ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Α' Ηλικιακού Κύκλου (5-12 χρόνων)

Διπλωματική εργασία

Κατασκευή Μαθηματικού Προβλήματος σε παιδιά της τρίτης Δημοτικού

της

Μπακαλίδου Άννας, Α.Ε.Μ. 576

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάνα, Καθηγήτρια Τ.Ε.Π.Α.Ε./Α.Π.Θ.
Εξεταστές: Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια Π.Τ.Ν./Παν/μιο Ιωαννίνων
Παπαδόπουλος Ιωάννης, Επ. Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Α.Π.Θ.

Φλώρινα, Νοέμβριος 2017

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Περίληψη

Σκοπός της έρευνας, που είναι μια ποσοτική έρευνα, αποτελεί η διερεύνηση της ικανότητας κατασκευής μαθηματικού προβλήματος πριν και μετά τη συμμετοχή μαθητών σε ένα πρόγραμμα διδακτικής παρέμβασης πάνω στην κατασκευή προβλημάτων. Αρχικά, μελετήθηκε κατά πόσο ικανοί είναι οι μαθητές να κατασκευάζουν προβλήματα με βάση δομημένες και ημι-δομημένες μαθηματικές καταστάσεις πριν και μετά το πρόγραμμα παρέμβασης. Επιπλέον, ερευνήθηκε αν η συμμετοχή των μαθητών σε ένα πρόγραμμα παρέμβασης πάνω στην κατασκευή προβλήματος μπορεί να λειτουργήσει ευνοϊκά στην ικανότητα κατασκευής αλλά και επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Παράλληλα, εξετάστηκε αν η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής προβλημάτων. Στην έρευνα συμμετείχαν είκοσι ένας μαθητές της Γ' δημοτικού. Χορηγήθηκαν δύο τεστ, ένα αρχικό και ένα τελικό, για να εξεταστεί η ικανότητα επίλυσης και κατασκευής μαθηματικού προβλήματος πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Τα δοκίμια που αφορούν την επίλυση προβλημάτων αξιολογήθηκαν ως προς τέσσερα κριτήρια: την κατανόηση, την ορθότητα, την ακρίβεια και την αυθεντικότητα ενώ αυτά που αφορούν την κατασκευή προβλημάτων αξιολογήθηκαν ως προς: την ακρίβεια, την ορθότητα, την αυθεντικότητα και το επίπεδο δυσκολίας. Το πρόγραμμα της διδακτικής παρέμβασης αποτελούνταν από οχτώ συναντήσεις. Τα ευρήματα της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές είναι σε θέση να θέτουν τα δικά τους προβλήματα. Η εισαγωγή ενός προγράμματος παρέμβασης κατασκευής μαθηματικού προβλήματος στη διδασκαλία των μαθηματικών φαίνεται ότι μπορεί να λειτουργήσει ευνοϊκά στην ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν αλλά και να επιλύουν προβλήματα. Ωστόσο, δεν βρέθηκε κάποια ισχυρή ένδειξη ότι η ικανότητα επίλυσης μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων.

Λέξεις-κλειδιά: κατασκευή προβλήματος, επίλυση προβλήματος, μαθηματικό πρόβλημα, δομημένη και ημιδομημένη μαθηματική κατάσταση, πρόγραμμα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος, μαθητές τρίτης δημοτικού

Abstract

The purpose of the study, which is a quantitative one, is to investigate the students' problem-posing ability before and after their participation in a problem-posing program. Initially, students' problem-posing ability on structured and semi-structured mathematical situations was examined before and after the program. It was also investigated whether students' participation in the problem-posing program could affect their ability to pose and solve mathematical problems. At the same time, it was examined whether the problem-solving ability can predict the problem-posing ability. Twenty-one third grade students participated in this study. Two tests, a pre-test and a post-test, were given to examine the ability to solve and pose mathematical problems before and after the program. The assessment included four aspects of the problem-solving product: understanding, correctness, accuracy and authenticity, while problems posed by students were assessed according to the following four aspects: accuracy, correctness, authenticity, and level of difficulty. The program consisted of eight sessions. The results of the study show that students are able to pose their own problems. Implementing a mathematical problem-posing program in the teaching of mathematics appears successful in developing the children's problem-posing and problem-solving abilities. However, no strong evidence was found that problem-solving ability can predict problem-posing ability.

Key-words: problem-posing, problem-solving, mathematical problem, structured and semi-structured mathematical situation, problem-posing program, third grade students

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας τη διπλωματική μου εργασία και τη φοίτησή μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών» νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω όλα τα πρόσωπα που με βοήθησαν να φτάσω σε αυτό το σημείο.

Αρχικά, θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ μέσα από την καρδιά μου στην κα. Μαριάνα Τζεκάκη, Καθηγήτρια του Τμήματος Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ., η οποία επέβλεψε τη διπλωματική μου εργασία, για όλη την υποστήριξη που μου πρόσφερε, την άμεση και ουσιαστική επικοινωνία που είχαμε για να μπορέσει να ολοκληρωθεί η εργασία αυτή καθώς και για όλα όσα έχω μάθει κοντά της. Παρόμοια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς μου επιτροπής, την κα. Μαρία Καλδρυμίδου, Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου των Ιωαννίνων, και τον κ. Ιωάννη Παπαδόπουλο, Επίκουρο Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ., για τη συνεργασία στη διάρκεια των φοιτητικών μου σπουδών και για τη σημαντική συμβολή τους στον τρόπο που σκέφτομαι σε θέματα μαθηματικής εκπαίδευσης.

Θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω τους μαθητές μου, που έλαβαν μέρος στην έρευνα και ήταν συνοδοιπόροι μαζί μου σε αυτό το ιδιαίτερα ενδιαφέρον ταξίδι.

Τέλος, θα ήθελα να αναφέρω την οικογένεια και τον σύντροφό μου για την αμέριστη υποστήριξη, την υπομονή και την ενθάρρυνσή τους τόσο κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας αυτής όσο και κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Εισαγωγή

Αν ποτέ κάποιος έθετε την ερώτηση «Από πού προέρχονται τα καλά μαθηματικά προβλήματα;» τότε η απάντηση θα ήταν εμφανής ότι τα προβλήματα των μαθηματικών προφανώς προέρχονται από καθηγητές μαθηματικών και εγχειρίδια, άρα τα καλά προβλήματα μαθηματικών πρέπει να προέρχονται από καλούς δασκάλους μαθηματικών και καλά σχολικά βιβλία (Kilpatrick, 1987). Οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές υποθέτουν ότι τα προβλήματα υπάρχουν απλά εκεί έξω στον κόσμο και κανείς τους δεν αναρωτιέται από πού προέρχονται. Η ιδέα ότι οι μαθητές οι ίδιοι μπορούν να αποτελέσουν την πηγή καλών προβλημάτων πιθανώς να μην πέρασε ποτέ από το μυαλό πολλών μαθητών αλλά και των δασκάλων τους.

Η κατασκευή προβλήματος θα πρέπει να θεωρείται όχι μόνο στόχος της διδασκαλίας αλλά και μέσο διδασκαλίας. Η εμπειρία της ανακάλυψης και της δημιουργίας προσωπικών μαθηματικών προβλημάτων πρέπει να είναι μέρος της εκπαίδευσης κάθε μαθητή (Kilpatrick, 1987). Έτσι, η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος πρέπει να αποτελεί σημαντικό κομμάτι της διδασκαλίας των μαθηματικών, γιατί βρίσκεται στην καρδιά των μαθηματικών, όπως χαρακτηριστικά δηλώνουν σημαντικοί ερευνητές (Kilpatrick, 1987, Silver, 1994).

Ωστόσο, κατασκευή και επίλυση προβλήματος πάνε μαζί σύμφωνα με τον Kilpatrick (1987). Ο κύριος στόχος της κατασκευής και της επίλυσης προβλημάτων στο σχολείο θα πρέπει να είναι η προετοιμασία των μαθητών ώστε να γίνουν ευφυείς χρήστες της μαθηματικής γνώσης και των προσεγγίσεων στην καθημερινή τους ζωή (Stoyanova E. N., 1997). Έξω από το σχολείο, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να θέτουν και να λύνουν προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Επομένως, είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να βοηθούν τους μαθητές να μάθουν τρόπους σκέψης που θα τους βοηθήσουν να εργαστούν πάνω σε αυτή την κατεύθυνση μέσα από προβλήματα. Επιπλέον, τέτοιες δραστηριότητες βοηθούν τους μαθητές να μάθουν πώς να γενικεύουν τις γνώσεις τους στα μαθηματικά και έτσι τα μαθηματικά αποκτούν μεγαλύτερο νόημα για αυτούς (Stoyanova E. N., 1997).

Για πολλά χρόνια το ενδιαφέρον της Διδακτικής των Μαθηματικών ήταν στραμμένο κυρίως στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενώ η διαδικασία της κατασκευής έχει λάβει λίγη προσοχή στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Κυρίως από τη δεκαετία του 1980 και μετά παρουσιάζονται μελέτες, έρευνες και άρθρα που αφορούν και τη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων. Στη χώρα μας η μελέτη του συγκεκριμένου θέματος είναι ακόμα πιο περιορισμένη.

Το ΔΕΠΠΣ των μαθηματικών για το δημοτικό του 2003 ορίζει στους γενικούς στόχους που αφορούν την επίλυση προβλημάτων: «*Οι μαθητές εξερευνούν μία κατάσταση, κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα, αναγνωρίζουν και περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και* *εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες*». Τίθενται, επομένως, στόχοι που αφορούν την κατασκευή προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα για τις Δ΄, Ε΄ και Στ΄ τάξεις ορίζεται ως στόχος οι μαθητές να είναι σε θέση να βρίσκουν ενδιάμεσα ερωτήματα που υποβοηθούν την πορεία προς τη λύση ενός προβλήματος, ενώ μόνο στις Δ΄ και Στ΄ τάξεις ορίζεται επιπρόσθετα ο στόχος οι μαθητές να μπορούν να θέτουν δικά τους ερωτήματα και παρόμοια προβλήματα (ΔΕΠΠΣ, 2003). Στο εξωτερικό η κατασκευή προβλήματος αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της διδασκαλίας των μαθηματικών. Σύμφωνα, για παράδειγμα, με το National Council of Teachers of Mathematics (όπ. αναφ. στην English, 1998) η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος πρέπει να αποτελεί έναν από τους κύριους άξονες της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε η παρούσα έρευνα με σκοπό να διερευνήσει αν η συμμετοχή των μαθητών σε ένα πρόγραμμα παρέμβασης πάνω στην κατασκευή προβλήματος οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα στην κατασκευή προβλημάτων και αν μπορεί να λειτουργήσει ευνοϊκά στην ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων από τους μαθητές. Μελετήθηκε πόσο ικανοί είναι οι μαθητές να κατασκευάζουν προβλήματα με βάση διάφορες μαθηματικές καταστάσεις πριν και μετά το πρόγραμμα παρέμβασης και αν η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής.

Για να πραγματοποιηθεί η έρευνα έγινε μια ανασκόπηση των ερευνών, που έχουν πραγματοποιηθεί για την κατασκευή προβλήματος και πάνω σε αυτή βασίζεται το θεωρητικό πλαίσιο, που παρουσιάζεται στο 1^{ο} κεφάλαιο. Εκεί αναλύεται τι είναι η κατασκευή προβλήματος (καταστάσεις, διαδικασίες, στρατηγικές, παράγοντες που την επηρεάζουν), ποια είναι τα οφέλη και η σημασία της, ποια είναι η σχέση της με την επίλυση προβλήματος και ποιες διδακτικές παρεμβάσεις προτείνονται πάνω σε αυτή. Στο 2^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά ο στόχος και τα ερευνητικά ερωτήματα που αφορούν την παρούσα έρευνα ενώ επιχειρείται η αποσαφήνιση του εννοιολογικού πλαισίου διατυπώνοντας τους λειτουργικούς ορισμούς, που αφορούν τις βασικές έννοιες της έρευνας. Στο 3^{ο} κεφάλαιο περιγράφεται η μεθοδολογία (μέθοδος, δείγμα, εργαλεία, ερευνητική διαδικασία, διδακτική παρέμβαση, αξιοπιστία και εγκυρότητα) που χρησιμοποιήθηκε για τη διεξαγωγή της έρευνας. Στο 4^{ο} κεφάλαιο περιγράφονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας και αναλύονται στατιστικά για καθένα από τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας. Στο 5^{ο} κεφάλαιο γίνεται μία συζήτηση πάνω στα αποτελέσματα, με απώτερο σκοπό να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας. Παρουσιάζονται οι σχέσεις των ευρημάτων με άλλα ερευνητικά αποτελέσματα αλλά και νέα ερευνητικά στοιχεία καθώς και οι περιορισμοί της έρευνας. Στο 6^{ο} κεφάλαιο συνοψίζονται τα συμπεράσματα και γίνονται προτάσεις για πρακτική εφαρμογή αλλά και για μελλοντικές έρευνες. Τέλος, στο 7^{ο} κεφάλαιο παρουσιάζεται η βιβλιογραφία πάνω στην οποία βασίστηκε η παρούσα έρευνα και στο παράρτημα, εμφανίζονται τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη διεξαγωγή της έρευνας.

1. Ανασκόπηση Βιβλιογραφίας - Θεωρητικό Πλαίσιο

Στάδια κατασκευής προβλήματος

Η έννοια της διαδικασίας της κατασκευής προβλήματος (problem posing) τα τελευταία τριάντα χρόνια έχει αποσαφηνισθεί και έχει εμπλουτιστεί αρκετά. Σύμφωνα με τον Silver (1994) το «problem posing» αναφέρεται στην κατασκευή καινούριων προβλημάτων αλλά και στην αναδιατύπωση δοσμένων προβλημάτων. Η κατασκευή ενός προβλήματος συνήθως, όμως, αναφέρεται σε ένα κάπως διαφορετικό είδος δραστηριότητας πέραν της αναδιατύπωσης, στην οποία η κατασκευή του προβλήματος είναι το ζητούμενο, το επίκεντρο της προσοχής. Σε αυτή την περίπτωση, ο στόχος δεν είναι η επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, αλλά η κατασκευή ενός νέου προβλήματος από μια κατάσταση ή εμπειρία. Αυτό το είδος κατασκευής προβλήματος μερικές φορές αναφέρεται ως διαμόρφωση προβλήματος (problem formulation) και είναι μια διαφορετική διαδικασία από την αναδιατύπωση, που συμβαίνει στην επίλυση των σύνθετων προβλημάτων.

