

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΤΑΚΑΘΙΣΗΣ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΣΕ ΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΗ

ΣΤΗΛΗ ΥΓΡΟΥ

Χατζηαντωνίου Α. Γεώργιος ΑΕΜ:338

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Δρ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ

ΚΟΖΑΝΗ (ΙΟΥΛΙΟΣ, 2013)

*Στην μνήμη του παππού μου Χατζηαντωνίου Α. Γεωργίου
και της γιαγιάς μου Μαλλιαροπούλου-Κουδρόγλου Δόμνας.*

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάται η κίνηση σφαιρικών σωματιδίων που καθιζάνουν σε στήλη ταλαντούμενου ρευστού. Η διαφορική εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου εντός της στήλης ρευστού επιλύεται αριθμητικά στο προγραμματιστικό πακέτο MatLab. Εξετάζονται διαφορετικές μορφές της εξίσωσης κίνησης χωρίς και με την προσθήκη του όρου ιστορίας Basset και τα υπολογιστικά αποτελέσματα συγκρίνονται με αντίστοιχα πειραματικά διαθέσιμα από τη βιβλιογραφία. Παρατηρείται ότι ο υπολογισμός του χρόνου (ή ισοδύναμα της ταχύτητας) καθίζησης του σωματιδίου χωρίς τον όρο ιστορίας Basset δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα με σχετική απόκλιση μικρότερη από 8% ως προς τα πειραματικά αποτελέσματα για όλες τις συνθήκες οι οποίες εξετάστηκαν. Η προσθήκη του όρου ιστορίας Basset δίνει αποτελέσματα τα οποία αποκλίνουν σημαντικά από τα πειραματικά σε μεγάλα πλάτη ταλάντωσης και σε υψηλές συχνότητες ταλάντωσης. Το στοιχείο αυτό υποδεικνύει ότι ο όρος ιστορίας ενδεχομένως δεν έχει φυσική σημασία σε μη-μόνιμες περιοδικές συνθήκες (πιθανόν είναι χρήσιμος σε μη-μόνιμες μεταβατικές συνθήκες). Στη συνέχεια εξετάζεται η επίδραση της σχετικής πυκνότητας και της διαμέτρου του σωματιδίου (μεταβλητές οι οποίες σχετίζονται με τον αριθμό Reynolds της ροής) για ένα εύρος συχνοτήτων και πλατών ταλάντωσης της στήλης. Παρατηρείται ότι για λόγους πυκνότητας σωματιδίου και ρευστού κοντά στη μονάδα η ταχύτητα αυξάνεται ελαφρώς με την επιβολή ταλαντώσεων, ενώ όταν η πυκνότητα του σωματιδίου είναι μεγαλύτερη από αυτή του ρευστού η επιβολή ταλαντώσεων επιφέρει μείωση της ταχύτητας.

Ευχαριστίες

Καταρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επ. Καθηγητή του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Π.Δ.Μ και επιβλέπων Καθηγητή της παρούσης Διπλωματικής, κύριο Κωνσταντινίδη Ευστάθιο, για την δυνατότητα που μου έδωσε να εκπονήσω αυτήν την μελέτη, αλλά και για την αγαστή συνεργασία μας. Επίσης να ευχαριστήσω τον φίλο και απόφοιτο του τμήματος αυτού, Κουρεντή Λεωνίδα για τις συμβουλές που μου προσέφερε στο προγραμματιστικό σκέλος αυτής της εργασίας, και την μνηστή μου Γεωργίου Κυριακή για την αμέριστη συμπαράστασή της.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	1
Βιβλιογραφική ανασκόπηση.....	3
Δυνάμεις που επιδρούν σε ένα σωματίδιο	3
Εξίσωση κίνησης σωματιδίου.....	4
Πειραματικά δεδομένα.....	9
Υπολογιστική μεθοδολογία.....	12
Ορισμός του προβλήματος.....	12
Σύστημα συντεταγμένων	12
Ταλάντωση του ρευστού.....	12
Συντελεστής οπισθέλκουσας.....	13
Αρχικές συνθήκες	13
Άλλες παράμετροι.....	14
Επίλυση εξισώσεων	14
Θεωρητική εξίσωση χωρίς τον όρο Basset	14
Θεωρητική εξίσωση με τον όρο Basset	16
Άλλες εξισώσεις.....	20
Επεξεργασία αποτελεσμάτων	21
Χρόνος καθίζησης.....	21
Σχετικό σφάλμα	21
Υπολογισμός δυνάμεων	22
Παραμετροποίηση.....	22
Αποτελέσματα - Συζήτηση	24
Θεωρητική εξίσωση χωρίς τον όρο Basset	24
Σχετικό σφάλμα	29
Παραλλαγές της θεωρητικής εξίσωσης	30
Προσθήκη του όρου Basset.....	31
Επίδραση διαφόρων παραμέτρων	38
Συμπεράσματα	40
Βιβλιογραφία.....	42
Ελληνική	42
Ξενόγλωσση.....	42
Παράρτημα - Βασικοί Κώδικες MatLab.....	44

Εισαγωγή

Η κίνηση ενός σωματιδίου εντός ρευστού έχει αποτελέσει ένα θεμελιώδες πρόβλημα μελέτης για πολλούς ερευνητές εδώ και πολλές δεκαετίες. Το 1850 ο Stokes έθεσε τις βασικές αρχές και τις πρώτες εξισώσεις που καθορίζουν την κίνηση του σωματιδίου μέσα σε ρευστό και μελέτησε την πιο απλή περίπτωση, ασχολούμενος με την καθίζηση ενός σωματιδίου σε συνθήκες στρωτής ροής γύρω από το σωματίδιο. Μάλιστα οι πρώτες εξισώσεις που διατυπώθηκαν σχετικά με το φαινόμενο φέρουν το όνομα του.

Η ανάπτυξη στις πρακτικές εφαρμογές με βάση την καθίζηση σωματιδίων σε ρευστό, οδήγησε στην βελτίωση των νόμων του Stokes και αναπτύχθηκαν σχέσεις για την ταυτόχρονη καθίζηση πολλών σωματιδίων (Garside και Al-Dibouni, 1977), για την παρεμποδιζόμενη καθίζηση, για τη μεταξύ τους επίδραση στον μηχανισμό καθίζησης (Nasr-El-Din et al., 1988), καθώς και στην μεταβολή της ταχύτητας καθίζησης. Σε κάποιες μελέτες θεωρήθηκε ότι το ρευστό δεν είναι άπειρο (Balaramakrishna et al. 1992), ενώ σε κάποιες άλλες ότι τα σωματίδια έχουν διαφορετικό σχήμα και πυκνότητα (Masliyah et al. 1979).

Η καθίζηση σωματιδίων και αιωρημάτων τους συναντάται σε πρακτικές εφαρμογές όπως στις εγκαταστάσεις επεξεργασίας υγρών αποβλήτων, όπου δημιουργούνται δεξαμενές απομάκρυνσης των στερεών από τα απόβλητα, διεργασία πολύ σημαντική για τη σωστή λειτουργία της εγκατάστασης. Χαρακτηριστικό είναι ότι η ταχύτητα καθίζησης των στερεών είναι πολύ σημαντική παράμετρος στον σχεδιασμό δεξαμενών καθίζησης αφού καθορίζει το χρόνο παραμονής των λυμάτων σε αυτές.

Μια άλλη σημαντική εφαρμογή του φαινομένου της κίνησης των σωματιδίων μέσα σε ρευστό έχουμε στους υδραυλικούς διαχωριστές, οι οποίοι έχουν σημαντικές εφαρμογές, όπως στον εμπλουτισμό των μεταλλευμάτων. Σε αυτούς διαχωρίζονται σωματίδια διαφορετικών τύπων τα οποία στην τροφοδοσία φέρονται ως μίγμα στερεών.

Η κίνηση του σωματιδίου σε ρευστό, είναι ένα θέμα που παρουσιάζει ερευνητικό ενδιαφέρον ακόμη και σήμερα. Η χρήση σύγχρονων μέσων για την παρατήρηση του

πεδίου ροής, όπως η δυνατότητα βιντεοσκόπησης και τεχνικών μέτρησης της ταχύτητας στο χώρο συμβάλουν στη μελέτη των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα κατά την καθίζηση.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει ο συνδυασμός της καθίζησης και ενός ελεγχόμενα μεταβαλλόμενου πεδίου ροής. Τέτοιο είναι το πεδίο ροής που δημιουργείται από την εφαρμογή ταλάντωσης σε ένα ρευστό. Η επίδραση της ταλάντωσης στους χρόνους καθίζησης, είτε με την αύξηση είτε με την ελάττωση τους, θα μπορούσε να επηρεάσει σημαντικά το χρόνο επαφής των σωματιδίων με το ρευστό.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η χρήση των εξισώσεων κίνησης που αφορούν την κίνηση σωματιδίου που καθιζάνει σε στήλη νερού, για την περίπτωση όπου η στήλη ταλαντεύεται αρμονικά.

Οι επιμέρους στόχοι είναι:

- Η επίλυση της εξίσωσης κίνησης ενός σωματιδίου σε ταλαντούμενη στήλη ρευστού.
- Η σύγκριση των αποτελεσμάτων με διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα.
- Η διερεύνηση της βασιμότητας της ενσωμάτωσης της δυνάμεως Basset σε μη-μόνιμη περιοδική ροή.
- Η διερεύνηση της επίδρασης διάφορων παραμέτρων όπως η συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης του ρευστού, η διάμετρος και η μάζα του σωματιδίου στην κίνηση του καθιζάνοντος σωματιδίου.

Στην παρούσα εργασία αρχικά γίνεται βιβλιογραφική ανασκόπηση αναφορικά με τις εξισώσεις κίνησης σωματιδίων σε ταλαντευόμενη στήλη ρευστού και δίνεται μία σύντομη περιγραφή των πειραματικών δεδομένων με τα οποία θα γίνει σύγκριση των υπολογισμών. Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται περιγραφή της υπολογιστικής μεθοδολογίας και στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και συζητούνται τα αποτελέσματα. Τέλος αναφέρονται τα κύρια συμπεράσματα από την παρούσα εργασία. Να σημειωθεί ότι στο παράρτημα της εργασίας επισυνάπτονται οι σημαντικότεροι κώδικες του προγραμματιστικού περιβάλλοντος MatLab που αναπτύχθηκαν κατά την μελέτη.

Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Δυνάμεις που επιδρούν σε ένα σωματίδιο

Οι επιμέρους δυνάμεις που ενεργούν σε ένα σωματίδιο το οποίο καθιζάνει χωρίς περιστροφή εντός ταλαντούμενης στήλης υγρού είναι οι παρακάτω.

Δύναμη βαρύτητας: Οφείλεται στην επιτάχυνση της βαρύτητας g με φορά πάντοτε προς το κέντρο της γης.

Δύναμη άνωσης: Η ανωστική δύναμη λόγω της κατακόρυφης διανομής της στατικής πίεσης σε μια στήλη υγρού.

Δύναμη Οπισθέλκουσας ή Αντίσταση (Drag): Δύναμη η οποία έχει τον ίδιο φορέα με αυτόν της ταχύτητας, αλλά αντίθετη φορά, και εμφανίζεται κατά την κίνηση αντικειμένων εντός ρευστού. Η παρουσία της δύναμης οφείλεται στη διαφορετική πίεση η οποία επικρατεί στις δύο πλευρές ενός σώματος.

Δύναμη προστιθέμενης μάζας (Added Mass Force): Το σωματίδιο λόγω της επιτάχυνσης συμπαρασύρει μάζα ρευστού στην μπροστινή του επιφάνεια κάτι που είναι η αιτία της ύπαρξης της δύναμης Added Mass.

Δύναμη λόγω χρονικά μεταβαλλόμενης κλίσης πίεσης (Pressure gradient): Με την ύπαρξη χρονικά μεταβαλλόμενης επιτάχυνσης δημιουργούνται κύματα πίεσης με αποτέλεσμα την εφαρμογή μιας μη-μόνιμης δύναμης (Froude—Krylov) παρόμοια με την κρούση του σωματιδίου σε ένα τοίχωμα. Η διεύθυνση της δύναμης είναι παράλληλη με αυτή της διάδοσης των κυμάτων πίεσης

Δύναμη ιστορίας της ροής (Basset History Force): Καθώς η θέση του σωματιδίου σε σχέση με του ρευστού μεταβάλλεται μη-μόνιμα, και συνεχώς δημιουργούνται διαμορφώσεις ροής γύρω από το σφαιρίδιο, υπάρχει το φαινόμενο «ανάμνησης» της ρευστοδυναμικής κατάστασης που προηγήθηκε. Γι αυτό το λόγο η δύναμη Basset καλείται αλλιώς και δύναμη ιστορίας (History Force).

Εξίσωση κίνησης σωματιδίου

Αρχικά οι Basset (1888), Boussinesq (1903) και Ossen (1927) περιέγραψαν την ευθύγραμμη κίνηση σωματιδίου σε ιξώδες ρευστό σύμφωνα με την εξίσωση (Odar και Hamilton, 1964)

$$\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\rho_p \frac{du_p}{dt} = -6\pi R\rho_f u_p - \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\rho_f \frac{du_p}{dt} - 6R^2\pi\sqrt{\frac{\rho_f\mu}{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{du_p}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (1)$$

όπου ο δείκτης 'p' χαρακτηρίζει ιδιότητες που αφορούν το σωματίδιο, ο δείκτης 'f' χαρακτηρίζει ιδιότητες του ρευστού, 'u' είναι η ταχύτητα, 'ρ' η πυκνότητα, 'R' η ακτίνα του σφαιρικού σωματιδίου, και 'μ' το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

Ο όρος στο αριστερό μέρος της εξίσωσης (1) αντιστοιχεί στην συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο. Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης αντιστοιχεί στην δύναμη οπισθέλκουσας ή αντίσταση (Drag), ο δεύτερος όρος στην δύναμη προστιθέμενης μάζας (Added Mass) και ο τρίτος όρος στην δύναμη Basset ο οποίος σχετίζεται με την ιστορία της επιτάχυνσης του σωματιδίου (στο Παράρτημα I παρατίθεται σύντομη περιγραφή των δυνάμεων που ασκούνται στο σωματίδιο).

Φυσικά στην περίπτωση που το σωματίδιο αφηθεί να καθιζάνει ελεύθερο τότε θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και η δύναμη της βαρύτητας και η (1) γίνεται

$$\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\rho_p \frac{du_p}{dt} = -6\pi R\rho_f u_p - \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\rho_f \frac{du_p}{dt} - 6R^2\pi\sqrt{\frac{\rho_f\mu}{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{du_p}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)(\rho_p - \rho_f)g \quad (2)$$

όπου 'g' είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας (Kim et al., 1998).

Οι παραπάνω εξισώσεις αφορούν μόνο απολύτως σφαιρικά σωματίδια που η κίνηση τους στο ρευστό χαρακτηρίζεται από πολύ μικρές ταχύτητες και μεγάλες επιταχύνσεις σε στάσιμο ασυμπίεστο ρευστό (Odar, 1963 και Kim et al., 1998).

Στην συνέχεια οι Maxey και Riley (1983) επέκτειναν την εξίσωση για μη ομοιόμορφη έρπουσα ροή:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\rho_p\frac{du_p}{dt} &= 6\pi R\rho_f(u_l - u_p) + \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\rho_f\frac{d(u_f - u_p)}{dt} + \\ \left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\frac{Du_f}{dt} &+ 6R^2\pi\sqrt{\frac{\rho_f\mu}{\pi}}\int_{t_0}^t\frac{d(u_f - u_p)}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}d\tau + \left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)(\rho_p - \rho_f)g \end{aligned} \quad (3)$$

όπου u_l είναι η ταχύτητα του ρευστού στο κέντρο του σωματιδίου. Να σημειωθεί επίσης ότι υπάρχουν δύο παράγωγοι στον χρόνο. Ο συμβολισμός $\frac{D}{dt}$ αντιπροσωπεύει παράγωγο της κίνησης του ρευστού στην γειτονιά του σωματιδίου (δηλαδή περιγράφει την συμπεριφορά των μέσων ιδιοτήτων του ρευστού) ενώ ο συμβολισμός $\frac{d}{dt}$ αντιπροσωπεύει παράγωγο της κίνησης του σωματιδίου. Στην περίπτωση που η ροή είναι (ή μπορεί να θεωρηθεί) ομοιόμορφη δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των δύο παραγώγων (Sirignano, 2005). Η θεώρηση αυτή είναι συνετή στην περίπτωση χαμηλών αριθμών Reynolds και σε περιπτώσεις ήπιων αποκλίσεων από την ομοιογένεια της ροής (Berlemont et al., 1990). Ο τρίτος όρος στο δεξιό μέλος της (3) αφορά δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σωματίδιο λόγω κλίσης πίεσης (Sirignano, 2005).

