπτωση σμίκρυνσης των κομματιών του παζλ.

Στη μελέτη του Χρίστου και της Παπαγεωργίου διαπιστώθηκε πως οι μαθητές αξιοποιούν διαφορετικές στρατηγικές, ανάλογα με τη μορφή του προβλήματος και των αριθμών του προβλήματος και χρησιμοποίησαν περισσότερο την αναγωγή στη μονάδα. Αντιθέτως, οι μαθητές στα πλαίσια της δικής μου διδακτικής εφαρμογής φάνηκε να εμμένουν στις ίδιες στρατηγικές σε όλες τις φάσεις, αξιοποιώντας πολλαπλασιαστικές στρατηγικές και κυρίως τη μέθοδο των ισοδύναμων κλασμάτων, πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας με τον ίδιο αριθμό τις διαστάσεις του σχήματος σε κάθε περίπτωση.

Μέσα από τα δεδομένα των αποτελεσμάτων προέκυψε :

- Η ελεύθερη επιλογή στρατηγικών για την επίλυση των δραστηριοτήτων από μέρους των μαθητών, έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές να υιοθετήσουν δικές τους διαφορετικές στρατηγικές προσέγγισης και να αποτελέσουν οι δικές τους προτάσεις ενδεχόμενες λύσεις των ασκήσεων.

- Η ανάδυση του θέματος μέσα από δραστηριότητες, τροφοδότησε την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών του λόγου και της αναλογίας.

- Ορισμένα παιδιά εργάστηκαν σε διαστάσεις μήκος και πλάτος ή μήκος και ύψος, αποκαλύπτοντας μια προϋπάρχουσα γνώση για την ομοιότητα.

- Οι στρατηγικές, που αξιοποίησαν οι μαθητές στα προβλήματα αναλογίας δεν ήταν οι αναμενόμενες προσθετικές, αλλά αξιοποίησαν πολλαπλασιαστικές ενέργειες.

- Οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης κατανόησαν την έννοια της αναλογίας σχηματικά και μέσα από παραδείγματα ήρθαν σε επαφή με τις ιδιότητες της αναλογίας.

Τα ερευνητικά ερωτήματα, που απαντήθηκαν στη διαδικασία της παρέμβασης αφορούσαν το είδος των στρατηγικών, που χρησιμοποιούν οι μαθητές, όταν λύνουν αριθμητικά προβλήματα αναλογίας και αν οι μαθητές κατάφεραν να κατανοήσουν την έννοια της αναλογίας.

Οι στρατηγικές, που αξιοποίησαν οι μαθητές στα προβλήματα αναλογίας ήταν οι πολλαπλασιαστικές ενέργειες.

Οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης κατανόησαν την έννοια της αναλογίας σε ικανοποιητικό βαθμό. Αυτό φάνηκε μέσα από τα παραδείγματα των ιδιοτήτων των αναλογίων, τα οποία οι μαθητές κατανόησαν και από την επιλογή της σωστής σμίκρυνσης ομαδικά στην άσκηση με τις εικόνες της Μόνας Λίζας.

Στις φάσεις του δεύτερου μέρους, οι μαθητές επαναλαμβάνοντας τις στρατηγικές, που επέφεραν σωστά αποτελέσματα στο πρώτο μέρος αντιλήφθηκαν το σωστό κριτήριο κατασκευής μια σμίκρυνσης ή μιας μεγέθυνσης ενός σχήματος.

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

Βιβλίο του Δασκάλου των Μαθηματικών της ΣΤ΄ τάξης

Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σιημητρά - Κωνσταντίνου, Α. & Χριστοδουλίδου, Ο. (2006). *Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα;* Πρακτικά του 9^{ου} Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου.

Γεωργιάδου – Καμπουρίδη Β.(1999). *Μια πειραματική προσέγγιση της έννοιας του λόγου στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση.* Πρακτικά του 16^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας σε συνεργασία με το Παιδαγωγικό τμήμα Πανεπιστημίου Πατρών: Λάρισα

ΔΕΠΠΣ (Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών) ΦΕΚ 303Β/13-3-2003 *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*. Απόφαση Υπουργείου Παιδείας Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων 12-12-1997/Γ2.

Ηροδότου Μ., Ιωάννου Π., Κοντογιάννη Κ., Γαγάτσης Α.(2006). *Η επίλυση των αριθμητικών και λεκτικών προβλημάτων αναλογίας.* Πρακτικά του 9^{ου} Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου σε συνεργασία με το Τμήμα Επιστημών της Αγωγής Πανεπιστήμιο Κύπρου : Λευκωσία

Μοδέστου Μ.(2004). *Η αναλογία (f(x)=ax) ως επιστημολογικό εμπόδιο;* Στο Α. Γαγάτσης, Ι. Ηλία, Α. Κουσιάππας, Μ. Μοδέστου, Ν. Μουσουλίδης, & Μ. Πιττάλης (Επ. Εκδ.), Σύγχρονη Έρευνα στη Μαθηματική Παιδεία (σσ. 215-225). Λευκωσία: Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Μοδέστου Μ. (2007). *Μαθηματική αναλογική σκέψη στο Δημοτικό και Γυμνάσιο ένα πολυδιάστατο γνωστικό και μεταγνωστικό μοντέλο*. Μέρος διδακτορικής διατριβής από το βιβλίο: Προβλήματα μάθησης των μαθηματικών κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

Μοδέστου Μ. & Γαγάτσης, Α.(2009). Ένα *διαφορετικό πλαίσιο διδασκαλίας της έννοιας της αναλογίας.* Στο Α. Γαγάτσης, Α. Μιχαηλίδου, & Α. Χαραλάμπους, (Εκδ.), Εκπαιδευτική Έρευνα και Επιμόρφωση Εκπαιδευτικών στην Κύπρο. Πρακτικά του Συνεδρίου Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (σσ. 161–174). Λευκωσία: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Αξιολόγησης.

Παπαγεωργίου Ε. & Χρίστου Κ.(1999). *Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων αναλογίας.* Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής : Λευκωσία

Παπαδοπούλου Β.(2015). *Παρατήρηση Διδασκαλίας : Θεωρητικό πλαίσιο και εφαρμογές.* Θεσσαλονίκη: Κυριακίδη

Χατζηκυριάκου Κ.(2013). *Μαθηματικά για τη Δασκάλα και τον Δάσκαλο.* Θεσσαλονίκη: Σοφία

Χρίστου Κ. & Φιλίππου Γ. (1999). *Άτυπα μοντέλα προβλημάτων αναλογίας*. Πρακτικά του 16ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας σε συνεργασία με το Τμήμα Επιστημών της Αγωγής Πανεπιστήμιο Κύπρου : Λάρισα

Ξένη Βιβλιογραφία

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). *Rational Number Concepts*. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Zhe Chen (1995). *Analogical transfer: From schematic pictures to problem solving* (Volume 23, Issue 2)

Mamede E., Nunes T., Bryant P. (2005). *The equivalence and ordering of fractions in partwhole and quotient situations*– University of Minho, Oxford Brookes University

Patricia A., Alexander C., White S., Patricia A. Haensly, Crimmins-Jeanes M.(1987). *Training in Analogical Reasoning* (Vol 24, Issue 3)

Παράρτημα