Σύμφωνα με τον Silver (1994) η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος μπορεί να προκύψει σε τρεις περιπτώσεις μαθηματικής δραστηριότητας: α) πριν από την επίλυση του προβλήματος, κατά την οποία κάποιος κατασκευάζει ένα πρωτότυπο πρόβλημα από μια κατάσταση που του παρουσιάζεται ως ερέθισμα (presolution posing), β) κατά τη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος, κατά την οποία κάποιος τροποποιεί ένα σύνθετο πρόβλημα καθώς το επιλύει (within-solution posing) και γ) μετά από την επίλυση του προβλήματος, κατά την οποία ο λύτης τροποποιεί τους στόχους και τις προϋποθέσεις από ένα πρόβλημα που έχει επιλύσει, για να κατασκευάσει άλλα όμοια προβλήματα (postsolution posing).

Μαθηματικές καταστάσεις για την κατασκευή προβλήματος

Οι Stoyanova & Ellerton (1996) και Stoyanova (1997) προσδιόρισαν τρεις κατηγορίες μαθηματικών καταστάσεων για την κατασκευή προβλημάτων, που μπορούν να αυξήσουν τη γνώση των μαθητών για τις καταστάσεις αυτές, να δημιουργήσουν και να λύσουν μαθηματικά προβλήματα. Αυτές οι κατηγορίες είναι: α) οι ελεύθερες καταστάσεις (free problem-posing situations), β) οι ημι-δομημένες καταστάσεις (semi-structured problem-posing situations) και γ) οι δομημένες καταστάσεις (structured problem-posing situations).

Στις ελεύθερες καταστάσεις οι μαθητές κατασκευάζουν προβλήματα χωρίς κανέναν περιορισμό. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι όταν οι μαθητές ενθαρρύνονται να γράψουν ελεύθερα προβλήματα για να λύσουν οι φίλοι τους. Οι ημι-δομημένες καταστάσεις αναφέρονται σε περιπτώσεις όπου οι μαθητές καλούνται να γράψουν προβλήματα παρόμοια με άλλα προβλήματα ή να γράψουν προβλήματα που βασίζονται σε συγκεκριμένες εικόνες και διαγράμματα. Οι δομημένες καταστάσεις, τέλος, αναφέρονται σε καταστάσεις όπου οι μαθητές δημιουργούν προβλήματα αναδιατυπώνοντας ήδη λυμένα προβλήματα ή τροποποιώντας τα δεδομένα και τα ζητούμενα σε συγκεκριμένα προβλήματα (Pittalis, Christou, Mousoulides, & Pitta-Pantazi, 2004).

Πιο συγκεκριμένα χαρακτηρίζουμε μια κατάσταση κατασκευής προβλήματος ελεύθερη, όταν οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα από μια δεδομένη κατάσταση, που προέκυψε με φυσικό τρόπο ή δόθηκε σκόπιμα (Stoyanova & Ellerton, 1996). Είναι πιθανό να δοθούν ορισμένες οδηγίες, για να ζητηθούν συγκεκριμένες ενέργειες. Μπορεί, επίσης, να ζητηθεί από τους μαθητές να κατασκευάσουν προβλήματα που σχετίζονται με το θέμα που μελετούν την εκάστοτε χρονική στιγμή. Οδηγίες, όπως: «*Φτιάξε ένα δύσκολο πρόβλημα*», «*Κατασκεύασε ένα πρόβλημα που θα ήθελες να δεις σε έναν διαγωνισμό μαθηματικών*», «*Τι είδους προβλήματα περιμένεις να βρεις στο τεστ των μαθηματικών σου;*», «*Κατασκεύασε ένα πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί από τον δάσκαλό σου*» ή απλά «*Κατασκεύασε οποιοδήποτε πρόβλημα σου αρέσει*» έχουν ως στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να μαθηματικοποιήσουν τις προηγούμενες εμπειρίες τους από μια συγκεκριμένη οπτική γωνία (Stoyanova E. N., 1997).

Πολλοί ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει ελεύθερες καταστάσεις κατασκευής προβλήματος στις μελέτες τους (Stoyanova & Ellerton, 1996). Για παράδειγμα, η Ellerton (1986) εισήγαγε το κομμάτι της δημιουργικής γραφής στα μαθηματικά, ζητώντας από μαθητές να κατασκευάσουν προβλήματα μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα ζήτησε από μαθητές της Αυστραλίας να θέσουν ένα πρόβλημα, το οποίο θα ήταν δύσκολο για έναν φίλο τους να το λύσει. Ζήτησε, επίσης, από τους μαθητές να γράψουν ένα γράμμα σε έναν φίλο, που απουσίαζε από το σχολείο λόγω ασθένειας, περιγράφοντας την ύλη των μαθηματικών, με την οποία η τάξη είχε ασχοληθεί κατά τη διάρκεια των τελευταίων τριών εβδομάδων. Ως μέρος της επιστολής τους, οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν μαθηματικές ερωτήσεις, παρόμοιες με εκείνες που είχαν αντιμετωπίσει κατά τη διάρκεια εκείνου του διαστήματος. Σύμφωνα την Ellerton (1988) «*η έκφραση των μαθηματικών ιδεών των παιδιών μέσω της δημιουργίας των δικών τους προβλημάτων αποδεικνύει όχι μόνο την κατανόηση και το επίπεδο ανάπτυξής των μαθηματικών εννοιών, αλλά επίσης αντικατοπτρίζει την αντίληψή τους για τη φύση των μαθηματικών*» (σ.281).

Προχωρώντας στις ημι-δομημένες, μια κατάσταση κατασκευής προβλήματος χαρακτηρίζεται έτσι, όταν οι μαθητές έχουν μια κατάσταση και καλούνται να διερευνήσουν τη δομή της και να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα πάνω σ' αυτή εφαρμόζοντας γνώσεις, δεξιότητες, έννοιες και σχέσεις από προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες τους (Stoyanova & Ellerton, 1996).

Στο σημείο αυτό εισάγονται δύο νέοι ορισμοί που αφορούν τη δομή ενός προβλήματος και τη δομή της λύσης του προβλήματος, που συμβάλουν στον καθορισμό των ημι-δομημένων καταστάσεων κατασκευής προβλήματος (Stoyanova, 1997). Σύμφωνα με τη Stoyanova (1997) η δομή ενός προβλήματος αναφέρεται στα βασικά στοιχεία του προβλήματος τα οποία είναι τα δεδομένα, οι λειτουργίες και οι στόχοι. Η δομή της λύσης αναφέρεται στα βασικά στοιχεία της παρουσίασης της λύσης που περιέχει τα βασικά βήματα προσέγγισης της λύση και την αιτιολόγηση για την εφαρμογή των αλγόριθμων που χρησιμοποιούνται.

Οι ημι-δομημένες καταστάσεις κατασκευής προβλημάτων που είναι σχετικές με τη δομή ενός προβλήματος αφορούν την περιγραφή των προβλημάτων που θα μπορούσαν να δημιουργηθούν με βάση τις πληροφορίες που δίνονται στους μαθητές από ημιτελείς κατασκευές προβλημάτων (Stoyanova, 1997). Οι ημιτελείς κατασκευές προβλημάτων μπορούν να δοθούν είτε από μια εικόνα, μια εξίσωση, μια πράξη ισότητας ή μια ανισότητα. Οι ημι-δομημένες καταστάσεις κατασκευής προβλημάτων που είναι σχετικές με τη δομή της λύσης είναι η αναδιατύπωση ενός προβλήματος, όταν δίνεται η λύση του ή η παρουσίαση ενός μέρους του προβλήματος στους μαθητές καθώς και μια σειρά από πιθανές απαντήσεις για την κατασκευή του (Stoyanova & Ellerton, 1996).

Τέλος, μια κατάσταση κατασκευής προβλήματος ονομάζεται δομημένη, όταν οι δραστηριότητες για την κατασκευή του βασίζονται σε ένα ορισμένο πρόβλημα ή μια δοσμένη λύση (Stoyanova & Ellerton, 1996). Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι καταστάσεις κατά τις οποίες οι μαθητές καλούνται να θέσουν μια σειρά από πιθανές ερωτήσεις, όταν δίνεται το πρόβλημα αλλά παραλείπεται η ερώτηση. Άλλες περιπτώσεις που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία είναι να ζητηθεί από τους μαθητές να προσθέσουν τη δομή ή να βρουν τις περιττές ή ελλιπείς πληροφορίες για να βελτιώσουν τη δομή ενός προβλήματος (Stoyanova & Ellerton, 1996).

Ολοκληρώνοντας, σύμφωνα με την Stoyanova (1997), τα όρια ανάμεσα σε αυτούς τους τρεις ορισμούς δεν είναι πάντα πολύ καλά καθορισμένα. Οι ορισμοί αυτοί κατασκευάστηκαν για να διευκολύνουν ερευνητικές διαδικασίες και για να βοηθήσουν τους ερευνητές να επιλέξουν τις κατάλληλες συνθήκες για τους σκοπούς της εκάστοτε έρευνας

Η English (1997, 1998) για παράδειγμα, προτείνει μια διαφορετική κατηγοριοποίηση των μαθηματικών καταστάσεων από τις οποίες μπορεί να προκύψει η κατασκευή ενός προβλήματος, τις τυπικές και άτυπες. Οι τυπικές μαθηματικές καταστάσεις περιλαμβάνουν υπολογιστικές διαδικασίες, ενώ οι άτυπες μαθηματικές καταστάσεις έχουν σχέση με διάφορες διεργασίες συλλογιστικής, όπως η επαγωγή (English, 1997b).

Διαδικασίες στην κατασκευή προβλήματος

Ο Kilpatrick (1987) πρότεινε τέσσερις βασικές διαδικασίες, που μπορεί να ακολουθήσει κάποιος, για να κατασκευάσει ένα πρόβλημα. Η πρώτη είναι η σύνδεση (association). Εφόσον η γνώση μπορεί να αναπαρίσταται ως ένα δίκτυο συνδεδεμένων ιδεών, π.χ. χάρτης εννοιών, τότε αυτό το δίκτυο μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για να δημιουργήσει νέα προβλήματα παίρνοντας υπόψη έναν κόμβο και εγείροντας ερωτήματα σχετικά με τις ιδέες που αυτός συνδέεται. Η δεύτερη διαδικασία που μπορεί να ακολουθήσει κανείς είναι η αναλογία (analogy) κατά την οποία μπορεί κάποιος να αναζητήσει αναλογίες σε μαθηματικά προβλήματα και να επιμείνει σε εκείνες που θα μπορούσαν να είναι παραγωγικοί για την κατασκευή νέων προβλημάτων. Η τρίτη διαδικασία είναι η γενίκευση (generalization), όμως το ζήτημα του πώς η γενίκευση από μία ή περισσότερες περιπτώσεις δίνει ένα νέο πρόβλημα, παραμένει σχεδόν ανεξερεύνητη είτε σε ερευνητικές μελέτες ή πρακτική εμπειρία. Η τέταρτη διαδικασία είναι η αντίφαση (contradiction) κατά την οποία κατασκευάζει κανείς ένα πρόβλημα καθώς έρχεται σε αντίθεση με ένα ή περισσότερα τμήματα ενός αρχικού ισχυρισμού (Kilpatrick, 1987). Αυτή η διαδικασία σχετίζεται με τη στρατηγική «What-if-not?» που εισήγαγαν οι Brown και Walter (1983).

Οι Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman (2005) πρότειναν και δοκίμασαν πειραματικά ένα θεωρητικό μοντέλο σχετικά με τις διαδικασίες σκέψης που λαμβάνουν μέρος, όταν ένα άτομο εμπλέκεται στην κατασκευή ενός πρόβληματος. Σύμφωνα με αυτούς, αυτές είναι η επεξεργασία ποσοτικών πληροφοριών, η επιλογή των ποσοτικών πληροφοριών, η κατανόηση και οργάνωση των ποσοστικών πληροφοριών και η μετάφραση των ποσοτικών πληροφοριών από μια μορφή σε μια άλλη. Η επεξεργασία των ποσοτικών πληροφοριών αναφέρεται κυρίως στην κατασκευή προβλημάτων χωρίς κανέναν περιορισμό από τις πληροφορίες, ιστορίες ή προτροπές, που δίνονται στο άτομο που θα το κατασκευάσει. Η επιλογή των ποσοτικών πληροφοριών συνδέεται με την κατασκευή προβλημάτων ή ερωτημάτων κατάλληλα σε συγκεκριμένες ή δοσμένες απαντήσεις. Η δοσμένη απάντηση λειτουργεί ως περιορισμός, καθιστώντας την επιλογή πιο δύσκολη από την επεξεργασία, επειδή το άτομο πρέπει να επικεντρωθεί κυρίως στη δομή και τις σχέσεις μεταξύ των δεδομένων. Η κατανόηση των ποσοτικών πληροφοριών αναφέρεται στην κατασκευή προβλημάτων από συγκεκριμένες μαθηματικές εξισώσεις ή πράξεις και απαιτεί κατανόηση της σημασίας κάθε πράξης, γιατί οι μαθητές συνήθως δίνουν έμφαση στην αλγοριθμική διαδικασία για την επίλυση των προβλημάτων και όχι στη σημασιολογική τους δομή. Η μετάφραση ποσοτικών πληροφοριών συμβαίνει στην κατασκευή προβλημάτων από γραφήματα, διαγράμματα ή πίνακες και προϋποθέτει την κατανόηση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών σχέσεων.

Παράγοντες που επηρεάζουν την κατασκευή προβλήματος

Σε έρευνες που έγιναν μελετήθηκαν και οι παράγοντες που μπορεί πιθανά να παίξουν ρόλο στη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων από τους μαθητές. Οι προτιμήσεις των μαθητών για το είδος των δραστηριοτήτων κατασκευής προβλημάτων έχουν ερευνηθεί, για την ενσωμάτωση πετυχημένων δραστηριοτήτων στη διδασκαλία κατασκευής προβλημάτων. Η Mamona-Downs (1993) διαπίστωσε ότι οι ερωτήσεις που έθεσαν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί (φοιτητές) στην έρευνά της πολύ σπάνια παρέκκλιναν από περιβάλλοντα που ήταν οικεία προς αυτούς. Βρήκε ότι οι φοιτητές στη μελέτη της δεν εκμεταλλεύτηκαν την επιπλέον ελευθερία που πρόσφερε η διαδικασία κατασκευής προβλήματος. Θα μπορούσε, επομένως, να αναμένεται ότι οι προτιμήσεις των μαθητών για ένα συγκεκριμένο τύπο κατάστασης κατασκευής προβλήματος έχουν ένα σημαντικό ρόλο στον σχεδιασμό ενός προγράμματος ενσωμάτωσης δραστηριοτήτων κατασκευής προβλημάτων στην τάξη (Stoyanova, 1997).