Επιπρόσθετα οι Maxey και Riley (1993) περιέλαβαν στην παραπάνω εξίσωση έναν παραπάνω όρο για την περίπτωση όπου υπήρχε αρχική διαφορά μεταξύ της ταχύτητας του ρευστού και του σωματιδίου. Ο όρος αυτός είναι $\frac{6R^2\sqrt{\pi\rho\mu}(u_l(0) - u_p(0))}{\sqrt{t}}$.

Η εξίσωση (3) δείχνει να δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο στην περίπτωση όπου $Rk \ll 1$ (όπου k το μέγεθος της μικρότερης δίνης). Δηλαδή όταν το σωματίδιο είναι πολύ μικρότερο από την κλίμακα Kolmogorov της τύρβης. Σε αυτήν την περίπτωση η ροή μπορεί να θεωρηθεί ψευδο-ομοιόμορφη (Sirignano, 2005). Επίσης η εξίσωση αυτή εφαρμόζεται μόνο για την περίπτωση έρπουσας ροής. Με στόχο την επέκταση της εξίσωσης σε υψηλότερους αριθμούς Reynolds, οι Berlemont et al. (1990) τροποποίησαν τον όρο που σχετίζεται με την οπισθέλκουσα δύναμη ως εξής:

$$\frac{1}{2}C_{Dstd}\pi R^2\rho_f|u_l - u_p|(u_l - u_p) \quad (4)$$

όπου C_{Dstd} είναι ο συντελεστής οπισθέλκουσας για μόνιμη ροή (σταθερή ταχύτητα).

Ο όρος προστιθέμενης μάζας μπορεί να αγνοηθεί στην περίπτωση που η πυκνότητα του ρευστού είναι πολύ μικρότερη από την πυκνότητα του σωματιδίου. Γενικότερα στην περίπτωση που το σωματίδιο χαρακτηρίζεται από μεγάλες χρονικές αποκρίσεις σε σχέση με την χρονική απόκριση της ροής, ο δεύτερος, τρίτος και τέταρτος όρος από την εξίσωση (3) μπορούν να αγνοηθούν.

Οι Odar και Hamilton (1964) και ο Odar (1966) προσπάθησαν να τροποποιήσουν εμπειρικά κάποιους από τους παραπάνω όρους ώστε η εξίσωση να δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στην περίπτωση που το σωματίδιο ταλαντεύεται σε ευθεία γραμμή σε ακίνητο ρευστό. Μετά από εργαστηριακά πειράματα κατέληξαν στην παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\rho_p \frac{du_p}{dt} = & \frac{1}{2}C_{Dstd}\pi R^2\rho_l|u_p|u_p + C_a \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\rho_l \frac{du_p}{dt} \\ & + C_h 6R^2\pi \sqrt{\frac{\rho_l\mu}{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{du_p}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

όπου

$$C_a = 2.1 - \frac{0.123M_{A1}^2}{1 + 0.12M_{A1}^2}, \quad (6)$$

$$C_h = 0.48 + \frac{0.52M_{A1}^3}{(1 + M_{A1})^3} \quad (7)$$

και

$$M_{A1} = \frac{2R}{|u_f - u_p|} \left| \frac{d|u_f - u_p|}{dt} \right| \quad (8)$$

όπου ο όρος M_{A1} ουσιαστικά είναι η αδιάστατη σχετική επιτάχυνση. Να σημειωθεί ότι στην βιβλιογραφία συχνά χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός A_c για την σχετική επιτάχυνση, όπου $A_c = \frac{1}{M_{A1}}$ (π.χ. Berlemont et al., 1990 και Odar, 1966). Επίσης παρατηρείται διαφορά στον ορισμό της αδιάστατης επιτάχυνσης. Ως παράδειγμα οι Berlemont et al. (1990) την ορίζουν ως

$$M_{A1} = \frac{2R}{|u_f - u_p|^2} \left| \frac{d(u_f - u_p)}{dt} \right|. \quad (9)$$

Τέλος σε μερικές εργασίες οι συντελεστές C_a και C_h έχουν ενσωματωμένους τους συντελεστές '1/2' και '6' που εμφανίζονται στους όρους προστιθέμενης μάζας και δυνάμεως Basset αντίστοιχα.

Θεωρώντας τώρα την περίπτωση όπου το σωματίδιο αφήνεται ελεύθερο και η ροή είναι παλλόμενη τότε στην εξίσωση (5) μπορούν να προστεθούν ο όρος που σχετίζεται με την κλίση πίεσης καθώς και ο όρος που σχετίζεται με την δύναμη της βαρύτητας. Με άλλα λόγια μπορούν οι συντελεστές διόρθωσης για ταλαντευόμενο σωματίδιο (6) και (7) να ενσωματωθούν στην εξίσωση (3) ώστε πλέον αυτή να περιγράφει την κίνηση σωματιδίου το οποίο καθιζάνει ελεύθερα σε παλλόμενη ροή.

Θεωρώντας επίσης ότι η ροή είναι ψευδο-ομοιόμορφη (ώστε $\frac{D}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt}$) και χρησιμοποιώντας την διόρθωση στον όρο της οπισθέλκουσας δύναμης (εξ. (4)) τότε η κίνηση του σωματιδίου μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right) \rho_p \frac{du_p}{dt} = & \frac{1}{2} C_{dst} \pi R^2 \rho_f |u_f - u_p| (u_f - u_p) + C_a \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right) \rho_f \frac{d(u_f - u_p)}{dt} \\ & + \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right) \frac{du_f}{dt} + C_h 6R^2 \pi \sqrt{\frac{\rho_f \mu}{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{d(u_f - u_p)}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} d\tau + \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right) (\rho_p - \rho_f) g \end{aligned} \quad (10)$$

η οποία χρησιμοποιήθηκε από τους Berlemont et al. (1990).

Να σημειωθεί ότι η παραπάνω εξίσωση ισχύει μόνο στην περίπτωση σφαιρικών λείων σωματιδίων που δεν περιστρέφονται. Επίσης θεωρείται ότι τα σωματίδια δεν

αλληλεπιδρούν και δεν επηρεάζουν την τύρβη και ότι οι καμπυλώσεις των ροϊκών γραμμών είναι αμελητέες. Να σημειωθεί επίσης ότι η εξίσωση συνεχίζει να ισχύει θεωρητικά μόνο για διαμέτρους σωματιδίων μικρότερες της κλίμακας Kolmogorov, αλλά παρόλα αυτά, αυτή δεν αποτελεί αναγκαία συνθήκη (Berlemont et al., 1990).

Μεταγενέστερες μελέτες έδειξαν ότι ουσιαστικά ο συντελεστής διόρθωσης στον όρο που σχετίζεται με την δύναμη προστιθέμενης μάζας (Added Mass) είναι σχεδόν μονάδα στην περίπτωση πεπερασμένων αριθμών Reynolds (σχεδόν για όλες τις τιμές της αδιάστατης σχετικής επιτάχυνσης) και όχι μόνο για μικρούς αριθμούς Reynolds. Να σημειωθεί ότι οι συντελεστές εξήχθησαν από πειράματα για $0 < Re < 60$ όπου Re είναι ο αριθμός Reynolds βασισμένος στην σχετική ταχύτητα και στην διάμετρο του σωματιδίου (Sirignano, 2005).

Μελέτες από τους Mei και Adrian (1992) και Mei (1994) έδειξαν ότι η συνάρτηση στο ολοκλήρωμα του όρου Basset θα πρέπει να μειώνεται πιο γρήγορα από ότι η $\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}$ για μεγάλους χρόνους και μάλιστα έδειξαν ότι ο αρχικός όρος Basset δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο στην περίπτωση υψηλών συχνοτήτων και μικρών αριθμών Reynolds. Οι Kim et al. (1998) πρότειναν την παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\rho_p \frac{du_p}{dt} &= \frac{1}{2}C_{Dstd}\pi R^2\rho_f |u_f - u_p|(u_f - u_p) + \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\rho_f \frac{d(u_f - u_p)}{dt} + \\ \left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)\frac{du_f}{dt} &+ 6\pi\mu R\sqrt{\frac{\rho_f\mu}{\pi}} \int_{t_0^+}^t K(t-\tau, \tau) \frac{d(u_f - u_p)}{d\tau} d\tau + \left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)(\rho_p - \rho_f)g \\ &+ 6\pi\mu RK_1(t)[u_f(0^+) - u_p(0^+) - u_f(0^-) + u_p(0^-)] \end{aligned} \quad (11)$$

όπου

$$\begin{aligned}
 K(t-\tau, \tau) &= \left(\left[\frac{\pi(t-\tau)v}{R^2} \right]^{0.5/c_1} + G_1 \left[\frac{\pi |u_f(\tau) - u_p(\tau)|^3}{2 R v f_H^3} (t-\tau)^2 \right]^{1/c_1} \right)^{-c_1} \\
 G(\tau) &= \frac{1}{1 + b \sqrt{M_{A1}(\tau)}}, \\
 \beta &= \frac{c_2}{1 + \varphi_r \varphi_r^{c_4} / [c_3 (\varphi_r + \varphi_r^{c_4})]}, \\
 f_H &= 0.75 + c_5 \operatorname{Re}_t(\tau), \\
 K_1(t) &= \left(\left[\frac{\pi t v}{R^2} \right]^{0.5/c_1} + G_1 \left[\frac{\pi |u_f(0) - u_p(0)|^3}{2 R v f_H^3(\operatorname{Re}_{t_0})} t^2 \right]^{1/c_1} \right)^{-c_1}, \\
 G_1 &= \frac{1}{1 + c_6 \operatorname{Re}_{t_0}^{-0.25} (\rho_r + 0.5)^{-0.5}}, \\
 \varphi_r(t) &= \frac{M_{A2}}{M_{A1}}, M_{A2} = \frac{(2R)^2}{|u_f - u_p|^3} \left| \frac{d^2(u_f - u_p)}{dt^2} \right|, \rho_r = \frac{\rho_p}{\rho_f}. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Σύγκριναν την εξίσωση (11) καθώς και των προηγούμενων εξισώσεων με αποτελέσματα από την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes και έδειξαν ότι η (11) δίνει τα πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα στην περίπτωση ελεύθερης καθίζησης σωματιδίου σε ροή που ταλαντώνεται αρμονικά. Επίσης έδειξαν ότι την μεγαλύτερη επίδραση έχουν οι όροι της οπισθέλκουσας δύναμης και της δυνάμεως Basset.

Πειραματικά δεδομένα

Η καθίζηση στερεών σωματιδίων σε ταλαντούμενη στήλη υγρού μελετήθηκε στη διπλωματική εργασία του Γκουδούλα (1995). Η εργασία είχε ως στόχο την μελέτη την καθίζηση ενός μεμονωμένου σωματιδίου καθώς και συσσωματωμάτων, αλλά αυτή εστιάζεται κυρίως σε ένα μεμονωμένο σωματίδιο χαμηλής πυκνότητας (περίπου ίσης με του ρευστού). Για την μελέτη εκτελέστηκαν πειράματα για τον υπολογισμό της ταχύτητας καθίζησης καθώς και για την κίνηση του σωματιδίου κατά την πτώση. Τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία για την επαλήθευση των εξισώσεων κίνησης και οπότε είναι αναγκαία η σύντομη περιγραφή των πειραμάτων.

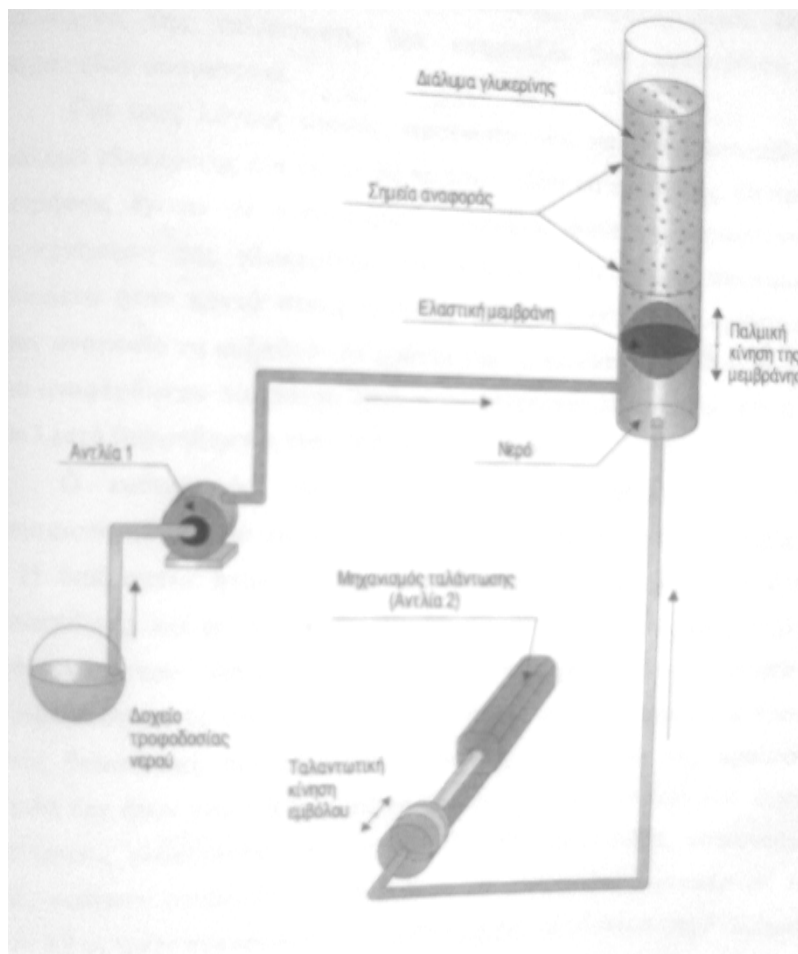
Για τα πειράματα χρησιμοποιήθηκε πειραματική διάταξη η οποία αποτελούνταν από μία κυλινδρική στήλη υγρού, μια αντλία νερού, ένα δοχείο τροφοδοσίας νερού και έναν μηχανισμό ταλάντωσης (Σχήμα 2-1). Η κυλινδρική στήλη αποτελούνταν από δύο μέρη που χωρίζονταν από μία μεμβράνη. Το πάνω μέρος περιείχε το ρευστό και το κάτω μέρος που περιείχε νερό. Το κάτω μέρος ήταν συνδεδεμένο με τον μηχανισμό ταλάντωσης ο οποίος προκαλούσε την παλμική κίνηση της μεμβράνης η οποία στην συνέχεια ανάγκαζε το ρευστό σε αρμονική ταλάντωση.

Το ρευστό που χρησιμοποιήθηκε στην στήλη υγρού ήταν διάλυμα γλυκερίνης και νερού. Ως σωματίδια χρησιμοποιήθηκαν σφαιρίδια με μικρή πυκνότητα. Η επιλογή των σωματιδίων και του ρευστού έγινε με τέτοιο τρόπο ώστε η ταχύτητα καθίζησης των σωματιδίων να είναι όσον το δυνατόν μικρότερη, ώστε τα σφάλματα κατά την μέτρηση να είναι και αυτά με την σειρά τους όσο το δυνατόν μικρότερα. Οι βασικές τους ιδιότητες παρουσιάζονται στον Πίνακα 2-1.

Η γυάλινη στήλη υγρού έχει μήκος ένα μέτρο και διάμετρο 49,7 mm. Οι μετρήσεις των χρόνων καθίζησης των μεμονωμένων σωματιδίων γίνονταν από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού έως το τέλος της στήλης κοντά στην βάση (1 m). Εξετάστηκαν διάφορες περιπτώσεις πλάτους και συχνότητας ταλάντωσης της στήλης ρευστού. Συγκεκριμένα εξετάστηκαν συχνότητες $f = 0, 0,5, \dots, 5, 5,5$ Hz και πλάτη ταλάντωσης $A=0,175, 0,25, 0,375, 0,425, 0,5$ cm. Για κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές ο χρόνος καθίζησης (χρόνος που χρειάστηκε το σωματίδιο για να φτάσει για πρώτη φορά στον πυθμένα της στήλης, δηλαδή να διανύσει 100 cm) καταγράφηκε. Γενικότερα παρατηρήθηκε μία μείωση του χρόνου καθίζησης στις μεγάλες συχνότητες και ότι δεν υπάρχει κάποια καθορισμένη εξάρτηση του χρόνου με την συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης. Για κάθε περίπτωση τα πειράματα επαναλήφθηκαν κάποιες φορές και ο μέσος όρος χρησιμοποιήθηκε ώστε να μετριάσει πιθανό σφάλμα αναπαραγωγής. Να σημειωθεί ότι το σφάλμα αναπαραγωγής όπως υπολογίστηκε, μεταβάλλεται με την συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης από 2 μέχρι 7 %. Έτσι αποκλίσεις της τάξης των 5 δευτερολέπτων είναι αναμενόμενες.

Πίνακας 2-1: Βασικές ιδιότητες των σωματιδίων και ρευστού.

Πυκνότητα Ρευστού [ρ_f]	Δυναμικό Ιξώδες Ρευστού [η]	Πυκνότητα Σωματιδίου [ρ_p]	Διάμετρος Σωματιδίου [r]
$\frac{g}{cm^3}$	$\frac{g}{cm \cdot s}$	$\frac{g}{cm^3}$	cm
1,058	0.0228	1,069	0.19



Σχήμα 2-1. Σχηματική απεικόνιση της πειρατικής διάταξης (Γκουδούλας, 1995).

Υπολογιστική μεθοδολογία

Στην παρούσα μελέτη γίνεται επίλυση της εξίσωσης (10) η οποία εφεξής θα αποκαλείται "θεωρητική" εξίσωση για σωματίδιο που καθιζάνει ελεύθερα σε ταλαντούμενη στήλη ρευστού. Υπενθυμίζεται σε αυτό το σημείο ότι αρχικά η εργασία αποσκοπεί στην σύγκριση των πειραματικών δεδομένων με τα υπολογιστικά και στη συνέχεια στην επιπλέον διερεύνηση επιμέρους παραμέτρων στην ταχύτητα καθίζησης. Για το σκοπό αυτό, αρχικά εξετάζεται η καθίζηση σωματιδίου στις ίδιες συνθήκες όπως στα πειράματα του Γκουδούλα (1995). Στην συνέχεια, και έχοντας υπόψη τις διαθέσιμες από την βιβλιογραφία εξισώσεις κίνησης, γίνεται προσπάθεια να επιλυθούν με την βοήθεια του MatLab. Συγκεκριμένα εξετάζονται οι περιπτώσεις θεωρητικής εξίσωσης χωρίς τον όρο Basset καθώς και συμπεριλαμβάνοντας τον όρο Basset. Παράλληλα, γίνεται εξέταση της συμβολής κάθε μίας δύναμης στην συνολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο ώστε να διασαφηνιστεί η συνεισφορά τους στη συνολική δύναμη. Τέλος, γίνεται χρήση της πιο κατάλληλης μεθοδολογίας για την εξέταση της επίδρασης της μάζας και της διαμέτρου του σωματιδίου στην ταχύτητα καθίζησης.

Ορισμός του προβλήματος

Σύστημα συντεταγμένων

Κατά τους υπολογισμούς της παρούσης εργασίας θεωρείται ως άξονας x ο άξονας που είναι παράλληλος με την στήλη ρευστού η οποία με την σειρά της είναι παράλληλη με την διεύθυνση της βαρύτητας. Ως θετική φορά του άξονα αυτού θεωρείται η κατεύθυνση της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

Ταλάντωση του ρευστού

Έχοντας υπόψη τα πειραματικά δεδομένα, στην παρούσα εργασία το ρευστό θεωρείται ότι ταλαντώνεται αρμονικά σύμφωνα με την εξίσωση

$$\begin{aligned}
 x &= -A_0 \cos(\omega t), \\
 u_f &= A_0 \omega \sin(\omega t), \\
 \frac{du_f}{dt} &= A_0 \omega^2 \cos(\omega t).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Συντελεστής οπισθέλκουσας

Ο συντελεστής οπισθέλκουσας υπολογίζεται ως:

$$C_{Dstd} = \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0.15 \text{Re}^{0.687}) \tag{14}$$

και ο αριθμός Reynolds ως:

$$\text{Re} = \frac{2R\rho_f |u_f - u_p|}{\mu} \tag{15}$$

όπως έχουν χρησιμοποιηθεί και στις μελέτες των Mei (1994) και Berlemont et al. (1990).

Αρχικές συνθήκες

Οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι σχεδόν ίδιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των πειραματικών δεδομένων: $x(0) = 0, u_p(0) = 0$. Να σημειωθεί, σε αυτό το σημείο, ότι, παρόλο που κατά τα πειράματα είχε παρατηρηθεί ότι το πάνω μέρος (ανοιχτή επιφάνεια ρευστού) καθώς και ο πυθμένας της στήλης (μεμβράνη διαχωρισμού) επηρέαζαν αισθητά την κίνηση του σωματιδίου, ο χρόνος καθίζησης αντιστοιχούσε στον χρόνο που χρειαζόταν το σωματίδιο για να διανύσει την απόσταση σχεδόν από την επιφάνεια του ρευστού έως και την βάση του (100 cm). Το σωματίδιο αφηνόταν στο κέντρο της κυλινδρικής στήλης με την βοήθεια ενός αναδευτήρα σε σπινάλ σχηματισμό και οπότε μόνο προσεγγιστικά η ταχύτητα και η θέση του σωματιδίου μπορεί να θεωρηθεί μηδενική. Να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα θα μπορούσαν να είναι ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες, αν παρουσιάζονταν τα αποτελέσματα αφού το σωματίδιο έχει φτάσει σε κατάσταση σταθερής ταλάντωσης (steady-state oscillation). Κάτι τέτοιο δεν γίνεται στην παρούσα εργασία γιατί τα αποτελέσματα κυρίως θα

χρησιμοποιηθούν για σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα στα οποία λαμβάνεται υπόψη και το μεταβατικό μέρος της κίνησης.

Άλλες παράμετροι

Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν για τις φυσικές ιδιότητες του σωματιδίου και του ρευστού είναι αυτές που χρησιμοποιήθηκαν και στα πειράματα με τα οποία συγκρίνεται η διπλωματική και παρουσιάζονται στον Πίνακα 3-1. Η επιτάχυνση της βαρύτητας θεωρήθηκε ίση με $9,81 \text{ m/s}^2$. Η επίλυση των εξισώσεων έγινε για χρονική διάρκεια 200 δευτερολέπτων (σε μερικές περιπτώσεις 250 δευτερολέπτων). Η επιλογή του χρόνου ολοκλήρωσης γενικότερα γινόταν εμπειρικά έτσι ώστε να είναι αρκετός ώστε να προλάβει το σωματίδιο να καθιζάνει ανάλογα με τις εκάστοτε συνθήκες και παραμέτρους. Βέβαια, ο χρόνος αυτός περιοριζόταν από τον υπολογιστικό χρόνο, ο οποίος ήταν μεγάλος σε μερικές περιπτώσεις (περίπτωση όπου στην εξίσωση συμπεριλαμβανόταν ο όρος Basset).

Επίλυση εξισώσεων

Θεωρητική εξίσωση χωρίς τον όρο Basset

Αρχικά έγινε επίλυση απλούστερων μορφών της εξίσωσης κίνησης για την εξοικείωση με την επίλυση εξισώσεων στο MatLab. Στην συνέχεια αναπτύχθηκε κώδικας επίλυσης της εξίσωσης κίνησης του σωματιδίου (10) χωρίς τον όρο Basset. Η εξίσωση αναπτύχθηκε σταδιακά και προσθέτοντας έναν-έναν τους όρους, ώστε να ελέγχεται η εγκυρότητα κάθε όρου που εισαγόταν και να είναι πιο εύκολος ο εντοπισμός σφαλμάτων. Έτσι παρόλο που η εργασία σκοπεύει στην επίλυση της θεωρητικής εξίσωσης, διάφορες άλλες παραλλαγές της εξίσωσης εξετάστηκαν συμπληρωματικά (π.χ. περίπτωση χωρίς τους όρους προστιθέμενης μάζας και Basset, με προσθήκη της διόρθωσης των Odar και Hamilton (1964) και Odar (1966) (είτε στον όρο προστιθέμενης μάζας είτε στον όρο Basset είτε και στους δύο όρους). Για την επίλυση χρησιμοποιήθηκε η έτοιμη εντολή του MatLab 'ode45'. Η μέθοδος επίλυσης που χρησιμοποιείται από τον κώδικα αυτόν βασίζεται στην μέθοδο Runge-Kutta 45. Στην παρούσα εργασία, και επειδή τα δεδομένα προορίζονται για σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα, κρίνεται σκόπιμο τα αποτελέσματα να παρουσιάζονται κυρίως ως χρόνοι καθίζησης (χρόνος που απαιτείται για την

καθίζηση του σωματιδίου σε στήλη ενός μέτρου). Με τον τρόπο αυτό η σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα είναι πιο άμεση. Για τον παραπάνω λόγο συγχρόνως με την επίλυση των εξισώσεων κίνησης (οι οποίες δίνουν ως αποτέλεσμα την ταχύτητα του σωματιδίου, $u_p(t)$), γίνεται και επίλυση της διαφορικής εξίσωσης θέσης του σωματιδίου έτσι ώστε να είναι διαθέσιμη και η θέση του σωματιδίου κάθε χρονική, $x(t)$. Για τον λόγο αυτό γίνεται επίλυση του παρακάτω συστήματος διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \frac{du_p}{dt} = \frac{\frac{1}{2} C_{Dstd} \rho_f |u_f - u_p| (u_f - u_p) + \frac{4}{3} R(\rho_p - \rho_f) g + \frac{2}{3} \rho_f R \frac{du_f}{dt} + \frac{4}{3} \rho_f R \frac{du_f}{dt}}{\frac{4}{3} R(\rho_p + \frac{1}{2} \rho_f)} \\ \frac{dx}{dt} = u_p \end{cases} .$$

(16)

Ο κώδικας που περιέχει την εξίσωση (16) σε μορφή έτοιμη για επίλυση με την εντολή ode45 παρατίθεται στο Παράρτημα II με όνομα "equationNoBasset.m". Στην εξίσωση αυτή περιέχονται όλες οι ιδιότητες του ρευστού και της σφαίρας καθώς και οποιαδήποτε άλλη παράμετρος που υπάρχει στην εξίσωση (16). Για την επίλυση της εξίσωσης ο χρήστης αρκεί να γράψει την εντολή ode45 ή οποιαδήποτε άλλη εντολή της MatLab για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων, όπως ode23, ode113, κτλ. Για παράδειγμα η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης με την μέθοδο αυτή θα μπορούσε να γίνει εκτελώντας την εντολή: 'sol=ode45(@equationNoBasset,[0 200],[0 0]);'. Η εντολή αυτή επιστρέφει μεταβλητή της MatLab η οποία περιέχει τις ρυθμίσεις με τις οποίες έγινε επίλυση της εξίσωσης, τις τιμές της ταχύτητας καθώς και τις τιμές της θέσης του σωματιδίου για διάφορα χρονικά σημεία μεταξύ του χρόνου μηδέν και διακοσίων δευτερολέπτων. Η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα στην περίπτωση αυτή είναι μηδέν. Ο αριθμός των βημάτων της μεθόδου καθορίζεται από την ίδια την μέθοδο και προσαρμόζεται ανάλογα με τις απαιτήσεις, ώστε σε κάθε βήμα να επιτυγχάνεται σχετικό σφάλμα της τάξης των 0,001. Επίσης κάθε άλλη παράμετρος, πέραν των αρχικών και οριακών συνθηκών, θα πρέπει να αλλάζει με αλλαγή των τιμών στο αρχείο της εξίσωσης.

Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι σε όλες τις περιπτώσεις της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήθηκαν οι προκαθορισμένες ρυθμίσεις των εντολών επίλυσης διαφορικών εξισώσεων της MatLab. Επειδή το πρόβλημα περιέχει ταλάντωση και έτσι η επιτάχυνση της ταχύτητας μπορεί να αυξάνεται τοπικά στον χρόνο οι απαιτήσεις της μεθόδου είναι αυξημένες. Ειδικά στις περιπτώσεις με μεγάλη συχνότητα ταλάντωσης, λόγω της διαρκούς απότομης μεταβολής της επιτάχυνσης, η επίλυση της εξίσωσης καταλήγει σε μεγάλο αριθμό σημείων. Σε όλες τις περιπτώσεις επίλυσης με την μέθοδο ode45 και λόγω της φύσης της εξίσωσης, ο αριθμός των σημείων και η πολυπλοκότητα ήταν τέτοια ώστε ο υπολογιστικός χρόνος να είναι αμελητέος. Να σημειωθεί ότι για την επιλογή αυτών των ρυθμίσεων εξετάστηκαν διάφορες περιπτώσεις (διαφορετικά σχετικά σφάλματα) καθώς και διαφορετικές μέθοδοι. Αύξηση της ακρίβειας ή διαφοροποίηση της μεθόδου δεν επέφερε σημαντικές διαφορές στα αποτελέσματα.

Θεωρητική εξίσωση με τον όρο Basset

Στην συνέχεια έγινε προσπάθεια να γίνει επίλυση της θεωρητικής εξίσωσης συμπεριλαμβάνοντας και τον όρο Basset. Η δυσκολία που παρουσιάζεται κατά την επίλυση της εξίσωσης είναι ότι σε κάθε βήμα στην μέθοδο επίλυσης στον χρόνο θα πρέπει να γίνεται υπολογισμός του ολοκληρώματος Basset. Το ολοκλήρωμα αυτό θεωρητικά υπολογίζεται μέσα από τις τιμές της ταχύτητας σε προηγούμενους χρόνους. Επειδή ο χρόνος είναι διακριτοποιημένος, αυτές οι τιμές θα μπορούσαν να προέρχονται από τις λύσεις για προηγούμενα βήματα. Ένας τρόπος για να μην υπολογίζονται ξανά οι τιμές σε προγενέστερους χρόνους είναι η αποθήκευση τους στην μνήμη. Το πρόβλημα που δημιουργείται είναι ότι, αναφορικά με μεγάλες περιόδους επίλυσης και μεγάλης ανάλυσης, ο όγκος των τιμών που αποθηκεύονται κάνει την επίλυση υπολογιστικά δύσκολη. Κατά την επίλυση για μεγάλες χρονικές περιόδους και για μεγάλες αναλύσεις ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται απαγορευτικά, και στην περίπτωση που οι τιμές της ταχύτητας αποθηκεύονται η μνήμη γίνεται πολύ μεγάλη.

Διάφοροι τρόποι έχουν προταθεί για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος. Οι Dorgan και Loth (2007) προτείνουν μια μεθοδολογία όπου ουσιαστικά ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα

(time window) και όχι μέχρι τον αρχικό χρόνο. Δηλαδή σε κάθε βήμα (της υπολογιστικής επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης) το ολοκλήρωμα της (10) λύνεται από $t-t_{win}$ μέχρι t . Αν και ο Hinsberg (2011) προτείνει έναν πιο αποτελεσματικό και γρήγορο τρόπο για την επίλυση του ολοκληρώματος στην παρούσα περίπτωση δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Ο κύριος λόγος είναι ότι αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθούν οι έτοιμες εντολές (υπορουτίνες) επίλυσης διαφορικών εξισώσεων του MatLab.

Εφόσον δεν είναι δυνατόν με τους έτοιμους κώδικες επίλυσης διαφορικών εξισώσεων στο MatLab να αποθηκεύονται οι ήδη υπολογισμένες τιμές της ταχύτητας, ο μόνος τρόπος επίλυσης είναι η χρήση του κώδικα dde23 που χρησιμοποιείται σε εξισώσεις στις οποίες η άγνωστη μεταβλητή είναι της μορφής $u(t), u(t-\tau_1), u(t-\tau_2), \dots$. Στην μεθοδολογία αυτήν πρέπει να καθοριστούν τα 'lags', δηλαδή οι χρόνοι $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$.

Αρχικά πρέπει να γίνει ανάλυση του ολοκληρώματος του όρου Basset. Οι Kim et al. (1998) προτείνουν την παρακάτω συσχέτιση:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\dot{U}}{f(t-\tau)} d\tau &= \int_0^{n\Delta t} \frac{\dot{U}}{f(t-\tau)} d\tau = \\ & \frac{\Delta t}{6} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\dot{U}_{i-1}}{f(n\Delta t - (i-1)\Delta t)} + \frac{2(\dot{U}_{i-1} + \dot{U}_i)}{f(n\Delta t - (i-0.5)\Delta t)} + \frac{\dot{U}_i}{f(n\Delta t - i\Delta t)} \right] \\ & + \frac{0.9\Delta t}{6} \left[\frac{\dot{U}_{n-1}}{f(\Delta t)} + \frac{2(\dot{U}_{n-1} + \dot{U}_n)}{f(0.55\Delta t)} + \frac{\dot{U}_n}{f(0.1\Delta t)} \right] \\ & + \frac{0.1\Delta t}{2} \left[\frac{8\sqrt{2}}{3} \frac{\dot{U}_n}{f(0.05\Delta t)} - \frac{4}{3} \frac{\dot{U}_n}{f(0.1\Delta t)} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{όπου } \dot{U} = \frac{d(u_f - u_p)}{dt}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει με την προϋπόθεση ότι η f γίνεται $((t-\tau)^{1/2})$ όταν το τ προσεγγίζει το t . Στην προκειμένη περίπτωση η f ορίζεται ως: $f = (t-\tau)^{1/2}$.