Υπάρχουν πολλές διαφορετικές όψεις της κατασκευής προβλήματος που θεωρούνται ότι έχουν σημαντική σχέση με τη στάση ενός μαθητή προς τα μαθηματικά. Αρχικά, η διαδικασία κατασκευής προσφέρει ένα μέσο σύνδεσης των εμπειριών που αποκτούν μέσω της επίσημης εκπαίδευσης των μαθηματικών με τα ενδιαφέροντα των μαθητών (Stoyanova, 1997). Παρόλα αυτά, το προσωπικό ενδιαφέρον δεν είναι το μοναδικό κίνητρο για να θέτουν οι μαθητές προβλήματα. Μέσα σε μια τάξη οι μαθητές θα μπορούσαν να ενθαρρυνθούν να σχεδιάσουν προβλήματα που άλλοι συμμαθητές τους στην τάξη θα μπορούσαν να βρουν ενδιαφέροντα ή πρωτότυπα (Silver E. A., 1994). Σε μελέτη ενός τέτοιου εκπαιδευτικού πειράματος, ο Winograd (1991) ανέφερε ότι οι μαθητές της πέμπτης τάξης φάνηκε ότι είχαν υψηλό κίνητρο για να κατασκευάσουν προβλήματα που οι συμμαθητές τους θα έβρισκαν ενδιαφέροντα ή δύσκολα. Σημείωσε, επίσης, ότι το προσωπικό ενδιαφέρον των μαθητών διατηρήθηκε στη μελέτη του μέσω μιας διαδικασίας ανταλλαγής των προβλημάτων που κατασκεύασε ο καθένας με άλλους.

Οι Rosli και συν. (2015) μελέτησαν την κατασκευή προβλημάτων σε 51 εκπαιδευόμενους καθηγητές μεσαίας εκπαίδευσης, οι οποίοι χωρίστηκαν τυχαία σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα κατασκεύαζε ένα πρόβλημα στη βάση ενός προβλήματος που είχε πρώτα λύσει και η δεύτερη ομάδα έκανε την αντίστροφη διαδικασία. Προκειμένου να λάβουν κάποια στοιχεία σχετικά με τους παράγοντες που επηρέασαν τη διαδικασία της κατασκευής προβλημάτων έθεσαν στους καθηγητές και των δύο ομάδων δύο ανοιχτά ερωτήματα: «*Τι σκεφτήκατε, όταν έπρεπε να κατασκευάσετε τα δικά σας μαθηματικά προβλήματα;*» και «*Ποιες ήταν οι ανησυχίες σας, όταν κατασκευάζατε τα δικά σας μαθηματικά προβλήματα*;». Οι απαντήσεις έδειξαν κάποιες ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στις απόψεις των καθηγητών σχετικά με την κατασκευή προβλημάτων. Ενώ κατασκεύαζαν νέα προβλήματα, οι καθηγητές σκέφτονταν τα βασικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων, την ποιότητά τους και τα διάφορα επίπεδα δυσκολίας, που θα ήταν κατάλληλα για μαθητές μέσης εκπαίδευσης. Ταυτόχρονα, προσπαθούσαν να δημιουργήσουν ρεαλιστικά προβλήματα, που θα είχαν νόημα και θα ήταν κατανοητά από τους μαθητές, για να τα επιλύσουν. Ωστόσο, αφού κατασκεύασαν τα προβλήματα, ανησυχούσαν και εάν κατάφεραν να τηρήσουν τα πρότυπα και τα χαρακτηριστικά που απαιτούνταν για τους μαθητές της μέσης εκπαίδευσης.

Οι Koichu and Kontorovich (2013) έκαναν λόγο για τον παράγοντα της καταλληλότητας, όπως τον ονομάζουν, που μπορεί να επηρεάζει την κατασκευή προβλημάτων. Οι ίδιοι ανέφεραν τα εξής «είδη» καταλληλότητας, τα οποία μπορεί να εμφανίζονται το καθένα ξεχωριστά αλλά και να συνυπάρχουν πολλά μαζί κατά τη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων από ένα άτομο: α) αυτή που αναφέρεται στο ίδιο το άτομο, δηλαδή ο βαθμός στον οποίο ο κατασκευαστής του προβλήματος είναι ικανοποιημένος με την ποιότητα του προβλήματος που έθεσε, β) αυτή που αναφέρεται σε πιθανούς αξιολογητές, δηλαδή οι υποθέσεις που κάνει αυτός που θέτει προβλήματα σχετικά με το πώς άλλα άτομα θα αξιολογήσουν, επίσημα ή μη, τις ικανότητες και την επίδοσή του, γ) αυτή που αναφέρεται σε πιθανούς λύτες των κατασκευασμένων προβλημάτων, δηλαδή η άποψη που έχει αυτός που έθεσε το πρόβλημα για το αν αυτό που κατασκεύασε είναι ή όχι μαθηματικά κατάλληλο για τους πιθανούς λύτες. Επιπρόσθετα, σε περίπτωση που η κατασκευή προβλημάτων γίνεται ομαδικά αναφέρεται και η καταλληλότητα για τα μέλη της ομάδας, δηλαδή η γνώμη ενός μέλους της ομάδας αν θα αναγνωριστεί η προτεινόμενη ιδέα του ως σημαντική η όχι από την υπόλοιπη ομάδα.

Επίσης, οι Koichu and Kontorovich (2013) υποστήριξαν ότι δίνοντας έμφαση στην αυθεντικότητα των καταστάσεων και των περιεχομένων, που προσφέρονται σε άτομα που καλούνται να κατασκευάσουν προβλήματα, μπορεί να τους ενθαρρύνει να γίνουν καλύτεροι κατασκευαστές προβλημάτων.

Στρατηγικές για την κατασκευή προβλήματος

Οι Brown & Walter (1983) στο βιβλίο τους «The art of problem posing» προσπαθούν να εισάγουν κάποιες στρατηγικές για όσους ασχολούνται με την κατασκευή προβλημάτων. Οι στρατηγικές που προτείνουν μπορούν να ομαδοποιηθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: σε αυτές που «δέχονται τα δεδομένα» και σε αυτές που «αμφισβητούν τα δεδομένα».

Οι στρατηγικές για την πρώτη κατηγορία κατασκευής προβλήματος που προτείνουν περιλαμβάνουν την προσπάθεια να επικεντρωθεί κανείς σε παρατηρήσεις, εικασίες και ερωτήσεις για τα δεδομένα, χωρίς να ασχολείται με τις διασυνδέσεις τους από την αρχή, αν και στο τέλος γίνεται κι αυτό. Οι Brown & Walter (1983) πρότειναν μια λίστα με γενικές ερωτήσεις, χωρίς να είναι δεσμευτικές ή να αποτελούν το μοναδικό εργαλείο για αυτή τη φάση, που όμως θα μπορούσαν να προσφέρουν ένα σημείο εκκίνησης για τη δημιουργία προβλήματος. Οι ερωτήσεις αυτές δεν ισχύουν για συγκεκριμένο περιεχόμενο, αλλά αποτελούν έναν βασικό κατάλογο στον οποίο μπορεί να ανατρέξει κανείς σε κάθε περίπτωση κατασκευής προβλημάτων. Αυτές αφορούν κυρίως τα εξής θέματα: μαθηματικούς τύπους, πρότυπα/μοντέλα, λύσεις, δεδομένα/ζητούμενα, περιορισμούς, σχέσεις μεταξύ δεδομένων ή και ζητούμενων, αποδείξεις, πεδία ορισμού, γεωμετρική/ αλγεβρική ανάλυση και σταθερές/μεταβλητές πληροφορίες.

Η στρατηγική για τη δεύτερη κατηγορία κατασκευής προβλήματος, αυτή της αμφισβήτησης των δεδομένων, που προτείνουν οι Brown & Walter (1983) ονομάζεται «What – If – Not?» και αποτελείται από 5 επίπεδα. Αρχίζει κανείς επιλέγοντας ένα σημείο εκκίνησης με τα δεδομένα που έχει (επίπεδο 0). Το επόμενο βήμα (επίπεδο 1) είναι να παραθέσει μια λίστα με κάποια χαρακτηριστικά των δεδομένων. Στη συνέχεια πρέπει να ρωτήσει «*Τι θα γινόταν αν κάθε χαρακτηριστικό δεν ήταν έτσι, πώς θα μπορούσε να είναι τότε;*» (επίπεδο 2). Έπειτα χρησιμοποιεί αυτές τις νέες εναλλακτικές ως βάση για να θέσει νέα ερωτήματα ή προβλήματα (επίπεδο 3). Τέλος, πρέπει να επιλέξει μερικά από τα νέα ερωτήματα και να προσπαθήσει να τα αναλύσει ή να απαντήσει σ' αυτά. Αυτό είναι το επίπεδο 4 της στρατηγικής.

Σε έρευνα σχετική με την κατασκευή προβλημάτων των Silver, Mamona-Downs, Leung, & Kenney (1996) ορισμένες από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα έδειξαν ότι προσπάθησαν να κατασκευάσουν προβλήματα κρατώντας σταθερούς τους περιορισμούς του προβλήματος και εστιάζοντας την προσοχή τους στη δημιουργία στόχων. Τα προβλήματα αυτά αφορούσαν έναν ειδικό ή έναν γενικό στόχο. Οι απαντήσεις αυτές ανήκουν στην πρώτη κατηγορία στρατηγικών των Brown & Walter κατασκευής προβλημάτων, όπου κάποιος «δέχεται το δεδομένο». Άλλες απαντήσεις έδειξαν ότι τα άτομα τροποποίησαν τους δεδομένους περιορισμούς του προβλήματος καθώς έθεταν στόχους, χρησιμοποιώντας τη στρατηγική των Brown & Walter «αμφισβητώ το δεδομένο». Τα προβλήματα που κατασκευάστηκαν με αυτή τη στρατηγική σχετίζονταν με την αλλαγή των βασικών υποθέσεων του προβλήματος ή την αλλαγή των ρητά ορισμένων όρων του προβλήματος.

Οι ίδιοι ερευνητές (Silver, Mamona-Downs, Leung, και Kenney, 1996), πρότειναν τις ακόλουθες στρατηγικές που αφορούν την κατασκευή προβλημάτων: α)τη μεταβολή των περιορισμών (δηλαδή, τη συστηματική μεταβολή των αρχικών συνθηκών ή των υποθέσεων για την κατασκευή νέων προβλημάτων, όπως η αλλαγή των αριθμητικών τιμών των δεδομένων ή η δημιουργία νέων προβλημάτων με τη μέθοδο «*Τι θα γινόταν αν μια συγκεκριμένη συνθήκη στο πρόβλημα ήταν διαφορετική*;»), β. τη μεταβολή του στόχου (δηλαδή, τη μεταβολή του στόχου ενός δεδομένου ή προηγουμένως κατασκευασμένου προβλήματος, όπου τα δεδομένα μένουν αμετάβλητα), γ. τη συμμετρία (δηλαδή, την κατασκευή ενός νέου προβλήματος κάνοντας ανταλλαγή μεταξύ του στόχου και των προϋποθέσεων σε ένα υπάρχον πρόβλημα) και δ. τη σύνδεση (δηλαδή, την επέκταση ενός υπάρχοντος προβλήματος, έτσι ώστε η λύση στο νέο πρόβλημα να προϋποθέτει την επίλυση του αρχικού).

Οι Kontorovich, Koichu, Leikin, & Berman (2012) συνοψίζουν στην έρευνά τους κάποια παραδείγματα στρατηγικών για την κατασκευή προβλημάτων, που ανάλογα με το υπόβαθρο αυτών που τα θέτουν ή τη δεδομένη εργασία που έχουν να κάνουν, μπορούν να ερμηνευθούν και ως ευρετικές σύμφωνα με τους ίδιους. Οι τέσσερις από αυτές που πρότειναν είναι αυτές των Silver, Mamona-Downs, Leung, και Kenney (1996) και παρουσιάζονται παραπάνω. Οι δύο επιπλέον είναι: α) ο στόχος σε μια συγκεκριμένη λύση, δηλαδή κατασκευή ενός νέου προβλήματος με τέτοιο τρόπο, ώστε η λύση του να απαιτεί τη χρήση ενός συγκεκριμένου θεωρήματος ή μαθηματικής προσέγγισης, β) η γενίκευση, δηλαδή η κατασκευή ενός προβλήματος για το οποίο το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι μια ειδική περίπτωση.

Η Stoyanova (1997) στην έρευνά της μελέτησε τις στρατηγικές κατασκευής προβλημάτων που εφάρμοσαν τα υποκείμενα και τις χώρισε σε τέσσερις κατηγορίες. Σύμφωνα με την ίδια, όταν οι μαθητές κατασκευάζουν ένα πρόβλημα κάνοντας αναδιάταξη των στοιχείων της δομής του προβλήματος με τρόπο που δεν μεταβάλλει τη φύση του προβλήματος, η στρατηγική αυτή ονομάζεται αναδιατύπωση (Reformulation Strategy). Το αποτέλεσμα της κατασκευής του προβλήματος είναι το ίδιο ή πανομοιότυπο με το δεδομένο πρόβλημα και διαφέρει από αυτό μόνο στην αναπαράσταση των πληροφοριών στο νέο πρόβλημα. Μια άλλη στρατηγική κατασκευής προβλημάτων που πρότεινε είναι η ανακατασκευή (Reconstruction Strategy) και πραγματοποιείται, όταν το νέο πρόβλημα δημιουργείται μετά από τροποποιήσεις στο αρχικό πρόβλημα και όταν αυτές οι τροποποιήσεις αλλάζουν τη φύση του προβλήματος. Έτσι, το νέο πρόβλημα σχετίζεται με το δοσμένο πρόβλημα, αλλά διαφέρει από αυτό στο περιεχόμενο. Η απομίμηση (Imitation Strategy) είναι, επίσης, μια στρατηγική και αυτή συμβαίνει όταν το νέο πρόβλημα προέρχεται από ένα δεδομένο πρόβλημα (ή κατάσταση) με την προσθήκη μιας δομής που σχετίζεται με το αυτό και το νέο πρόβλημα μοιάζει με κάποιο που είχε προηγουμένως αντιμετωπίσει ή επιλύσει το άτομο που το κατασκεύασε. Σε αρκετές περιπτώσεις κατά τη διάρκεια του προγράμματος της Stoyanova (1997) οι μαθητές δημιούργησαν μαθηματικά προβλήματα που δεν μπορούσαν να συνδεθούν με τις προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες τους. Μια τελευταία στρατηγική κατασκευής προβλημάτων που πρότεινε για αυτή την περίπτωση είναι η εφεύρεση (Invention Strategy) και αυτή συμβαίνει όταν οι μαθητές κατασκευάζουν προβλήματα που είναι διαφορετικά από αυτά που έχουν ήδη λυθεί και οι ίδιοι δεν ξέρουν πώς να λύσουν απευθείας το νέο πρόβλημα.