Συμπεραίνεται λοιπόν ότι για την επίλυση της (10) σε συνδυασμό με την (17) χρησιμοποιώντας την μέθοδο dde23 θα χρειάζεται θεωρητικά να οριστούν n 'lags' τα

οποία είναι ισαπέχοντα στην διάσταση του χρόνου κατά Δt . Στην πραγματικότητα κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει γιατί στην μέθοδο αυτή (dde23) όσο περισσότερα είναι τα 'lags' τόσο μεγαλύτερος είναι ο υπολογιστικός χρόνος.

Να σημειωθεί ότι υπάρχει και η εντολή ddesd στο MatLab η οποία είναι ίδια με την dde23 με την μόνη διαφορά ότι τα 'lags' ορίζονται ως συνάρτηση του χρόνου και της άγνωστης μεταβλητής. Κάτι τέτοιο δεν είναι χρήσιμο στην περίπτωση μας αφού το ολοκλήρωμα Basset αποφασίστηκε να αναλυθεί με τον παραπάνω τρόπο, το Δt είναι σταθερό, και άρα τα 'lags' είναι σταθερά.

Οπότε θα πρέπει να γίνει επίλυση του ολοκληρώματος μέχρι έναν παρελθοντικό χρόνο $t - t_{win}$. Δηλαδή το ολοκλήρωμα θα πρέπει να αναλυθεί από χρόνο $t - t_{win}$ μέχρι χρόνο t και άρα $t - t_{win} = t' = n\Delta t$. Το πρόβλημα τώρα έγκειται στο να βρεθούν τα κατάλληλα t' και n ώστε το ολοκλήρωμα να λύνεται το δυνατότερο σωστά χωρίς να υπάρχει πρόβλημα υπολογιστικού χρόνου. Η μεθοδολογία που ακολουθείται στην παρούσα εργασία είναι να επιλυθεί η εξίσωση για διάφορες περιπτώσεις των δύο παραπάνω παραμέτρων έτσι ώστε να διευκρινιστούν η καταλληλότερες τιμές τους. Οι παράμετροι που εξετάζονται είναι συνδυασμός αυτών που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3-2. Αυτό γίνεται ενδεικτικά για μερικές περιπτώσεις συχνοτήτων και πλατών ταλάντωσης. Στην συνέχεια με χρήση των βέλτιστων αυτών τιμών t' και n επιλύεται η θεωρητική εξίσωση με σκοπό να εξεταστεί κατά πόσο η προσθήκη του όρου Basset είναι βάσιμη. Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι οι τιμές αυτές επιλέχθηκαν σχεδόν αυθαίρετα και περιορίζονται από τον υπολογιστικό χρόνο. Ο χρόνος ολοκλήρωσης t' εκφράζεται ως προς την συχνότητα ταλάντωσης του ρευστού. Αυτό γίνεται για να έχουν φυσική σημασία τα σημεία που επιλέγονται για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος καθώς και για να είναι αναλογικά των περιοδικών φαινομένων κάθε διαφορετικής συχνότητας. Οι Dorgan και Loth (2007) προτείνουν κάποιες εκφράσεις για την βέλτιστη επιλογή του χρόνου ολοκλήρωσης. Μάλιστα περιλαμβάνουν περιπτώσεις όπως αυτές του Odar και Hamilton (1966) όπου το σωματίδιο ταλαντεύεται σε κατά τα άλλα σταθερό ρευστό. Ενδεικτικά, ο προτεινόμενος χρόνος ολοκλήρωσης είναι περίπου μισή περίοδος. Παρόλα αυτά δεν υπάρχει μαθηματική συσχέτιση από τους Dorgan και

Loth (2007) που να προορίζεται για την περίπτωση όπου το ρευστό ταλαντεύεται και το σωματίδιο καθιζάνει ελεύθερα.

Πίνακας 3-2: Τιμές των παραμέτρων επίλυσης του ολοκληρώματος Basset για την εκτέλεση δοκιμών και την εύρεση των βέλτιστων παραμέτρων.

t'	0.1/f	0.2/f	0.5/f	1/f	2/f	3/f
n	2	4	8	16	32	

Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που λύνεται στο σημείο αυτό είναι

$$\begin{cases} \frac{du_p}{dt} = \frac{\frac{1}{2} C_{Dstd} \rho_f |u_f - u_p| (u_f - u_p) + \frac{4}{3} R(\rho_p - \rho_f)g + \frac{2}{3} \rho_f R \frac{du_f}{dt} + \frac{4}{3} \rho_f R \frac{du_f}{dt} + 6\sqrt{\frac{\rho_f \mu}{\pi}} B}{\frac{4}{3} R(\rho_p + \frac{1}{2} \rho_f)} \\ \frac{dx}{dt} = u_p \end{cases} \quad (18)$$

όπου 'B' είναι η σχέση (17). Η επίλυση γίνεται με την βοήθεια κώδικα ο οποίος χρησιμοποιεί την εντολή dde23 και παρατίθεται στο Παράρτημα II με όνομα 'theoretical.m'. Για την περίπτωση αυτή και για την ευκολότερη αλλαγή των παραμέτρων της εξίσωσης δημιουργήθηκε αρχείο εντολών (m-file) το οποίο εκτελεί την εντολή dde23 υπό συγκεκριμένες οριακές συνθήκες (επιθυμητά χρονικά όρια αποτελέσματος) οι οποίες ορίζονται ως δεδομένα εισόδου στην εντολή 'theoretical.m'. Επίσης στο αρχείο αυτό ο χρήστης μπορεί να αλλάξει, πέρα των άλλων, τις παραμέτρους t' και n. Ο κώδικας μετατρέπει αυτές τις παραμέτρους κατάλληλα και θέτει τις απαραίτητες ρυθμίσεις (ορισμός των 'lags' 'τ') ώστε να εκτελεστεί αναλόγως η εντολή 'dde23'. Τα lags που ορίζονται είναι κάθε φορά ισαπέχοντα κατά dt. Για παράδειγμα εάν οριστεί dt=0.1 και n=3 τότε τα lags που δημιουργούνται είναι (0,1, 0,2, 0,3, 0,4). Ο λόγος που δημιουργεί ο παρόν κώδικας ένα παραπάνω lag εξηγείται στην επόμενη παράγραφο.

Κατά την επίλυση της εξίσωσης (18) εμφανίζεται στο δεξιό μέρος η μεταβλητή \dot{U}_n

(17) (όρος Basset) που περιέχει την μεταβλητή $\frac{du_p(t_n)}{dt}$ η οποία αναφέρεται στο

χρονικό βήμα n και άρα αντιστοιχεί στην άγνωστη μεταβλητή που βρίσκεται στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (18). Επειδή η εκτέλεση αριθμητικής άλγεβρας ώστε να βρεθεί ο όρος αυτός στο αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι πέραν των δυνατοτήτων αυτής της διπλωματικής, και θεωρώντας ότι ο όρος αυτός δεν

επηρεάζει σημαντικά το σφάλμα προσέγγισης, η μεταβλητή $\frac{du_p(t_n)}{dt}$ προσεγγίζεται

με προς τα πίσω πεπερασμένες διαφορές. Συγκεκριμένα ο όρος αυτό αναλύεται ως:

$$\frac{du_p(t)}{dt} = \frac{u_p(t) - u_p(t - \tau)}{dt} \quad (19)$$

όπου τ είναι το πρώτο history lag και είναι ίσο με dt . Σημειώνεται ότι το βήμα των πεπερασμένων διαφορών επιλέχθηκε ίσο με την ανάλυση που χρησιμοποιείται για την επίλυση του ολοκληρώματος Basset για λόγους υπολογιστικής ταχύτητας και ευκολίας. Έχοντας υπόψη ότι η επιτάχυνση του σωματιδίου που βρίσκεται στον όρο Basset προσεγγίζεται με προς τα πίσω πεπερασμένες διαφορές, ακόμα και για τον τελευταίο όρο που αντιστοιχεί στο $i=1$ (βλ (17)), που ουσιαστικά αντιστοιχεί σε χρόνο $t=t_{win}$ και αποτελεί τον αρχαιότερο χρόνο που χρησιμοποιείται στο ολοκλήρωμα, θα χρειαστεί επιπλέον και ένας χρόνος πιο πίσω για την προσέγγιση της επιτάχυνσης σε εκείνη την χρονική στιγμή.

Άλλες εξισώσεις

Τέλος ενσωματώνονται οι συντελεστές C_a και C_h και ουσιαστικά γίνεται επίλυση της εξίσωσης (10). Το σύστημα το οποίο επιλύεται είναι:

$$\begin{cases} \frac{du_p}{dt} = \frac{\frac{1}{2} C_{Dstd} \rho_f |u_f - u_p| (u_f - u_p) + \frac{4}{3} R(\rho_p - \rho_f)g + C_a \frac{4}{3} \rho_f R \frac{du_f}{dt} + \frac{4}{3} \rho_f R \frac{du_f}{dt} + C_h \sqrt{\frac{\rho_f \mu}{\pi}} B}{\frac{4}{3} R(\rho_p + C_a \rho_f)} \\ \frac{dx}{dt} = u_p \end{cases} \quad (20)$$

όπου

$$C_a = 1.05 - \frac{0.066}{A_c^2 + 0.12},$$

$$C_h = 2.88 + \frac{2.88}{(A_c + 1)^3}.$$
(21)

Να σημειωθεί ότι επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί η μορφή (9) για τον ορισμό της αδιάστατης επιτάχυνσης κυρίως για λόγους ευκολίας στον προγραμματισμό. Διάφορες άλλες παραλλαγές της παραπάνω εξετάζονται επίσης. Π.χ. χωρίς τον όρο προστιθέμενης μάζας και τον όρο Basset ή χωρίς τον όρο Basset και με την διόρθωση των Odar και Hamilton (1966) μόνο στον όρο προστιθέμενης μάζας, χωρίς όμως να αποτελούν κύριο σκοπό της εργασίας.

Επεξεργασία αποτελεσμάτων

Χρόνος καθίζησης

Ως χρόνος καθίζησης λαμβάνεται ο χρόνος που για πρώτη φορά το σωματίδιο ξεπερνά τα 100 cm. Αυτός υπολογίζεται με την εντολή 'time=sol.x(min(find(sol.y(1,:)>=100)))' όπου το 'x' αντιστοιχεί στον πίνακα με τις τιμές του χρόνου και το 'y' στον πίνακα με τις αντίστοιχες τιμές της θέσης. Η μέθοδος αυτή περιορίζεται από το τοπικό μέγεθος βήματος της μεθόδου. Δηλαδή, το απόλυτο σφάλμα στην προσέγγιση αυτή είναι της τάξης του βήματος της μεθόδου το οποίο επιλέγεται και προσαρμόζεται αυτομάτως από την εντολή της MatLab. Στις περισσότερες περιπτώσεις το βήμα αυτό ήταν αρκετά μικρό (<1/10f) και άρα αμελητέο.

Σχετικό σφάλμα

Για τον υπολογισμό της απόκλισης των θεωρητικών αποτελεσμάτων, δηλαδή των αποτελεσμάτων επίλυσης των εξισώσεων κίνησης από αυτά των πειραμάτων, υπολογίστηκε το απόλυτο σχετικό σφάλμα. Το σχετικό απόλυτο σφάλμα ορίζεται

ως: $e = \left| \frac{t_{theoretical} - t_{experimental}}{t_{experimental}} \right|$. Όπου $t_{theoretical}$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται ένα

σωματίδιο για να καθιζάνει σε στήλη ρευστού μήκους 100 cm σύμφωνα με τους υπολογισμούς της παρούσας εργασίας, και $t_{experimental}$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται ένα σωματίδιο για να καθιζάνει σε στήλη ρευστού 100 cm σύμφωνα με τα πειράματα του Γκουδούλα (1995). Ως συνολικό σφάλμα ορίζεται το μέσο απόλυτο σχετικό

σφάλμα: $e_{total} = \frac{1}{m} \sum_{z=1}^m e_z$ όπου m είναι το πλήθος των περιπτώσεων συνδυασμού

συχνοτήτων και πλατών ταλάντωσης που παρουσιάζονται στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Υπολογισμός δυνάμεων

Ουσιαστικά, ο υπολογισμός των δυνάμεων έγινε υπολογίζοντας κάθε όρο της εξίσωσης, βάζοντας τις τιμές της ταχύτητας που υπολογίστηκαν από την αριθμητική επίλυση τη διαφορικής εξίσωσης. Επειδή στην περίπτωση που εμφανίζεται ο όρος Basset είναι δύσκολος ο υπολογισμός του ολοκληρώματος, η δύναμη Basset υπολογίζεται αφαιρώντας όλες τις υπόλοιπες δυνάμεις από την συνολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο.

Παραμετροποίηση

Έχοντας καταλήξει στην καταλληλότερη εξίσωση σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα γίνεται παραμετροποίηση ως προς την μάζα και την διάμετρο. Συγκεκριμένα, έχοντας σταθερές όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους εξετάζονται

διαφορετικοί λόγοι πυκνότητας: $\rho_r = \frac{\rho_p}{\rho_f}$. Στις προηγούμενες περιπτώσεις, όπως και

στα πειραματικά δεδομένα ο λόγος αυτός ήταν περίπου ίσος με την μονάδα. Ο λόγος αυτός, όπως φαίνεται και στις μελέτες των Kim et al. (1998) και Sirignano (2005), παίζει σημαντικό ρόλο στην συμπεριφορά του σωματιδίου. Στην παρούσα μελέτη εξετάζονται οι περιπτώσεις (πέραν του $\rho_r \approx 1$) οι περιπτώσεις: $\rho_r \approx 5$ και $\rho_r \approx 200$.

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αλλάζοντας την πυκνότητα του ρευστού, του σωματιδίου ή και των δύο. Στην περίπτωση της παρούσας μελέτης αυξάνεται η πυκνότητα του

σωματιδίου. Αυτό γίνεται για να διατηρηθεί ο αριθμός Reynolds ίδιος. Αύξηση της πυκνότητας του σωματιδίου στην περίπτωση αυτή γίνεται μόνο με αύξηση της μάζας του σωματιδίου, θεωρώντας έτσι την διάμετρο σταθερή. Ουσιαστικά η παραμετροποίηση αυτή αφορά την μάζα και την πυκνότητα ενός σωματιδίου σταθερής διαμέτρου στο ίδιο ρευστό. Η παρατήρηση αυτή είναι σημαντική γιατί κρατώντας σταθερή την διάμετρο και την πυκνότητα του ρευστού ο αριθμός Reynolds παραμένει ίδιος.

Στην συνέχεια εξετάζεται η αλλαγή της ακτίνας του σωματιδίου. Η διαφοροποίηση της ακτίνας του σωματιδίου επιφέρει ανάλογη αλλαγή του αριθμού Reynolds. Επίσης, αποφασίστηκε να γίνεται ταυτόχρονη αλλαγή της μάζας του σωματιδίου έτσι ώστε η πυκνότητα να παραμένει σταθερή με την αλλαγή της ακτίνας και αρά να μένει σταθερός και ο λόγος των πυκνοτήτων. Σε αντίθετη περίπτωση θα υπήρχε παράλληλη αλλαγή και του αριθμού Reynolds, και του λόγου πυκνοτήτων και το πρόβλημα θα γινόταν πιο δύσκολο στην ανάλυση του. Οι περιπτώσεις που εξετάζονται, επιπλέον αυτής για $r=0.19$ cm, είναι για $r=0.95$ cm και $r=0.038$ cm.

Να σημειωθεί, ότι επειδή η ταχύτητα καθίζησης του σωματιδίου αλλάζει δραματικά με τις παραπάνω παραμετροποιήσεις, οι υπολογισμοί έγιναν για διαφορετικά μήκη στήλης ρευστού, για μερικές από τις περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα, για την περίπτωση για λόγο πυκνοτήτων ίσο με 200, χρησιμοποιήθηκε στους υπολογισμούς στήλη ρευστού ίση με 100.000 cm ενώ για την περίπτωση $r=0.038$ χρησιμοποιήθηκε στήλη ρευστού ίση με 5 cm. Για να είναι ευκολότερη η σύγκριση των αποτελεσμάτων και αφού μας ενδιαφέρει όχι ο απόλυτος χρόνος αλλά η σχετική ταχύτητα καθίζησης του σωματιδίου, υπολογίστηκαν οι σχετικές μέσες ταχύτητες του σωματιδίου. Η μέση ταχύτητα του σωματιδίου υπολογίζεται από την εξίσωση

$$u^* = \frac{l}{t_{theoretical}}, \text{ όπου } l \text{ είναι το μήκος της στήλης. Ως σχετική ταχύτητα ορίζεται η}$$

$$u_{rel}^* = \frac{u^*}{u_{steady-state}^*}. \text{ Δηλαδή η σχετική ταχύτητα, είναι η ταχύτητα σε κάθε περίπτωση}$$

ως προς την ταχύτητα καθίζησης χωρίς επιβαλλόμενες ταλαντώσεις στο ρευστό.