Ευρήματα σχετικά με τη σημασία και τα οφέλη της κατασκευής προβλήματος

Η κατασκευή προβλημάτων παρουσιάζει πολλά πλεονεκτήματα σύμφωνα με τους Bush & Fiala (1993). Οι Wirtz και Kahn (1982, όπ. αναφ. στους Bush & Fiala, 1993) προσθέτουν ότι οι μαθητές που ασχολούνται με την κατασκευή βοηθιούνται, ώστε να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ συγκεκριμένων και πιο αφηρημένων μαθηματικών καταστάσεων, να μάθουν να γενικεύουν και έτσι γίνονται τα μαθηματικά πιο ουσιώδη σε αυτούς. Η κατασκευή προβλημάτων, επίσης, αναπτύσσει τις δεξιότητες δημιουργικής γραφής και βοηθά στην ενσωμάτωση των μαθηματικών σε άλλα μαθήματα.

Οι Moses, Bjork, & Goldenberg (1993) υποστηρίζουν ότι ο προσανατολισμός στην κατασκευή νέων προβλημάτων είναι η καρδιά της μάθησης των μαθηματικών, διότι η μάθηση είναι μια δημιουργική πράξη: μαθαίνουμε όχι απορροφώντας, αλλά κατασκευάζοντας τις γνώσεις μας. Και μαθαίνουμε περισσότερο τα μαθηματικά, όταν ασχολούμαστε ενεργά με τη δημιουργία όχι μόνο των στρατηγικών για τη λύση αλλά και των προβλημάτων που τις απαιτούν. Οι ίδιοι υποστηρίζουν ότι η κατασκευή προβλημάτων μας βοηθά ακόμα να παρατηρήσουμε τις παρανοήσεις και τις προκαταλήψεις μας και ίσως με αυτόν τον τρόπο να γίνουμε καλύτεροι καταναλωτές στη σύγχρονη πραγματικότητα. Η κατασκευή προβλήματος μπορεί να δώσει αφορμή για διδασκαλία σχετικά με τη διαφορά μεταξύ των ισχυρισμών μιας διαφήμισης ή της πολιτικής ρητορικής και αυτό που πιστεύαμε ότι θα ήταν πραγματικά το προϊόν ή η υπόσχεση. Μελετώντας αυτές τις παρερμηνείες στο πλαίσιο της κατασκευής προβλημάτων μπορούμε να αναπτύξουμε αυτή τη νέα επίγνωση.

Πιστεύεται, επίσης, ότι η ενασχόληση των μαθητών με την κατασκευή προβλημάτων διεγείρει το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά (Silver E. A., 1994). Οι μαθητές που έχουν δυσκολία με τα μαθηματικά μερικές φορές χαρακτηρίζονται από ένα σύνδρομο φόβου και αποφυγής τους, το γνωστό άγχος για τα μαθηματικά ή «μαθηματικοφοβία». Κάποιοι ερευνητές ισχυρίστηκαν ότι το άγχος για τα μαθηματικά μπορεί να μειωθεί μέσω της εμπλοκής των μαθητών στην κατασκευή προβλημάτων (Moses, Bjork, & Goldenberg, 1993), καθώς κάνει τα μαθηματικά να φαίνονται λιγότερο τρομακτικά (Brown & Walter, 1983). Η κατασκευή προβλημάτων είναι μια σημαντική διαδικασία στην προσπάθεια να κατανοήσουμε και να αντιμετωπίσουμε τον φόβο για τα μαθηματικά. Υπάρχει καλός λόγος να πιστεύουμε ότι η κατασκευή προβλημάτων θα μπορούσε να είναι ένα κρίσιμο συστατικό για την αντιμετώπιση του άγχους στα μαθηματικά, επειδή το να θέσει κάποιος ένα πρόβλημα ή να κάνει ερωτήσεις είναι πιθανόν λιγότερο απειλητικό από το να λύσει ή να δώσει απάντηση σε ένα πρόβλημα (Brown & Walter, 1983). Οι ίδιοι αναφέρουν ότι η κατασκευή προβλημάτων ενισχύει σημαντικά την κατανόηση της επίλυσης προβλημάτων, αναπτύσσει καλύτερη κατανόηση και διαφορετική οπτική για τα φαινόμενα γύρω μας και διαλύει το σύνδρομο του «σωστού τρόπου» στα μαθηματικά. Η εξήγηση είναι λογική. Όταν θέτει κανείς μια ερώτηση είναι σχεδόν αδύνατο να την κριθεί ως «σωστή» ή «λάθος», όμως αυτός διαχωρισμός γίνεται αναπόφευκτα όταν δίνει κάποιος μια λύση ή απάντηση σε ένα πρόβλημα.

Ωστόσο, ακόμα κι αν υπάρχουν θεωρητικά επιχειρήματα που δείχνουν ότι η εμπλοκή μαθητών σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων στην τάξη έχει μια θετική επίδραση στη μάθηση και την κατασκευή προβλήματος από τους μαθητές, υπάρχουν σχετικά λίγες εμπειρικές μελέτες που να τεκμηριώνουν συστηματικά αυτό το αποτέλεσμα. Η English (1997b) ανέπτυξε ένα πρόγραμμα κατασκευής προβλημάτων και βρήκε σε συνέντευξη που ακολούθησε το πρόγραμμα ότι οι μαθητές της πέμπτης τάξης που συμμετείχαν στο πρόγραμμα έθεσαν ποσοτικά περισσότερα, καθώς και πιο σύνθετα προβλήματα. Ομοίως, στην έρευνα της Crespo (2003), αφού οι εκπαιδευτικοί είχαν εμπλακεί σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων, ήταν σε θέση να δημιουργήσουν περισσότερα προβλήματα με πολλαπλές προσεγγίσεις και λύσεις, καθώς και να δημιουργήσουν προβλήματα που ήταν πιο ανοιχτά και γνωστικά περίπλοκα.

Η Ellerton (1986) σύγκρινε τα προβλήματα που κατασκεύασαν μαθητές γυμνασίου υψηλής ικανότητας και χαμηλή ικανότητας ζητώντας από τον καθένα να δημιουργήσει ένα μαθηματικό πρόβλημα, που θα ήταν δύσκολο να λυθεί από έναν φίλο του. Η έρευνα αυτή έδειξε ότι το πρόβλημα που κατασκευάστηκε από τον κάθε μαθητή μπορούσε να χρησιμοποιηθεί, για να εξετάσει πώς ένα παιδί αντιλαμβάνεται τι είναι δύσκολο για τα μαθηματικά και πώς εκφράζει γραπτά αυτή την αντίληψη. Έτσι, τα προβλήματα που κατασκευάζουν οι μαθητές είναι ένα πολύτιμο εργαλείο έρευνας για τη μελέτη των παιδιών που θεωρούνται ότι είναι «ταλαντούχα» στα μαθηματικά, ιδίως αυτά που μπορούν να λύσουν τυπικά (υπολογιστικά) προβλήματα με λίγη δυσκολία (Ellerton, 1986).

Ο Silver (1997) υποστήριξε ότι η διδασκαλία στα μαθηματικά που περιλαμβάνει εργασίες επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν πιο δημιουργικές προσεγγίσεις στα μαθηματικά. Η ανάπτυξη της ευχέρειας, ως μέρος της δημιουργικότητας, των μαθητών είναι πιθανό να ενθαρρύνεται μέσω της χρήσης προβλημάτων στην τάξη που είναι ασθενώς δομημένα ή ανοιχτά και παρουσιάζονται κατά τρόπο που να επιτρέπουν τη δημιουργία πολλαπλών συγκεκριμένων στόχων και, ενδεχομένως, πολλαπλών σωστών λύσεων, ανάλογα με την ερμηνεία που δίνει ο καθένας στο πρόβλημα.

Οι μαθητές μπορούν όχι μόνο να αποκτήσουν ευχέρεια στο να δημιουργούν πολλά προβλήματα από μια κατάσταση, αλλά μπορούν επίσης να αναπτύξουν δημιουργική ευελιξία, δεδομένου ότι δημιουργούν πολλαπλές λύσεις για ένα δεδομένο πρόβλημα. Η χρήση προβλημάτων που επιτρέπουν στους μαθητές να δημιουργούν πολλαπλές λύσεις είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό αυτής της μορφής της διδασκαλίας των μαθηματικών και σχετίζεται με την ανάπτυξη της ευελιξίας των μαθητών στις εναλλαγές στρατηγικής (Silver E. A., 1997). Ένα άλλο παράδειγμα μιας διδακτικής προσέγγισης που είναι πιθανό να ενθαρρύνει την ανάπτυξη της ευελιξίας έχει αναπτυχθεί από τους Brown και Walter (1983) και είναι η γνωστή ως «What-if-not?». Πολλά από τα είδη της επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων που αναφέρθηκαν παραπάνω και συνδέονται με την ευχέρεια και την ευελιξία των μαθητών στις εναλλαγές στρατηγικών μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη της εκτίμησης των μαθητών και την ικανότητα να παράγουν νέα προβλήματα, νέες λύσεις ή μεθόδους επίλυσης των προβλημάτων (Silver, 1997).

Ωστόσο ερευνητικές μελέτες αποδεικνύουν ότι η σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και της διαδικασίας κατασκευής προβλήματος είναι ασαφής. Ο Haylock (1987, όπ. αναφ. στη Leung, 1997) επανεξέτασε μια σειρά από μελέτες που είχαν ως επίκεντρο τη σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και διάφορες πτυχές των μαθηματικών, και βρήκε μια ελλιπή βάση για να βεβαιώσει ότι η σχέση αυτή όντως υφίσταται. Η Leung (1993) μελέτησε τη σχέση μεταξύ της κατασκευής προβλημάτων από μια ομάδα απόφοιτων δασκάλων δημοτικού σχολείου και τις επιδόσεις τους στα τεστ δημιουργικότητας και μαθηματικής γνώσης. Μετά τη βαθμολογία τους στην κατασκευή προβλημάτων μαζί με αρκετές διαστάσεις της γνωστικής και της μαθηματικής πολυπλοκότητας που εξέτασε, δεν βρήκε ουσιαστικά καμία σχέση με τις επιδόσεις τους στο τεστ δημιουργικότητας. Από την άλλη πλευρά, η Leung ανέφερε μια ισχυρή σχέση μεταξύ της μαθηματικής γνώσης των υποκειμένων και την ποιότητα των προβλημάτων που έθεταν. Επειδή πολλοί συνδέουν την κατασκευή προβλήματος με τα άτομα που έχουν εξαιρετική δημιουργικότητα και ταλέντο, θα μπορούσε κανείς να συμπεράνει ότι η διδασκαλία που σχετίζεται με την κατασκευή προβλημάτων θα ήταν κατάλληλη μόνο για «προικισμένους» μαθητές. Ωστόσο, τα ευρήματα της Leung δείχνουν ότι η διδασκαλία αυτή δεν χρειάζεται να προορίζεται μόνο για τους μαθητές που έχουν χαρακτηριστεί ως εξαιρετικά ταλαντούχοι ή δημιουργικοί.

Σε διαφορετική κατεύθυνση κινούνται τα αποτελέσματα της έρευνας των Singer, Pelczer και Voica (2011). Αυτοί ζήτησαν από 120 μαθητές που συμμετείχαν σε μια θερινή μαθηματική κατασκήνωση να δημιουργήσουν δύο προβλήματα, ένα εύκολο και ένα δύσκολο, και να παραδώσουν τις προτάσεις τους, συμπεριλαμβανομένων των λύσεων των προβλημάτων, έπειτα από μερικές μέρες. Μετά, ερωτήθηκαν 40 μαθητές που είχαν απαντήσει προκειμένου να έχουν μια σαφή εικόνα της προσέγγισης του καθενός. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι, όταν ο μαθητής ήταν σε θέση να κατασκευάσει συναφείς και νέες παραλλαγές σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων αλλάζοντας κάποιες παραμέτρους του προβλήματός του και όταν κατανοούσε τις συνέπειες αυτών των αλλαγών, τότε αποδείκνυε την ικανότητά του για βαθιές δημιουργικές προσεγγίσεις (Singer, Pelczer, & Voica, 2011).

Σύνδεση κατασκευής και επίλυσης προβλήματος

Συχνά η λέξη «πρόβλημα» σχετίζεται και συνδέεται στενά για κάποιους με την «επίλυση» προβλήματος. Η ίδια εργασία που απαιτεί σημαντική προσπάθεια από κάποιους μαθητές μπορεί να είναι άσκηση ρουτίνας για άλλους και η επίλυσή της μπορεί να είναι θέμα ανάκλησης από τη μνήμη για έναν εκπαιδευτικό. Έτσι, είναι η ιδιαίτερη σχέση μεταξύ ενός ατόμου και μιας εργασίας που μπορεί να κάνει την εργασία πρόβλημα για ένα άτομο. Η λέξη «πρόβλημα» χρησιμοποιείται εδώ με αυτήν την έννοια, σαν μια εργασία δηλαδή που είναι δύσκολη για το άτομο που προσπαθεί να τη λύσει (Schoenfeld, 1985). Επιπλέον, η δυσκολία αυτή θα πρέπει να έγκειται σε πνευματική δυσκολία και όχι υπολογιστική. Επομένως, αν κάποιος έχει άμεση πρόσβαση σε ένα σχήμα για τη λύση ενός μαθηματικού έργου, τότε το έργο είναι άσκηση και όχι πρόβλημα (Schoenfeld, 1985).

Προσπαθώντας να βρει κανείς τη λύση ενός προβλήματος μπορεί να αλλάζει συνεχώς τις απόψεις του, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο εξετάζει το πρόβλημα. Πιθανόν να παίρνει διαφορετική θέση απέναντι στα πράγματα ξανά και ξανά. Συχνά όταν κάποιος ασχολείται με ένα πρόβλημα, δεν έχει ολοκληρωμένη αντίληψη του προβλήματος, όταν ξεκινά τη λύση. Η αντίληψη αυτή είναι διαφορετική όταν έχει κάνει κάποια πρόοδο και ακόμα πιο διαφορετική όταν έχει σχεδόν φτάσει στη λύση. Ο Polya (1957) διακρίνει τέσσερις φάσεις για την επίλυση ενός προβλήματος. Προτείνει ότι πρώτα πρέπει κανείς να καταλάβει το πρόβλημα, να κατανοήσει τι ζητάει. Έπειτα, πρέπει να δει πώς σχετίζονται τα στοιχεία του προβλήματος μεταξύ τους, να δει πώς συνδέονται τα δεδομένα με το ζητούμενο, ώστε να καταστρώσει ένα σχέδιο για την επίλυση του προβλήματος. Στη συνέχεια πρέπει να εκτελέσει το σχέδιο και τέλος, να ξανακοιτάξει τη λύση που έδωσε, να κάνει μια ανασκόπηση και να δει αν είναι λογική και ικανοποιεί το ζητούμενο του προβλήματος (Polya, 1957).

Σημαντικά εφόδια για τη δεύτερη φάση, αυτή της επινόησης ενός σχεδίου για την επίλυση του προβλήματος, είναι ορισμένα σχετικά στοιχεία ήδη κατεκτημένης μαθηματικής γνώσης που έχει κανείς από προηγούμενες εμπειρίες του, όπως προβλήματα που έχουν λυθεί ή θεωρήματα που έχουν αποδειχθεί από πριν. Γι' αυτό σημαντικό βήμα κατά τον Polya (1957) είναι να αρχίσει κάποιος με το ερώτημα «*Γνωρίζεις κάποιο σχετικό πρόβλημα;*». Αν η επίλυση ενός δομένου προβλήματος φαίνεται δύσκολη ή ακατόρθωτη τότε θα πρέπει οι προσπάθειες να στραφούν στην επίτευξη ενός πιο εύκολου στόχου, στην επίλυση δηλαδή ενός σχετικού προβλήματος πιο προσιτού και εύκολου. Αν δεν είναι δυνατό να ανακαλέσει κανείς ένα τέτοιο πρόβλημα από τη μνήμη του, τότε ο Polya (1957) συμβουλεύει να επινοήσει ένα, δηλαδή να κατασκευάσει ένα παρόμοιο πρόβλημα.

Στην τελευταία φάση επίλυσης ενός προβλήματος, την ανασκόπηση της λύσης ή του αποτελέσματος, ο Polya (1957) αναφέρει ότι πρέπει να δοκιμάζει κανείς να χρησιμοποιεί το αποτέλεσμα ή τη μέθοδο για κάποιο άλλο πρόβλημα. Ο δάσκαλος θα πρέπει να παρακινήσει τους μαθητές να φανταστούν περιπτώσεις, στις οποίες θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν ξανά τη διαδικασία που ακολούθησαν ή να εφαρμόσουν το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξαν (Polya, 1957). Έτσι, το άτομο αυτό θα οδηγηθεί στην κατασκευή προβλημάτων, αφού έχει εξετάσει τις συνθήκες του προβλήματος που έχει ήδη επιλύσει.

Ο Schoenfeld (1985) λίγα χρόνια αργότερα προώθησε τις ιδέες του Polya πάνω στην επίλυση προβλήματος και πρότεινε δύο ευρετικές, τις οποίες μπορούν να χρησιμοποιούν οι λύτες προβλημάτων, όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες. Οι ευρετικές είναι τεχνικές για την επιτυχή επίλυση των προβλημάτων, γενικές υποδείξεις που βοηθούν τον μαθητή να κατανοήσει καλύτερα ένα πρόβλημα ή να σημειώσει πρόοδο προς την επίλυση. Η πρώτη που προτείνει είναι ο λύτης να εξηγήσει το πρόβλημα, εξετάζοντας διάφορες ειδικές περιπτώσεις, για την καλύτερη κατανόηση ενός άγνωστου πρόβληματος (Schoenfeld, 1985). Αυτό μπορεί να υποδηλώσει την κατεύθυνση για μια λύση. Η δεύτερη ευρετική που αναφέρει σε περίπτωση που κάποιος δεν μπορεί να λύσει ένα συγκεκριμένο πρόβλημα είναι να δημιουργήσει υποστόχους, που θα οδηγούν στη μερική εκπλήρωση των επιθυμητών συνθηκών. Έχοντας φθάσει σε αυτούς τους υποστόχους, μπορεί το άτομο να «χτίσει» επάνω τους για την επίλυση του αρχικού προβλήματος (Schoenfeld, 1985).

Από την άλλη μεριά ένα από τα βασικά στοιχεία της κατασκευής προβλήματος είναι να καταλάβει κανείς τι ακριβώς είναι ένα πρόβλημα (Brown & Walter, 1983). Αυτό περιλαμβάνει να είναι σε θέση να αναγνωρίσει τη δομή του και να βρει αντίστοιχες δομές σε ανάλογα προβλήματα. Ως δομή μπορεί να οριστεί η μορφή που αντλείται από τη γλωσσική διατύπωση ενός προβλήματος (Freudenthal, 1991, όπ. αναφ. σε English, 1997a).

Τα παιδιά πρέπει να αναγνωρίσουν τις μαθηματικές δομές προβληματικών καταστάσεων, εάν πρόκειται να τις χρησιμοποιήσουν για να κατασκευάσουν νέα προβλήματα και ερωτήσεις (English, 1997a). Δηλαδή, τα παιδιά χρειάζεται να κατασκευάσουν νοητικά μοντέλα ή αναπαραστάσεις που θα τα βοηθούν να αναγνωρίζουν τις σημαντικές μαθηματικές ιδέες και πώς σχετίζονται μεταξύ τους.

Πράγματι, η έλλειψη τέτοιων μοντέλων έχει αποδειχθεί ότι είναι υπεύθυνη σε μεγάλο βαθμό για τις δυσκολίες που αντμετωπίζουν τα παιδιά με τα μαθηματικά προβλήματα, ιδιαίτερα με όσα έχουν πολύπλοκες δομές (English, 1997a). Η πολυπλοκότητα της δομής ενός προβλήματος καθορίζεται, εν μέρει, από τις γλωσσικές ή συντακτικές ιδιότητές του καθώς και από τη φύση και τον αριθμό των διακριτών σημασιολογικών σχέσεων που ενσωματώνονται σε αυτό (Silver & Cai, 1996). Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα που η επίλυσή του περιλαμβάνει πολλαπλασιασμό και αφαίρεση θα είναι πιο περίπλοκο από ό,τι ένα πρόβλημα σύγκρισης δύο ποσών που η επίλυσή του περιλαμβάνει μόνο μία από αυτές τις δύο πράξεις (English, 1997a).

Ένας σημαντικός παράγοντας σύμφωνα με την English (1997a) για την εξοικείωση των παιδιών με τη δομή ενός προβλήματος είναι η ενασχόλησή τους με την κατασκευή ενός προβλήματος. Καθώς τα παιδιά κατασκευάζουν τα δικά τους προβλήματα, αναγνωρίζουν τις βασικές πληροφορίες – δεδομένα - που απαιτούνται για την επίλυση ενός προβλήματος σε αντίθεση με άλλα στοιχεία που δίνονται σε ένα πρόβλημα και δεν είναι χρήσιμα και απλά δίνουν το πλαίσιό του. Αυτή η συνειδητοποίηση του σχεδιασμού περιλαμβάνει την αναγνώριση του ρόλου των «γνωστών» και «άγνωστων» πληροφοριών που συνεπάγεται η κατασκευή ενός προβλήματος, καθώς και τυχόν περιορισμών που επιβάλλονται στην επίτευξη του στόχου (Moses, Bjork, & Goldenberg, 1993). Αυτή η γνώση είναι απαραίτητη για να καθοριστεί εάν και πώς η δομή ένος πρόβληματος που κατασκευάστηκε καθιστά επιλύσιμο το πρόβλημα, βασικό στοιχείο της κατασκευής προβλήματος (Brown & Walter, 1993).

Η σχέση μεταξύ επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων γίνεται φανερή στη δεύτερη διάσταση του ορισμού του Silver (1994), όπου αναφέρεται στην αναδιατύπωση ενός δοσμένου προβλήματος. Η αναδιατύπωση ενός προβλήματος είναι ένα είδος κατασκευής, που λαμβάνει χώρα κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός σύνθετου προβλήματος, όταν ένας λύτης τροποποιεί ή αναπαράγει ένα συγκεκριμένο πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο, για να γίνει πιο προσιτό για την επίλυσή του (Silver, Mamona-Downs, Leung, & Kenney, 1996). Η αναδιατύπωση ενός προβλήματος αποτελεί ένα είδος κατασκευής προβλήματος, επειδή ο λύτης μετατρέπει μια δεδομένη κατάσταση ενός προβλήματος σε μια νέα που γίνεται το επίκεντρο της επίλυσης. Έχει σχέση και με την επινόηση ενός σχεδίου, δεδομένου ότι μπορεί να περιλαμβάνει την κατασκευή υπο-προβλήματων που αντιπροσωπεύουν τους υπο-στόχους για την επίλυση του αρχικού προβλήματος. Αυτό σχετίζεται και με την τεχνική του Polya (1957), που αναφέραμε παραπάνω «*Αν δεν μπορείτε να λύσετε ένα πρόβλημα, προσπαθήστε πρώτα να λύσετε κάποιο άλλο σχετικό πρόβλημα*». Εάν η πηγή του αρχικού προβλήματος είναι άλλος και όχι ο λύτης, η κατασκευή προβλήματος γίνεται, όταν ο λύτης αναδιατυπώνει το πρόβλημα και το «εξατομικεύει» μέσα από αυτή τη διαδικασία της εκ νέου διαμόρφωσης.

Ο Polya (1957) θεώρησε την κατασκευή ως μια χρήσιμη στρατηγική για την επίλυση προβλημάτων. Είδε τη σύνδεση μεταξύ της κατασκευής και της επίλυσης προβλημάτων και υποστήριξε ότι η επίλυση προβλημάτων μπορεί να θεωρηθεί ως μια ακολουθία επιτυχημένων αναδιατυπώσεων ενός δοσμένου προβλήματος. Ο Polya πρότεινε κάποιες στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων μεταξύ των οποίων οι πιο γνωστές είναι: η αναλογία (θεωρώντας ένα βοηθητικό στοιχείο ή ένα πρόβλημα), η ανάλυση/αποσύνθεση και ο ανασυνδυασμός (μεταβάλλοντας το πρόβλημα), η γενίκευση (εφευρίσκοντας το γενικό πρόβλημα) και η ειδίκευση (συγκεκριμένες εξηγήσεις/ερμηνείες). Στην πραγματικότητα, ο Polya πρότεινε τη χρήση κάποιων στρατηγικών που ενσωματώνουν την κατασκευή προβλημάτων ως μέσο, ώστε να βοηθήσει τους μαθητές να γίνουν καλύτεροι λύτες (Stoyanova, 1997).

Η σύνδεση μεταξύ επίλυσης και κατασκευής που αναφέρθηκε παραπάνω γίνεται φανερή και στην τρίτη διάσταση του ορισμού του Silver (1994), όπου η κατασκευή προβλήματος μπορεί να προκύψει μετά από την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, όταν κάποιος εξετάζει τις συνθήκες του προβλήματος για να δημιουργήσει συναφή προβλήματα. Αυτή η τελευταία μορφή κατασκευής προβλήματος συνδέεται με τη φάση «*Κοιτάζοντας πίσω*» που πρότεινε ο Polya (1957) στην επίλυση προβλημάτων.

Οι Brown & Walter (1983) αναφέρουν ότι η επίλυση ενός προβλήματος δεν μπορεί μόνο να μας επιτρέψει να καταλήξουμε στην απάντηση του προβλήματος που έχει τεθεί, αλλά μπορεί επίσης να μας βοηθήσει να εκτιμήσουμε τα χαρακτηριστικά του προβλήματος. Οι ίδιοι υποστηρίζουν ότι υπάρχει μια ισχυρή σύνδεση μεταξύ της επίλυσης και της κατασκευής προβλημάτων. Η επίλυση μπορεί να οδηγήσει στην κατασκευή προβλημάτων, αλλά συχνά δεν εκτιμάται η σημασία της λύσης χωρίς τη δημιουργία και την ανάλυση περαιτέρω προβλημάτων ή ερωτήσεων (Brown & Walter, 1983).

Οι λεπτομερείς μελέτες της διδασκαλίας στην τάξη, στις οποίες η κατασκευή προβλημάτων χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με την επίλυση, μπορούν να βοηθήσουν στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ επίλυσης και κατασκευής μαθηματικού προβλήματος (Silver E. A., 2013). Οι Polya, Brown και Walter έθεσαν τις βάσεις που σχετίζονται με την κατασκευή προβλήματος θεμελιώνοντας έννοιες της διδασκαλίας των μαθηματικών που συνδέουν την κατασκευή με την επίλυση (Silver E. A., 2013). Οι Brown και Walter εισάγουν έναν τρόπο όπου μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κατασκευή προβλήματος, για να εμπλέξει τους μαθητές περισσότερο στην επίλυση μέσω της τεχνικής «What – if - not?» που πρότειναν. Ομοίως, οι τεχνικές διδασκαλίας του Polya «κοιτάζοντας πίσω» στη λύση ή στην απάντηση ενός προβλήματος ή «δημιούργησε ένα απλούστερο πρόβλημα» προορίζονταν για την ενίσχυση της βαθύτερης εμπλοκής των μαθητών με την επίλυση προβλημάτων (Silver E. A., 2013).

Ευρήματα σχετικά με τη σύνδεση κατασκευής και επίλυσης προβλήματος

Παρά το γεγονός ότι το επίκεντρο των ερευνών ήταν στραμμένο λίγο περισσότερο στη σημασία που έχει η εύρεση της λύσης, υπήρξαν κάποιες ενδιαφέρουσες έρευνες στην εκπαίδευση των μαθηματικών τα τελευταία χρόνια και για την κατασκευή προβλήματος και τη σχέση της με την επίλυση (Brown & Walter, 1983). Εξετάζοντας τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην κατασκευή και επίλυση προβλημάτων, οι ερευνητές έχουν διερευνήσει τη φύση, την ένταση και την πρόθεση του προβλήματος που θέτει κάποιος, η οποία συμβαίνει σε διάφορα στάδια της επίλυσης προβλημάτων: πριν, κατά τη διάρκεια και μετά τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος (Brown & Walter, 1983).

Πιθανώς το εκπαιδευτικό ενδιαφέρον και το πιο συχνό κίνητρο για την ένταξη της κατασκευής προβλημάτων στα προγράμματα σπουδών είναι η πιθανή αξία του στην επίλυση προβλημάτων, αν βοηθάει δηλαδή τους μαθητές να γίνουν καλύτεροι λύτες (Silver E. A., 1994). Γίνεται λόγος συχνά για στενή συσχέτιση ανάμεσα στην ικανότητα κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων και την επίδοση στα μαθηματικά. Παρά το ενδιαφέρον που υπάρχει στην κατασκευή προβλήματος λόγω της δυνατότητάς της να βελτιώσει την επίλυση προβλημάτων, δεν υπάρχει σαφής ένδειξη που να δηλώνει ξεκάθαρα τη είδους σχέση υπάρχει μεταξύ τους (Silver E. A., 1994).