Αποτελέσματα - Συζήτηση

Θεωρητική εξίσωση χωρίς τον όρο Basset

Στα Σχήματα 4-1 με 4-5 παρουσιάζονται οι χρόνοι που απαιτούνται για την καθίζηση ενός σφαιρικού σωματιδίου σε στήλη ταλαντευόμενου υγρού μήκους 100 cm. Στα σχήματα παρουσιάζονται και οι τιμές των πειραματικών δεδομένων (Experimental Data) και οι τιμές που υπολογίστηκαν με την επίλυση της θεωρητικής εξίσωσης χωρίς των όρο Basset (βλ. (16)). Γίνεται φανερό ότι υπάρχει μία απόκλιση από τα πειραματικά δεδομένα η οποία θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως συστηματική (bias) και αυτό γιατί σε όλες τις περιπτώσεις ο χρόνος που απαιτήθηκε στα πειράματα είναι μεγαλύτερος, κατά περίπου δέκα δευτερόλεπτα. Αυτό παρατηρείται από την μετατόπιση προς τα πάνω των πειραματικών χρόνων σε σχέση με τους αριθμητικούς.

Να σημειωθεί ξανά ότι οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των εξισώσεων ήταν ουσιαστικά ίδιες με αυτές που αναφέρονται στην συγκρινόμενη διπλωματική εργασία. Η παραπάνω απόκλιση θα μπορούσε να εξηγηθεί ποικιλοτρόπως. Παρόλο που στην διπλωματική εργασία γίνεται μία αξιολόγηση του σφάλματος επαναληψιμότητας των πειραμάτων, η εκτίμηση του απόλυτου σφάλματός ήταν δύσκολο να υπολογιστεί ή ακόμα να εκτιμηθεί. Το απόλυτο αυτό σφάλμα ουσιαστικά μπορεί να αντιστοιχηθεί με το συστηματικό σφάλμα (bias error). Αυτό το συστηματικό σφάλμα θα μπορούσε να οφείλεται σε διάφορους λόγους και μπορεί να δικαιολογήσει την απόκλιση των υπολογιστικών με τα πειραματικά αποτελέσματα.

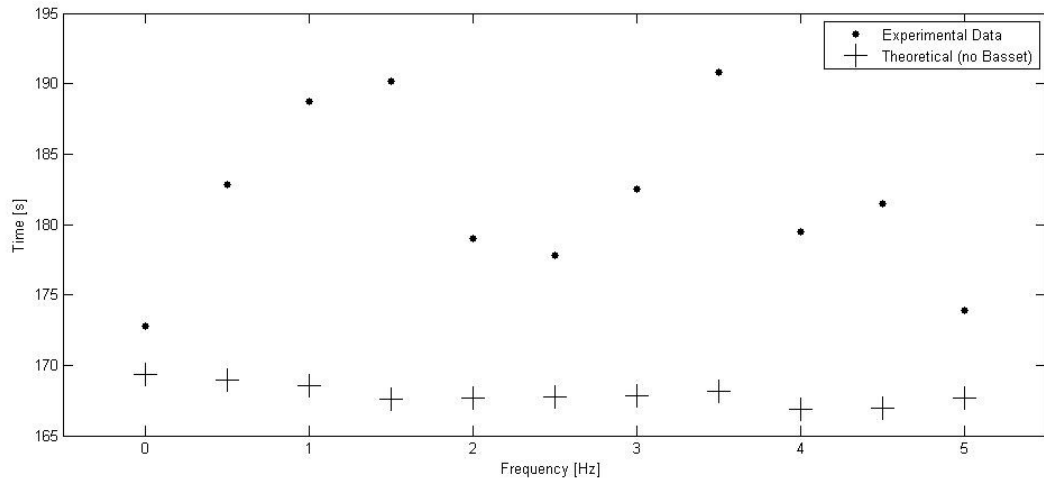
Φυσικά, σε κάθε περίπτωση, η απόκλιση αυτή μπορεί να οφείλεται σε κάποιο σφάλμα στην παρούσα εργασία ή σε κάποια από τις παραδοχές που έχουν γίνει όσον αφορά την εξίσωση που χρησιμοποιείται. Να σημειωθεί ότι γενικότερα έχοντας υπόψη το σφάλμα επαναληψιμότητας των πειραματικών δεδομένων η σύγκριση των αποτελεσμάτων μπορεί να γίνει μόνο χονδρικά αφού το σφάλμα στα πειραματικά δεδομένα μπορεί να είναι της τάξης των 5 δευτερολέπτων. Συνεπώς λεπτομερής σύγκριση δεν είναι βάσιμη.

Στα σχήματα αυτά επίσης παρατηρείται ότι τα πειραματικά δεδομένα δεν δείχνουν μία συγκεκριμένη εξάρτηση από την συχνότητα ταλάντωσης, αλλά ούτε και από το πλάτος ταλάντωσης. Σε γενικές γραμμές παρουσιάζεται μία μείωση του χρόνου καθίζησης, ειδικότερα σε μεγάλα πλάτη ταλάντωσης, που όμως δεν είναι πολύ ξεκάθαρη. Επίσης τα πειραματικά δεδομένα δείχνουν μεγάλες αλλαγές με την συχνότητα χωρίς να παρατηρείται συγκεκριμένη όμως συσχέτιση.

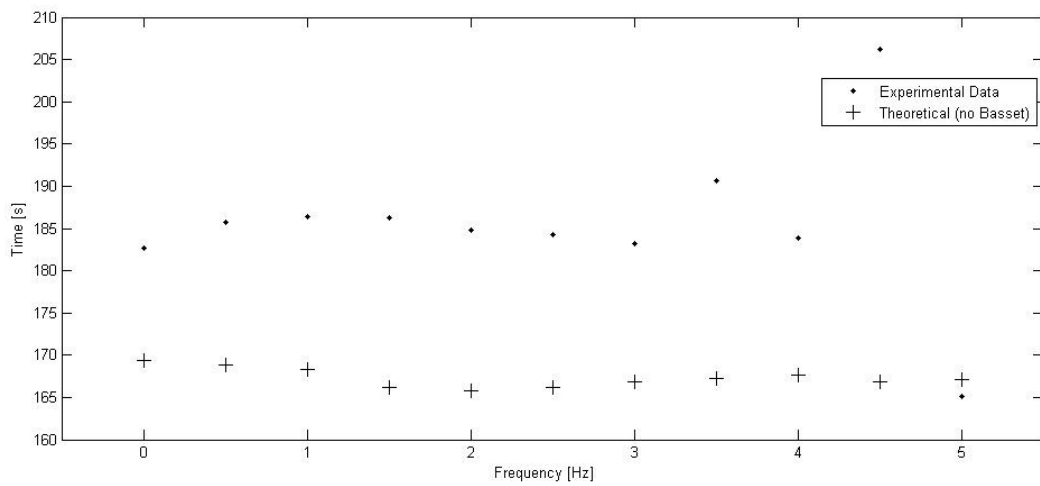
Αντιθέτως, για τα αποτελέσματα τη επίλυσης της εξίσωσης μπορούν να παρατηρηθούν τα εξής:

- Δεν υπάρχουν μεγάλες διαφοροποιήσεις με τις αλλαγές της συχνότητας, όπως στην περίπτωση των πειραματικών δεδομένων
- Υπάρχει μία συγκεκριμένη πλέον συμπεριφορά ως προς την συχνότητα η οποία γίνεται πιο έντονη όσο μεγαλώνει το πλάτος ταλάντωσης. Συγκεκριμένα η ταχύτητα αυξάνεται μέχρι και για την συχνότητα των 2 Hz και στην συνέχεια μειώνεται ξανά.
- Παρόλο που στα πειραματικά δεδομένα η ταχύτητα καθίζησης στην πλειοψηφία των περιπτώσεων μειώνεται, στα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, αυξάνεται με την επιβολή ταλαντώσεων στο ρευστό. Μόνο στην περίπτωση υψηλών συχνοτήτων για πλάτος ταλάντωσης 0.5 cm η ταχύτητα καθίζησης είναι μικρότερη από αυτήν χωρίς ταλάντωση.
- Γενικότερα δεν μπορεί να εξαχθεί άλλη συσχέτιση μεταξύ πειραματικών και υπολογιστικών δεδομένων. Δηλαδή ο βαθμός απόκλισης των δύο αποτελεσμάτων για κάθε περίπτωση είναι σχεδόν τυχαίος.

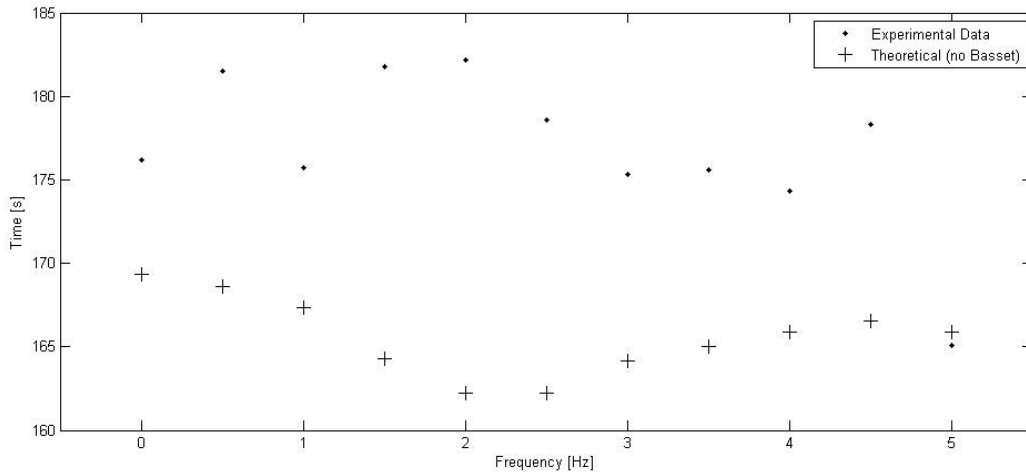
Είναι σημαντικό να τονιστεί επίσης ότι, όπως είναι φυσικό, στην περίπτωση μηδενικής συχνότητας η ταχύτητα έπρεπε να είναι ανεξάρτητη από το πλάτος ταλάντωσης. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει στα πειραματικά δεδομένα. Αυτό υποδεικνύει ότι το σφάλμα κατά τα πειράματα μπορεί να ήταν μεγαλύτερο από το αναμενόμενο.



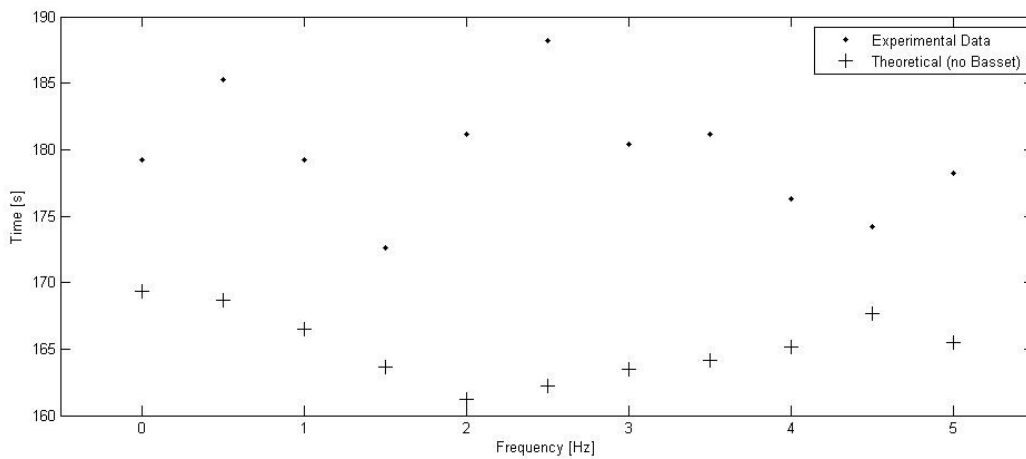
Σχήμα 4-1: Χρόνοι καθίζησης για διάφορες συχνότητες και πλάτος ταλάντωσης $A=0,175\text{ cm}$, όπως υπολογίστηκαν στην παρούσα εργασία χωρίς τον όρο Basset και σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα.



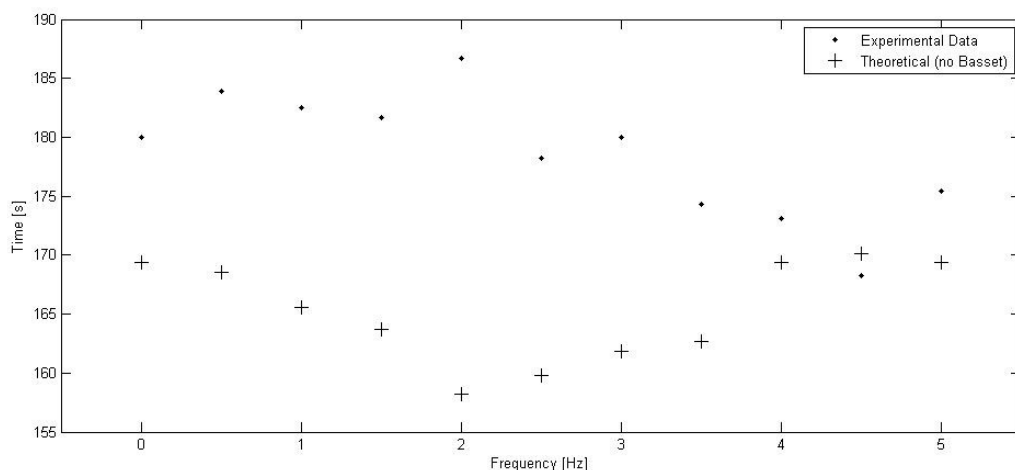
Σχήμα 4-2: Χρόνοι καθίζησης για διάφορες συχνότητες και πλάτος ταλάντωσης $A=0,25\text{ cm}$, όπως υπολογίστηκαν στην παρούσα εργασία χωρίς τον όρο Basset και σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα



Σχήμα 4-3: Χρόνοι καθίζησης για διάφορες συχνότητες και πλάτος ταλάντωσης $A=0,375$ cm, όπως υπολογίστηκαν στην παρούσα εργασία χωρίς τον όρο Basset και σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα

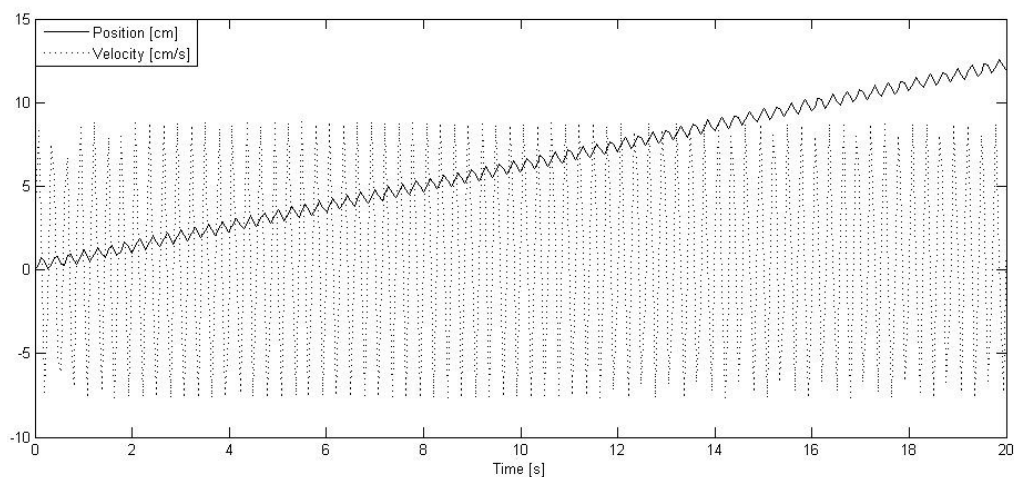


Σχήμα 4-4: Χρόνοι καθίζησης για διάφορες συχνότητες και πλάτος ταλάντωσης $A=0,425$ cm, όπως υπολογίστηκαν στην παρούσα εργασία χωρίς τον όρο Basset και σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα

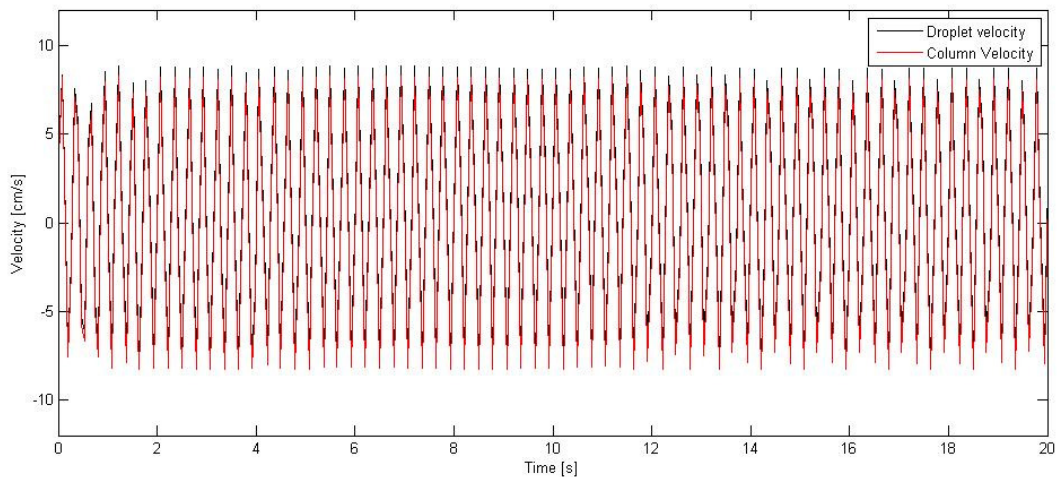


Σχήμα 4-5: Χρόνοι καθίζησης για διάφορες συχνότητες και πλάτος ταλάντωσης $A=0,5$ cm, όπως υπολογίστηκαν στην παρούσα εργασία χωρίς τον όρο Basset και σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα

Ενδεικτικά παρουσιάζεται, στο Σχήμα 4-6, η ταχύτητα του σωματιδίου και η θέση του ως προς τον χρόνο. Στην συνέχεια (Σχήμα 4-7) παρουσιάζεται για την ίδια περίπτωση (συχνότητα 3,5 Hz και πλάτος ταλάντωσης 0,375 cm) η ταχύτητα καθίζησης καθώς και η ταχύτητα ταλάντωσης της στήλης ρευστού. Παρατηρείτε ότι δεν υπάρχει διαφορά φάσης μεταξύ της ταχύτητας πτώσης και ταχύτητας καθίζησης.



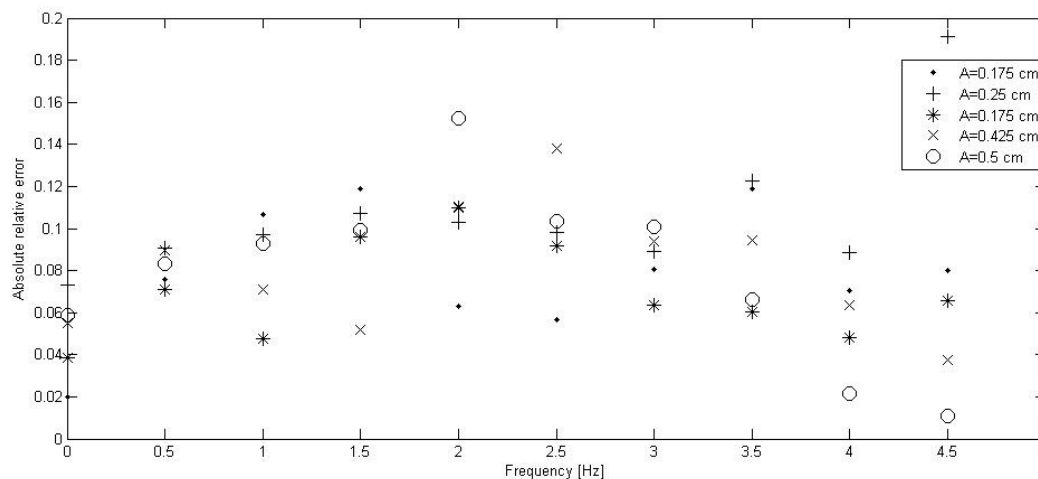
Σχήμα 4-6. Ταχύτητα καθίζησης και θέση σωματιδίου ως προς τον χρόνο για την περίπτωση συχνότητας 3,5 Hz και πλάτους ταλάντωσης 0,375 cm.



Σχήμα 4-7. Ταχύτητα καθίζησης σωματιδίου και ταχύτητα ταλάντωσης της στήλης ρευστού ως προς τον χρόνο.

Σχετικό σφάλμα

Το σχετικό σφάλμα για κάθε περίπτωση φαίνεται στο Σχήμα 4-8. Το συνολικό απόλυτο σχετικό σφάλμα είναι 0,078 ή περίπου 8%. Να σημειωθεί επίσης ότι και για την περίπτωση μόνιμης ροής, χωρίς ταλαντώσεις (συχνότητα μηδέν), το σφάλμα είναι ήδη γύρω στο 5%. Κάτι τέτοιο δεν έπρεπε να συμβαίνει αφού η θεωρητική εξίσωση έπρεπε να δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για μόνιμη ροή. Το σφάλμα αυτό μπορεί να οφείλεται είτε σε συστηματικό σφάλμα στα πειράματα είτε στο ότι δεν συμπεριλαμβάνεται ο όρος Basset, είτε και στα δύο. Από το Σχήμα 4-8, δεν φαίνεται να υπάρχει εξάρτηση του σφάλματος από την συχνότητα ή το πλάτος ταλάντωσης.



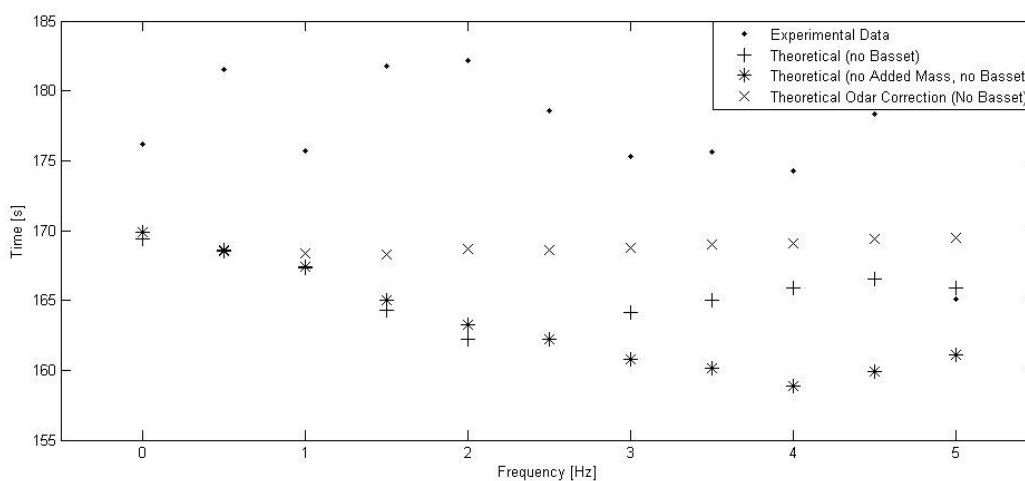
Σχήμα 4-8: Απόλυτο σχετικό σφάλμα για κάθε συχνότητα και πλάτος ταλάντωσης ($A=0,375$).

Παραλλαγές της θεωρητικής εξίσωσης

Ενδεικτικά σε αυτό το σημείο παρουσιάζονται περαιτέρω περιπτώσεις, όπως χωρίς καθόλου τον όρο προστιθέμενης μάζας και με τον όρο προστιθέμενης μάζας διορθωμένο συμφωνά με τους Odar και Hamilton (1964). Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 4-9. Παρατηρείται ότι η εισαγωγή της διόρθωσης του Odar σταθεροποιεί τα αποτελέσματα της εξίσωσης ως προς την εξάρτησή τους από τη συχνότητα και πλέον η αύξηση της ταχύτητας στις συχνότητες γύρω από τα 2 Hz δεν υφίσταται. Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για τις περιπτώσεις με τα υπόλοιπα πλάτη ταλάντωσης (αποτελέσματα που δεν παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία). Επειδή καμία από τις περιπτώσεις δεν συμβαδίζει με τα πειραματικά δεδομένα, δεν μπορεί να βγει συμπέρασμα στο ποιά από τις δύο μορφές του όρου προστιθέμενης μάζας είναι καταλληλότερη. Σύμφωνα με τα διαγράμματα η διόρθωση κατά Odar και Hamilton (1964) θεωρητικά προσεγγίζει καλύτερα τους χρόνους από τα πειράματα. Λόγω των μικρών διαφορών και του ότι η εφαρμογή των Odar και Hamilton (1964) αφορούσε άλλο πρόβλημα οι διορθώσεις δεν ενσωματώθηκαν στην εξίσωση.

Από τις τιμές με τους χρόνους καθίζησης χωρίς τον όρο προστιθέμενης μάζας, φαίνεται ότι η επίδραση του είναι πιο σημαντική στις μεγάλες συχνότητες και στα

μεγάλα πλάτη ταλάντωσης. Σε κάθε περίπτωση τα αποτελέσματα αποκλίνουν σημαντικά για αυτές τις περιπτώσεις.



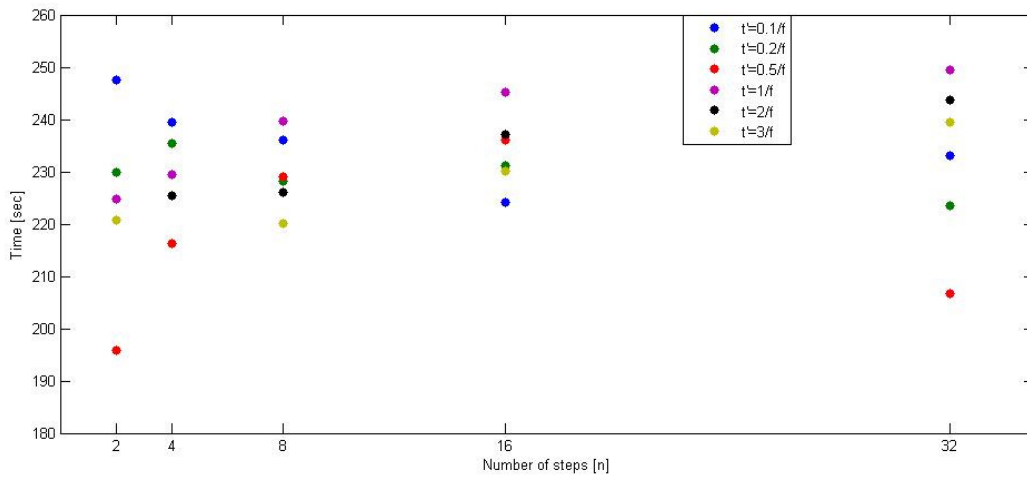
Σχήμα 4-9: Χρόνοι καθίζησης για διάφορες τροποποιήσεις της θεωρητικής εξίσωσης.

Προσθήκη του όρου Basset

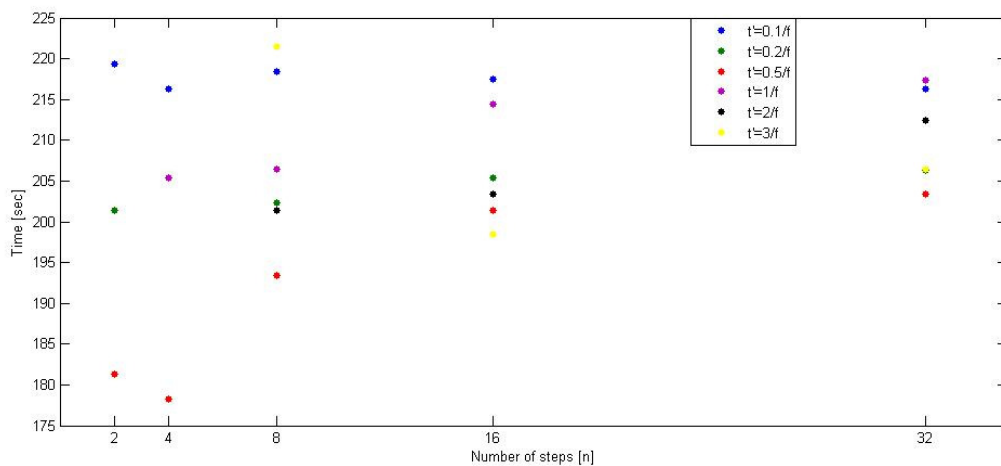
Για τον προσδιορισμό του χρόνου ολοκλήρωσης και των βημάτων για την επίλυση του ολοκληρώματος Basset, επιλύθηκε η θεωρητική εξίσωση με διαφορετικές παραμέτρους. Στο Σχήμα 4-10 φαίνεται ο χρόνος καθίζησης για συχνότητα 2.5 Hz και πλάτος ταλάντωσης 0,175 cm. Γίνεται φανερό μετά από παρατήρηση του διαγράμματος ότι δεν υπάρχει ουσιαστική συσχέτιση του χρόνου καθίζησης με την αλλαγή των παραμέτρων. Επίσης, παρόλο που αναμενόταν με αύξηση της ανάλυσης (δηλαδή του αριθμού των βημάτων) να προσεγγίζει η λύση τα πειραματικά αποτελέσματα, κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται. Τα ίδια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν και από το Σχήμα 4-11, όπου εκεί γίνεται ο ίδιος πειραματισμός αλλά για την περίπτωση συχνότητας 1 Hz και πλάτους ταλάντωσης 0,5 cm. Να σημειωθεί ότι λόγω του μεγάλου υπολογιστικού χρόνου αλλά και των πολλών περιπτώσεων παραμετροποίησης, ο πειραματισμός έγινε μόνο για αυτές τις δύο περιπτώσεις συνδυασμού πλάτους ταλάντωσης και συχνότητας ενδεικτικά.

Από το Σχήμα 4-10 παρατηρείται ότι ο βέλτιστος συνδυασμός χρόνου ολοκλήρωσης και βημάτων είναι $n=2$ και $t'=0.5/f$ αφού αυτές οι τιμές προσεγγίζουν καλύτερα τον χρόνο καθίζησης των πειραμάτων, ο οποίος είναι 178 δευτερόλεπτα, για αυτήν την

περίπτωση. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η ταχύτητας καθίζησης είναι πολύ μικρότερη από την αναμενόμενη. Στην περίπτωση που φαίνεται στο Σχήμα 4-11 βέλτιστες τιμές δείχνουν να είναι για $t'=0.5/f$ και για n ίσο με 2 ή 4 αφού ο χρόνος καθίζησης από τα πειραματικά δεδομένα είναι 182,5. Έτσι επιλέγονται ως καταλληλότερες παράμετροι οι $n=2$ και $t'=0.5/f$.



Σχήμα 4-10: Χρόνοι καθίζησης σωματιδίου (100 cm) μετά από επίλυση της θεωρητικής εξίσωσης με διαφορετικές παραμέτρους. Στις περιπτώσεις που τα αποτελέσματα δεν απεικονίζονται ο χρόνος είναι μεγαλύτερος από 250 sec (Πλάτος ταλάντωσης 0,175 cm και συχνότητα 2,5 Hz).

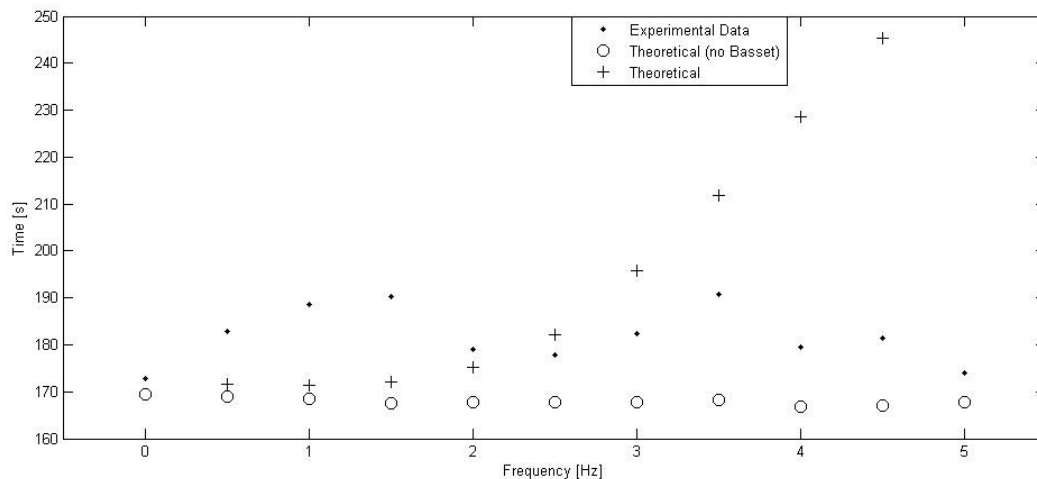


Σχήμα 4-11: Χρόνοι καθίζησης σωματιδίου (100 cm) μετά από επίλυση της θεωρητικής εξίσωσης με διαφορετικές παραμέτρους. Στις περιπτώσεις που τα αποτελέσματα δεν

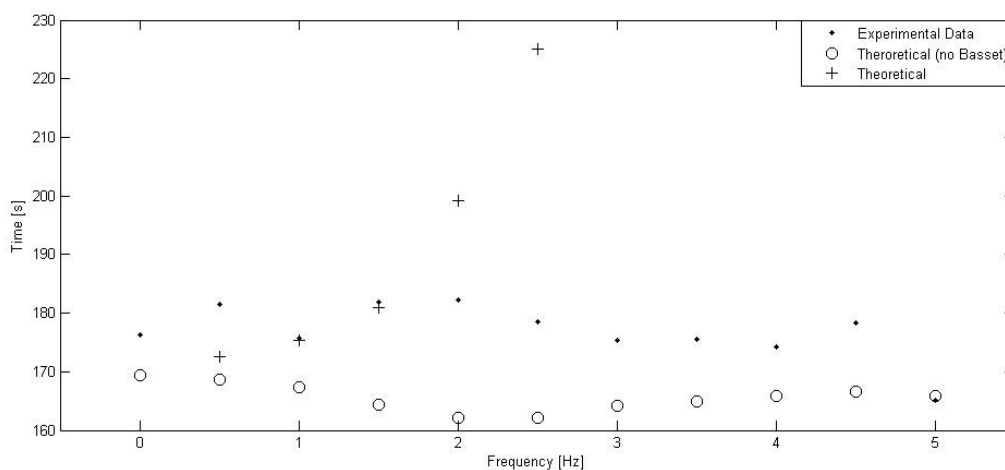
απεικονίζονται ο χρόνος είναι μεγαλύτερος από 250 sec (Πλάτος ταλάντωσης 0,5 cm και συχνότητα 1 Hz).

Χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους αυτές λύνεται η θεωρητική εξίσωση. Ενδεικτικά εξετάστηκαν οι περιπτώσεις για πλάτος ταλάντωσης 0,175, 0,375 και 0,5 cm και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα αντίστοιχα Σχήματα 4-12, 4-13 και 4-14. Παρατηρείται ότι όταν αυξάνεται η συχνότητα η ταχύτητα καθίζησης μειώνεται δραματικά, και μάλιστα για μεγάλες συχνότητες ο χρόνος καθίζησης με τον όρο Basset ξεπερνά τόσο τον χρόνο καθίζησης από τα πειραματικά δεδομένα που μπορεί να θεωρηθεί λανθασμένος. Μάλιστα όσο αυξάνεται το πλάτος ταλάντωσης τόσο για πιο μικρές συχνότητες ο όρος Basset επηρεάζει την λύση της εξίσωσης. Δηλαδή η λύση της θεωρητικής εξίσωσης αποκλίνει και για μικρότερες συχνότητες στην περίπτωση μεγάλων πλατών ταλάντωσης. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να οφείλεται είτε σε υπολογιστικά προβλήματα είτε στο ότι ο όρος Basset μπορεί να μην έχει φυσική σημασία στην περίπτωση ελεύθερης καθίζησης σε ταλαντευόμενη στήλη ρευστού και έτσι να πρέπει να αγνοηθεί.

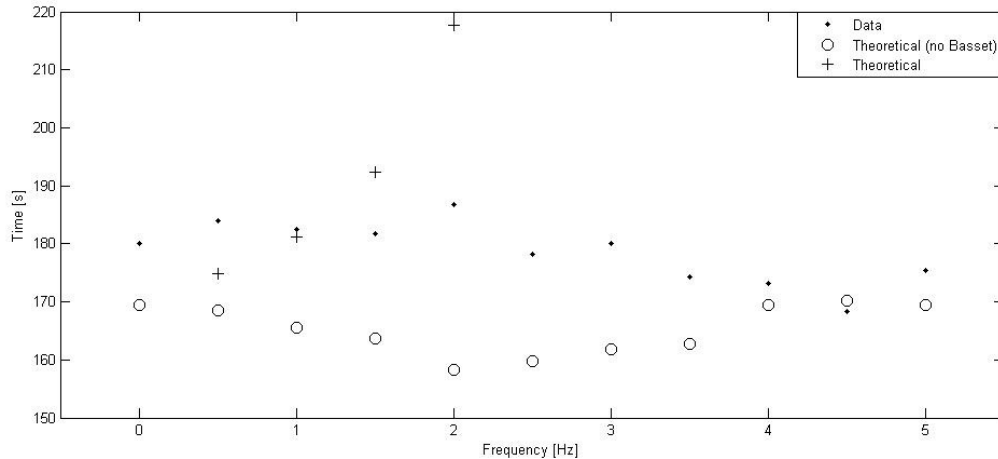
Να σημειωθεί ότι η εξίσωση αυτή κατασκευάστηκε για ελεύθερη καθίζηση σωματιδίου σε σταθερή ροή και όχι σε ταλαντευόμενη και έτσι ο όρος Basset είχε φυσική σημασία. Σε κάθε περίπτωση όπως φαίνεται και από τα αποτελέσματα ο όρος Basset εισάγει αβεβαιότητα (τουλάχιστον στην μορφή που ορίστηκε και με την μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε) και σε μερικές περιπτώσεις επηρεάζει τα αποτελέσματα σημαντικά. Λαμβάνοντας υπόψη επίσης ότι η θεωρητική εξίσωση χωρίς τον όρο Basset δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα, ο όρος Basset κρίνεται ότι δεν πρέπει να χρησιμοποιείται. Αυτό ισχύει αναφορικά με τις συνθήκες που εξετάστηκαν στην παρούσα εργασία μέχρι στιγμής και για μεγάλες συχνότητες και πλάτη ταλάντωσης.



Σχήμα 4-12: Χρόνοι καθίζησης για διάφορες συχνότητες και πλάτος ταλάντωσης $A=0,175$ cm όπως υπολογίστηκαν στην παρούσα εργασία με και χωρίς τον όρο Basset .



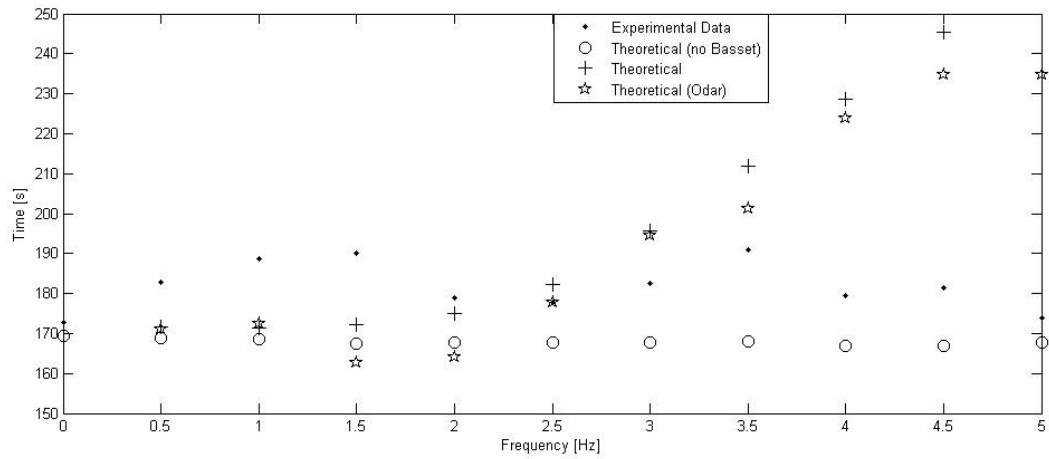
Σχήμα 4-13: Χρόνοι καθίζησης για διάφορες συχνότητες και πλάτος ταλάντωσης $A=0,375$ cm όπως υπολογίστηκαν στην παρούσα εργασία με και χωρίς τον όρο Basset .



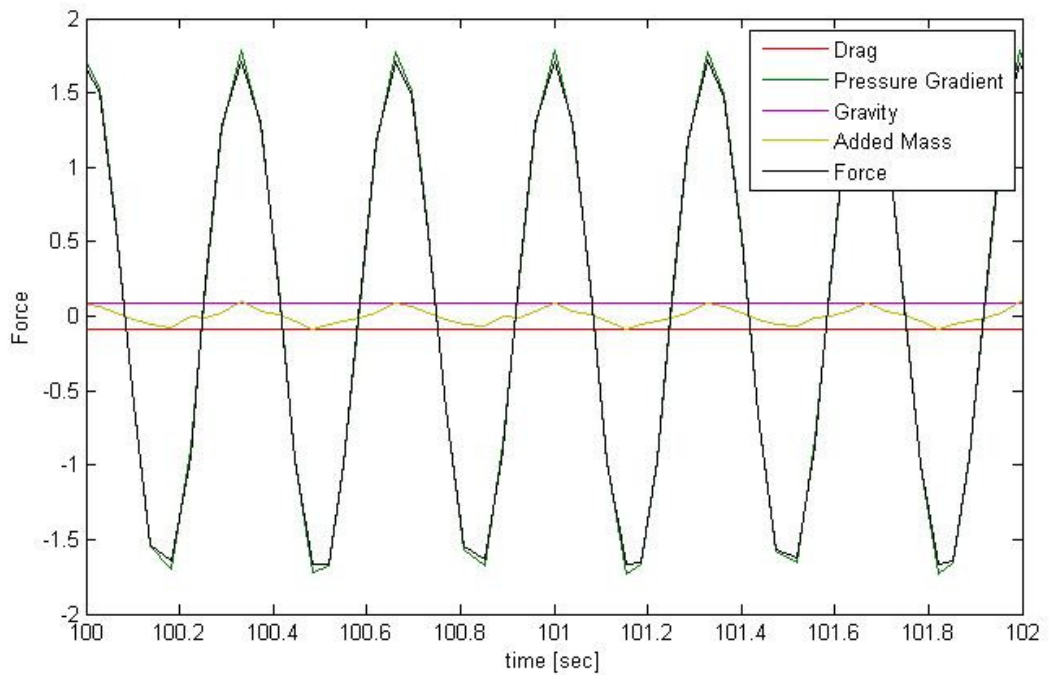
Σχήμα 4-14: Χρόνοι καθίζησης για διάφορες συχνότητες και πλάτος ταλάντωσης $A=0,5$ cm όπως υπολογίστηκαν στην παρούσα εργασία με και χωρίς τον όρο Basset.

Στην συνέχεια εξετάστηκε η θεωρητική εξίσωση κίνησης που περιλαμβάνει και τους συντελεστές των Odar και Hamilton (1964). Παρατηρείται ότι παρόλο που οι συντελεστές των Odar και Hamilton (1964) διαφοροποιούν το αποτέλεσμα ελαφρώς, τα αποτελέσματα συνεχίζουν να είναι λανθασμένα για μεγάλες συχνότητες και μεγάλα πλάτη ταλάντωσης.

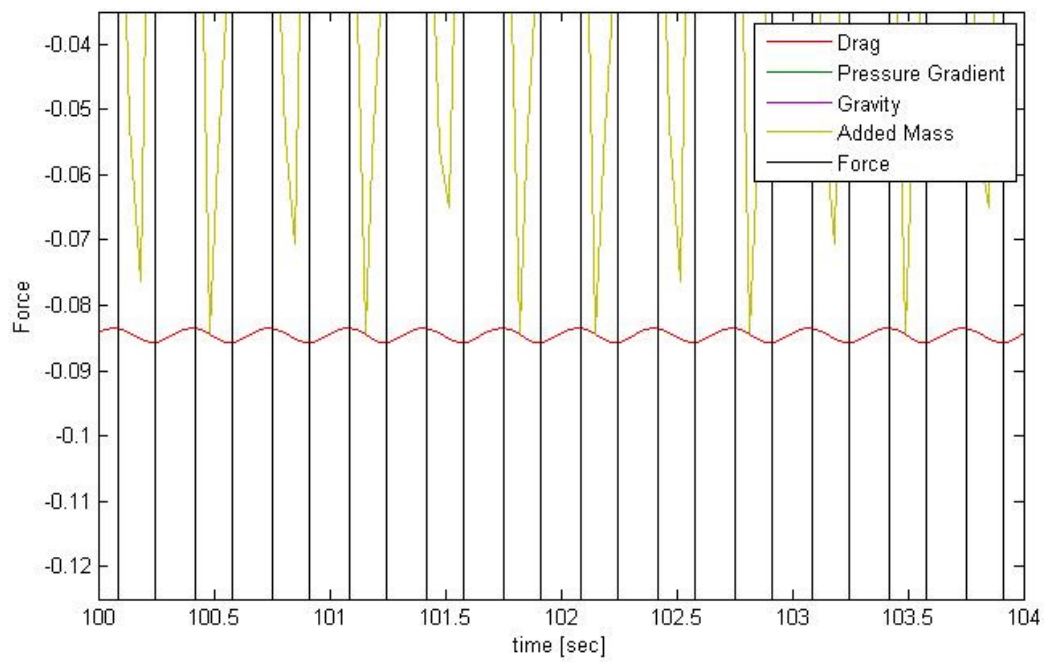
Ενδεικτικά παρουσιάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο για την περίπτωση $f=3$, $A=0.5$, χωρίς αλλά και με τον όρο Basset, υπολογισμένο όπως παραπάνω ($t'=0,5/f$, $n=2$). Παρατηρείται (Σχήματα 4-15, 4-16, 4-17) ότι χωρίς τον όρο Basset οι δυνάμεις που επικρατούν είναι αυτή της βαρύτητας και της οπισθέλκουσας δύναμης, η οποία είναι σχεδόν ίση και αντίθετη με την δύναμη της βαρύτητας. Ο όρος της προστιθέμενης μάζας καθώς και της κλίσης πίεσης δείχνουν να μεταβάλλονται αισθητά από την ταλάντωση της στήλης. Σε αντίθεση, η προσθήκη του όρου Basset δείχνει να επηρεάζει την κατανομή των δυνάμεων, καθώς επίσης παρατηρείται ότι το κύμα μετατοπίζεται σημαντικά σε σχέση με το κύμα ταλάντωσης της στήλης ρευστού.



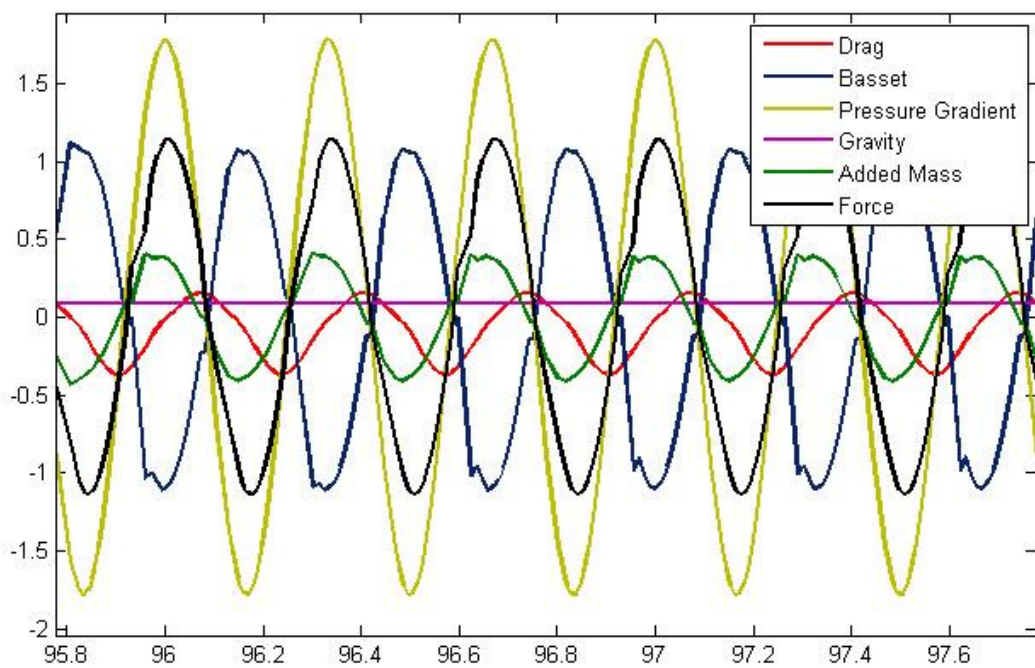
Σχήμα 4-15. Επίδραση των διορθώσεων των Odar και Hamilton (1964) στην θεωρητική εξίσωση για πλάτος ταλάντωσης $A=0,175$ cm.



Σχήμα 4-16: Δυνάμεις που ενεργούν στο σωματίδιο για την περίπτωση $f=3$, $a=0.5$ χωρίς τον όρο Basset.



Σχήμα 4-17: Λεπτομέρεια του Σχήμα 4-16.