Το «Torrance Test of Creative Thinking» (TTCT) έχει συχνά χρησιμοποιηθεί για να αξιολογήσει τη δημιουργική σκέψη των παιδιών και των ενηλίκων στο εξωτερικό (Silver E. A., 1997). Ένα εκτεταμένο πρόγραμμα έρευνας έχει επικυρώσει αυτό το μέσο ως προγνωστικό παράγοντα δημιουργικής απόδοσης. Τα τρία βασικά συστατικά της δημιουργικότητας που αξιολογούνται από το TTCT είναι η ευχέρεια (fluency), η ευελιξία (flexibility) και η καινοτομία (novelty). Η ευχέρεια αναφέρεται στον αριθμό των ιδεών που παράγονται ως απάντηση σε μια εργασία, η ευελιξία σε εμφανείς αλλαγές στις προσεγγίσεις που πραγματοποιούνται κατά την παραγωγή των απαντήσεων και η καινοτομία σχετίζεται με την πρωτοτυπία των ιδεών που παράγονται (Silver, 1997). Η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην κατασκευή και την επίλυση των προβλημάτων όσων αφορά τα τρία αυτά στοιχεία παρουσιάζεται από τον *Silver (*1997*)* στον παρακάτω πίνακα.

Επίλυση Προβλήματος	**Δημιουργικότητα**	**Κατασκευή Προβλήματος**
Οι μαθητές ερευνούν ανοικτά προβλήματα, με πολλές ερμηνείες, μεθόδους επίλυσης ή απαντήσεις.	→Ευχέρεια(Fluency)←	Οι μαθητές δημιουργούν πολλά προβλήματα που πρέπει να επιλυθούν. Οι μαθητές μοιράζονται τα προβλήματα που κατασκεύασαν.
Οι μαθητές λύνουν (εκφράζουν ή δικαιολογούν) με έναν τρόπο και στη	→Ευελιξία (Flexibility)←	Οι μαθητές κατασκευάζουν προβλήματα που επιλύονται με διαφορετικούς τρόπους.

συνέχεια με άλλους. Οι μαθητές συζητούν πολλές μεθόδους επίλυσης.		Οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μέθοδο «What-if-not?» για να κατασκευάσουν προβλήματα.
Οι μαθητές εξετάζουν πολλές μεθόδους επίλυσης ή απαντήσεις και στη συνέχεια δημιουργούν έναν άλλο τρόπο επίλυσης που είναι διαφορετικός.	→Καινοτομία (Novelty)←	Οι μαθητές εξετάζουν διάφορα προβλήματα που έχουν κατασκευαστεί, στη συνέχεια κατασκευάζουν ένα πρόβλημα που είναι διαφορετικό.

Σχέση διδακτικών δραστηριοτήτων ΕΜΠ και ΚΜΠ για τα βασικά στοιχεία της δημιουργικότητας (Silver, 1997*).*

Οι ερευνητικές μελέτες αποδεικνύουν ότι η κατασκευή προβλημάτων έχει θετική επίδραση στην ικανότητα των μαθητών να λύνουν προβλήματα (Leung & Silver, 1997) και δίνει την ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να έχουν μια εικόνα σχετικά με την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών από τους μαθητές (English, 1997a). Διαπιστώθηκε επίσης ότι η εμπειρία των μαθητών με διαδικασίες κατασκευής προβλημάτων ενισχύουν την αντίληψή τους για το θέμα, εμπνέουν ενθουσιασμό και παρέχουν κίνητρα (English, 1998, Silver, 1994). Συγκεκριμένα, η English (1997a, 1997b, 1998) υποστήριξε ότι οι μαθητές που εμπλέκονται σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων βελτιώνουν τον τρόπο σκέψης τους, τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων, την αυτοπεποίθησή τους στην επίλυση προβλημάτων αλλά και στα μαθηματικά γενικότερα και όλα αυτά συμβάλλουν στην ευρύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Ο Kilpatrick (1987) υποστήριξε ότι η ποιότητα των ερωτήσεων που οι μαθητές θέτουν θα μπορούσε να χρησιμεύσει ως δείκτης του πόσο καλά μπορεί ο ίδιος να λύσει τα προβλήματα. Τα ευρήματα της μελέτης των Silver & Cai (1996) συμβάλλουν στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ της ικανότητας των μαθητών να κατασκευάζουν και να επιλύουν προβλήματα. Οι Silver και Cai (1996) ανέλυσαν τις απαντήσεις που έδωσαν περισσότεροι από 500 μαθητές γυμνασίου, όταν τους ζητήθηκε να θέσουν τρία ερωτήματα βασισμένα σε μια μαθηματική πρόταση σχετικά με μια κατάσταση οδήγησης που τους δόθηκε. Τα προβλήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές αναλύθηκαν ανάλογα με τον τύπο τους, την δυνατότητα επίλυσης και την πολυπλοκότητά τους. Ταυτόχρονα, οι Silver και Cai χρησιμοποίησαν οκτώ ανοιχτές εργασίες για να αξιολογήσουν την επίδοση των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων. Βρήκαν ότι οι μαθητές με υψηλή επίδοση στην επίλυση προβλημάτων είχαν και υψηλή επίδοση στην κατασκευή. Σε σύγκριση με λιγότερο επιτυχημένους λύτες προβλημάτων, οι καλοί λύτες προβλημάτων κατασκεύασαν περισσότερα μαθηματικά προβλήματα, τα οποία ήταν και πιο περίπλοκα. Το εύρημα της Ellerton (1986) στην έρευνά της με υποκείμενα υψηλής και χαμηλής ικανότητας στην κατασκευή, επίσης, ανέφερε ότι οι πιο ικανοί μαθητές κατασκεύασαν προβλήματα που ήταν πιο περίπλοκα (χρειάζονταν περισσότερες πράξεις) από αυτά που κατασκεύασαν οι λιγότερο ικανοί μαθητές, αλλά τα κριτήριά για τον βαθμό πολυπλοκότητας του κάθε προβλήματος δεν ήταν καλά καθορισμένα.

Οι Cai και Hwang (2002) βρήκαν διαφορές στη σχέση επίδοσης μεταξύ της επίλυσης και της κατασκευής προβλημάτων σε μαθητές της έκτης τάξης για τις ΗΠΑ και την Κίνα. Υπήρξε μια ισχυρή σχέση μεταξύ επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων για τους Κινέζους μαθητές, ενώ η σύνδεση ήταν πολύ ασθενέστερη για το δείγμα των μαθητών των ΗΠΑ. Η κατασκευή ποικίλων τύπων προβλημάτων φάνηκε να σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με τη χρήση αφηρημένης στρατηγικής από τους Κινέζους μαθητές (Cai & Hwang, 2002). Οι Cai και Hwang δήλωσαν ότι οι διαφορετικές σχέσεις μεταξύ των μαθητών των ΗΠΑ και της Κίνας δεν θα πρέπει να ερμηνευθεί ως μια γενικότερη έλλειψη σχέσης μεταξύ επίλυση και κατασκευής προβλημάτων, αλλά η ισχυρότερη σχέση μεταξύ της ποικιλίας των προβλημάτων που κατασκευάστηκαν και της υψηλής επίδοσης στην επίλυση προβλημάτων για το κινεζικό δείγμα θα μπορούσε να αποδοθεί στο γεγονός ότι οι μαθητές των ΗΠΑ σχεδόν ποτέ δεν χρησιμοποιούσαν αφηρημένες στρατηγικές (Cai & Hwang, 2002).

Οι Μουσουλίδη, Φιλίππου, Χρίστου (2003) υποστήριξαν ότι η ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος μπορεί πιθανώς να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής. Η επίδοση στην επίλυση προβλημάτων των μαθητών ορίστηκε με βάση τη βαθμολογία της επίδοσης των μαθητών για τα μαθηματικά, όπως αυτή δόθηκε από τους δασκάλους των τάξεων. Τα αποτελέσματα έδωσαν μια ένδειξη ότι η ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος θα μπορούσε να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος. Χρειάζεται όμως να γίνει περαιτέρω έρευνα για τη διερεύνηση της πρόβλεψης όπως σημειώνουν οι ερευνητές (Μουσουλίδης, Φιλίππου, & Χρίστου, 2003). Η έρευνα των Μουσουλίδη, Φιλίππου & Χρίστου (2003) έδειξε ακόμη ότι η επίδοση των μαθητών στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων με βάση εικόνα, πίνακα και ιστορία ήταν χαμηλότερη από την επίδοση τους στην κατασκευή προβλήματος με βάση μαθηματική πρόταση και εξίσωση. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με τη διεθνή βιβλιογραφία, όπου έρευνες έδειξαν ότι οι μαθητές είχαν χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας στην κατασκευή προβλήματος σε ημι-δομημένο πλαίσιο σε σχέση με το δομημένο πλαίσιο (Stoyanova and Ellerton, 1996). Φάνηκε ότι οι μαθητές δυσκολευτήκαν να χειριστούν δεδομένα που παρουσιάζονται σε μεγάλες ιστορίες και εικόνες ενώ χαρακτηριστική ήταν η δυσκολία που είχαν να χειριστούν δεδομένα που παρουσιάστηκαν σε πίνακα (Μουσουλίδης, Φιλίππου, & Χρίστου, 2003).

Στη μελέτη των Rosli και συν. (2015) οι εκπαιδευόμενοι καθηγητές τοποθετήθηκαν τυχαία σε μία από τις ομάδες Α ή Β. Οι καθηγητές που ήταν στην ομάδα Α πρώτα επέλυσαν και στη συνέχεια κατασκεύασαν νέα προβλήματα με βάση τα δεδομένα. Ταυτόχρονα, οι καθηγητές της ομάδας Β εκτέλεσαν τις δραστηριότητες αυτές με αντίστροφη σειρά. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ομάδα Α είχε καλύτερη επίδοση στη δεύτερη δραστηριότητα (κατασκευή προβλήματος) ενώ η ομάδα Β είχε καλύτερη επίδοση στην πρώτη δραστηριότητα (επίλυση προβλήματος). Επιπλέον, οι ερευνητές παρατηρήσαν ότι, όταν το σκορ των συμμετεχόντων στην πρώτη δραστηριότητα αυξάνονταν, τότε αυξάνονταν και το σκορ τους στη δεύτερη δραστηριότητα και στις δύο ομάδες. Ωστόσο, η σχέση ήταν στατιστικά σημαντική για τους καθηγητές που ασχολήθηκαν πρώτα με την επίλυση και μετά με την κατασκευή (ομάδα Α), αλλά όχι για εκείνους που ασχολήθηκαν πρώτα με την κατασκευή (ομάδα Β). Αυτά τα αποτελέσματα υποδηλώνουν μια πολύπλοκη σχέση μεταξύ της ικανότητας επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων των εκπαιδευτικών (Rosli, και συν., 2015).

Διδασκαλία στην κατασκευή προβλήματος

Σημαντικό ρόλο για τη διδασκαλία στην κατασκευή προβλήματος διαδραματίζει ο εκπαιδευτικός. Ο τρόπος διδασκαλίας του θα καθορίσει σε ποιον βαθμό θα επιτύχει να καταστήσει τους μαθητές του ικανούς να κατασκευάζουν προβλήματα. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ξεκινήσει με το πώς η σειρά των πληροφοριών που περιέχονται σε ένα πρόβλημα μπορεί να αλλάξει χωρίς να αλλάξει τη φύση του ίδιου του προβλήματος (Kilpatrick, 1987). Στη συνέχεια μπορούν να δοθούν στους μαθητές μια σειρά από όλο και πιο περίπλοκα προβλήματα να ξαναγράψουν αλλάζοντας τη σειρά των δεδομένων. Κατά τα επόμενα μαθήματα, θα μπορούσε να δοθεί μια κατάσταση στους μαθητές και να τους ζητηθεί να κατασκευάσουν προβλήματα που μπορούν να προκύψουν από τα αριθμητικά δεδομένα της κατάστασης που τους παρουσιάστηκε (Kilpatrick, 1987).

Σε παρόμοια κατεύθυνση κινείται και η Gonzales (1998), που προτείνει ένα σχέδιο δράσης που αποτελείται από πέντε φάσεις και στην καθεμιά δίνει οδηγίες προς τον εκπαιδευτικό για τη διδασκαλία κατασκευής προβλημάτων (α.Ξεκινώντας, β.Κατασκευάζοντας ένα παροόμοιο πρόβλημα, γ.Κατασκευάζοντας μια εργασία, δ.Βρίσκοντας μαθηματικές καταστάσεις, ε.Κατασκευάζοντας προβλήματα). Το σχέδιο αυτό αποτελείται από διάφορες δραστηριότητες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία για την ανάπτυξη δεξιοτήτων στην κατασκευή προβλημάτων. Ο δημιουργικός δάσκαλος, όμως όπως υποστηρίζει, μπορεί να χρησιμοποιήσει τις ιδέες αυτές ως εφαλτήριο και στη συνέχεια θα επινοήσει νέες δραστηριότητες για την ενίσχυση δεξιοτήτων στην κατασκευή προβλημάτων σε κάθε φάση (Gonzales, 1998).

Ο δάσκαλος παίζει, επίσης, τον ρόλο – κλειδί ενός εμπλουτισμένου περιβάλλοντος στην τάξη (Kilpatrick, 1987). Για να συμμετάσχουν στην κατασκευή ενός μαθηματικού προβλήματος, μια κατεξοχήν δημιουργική δραστηριότητα, οι μαθητές χρειάζονται ένα κλίμα στο οποίο θα ενθαρρύνεται η εξερεύνηση των ιδεών. Αυτό το κλίμα δεν θα αναπτυχτεί, εάν ο δάσκαλος δεν το προωθήσει. Η δημιουργία ενός τέτοιου κλίματος μπορεί να συνεπάγεται την αναδιάρθρωση του συστήματος ανταμοιβής στην τάξη, έτσι ώστε τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι μαθητές να νιώσουν ότι ανταμείβονται από τη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων. Οι Brown & Walter (1983) αναφέρουν ότι είναι σημαντικό οι μαθητές να μάθουν να εργάζονται παραγωγικά και λιγότερο ανταγωνιστικά με τους άλλους. Συχνά, οι άλλοι εντοπίζουν αυτό που διαφεύγει από το άτομο. Οι ίδιοι προτείνουν την οργάνωση της τάξης κατά τρόπο που να παρέχει μια ατμόσφαιρα κατάλληλη για την ενθάρρυνση κατασκευής προβλημάτων, αλλά ταυτόχρονα να καλλιεργεί ένα πνεύμα περιπέτειας, ενθουσιασμού και ενότητας.

Η Ellerton (2013) έχει προτείνει ένα πλαίσιο ενεργητικής μάθησης που τοποθετεί τις διαδικασίες της κατασκευής προβλήματος στις ευρύτερες διεργασίες της διδασκαλίας των μαθηματικών. Αν τοποθετούσαμε τις μαθηματικές δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα σε μια τάξη κατά μήκος ενός φάσματος ξεκινώντας από τις παθητικές διεργασίες ενός μαθητή προς τις ενεργητικές, το πλαίσιο της Ellerton δείχνει ότι τάξεις που δεν περιλαμβάνουν διαδικασίες κατασκευής προβλημάτων και σταματούν στην επίλυση προβλημάτων, μειώνουν τις ενεργητικές μαθηματικές εμπειρίες των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές στερούνται ευκαιριών ώστε να σκεφτούν κριτικά και να θέτουν ερωτήσεις. Έτσι, γίνεται φανερό ότι η κατασκευή προβλήματος επιτρέπει στους μαθητές να εμπεδώσουν και να σκεφτούν κριτικά σχετικά με τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει. Οι Brown & Walter (1983) επίσης υποστηρίζουν ότι η κατασκευή προβλήματος δίνει τη δυνατότητα να επαναπροσδιοριστεί με ριζικό τρόπο ποιος είναι υπεύθυνος για την εκπαίδευση του ατόμου. Οι μαθητές έχουν έναν νέο και πιο ενεργό ρόλο στη δική τους μάθηση, καθώς ενθαρρύνονται να θέτουν ερωτήματα και δικά τους προβλήματα, αντί απλώς να λαμβάνουν τη γνώση έτοιμη από τον εκπαιδευτικό.

Ο Silver (1994) υποστήριξε ότι ορισμένα είδη δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν ως μέσο για να επιφέρουμε αλλαγές στους τρόπους επικοινωνίας στην τάξη των μαθηματικών. Ο κύριος στόχος της «ανοικτής προσέγγισης» που αναπτύχθηκε από τη Shimada (1987, όπ. αναφ. σε Stoyanova, 1997) ήταν να προωθήσει τη συζήτηση στην τάξη. Στην πραγματικότητα, η ενσωμάτωση ημι-δομημένων καταστάσεων κατασκευής προβλημάτων σε μαθήματα μαθηματικών περιλαμβάνει μια αυξημένη ανάγκη για επικοινωνία μεταξύ του δασκάλου και των μαθητών, καθώς και αλλαγές στον χαρακτήρα της επικοινωνίας στην τάξη των μαθηματικών (Stoyanova, 1997).

Σύμφωνα με τον Kilpatrick (1987) η ομαδική εργασία των μαθητών είναι μια μέθοδος διδασκαλίας για την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Η ομαδική εργασία φαίνεται να προσφέρει ένα σωστό πλαίσιο για την κατασκευή προβλήματος. Οι μαθητές στην ομάδα συμμετέχουν σε έναν διάλογο με τους άλλους, ο οποίος διάλογος αντανακλά το είδος του εσωτερικού διαλόγου που κάνουν οι καλοί κατασκευαστές προβλημάτων με τον εαυτό τους (Kilpatrick, 1987). Σε σύγκριση με μια τυπική διδασκαλία στην τάξη, όπου ο δάσκαλος παραδίδει το μάθημα και οι μαθητές απλά παρακολουθούν, μια τάξη που οργανώνεται έτσι ώστε οι μαθητές να εργάζονται από κοινού πάνω σε προβλήματα φαίνεται να παρέχει ένα πλουσιότερο πλαίσιο για προβληματισμό και ανάπτυξη της μαθηματικής γλώσσας.

Ο δάσκαλος είναι το βασικό συστατικό, γιατί αυτός καθορίζει το πλαίσιο βοηθώντας τους μαθητές να μάθουν πώς να διευρύνουν ένα πρόβλημα για να αποκαλύψουν στους άλλους τι υποδηλώνει (Moses, Bjork, & Goldenberg, 1993). Επίσης, ο δάσκαλος μπορεί να καθιερώσει ένα κλίμα στην τάξη που θα βοηθάει τη διερεύνηση των μαθηματικών καταστάσεων με διάφορους τρόπους: δίνοντας το πρότυπο στους μαθητές χρησιμοποιώντας ανοιχτές ερωτήσεις προς αυτούς, προωθώντας την ελεύθερη ανταλλαγή ιδεών και ενθαρρύνοντας ενεργά τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών, αντιμετωπίζοντας με εκτίμηση τις υποθέσεις των μαθητών καθώς και με ενδιαφέρον τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές σκέφτονται για ένα πρόβλημα. Οι ίδιοι προτείνουν δύο τεχνικές που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι εκπαιδευτικοί, για να προάγουν την κατασκευή προβλημάτων από τους μαθητές. Η πρώτη είναι η χρήση των σχολικών εγχειριδίων και των προβλημάτων που έχουν μέσα ως βάση για την κατασκευή και η δεύτερη είναι η χρήση προβλημάτων που επιδέχονται πολλούς τρόπους επίλυσης και ταυτόχρονα η αποφυγή προβλημάτων με ερωτήσεις που έχουν μία μόνο απάντηση.

Οι Bush & Fiala (1993) προτείνουν κάποιους τρόπους, που μπορεί να εφαρμόσει ένας εκπαιδευτικός, για να προετοιμάσει τους μαθητές του για την κατασκευή προβλημάτων. Αρχικά, πρέπει οι μαθητές να εμπλακούν σε πολλές δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων, ώστε να εξοικιωθούν με αυτά. Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός πρέπει να εναθαρρύνει τους μαθητές να δημιουργήσουν παρόμοια προβλήματα με αυτά που έχουν λύσει και στο επόμενο επίπεδο θα δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές να κατασκευάσουν προβλήματα γύρω από μικρές ιστοριούλες. Καλό θα ήταν οι μαθητές να δουλεύουν σε μικρές ομαδούλες. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να γράφουν καινούρια προβλήματα αλλά και να αναθεωρούν και να ξαναγράφουν τα προβλήματα που είχαν γράψει πιο παλιά. Θα ήταν χρήσιμο οι μαθητές να προσπαθήσουν να λύσουν τα προβλήματα που κατασκεύασαν οι συμμαθητές τους. Τέλος, οι μαθητές θα μπορούν να διαλέξουν τα καλύτερα προβλήματά τους για να συμπεριληφθούν στο ανθολόγιο της τάξης, που θα παρουσιαστεί στους γονείς ή σε άλλες τάξεις.

Ο Kilpatrick (1987) προτείνει τις παρακάτω πηγές για την εφαρμογή δραστηριοτήτων κατασκευής προβλημάτων στην τάξη των μαθηματικών που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι εκπαιδευτικοί στη διδασκαλία τους:

- Άνθρωποι ως πηγές των προβλημάτων: Σχεδόν όλα τα μαθηματικά προβλήματα που έχει συναντήσει στη σχολική του ζωή ένας μαθητής έχουν προταθεί και διατυπωθεί από ένα τρίτο πρόσωπο, συνήθως τον δάσκαλο ή τον συγγραφέα ενός βιβλίου. Στην πραγματική ζωή, ωστόσο, έξω από το σχολείο, τα περισσότερα προβλήματα που θα αντιμετωπίσει ένας άνθρωπος θα πρέπει να ανακαλυφθούν από τον ίδιο τον λύτη, που θα δώσει στο πρόβλημά του μια αρχική διατύπωση (Kilpatrick, 1987). Ένα άτομο δεν μπορεί να μεταφέρει ένα πρόβλημα σε κάποιον άλλο, αν ο δεύτερος δεν το διαμορφώσει μόνος του, ώστε να γίνει «κτήμα» του. Έτσι, δεν έχει σημασία από πού προέρχεται ένα πρόβλημα, ο λύτης θα πρέπει πάντα να το ξαναδιατυπώσει (Kilpatrick, 1987).

- Προβλήματα ως πηγές των προβλημάτων: Τα ίδια τα προβλήματα μπορούν να αποτελέσουν την πηγή για νέα προβλήματα. Σύμφωνα με τον Kilpatrick (1987) υπάρχουν δύο φάσεις κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων στη διάρκεια της οποίας μπορούν να δημιουργηθούν νέα προβλήματα. Καθώς ένα μαθηματικό μοντέλο κατασκευάζεται για ένα πρόβλημα (σχεδιασμός επίλυσης προβλήματος), ο λύτης μπορεί να αλλάξει σκόπιμα κάποιες ή όλες τις προϋποθέσεις του προβλήματος, για να διαπιστώσει πώς θα καταλήξει το νέο πρόβλημα. Όμως και αφού ένα πρόβλημα έχει λυθεί, ο λύτης μπορεί να κοιτάξει πίσω για να διαπιστώσει πώς η λύση θα μπορούσε να επηρεαστεί από διάφορες τροποποιήσεις στο πρόβλημα (Kilpatrick, 1987). Με άλλα λόγια, ο Kilpatrick πρότεινε ότι η προσοχή των μαθητών πρέπει να δοθεί στις αλλαγές των συνθηκών ενός προβλήματος που επηρεάζουν το μαθηματικό μοντέλο που έχει υιοθετηθεί και που ερευνούν τη σχέση μεταξύ αλλαγών του προβλήματος και της μεθόδου λύσης (Stoyanova E. N., 1997). Το πλαίσιο προβλήματος – λύσης (problem – solution environment) είναι η δεύτερη πηγή που προτείνει και η Stoyanova (1997) για την ανάπτυξη κατάλληλων δραστηριοτήτων κατασκευής προβλημάτων. Τέλος, ο Polya (1957), επίσης, πρότεινε ότι οι μαθητές θα μπορούσαν να κληθούν να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα με την ίδια μέθοδο ή λύση, όπως τα προβλήματα που έχουν λύσει στο παρελθόν.
- Καταστάσεις ως πηγές των προβλημάτων: Εκτός από τα προβλήματα που αντιμετωπίζει κανείς στο σχολείο μπορεί να προκύψουν προβλήματα στην καθημερινή ζωή από καταστάσεις που περιέχουν ελλιπείς ή πλεονάζουσες πληροφορίες. Το πρώτο βήμα που πρέπει να κάνει κανείς σύμφωνα με τη Stoyanova (1997), για να επιλύσει ένα τέτοιο πρόβλημα της πραγματικής ζωής, είναι να δώσει μια αρχική μορφή σε αυτό. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την επίλυση σωστά δομημένων προβλημάτων που δίνονται στο πλαίσιο του σχολείου, μια γνώριμη δραστηριότητα στους μαθητές (Stoyanova E. N., 1997). Οι άνθρωποι που θέλουν να εφαρμόσουν τις μαθηματικές γνώσεις τους για την επίλυση ενός προβλήματος της πραγματικής ζωής, θα διαπιστώσουν ότι η διατύπωση του προβλήματος με όρους που θα επιτρέψουν μια μαθηματική λύση είναι συνήθως μια πιο δύσκολη και δημιουργική προσπάθεια από την ίδια τη λύση (Kilpatrick, 1987). Υπάρχουν σχολικές ασκήσεις για την κατασκευή μαθηματικών μοντέλων από μια κατάσταση (μοντελοποίηση) και στοχεύουν στο να παρέχουν στους μαθητές εμπειρία για την κατασκευή προβλημάτων (Kilpatrick, 1987).

Σύμφωνα με τον Kilpatrick (1987) ο υπολογιστής, επίσης, είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για να εξερευνηθούν προβληματικές καταστάσεις. Θα πρέπει να είναι διαθέσιμος στην τάξη των μαθηματικών, μαζί με μια ποικιλία άλλων υλικών. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τον υπολογιστή για να τροποποιήσουν τα δεδομένα ενός προβλήματος και να διαπιστώσουν πώς αυτές οι μεταβολές επηρεάζουν τη λύση. Με τον υπολογιστή μπορούν, επίσης, να δοκιμάσουν αριθμούς σε ένα πρόβλημα και να κάνουν εικασίες, μπορούν να χρησιμοποιήσουν γραφικές παραστάσεις για να προτείνουν θεωρήματα στη γεωμετρία, μπορούν εύκολα να δημιουργήσουν νέα προβλήματα μεταβάλλοντας τη σύνταξη ενός ήδη υπάρχοντος (Kilpatrick, 1987). Όπως γίνεται αντιληπτό, ο υπολογιστής υποστηρίζει ένα ευρύ φάσμα διερευνητικών δραστηριοτήτων.

Η κατάλληλη χρήση της τεχνολογίας μπορεί να προωθήσει και να ενισχύσει την κατασκευή προβλημάτων (Moses, Bjork, & Goldenberg, 1993). Ο υπολογιστής σύμφωνα με τους ίδιους ερευνητές, όπως και η αριθμομηχανή, απελευθερώνει τόσο τους μαθητές όσο και τους εκπαιδευτικούς από κουραστικούς υπολογισμούς ή από επαναλαμβανόμενες αριθμητικές και γεωμετρικές εργασίες που απαιτούν μεγάλη συγκέντρωση. Ο υπολογιστής μπορεί να επανα-υπολογίζει τόσο γρήγορα και έτσι οι μαθητές μπορούν εύκολα να αμφισβητήσουν τα δεδομένα και να κάνουν δοκιμές με σχετικά λιγότερο κουραστικούς υπολογισμούς. Ο υπολογιστής επιτρέπει στους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς να διερευνήσουν τομείς που προηγουμένως δεν ήταν εύκολο να μελετηθούν κάνοντας αριθμητικές πράξεις στο χέρι. Τα δεδομένα συλλέγονται εύκολα και παρουσιάζονται από τον υπολογιστή με διάφορες μορφές, επιτρέποντας στο άτομο που τα χειρίζεται να κάνει προβλέψεις και να θέτει νέες ερωτήσεις σχετικά με τις συνέπειες της αλλαγής κάποιων προϋποθέσεων (Moses, Bjork, & Goldenberg, 1993).

Ευρήματα σχετικά με τη σημασία της διδασκαλίας κατασκευής προβλήματος

Σε γενικές γραμμές, οι αναφορές για τη διδασκαλία κατασκευής προβλημάτων δεν αναφέρουν περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές έχουν απορρίψει ή έχουν αντιδράσει αρνητικά σε αυτή την εκπαιδευτική προσέγγιση. Παρ 'όλα αυτά, φαίνεται εύλογο ότι μερικοί μαθητές, ίσως ειδικά εκείνοι που ήταν επιτυχημένοι μαθητές για μεγάλο χρονικό διάστημα σε ένα πλαίσιο σχολείου που χαρακτηριζόταν από δασκαλοκεντρική διδασκαλία, θα αντιδράσουν ίσως αρνητικά σε ένα στυλ διδασκαλίας που είναι λιγότερο κατευθυνόμενο και μετατίθεται σε αυτούς μεγαλύτερη ευθύνη για τη μάθησή τους (Silver E. A., 1994). Για αυτούς τους μαθητές, μπορεί μην υπάρχει επιθυμία ή κίνητρο, για να αλλάξουν την υπάρχουσα θεωρία που έχουν δομήσει για τις σχέσεις εξουσίας μέσα στην τάξη (Silver E. A., 1994). Έτσι κάποιοι μαθητές μπορεί να απορρίψουν ή να αντισταθούν σε μια διδασκαλία των μαθηματικών που βασίζεται στην κατασκευή προβλημάτων. Οι Silver & Mamona (1989) ερεύνησαν την κατασκευή προβλήματος σε καθηγητές μέσης εκπαίδευσης. Οι ερευνητές δήλωσαν ότι κάποιοι καθηγητές έδειξαν εχθρότητα προς την πρόκληση να κατασκευάσουν τα δικά τους μαθηματικά προβλήματα, π.χ. «*Αυτό είναι ανόητο!*», «*Γιατί μας ζητάτε να το κάνουμε αυτό;*». Ομοίως, οι Silver και Cai (1993) διαπίστωσαν ότι κάποιοι μαθητές στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου, όταν τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν τρία προβλήματα με βάση μια ιστορία που τους δόθηκε, εξέφρασαν βαθιά απογοήτευση που τους ζητήθηκε κάτι τέτοιο, π.χ. «*Αυτό είναι άδικο*», «*Ο δάσκαλός μας δεν μας δίδαξε πώς να το κάνουμε αυτό*».