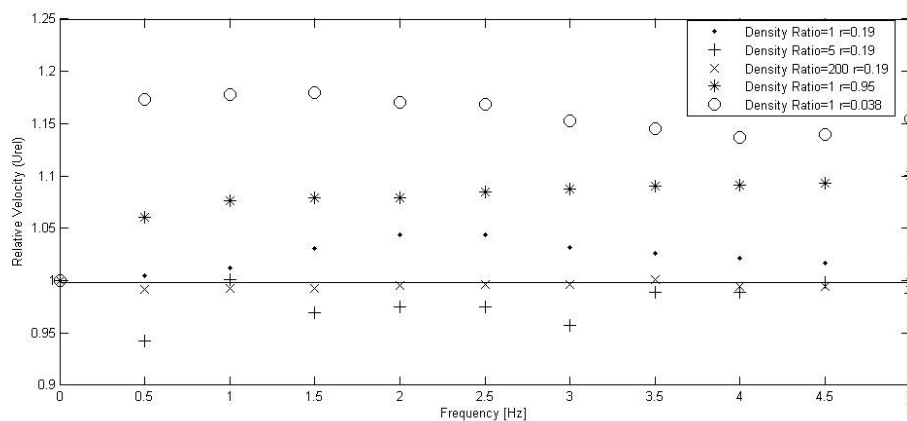


Σχήμα 4-18: Δυνάμεις που ενεργούν στο σωματίδιο για την περίπτωση $f=3$, $a=0.5$ με τον όρο Basset και $t'=0,5/f$, $n=2$.

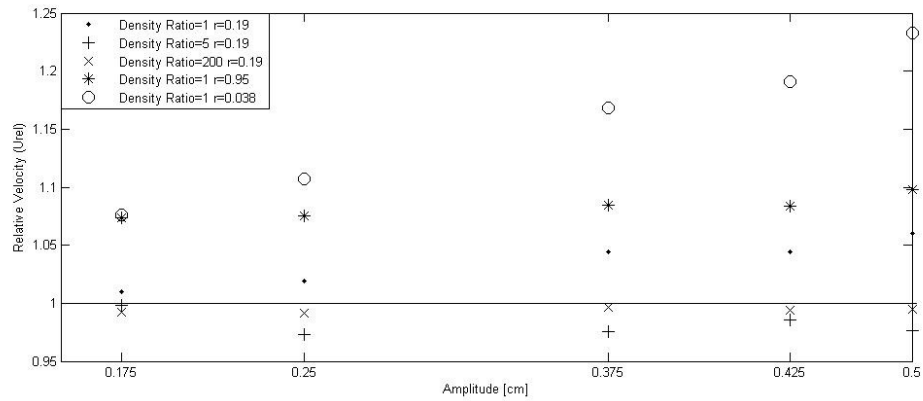
Επίδραση διαφόρων παραμέτρων

Στο Σχήμα 4-19 και στο Σχήμα 4-20, παρουσιάζονται οι σχετικές μέσες ταχύτητες για διάφορες περιπτώσεις, ως προς την συχνότητα και το πλάτος ταλάντωσης. Δηλαδή στα σχήματα αυτά φαίνεται πως αλλάζει η ταχύτητα καθίζησης με επιβολή ταλαντώσεων, σε σχέση με την περίπτωση χωρίς ταλαντώσεις. Στο Σχήμα 4-19 παρατηρείται ότι για λόγο πυκνοτήτων ίσο με 5, η ταχύτητα καθίζησης είναι μικρότερη με την επιβολή ταλαντώσεων στο υγρό. Μάλιστα αυτό ισχύει για μικρές συχνότητες. Όσο η συχνότητα αυξάνεται, η ταχύτητα δείχνει να αυξάνεται ξανά και να πλησιάζει την ταχύτητα χωρίς ταλαντώσεις. Να υπενθυμιστεί σε αυτό το σημείο, ότι για λόγο πυκνοτήτων ίσο με 1 (όπως και παρουσιάστηκε σε προηγούμενες παραγράφους), η ταχύτητα αυξανόταν με την επιβολή ταλαντώσεων. Επίσης, συγκριτικά με την περίπτωση λόγου πυκνοτήτων ίσο με 1, δεν παρατηρείται αύξηση της ταχύτητας γύρω από την συχνότητα των 2 Hz. Στην περίπτωση για λόγο πυκνοτήτων ίσο με 200 (Σχήμα 4-19), η σχετική ταχύτητα δεν μεταβάλλεται αισθητά. Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα αυξάνεται γύρω από τα 2 Hz.

Παρατηρώντας το Σχήμα 4-20 δεν παρατηρείται κάποια συσχέτιση μεταξύ πλάτους ταλάντωσης και χρόνου καθίζησης. Μάλιστα η συμπεριφορά αλλάζει με την αλλαγή του λόγου πυκνοτήτων.



Σχήμα 4-19: Σχετική μέση ταχύτητα καθίζησης σωματιδίου ως προς την συχνότητα για διάφορες περιπτώσεις.



Σχήμα 4-20: Σχετική μέση ταχύτητα καθίζησης σωματιδίου ως προς το πλάτος ταλάντωσης για διάφορες περιπτώσεις.

Στην συνέχεια έγινε αλλαγή της ακτίνας του σωματιδίου, με αντίστοιχη και ανάλογη αλλαγή του αριθμού Reynolds (Σχήμα 4-19). Να σημειωθεί ότι στις περιπτώσεις αυτές ο λόγος πυκνοτήτων παραμένει σταθερός. Για μικρότερη διάμετρο, η ταχύτητα καθίζησης αυξάνεται περισσότερο με την επιβολή ταλαντώσεων. Πέρα από αυτό τα αποτελέσματα δεν δείχνουν κάποια συνέπεια και άρα δεν μπορούν να εξαχθούν άλλα συμπεράσματα.

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία έγινε μία σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση αναφορικά με της εξισώσεις κίνησης σωματιδίου που καθιζάνει ελευθέρα σε στήλη ταλαντευόμενου ρευστού. Στην συνέχεια έγινε προσπάθεια για την επίλυση των εξισώσεων αυτών με την βοήθεια του προγραμματιστικού περιβάλλοντος MatLab και τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αυτά πειραματικών δεδομένων από διπλωματική εργασία. Παράλληλα εξετάστηκαν διάφορες περιπτώσεις όπως η σκοπιμότητα του όρου ιστορίας (Basset) στην θεωρητική διαφορική εξίσωση στην περίπτωση ταλαντευόμενης στήλης. Τέλος εξετάστηκαν η επίδραση της ακτίνας του σωματιδίου καθώς και του λόγου πυκνοτήτων (σωματιδίου - ρευστού).

Τα κύρια συμπεράσματα που εξάγονται από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι:

- Παρόλο που στα πειραματικά δεδομένα δεν υπήρχε κάποια συνέπεια ως προς την επίδραση της συχνότητας, στα υπολογιστικά αποτελέσματα εμφανίζεται ελαφρώς αύξηση της ταχύτητας καθίζησης. Επίσης παρατηρείται σημαντικότερη αύξηση για συχνότητες γύρω στα 2 Hz.
- Η επίδραση του όρου προστιθέμενης μάζας δείχνει να είναι πιο εμφανής για μεγάλες συχνότητες.
- Η δύναμη Basset φαίνεται να μην έχει φυσική σημασία ειδικά στην περίπτωση μεγάλων πλατών και συχνοτήτων ταλάντωσης. Επίσης ούτε για μικρές συχνότητες φαίνεται να προσφέρει κάποια βελτίωση στα αποτελέσματα. Τελικά ο όρος Basset δείχνει να μετατοπίζει την ταλάντωση του σωματιδίου σε σχέση με αυτή του ρευστού.
- Οι συντελεστές που προτείνουν οι Odar και Hamilton (1964) δεν βελτιώνουν σημαντικά το αποτέλεσμα και η χρήση τους δεν κρίνεται αναγκαία.
- Παρόλο που για μοναδιαίους λόγους πυκνότητας στα υπολογιστικά αποτελέσματα παρατηρείται αύξηση της ταχύτητας με επιβολή ταλαντώσεων, στην περίπτωση όπου η πυκνότητα του σωματιδίου είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα του ρευστού, η ταχύτητα καθίζησης μειώνεται με την επιβολή ταλαντώσεων. Η μεταβολή της ακτίνας με σταθερό λόγο πυκνοτήτων δεν επέφερε κάποιο αποτέλεσμα πέραν του αναμενόμενου.

Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε πέραν των άλλων η επίδραση και σκοπιμότητα του όρου Basset. Αυτό έγινε για την περίπτωση μόνο όπου ο λόγος πυκνοτήτων είναι μοναδιαίος και για σχετικά χαμηλούς αριθμούς Reynolds. Προτείνεται να εξεταστούν και άλλες περιπτώσεις για να διαπιστωθεί κατά πόσο τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας μπορούν να επεκταθούν και σε άλλες περιπτώσεις.

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Γκουδούλας, Β. Θ., 1995, Μελέτη κατακάθισης στερεών σωματιδίων σε ταλαντούμενη στήλη υγρού. Διπλωματική εργασία. *Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης*.

Ξενόγλωσση

Balaramakrishna, P. V. and Chhabra, R. P., 1992, Sedimentation of a sphere along the axis of a long square duct filled with non-Newtonian liquids. *Can. J. Chem. Eng.*, **70**: 803-807.

Basset, A. B., 1888, A Treatise on Hydrodynamics. **2**: 285. Dover.

Berlemont, A., Desjonqueres, P. and Gouesbet, G., 1990, Particle Lagrangian simulation in turbulent flows. *Intl. J. Multiphase Flow*, **16**: 19 - 34.

Boussinesq, J., 1903, Theorie Analytique de la Chaleur (L' Ecole Polytechnique, Paris), **2**: 224.

Dorgan, A. J. and Loth, E., 2007, Efficient calculation of the history force at finite Reynolds numbers. *Intl. J. Multiphase Flow*, **33**: 833–848.

Garside, J. and Al-Dibouni, M. R., 1997, Velocity-voidage relationships for fluidization and sedimentation in solid-Liquid Systems, *Ind. Eng. Chem. Des. Dev.*, **16**: 206-214

Hinsberg, M. A. T., 2011, Computational methods for particle tracking in isotropic turbulence. R-1777-A.

Kim, I., Elghobashi, S. and Sirignano, W. A., 1998, On the equation for spherical-particle motion: effect of Reynolds and acceleration numbers. *J. Fluid Mech.*, **367**: 221-253.

Masliyah, J. H., 1979, Hindered settling in a multi-specis particle system. *Chem. Eng. Sci.*, **34**: 1166-1167.

- Maxey, M. R. and Riley, J. J., 1983, Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Phys. Fluids*, **26**: 883 - 889.
- Mei, R., 1994, Flow due to an oscillating sphere and an expression for unsteady drag on the sphere at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **270**: 133 - 174.
- Mei, R. and Adrian, R. J., 1992, Flow past a sphere with an oscillation in the free-stream and unsteady drag at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **237**: 323 - 341.
- Nars-El-Din, H., Masliyah, J. H., Nandakumar, K. and Law, D. H.-S., 1988, Continuous gravity separation of idispersesuspension in Vertical Column. *Chem. Eng. Sci.*, **43**: 3225-3234.
- Odar, F., 1966, Verification of the proposed equation for calculation of the forces on a sphere accelerating in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, **25**: 591 - 592.
- Odar, F. and Hamilton, W. S., 1964, Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, **18**: 302 - 314.
- Oseen, C. W., 1927, Hydrodynamik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.
- Sirignano, W. A., 1999, Fluid dynamics and transport of droplets and sprays. University of California, Irvine. *Cambridge University Press*.

Παράρτημα - Βασικοί Κώδικες MatLab

equationNoBasset.m

```
function dxdt = equationCaConst(t,x)

%Equation for particle with constant added mass coefficient and
no basset history force
%terms.
%All equations parameters (densities radius etc) are as in
thesis
%All units in the basis of cm and grams

%Change "f" (frequency) and "alpha" (amplitude) manually
%Change "ca" (added mass term coefficient) manually

%Constants
g=981; %gravity [cm/s^2]
f=2.5; %frequency of liquid oscilations [hz]
omega=2*pi*f;
alpha=0.175; % amplitude of liquid oscilations [cm]
rhoP=1.061; %Density of particle [g/cm-3]
rhoL=1.058; %Density of liquid [g/cm-3]
r=0.038; %Particle radius [cm]
viscosity=0.0228; %Dynamic viscosity of liquid [P] or
[g/(cm*s)]
ca=0.5; % Correction coefficient []

uL=alpha*omega*sin(omega*t); %Liquid velocity
aL=alpha*(omega^2)*cos(omega*t); %Liquid acceleration
reynolds=(2*r*rhoL*abs(x(2)-uL))/viscosity; %Reynolds number
cdstd=(24/(reynolds+eps))*(1+0.15*(reynolds^0.687)); %steady
state drag coefficient

dxdt=[x(2); (0.5*cdstd*rhoL*abs(uL-x(2))*(uL-
x(2))+ca*(4/3)*rhoL*r*aL+((4/3)*r*(rhoP-
rhoL)*g)+((4/3)*r*rhoL*aL))/((4/3)*r*(rhoP+ca*rhoL))];
```


theoretical.m

```

function sol = theoretical(t0,tFinal)
global n f alpha dt

T=0.5;
n=2;
f=5;
alpha=0.175;
dt=T/(n*f);

for i=1:n+1
    lags(i)=i*dt;
end
options = ddeset('RelTol', 1e-5);
sol = dde23(@equationTheoretical2,lags,[0;0],[t0 tFinal],
options);

function dxdt = equationTheoretical2(t,x,Z)
global dt f alpha n
%Equation for particle with the added mass and basset history
force

%All equations parameters (densities radius etc) are as in
thesis

%All units in the basis of cm and grams

%Change "f" (frequency) and "alpha" (amplitude) manually

%The equation is to be solved as delay diferential equation. aP
is
%approximated as aP(t)=[uP(t)-uP(t-?)]/dt, where dt is equal
to ? and ? is
%a lag value (Z)

%Lags
for i=1:n+1 %One more lag for derivative calculation

```

```

    eval(['xlag'    int2str(i)    '=Z(:,i);'])    %xlag1=Z(:,1)..
xlag2=Z(:,2)....
end

%Constants
g=981; %gravity [cm/s^2]
omega=2*pi*f;
rhoP=1.061; %Density of particle [g/cm-3]
rhoL=1.058; %Density of liquid [g/cm-3]
r=0.19; %Particle radius [cm]
viscosity=0.0228; %Dynamic viscosity of liquid [P] or
[g/(cm*s)]

%Known Variables
uL=alpha*omega*sin(omega*t); %Liquid velocity
aL=alpha*(omega^2)*cos(omega*t); %Liquid acceleration
reynolds=(2*r*rhoL*abs(x(2)-uL))/viscosity; %Reynolds number
cdstd=(24/(reynolds+eps))*(1+0.15*(reynolds^0.687)); %steady
state drag coefficient

%Basset Integral calculation
%First calculate all the history terms that will be used in
the calculations of the integral
U=zeros(n,1); %U=(uL-uP)/dt=aL-aP where aP=(u(t)-u(t-dt))/dt
(finite differnces) and aL=aL(t) as above
%Even for the calculation of the current U value a delay term
is needed that is why for approximating a basset term with n
delay terms we need n+1 actual terms.
for i=1:n %1 is the oldest, n+1 is the current
    %Eval is used in order to change every time the number of
xlag1 xlag2 ect
    U(i)=eval(['alpha*(omega^2)*cos(omega*(t-(n-(i-1))*dt))-
((xlag'    int2str(n-(i-1))    '(2)-xlag'    int2str(n-(i-2))
'(2))/dt);']);    %U(i)=aP(t-(n-(i-1))*dt)-(xlag[(n-(i-2)](2)-
xlag[n-(i-1)](2))
end
U(n+1)=aL-((x(2)-xlag1(2))/dt);

basset1=0;
%first line of basset integral (SUM) (Kim et al)

```

```

for i=1:n-1 %U(1) is the oldest U because not possible to
write U(0).

basset1New=((U(i-1+1)/sqrt((n*dt)-(i-1)*dt))+2*(U(i-
1+1)+U(i+1))/sqrt((n*dt-(i-0.5)*dt)))+(U(i+1)/sqrt(n*dt-
i*dt));

basset1=basset1New+basset1;

end

basset2=(0.9*dt/6)*((U(n-1+1)/sqrt(dt))+2*(U(n-
1+1)+U(n+1))/sqrt(0.55*dt))+U(n+1)/sqrt(0.1*dt)); %second
line of basset integral

basset3=(0.1*dt/2)*(((8*sqrt(2)/3)*(U(n+1)/sqrt(0.05*dt))-
((4/3)*U(n+1)/sqrt(0.1*dt))); %third line of Basset integral

basset=((dt/6)*basset1)+basset2+basset3;

dxdt=[x(2);(0.5*cdstd*rhoL*abs(uL-x(2))*(uL-
x(2))+0.5*(4/3)*rhoL*r*aL+((4/3)*r*(rhoP-
rhoL)*g)+((4/3)*r*rhoL*aL)+(6*sqrt(rhoL*viscosity/pi)*basset)
/((4/3)*r*(rhoP+0.5*rhoL))];

```