Η χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών υπήρξε θέμα ενδιαφέροντος για τους ερευνητές στον τομέα της εκπαίδευσης των μαθηματικών (Cai, Hwang, Jiang, & Silber, 2015). Ειδικότερα, η ευελιξία που προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες διευκολύνουν την εξερεύνηση και τον πειραματισμό πάνω στην κατασκευή προβλημάτων. Οι Cai και Cifarelli (2005) έκαναν χρήση ενός προγράμματος στον υπολογιστή, για να μπορέσουν οι μαθητές να εξερευνήσουν μια μαθηματική κατάσταση που περιλάμβανε την κίνηση μιας μπάλας μπιλιάρδου. Ο μικρόκοσμος του προγράμματος παρείχε στους μαθητές μια σχετική αυτονομία και ελευθερία στην εξερεύνηση των σχέσεων και των ορίων αυτής της μαθηματικής κατάσταση. Αυτές οι εξερευνήσεις διευκόλυναν τους μαθητές να κατασκευάσουν πολλαπλές ερωτήσεις και να κάνουν πολλές υποθέσεις (Cai & Cifarelli, 2005).

Τα προγράμματα που βασίζονται σε υπολογιστή είναι ιδιαίτερα κατάλληλα για να παρέχουν σε μαθητές την ευκαιρία να εξερευνήσουν δυναμικές απεικονίσεις γεωμετρικών καταστάσεων (Cai, Hwang, Jiang, & Silber, 2015). Οι Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman (2005) βρήκαν ότι η χρήση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας διευκολύνει τη δημιουργία νέων προβλημάτων κατά τη διαδικασία επίλυσής τους. Οι μαθητές ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν τα δυναμικά στοιχεία του λογισμικού, για να κάνουν και να ελέγξουν τις υποθέσεις τους, να πειραματιστούν και να γενικεύσουν τα αποτελέσματά τους (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman, 2005).

Αναγκαιότητα νέας έρευνας

Μπορούμε να συμπεράνουμε από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση ότι η εμπλοκή των μαθητών σε διαδικασίες κατασκευής προβλημάτων μπορεί να έχει μια θετική επίδραση στη μάθηση των μαθηματικών. Με αυτόν τον τρόπο τα μαθηματικά γίνονται ένα ουσιώδες μάθημα που απαιτεί την ενεργή συμμετοχή τους, αφού οι ίδιοι γίνονται οι πρωταγωνιστές του μαθήματος ως κατασκευαστές προβλημάτων. Η κατασκευή προβλημάτων βοηθάει στη διαθεματικότητα μπλέκοντας τα μαθηματικά με άλλα μαθήματα, με αποτέλεσμα οι μαθητές να αναπτύσσουν πολλές δεξιότητες ταυτόχρονα σε διάφορους τομείς. Επίσης, η ενασχόληση με δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων μπορεί να μειώσει το άγχος για τα μαθηματικά (μαθηματικοφοβία). Υπάρχουν αρκετοί θεωρητικοί ισχυρισμοί για την κατασκευή προβλήματος ως μια δημιουργική πράξη (Silver, 1997, Moses, Bjork, & Goldenberg, 1993), όμως η σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και της διαδικασίας κατασκευής προβλήματος παραμένει ασαφής, ύστερα από ερευνητικές μελέτες. Σε κάποιες έρευνες (Haylock, 1987, Leung 1993) δεν εντοπίστηκε σύνδεση και σε άλλες (Singer, Pelczer & Voica, 2011) η κατασκευή προβλημάτων υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις αποδείκνυε δημιουργικές προσεγγίσεις από τους μαθητές. Τέλος, έρευνες (English, 1997b, Crespo, 2003) απέδειξαν ότι η συμμετοχή των μαθητών σε προγράμματα παρέμβασης βοήθησαν τους μαθητές να παρουσιάσουν στο τέλος περισσότερα και πιο σύνθετα προβλήματα.

Αναφορικά με τη σύνδεση ανάμεσα στην κατασκευή και την επίλυση προβλημάτων, σύμφωνα με τον Kilpatrick (1987), υπάρχει μια θετική σχέση μεταξύ της ικανότητας επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων. Κάποιες ερευνητικές μελέτες αποδεικνύουν ότι οι μαθητές που εμπλέκονται σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων βελτιώνουν τις δεξιότητες τους για την επίλυση (Leung & Silver, 1997, English, 1997a, 1997b, 1998). Μια θετική σχέση μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στην κατασκευή και την επίλυση εντόπισαν και οι Silver & Cai (1996) και Ellerton (1986), αναφέροντας ότι οι μαθητές με καλή επίδοση στην επίλυση πέτυχαν και καλή επίδοση στην κατασκευή. Ωστόσο, δεν υπάρχει σαφής ένδειξη που να δηλώνει ξεκάθαρα τη είδους σχέση υπάρχει μεταξύ τους (Silver E. A., 1994). Τα αποτελέσματα από αντίστοιχες μελέτες ήταν μικτά, υποδηλώνοντας μία πολύπλοκη σχέση μεταξύ ικανότητας στην κατασκευή και την επίλυση και κρίνοντας αναγκαία από τη μεριά των ερευνητών τη διεξαγωγή περαιτέρω έρευνας στον τομέα αυτό, για να εξεταστεί η φύση της σχέσης μεταξύ αυτών των δύο ικανοτήτων (Rosli, και συν., 2015, Μουσουλίδη, Φιλίππου, Χρίστου 2003, Cai & Hwang, 2002, Silver & Mamona, 1989).

Έρευνες σχετικές με τη διδασκαλία της κατασκευής προβλημάτων στα μαθηματικά αναφέρουν ότι οι περισσότεροι μαθητές ανταποκρίνονται θετικά. Ωστόσο υπάρχουν κάποιοι μαθητές που έχουν στάση αρνητική και εχθρική, όταν τους μετατίθεται μεγαλύτερη ευθύνη για τη μάθησή τους (Silver, 1994, Silver & Mamona, 1989, Silver & Cai,1993). Ο δάσκαλος παίζει τον βασικό ρόλο για τη δημιουργία ενός κλίματος στο οποίο θα ενθαρρύνεται η εξερεύνηση των ιδεών Kilpatrick (1987), οι μαθητές θα σκέφτονται κριτικά και θα έχουν ενεργό ρόλο στη μάθησή τους (Brown & Walter, 1983, Ellerton, 2013). Προωθούνται νέοι τρόποι επικοινωνίας μέσα στην τάξη που προϋποθέτουν σε μεγάλο βαθμό την εργασία των μαθητών πάνω στην κατασκευή προβλημάτων σε ομάδες (Silver, 1994, Kilpatrick, 1987, Bush & Fiala, 1993). Αρκετοί ερευνητές πρότειναν τρόπους και τεχνικές που μπορούν να εφαρμοστούν στην τάξη από τους εκπαιδευτικούς. Αυτές μπορούν να συνοψισθούν στην αναδιατύπωση προβλημάτων σε πρώτο στάδιο, έπειτα στην κατασκευή παρόμοιων προβλημάτων με άλλα και σε τελικό στάδιο στην κατασκευή προβλημάτων σε άλλες καταστάσεις πιο περίπλοκες (Gonzales, 1998, Kilpatrick, 1987, Bush & Fiala, 1993). Ο υπολογιστής, επίσης, προτείνεται ως ένα πολύτιμο εργαλείο μαζί με μια ποικιλία άλλων υλικών, που μπορεί να προωθήσει και να ενισχύσει την κατασκευή προβλημάτων (Kilpatrick, 1987, Moses, Bjork, & Goldenberg, 1993). Οι μαθητές, μέσω του υπολογιστή, εξερευνούν τις σχέσεις μεταξύ μαθηματικών καταστάσεων, πειραματίζονται, ελέγχουν τις υποθέσεις τους και γενικεύουν τα αποτελέσματά τους πιο εύκολα από ό,τι θα έκανα γραπτά (Cai & Cifarelli, 2005, Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman, 2005).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και όσα διαπιστώθηκαν από τα δεδομένα ερευνών του εξωτερικού κρίνεται αναγκαία μία έρευνα πάνω στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές της χώρας μας αναφορικά με την ικανότητά τους να θέτουν προβλήματα πριν και μετά τη συμμετοχή τους σε ένα πρόγραμμα παρέμβασης πάνω στην κατασκευή. Παράλληλα, μέσα από την έρευνα αυτή θα μελετηθεί η σχέση που πιθανώς υπάρχει ανάμεσα στην ικανότητα επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων, αν η πρώτη μπορεί να προβλέψει τη δεύτερη και αν η ικανότητα επίλυσης επηρεάζεται και πώς έπειτα από τη συμμετοχή στο πρόγραμμα παρέμβασης, ρίχνοντας έτσι περισσότερο φως στα δεδομένα που αφορούν τη σχέση μεταξύ των δύο αυτών ικανοτήτων.

2. Στόχοι και Ερευνητικά Ερωτήματα

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η μελέτη της ικανότητας ΚΜΠ από μαθητές της Γ΄ τάξης του δημοτικού. Πιο συγκεκριμένα θα διερευνηθεί αν η συμμετοχή των μαθητών σε ένα πρόγραμμα παρέμβασης πάνω στην κατασκευή προβλήματος οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα στην κατασκευή προβλημάτων και αν μπορεί να λειτουργήσει ευνοϊκά στην ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων από τους μαθητές. Θα μελετηθεί κατά πόσο ικανοί είναι οι μαθητές να κατασκευάζουν προβλήματα με βάση διάφορες μαθηματικές καταστάσεις πριν και μετά το πρόγραμμα παρέμβασης και αν η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής προβλημάτων. Παρακάτω παρατίθενται τα ερευνητικά ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν:

1. Πόσο ικανοί είναι οι μαθητές να κατασκευάζουν προβλήματα με βάση δομημένες και ημι-δομημένες μαθηματικές καταστάσεις;

2. Η ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος;

3. Η συμμετοχή σε ένα πρόγραμμα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα στην κατασκευή προβλήματος από τους μαθητές;

4. Η συμμετοχή σε ένα πρόγραμμα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος μπορεί να λειτουργήσει ευνοϊκά στην ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος από τους μαθητές;

Ορισμοί

Για την ορθή διεξαγωγή της έρευνας είναι απαραίτητη η αποσαφήνιση του εννοιολογικού πλαισίου και η διατύπωση λειτουργικών ορισμών των εμπλεκομένων εννοιών.

Αρχικά, με τον όρο **πρόβλημα** εννοούμε μια οποιαδήποτε εργασία στην οποία κάποιος καλείται να βρει λύση στο πλαίσιο καθορισμένων συνθηκών, όταν αντιλαμβάνεται το έργο αλλά δεν βρίσκει άμεσα μια στρατηγική για τη λύση του, αλλά έχει ως κίνητρο την αναζήτηση της λύσης (Gonzales, 1998). Πρόβλημα είναι μια κατάσταση κατά την οποία το άτομο αρχικά δεν γνωρίζει κανέναν αλγόριθμο ή διαδικασία που θα εγγυάται τη λύση του προβλήματος, αλλά το άτομο επιθυμεί να το λύσει (Svetela & Nicol, 1992). Στα μαθηματικά, ένα πρόβλημα αποτελείται από μια κατάσταση ή καταστάσεις (που θα μπορούσαν να δοθούν λεκτικά, συμβολικά ή γραφικά), γνωστές και άγνωστες μεταβλητές, ένα σύνολο από όρους που διευκρινίζουν τις σχέσεις μεταξύ των γνωστών και των αγνώστων (ζητούμενων - δεδομένων) που δίνονται και μια εργασία που πρέπει να γίνει (Gonzales, 1998).

Επίλυση ενός προβλήματος είναι η αναζήτηση του τρόπου για την επίτευξη μιας σαφώς κατανοητής, αλλά όχι αμέσως εφικτής λύσης. Ο λύτης έχει μια δεδομένη κατάσταση και έναν στόχο και πρέπει να ψάξει έναν τρόπο ή μια στρατηγική, ώστε να συνδέσει αυτά τα δύο. Η επίλυση ενός προβλήματος είναι επομένως μια σειρά από νοητικές ενέργειες, οι οποίες οδηγούν σε κάποιο σκοπό ή στην εύρεση του κατάλληλου τρόπου να συμπληρωθεί το κενό ανάμεσα σε μια δεδομένη κατάσταση και στον τελικό προορισμό. Είναι μια διαδικασία ή μέθοδος τοποθέτησης της υπάρχουσας γνώσης με τέτοιον τρόπο, ώστε να λυθεί ένα πρόβλημα (Polya, 1957, Svetela & Nicol, 1992).

Ως **ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος** ορίζεται «*η ικανότητα των ατόμων να χρησιμοποιούν τις γνωστικές διαδικασίες, για να αντιμετωπίσουν και να επιλύσουν πραγματικές διεπιστημονικές καταστάσεις, όπου η πορεία της λύσης δεν είναι άμεσα ορατή και όπου οι εμπλεκόμενες γνωστικές περιοχές που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος δεν κατατάσσονται σε μια μοναδική περιοχή των μαθηματικών, της επιστήμης ή της μητρικής γλώσσας*» (PISA, 2003).

Σύμφωνα με τη Stoyanova (1997) η επίδοση στην επίλυση προβλημάτων ενός μαθητή ορίζεται ως ο τρόπος με τον οποίο ένας μαθητής χρησιμοποιεί την προηγούμενη μαθηματική εμπειρία του για να: α) κατανοήσει το πρόβλημα (τις έννοιες και τις σχέσεις), β) προσδιορίσει τις κατάλληλες στρατηγικές και μεθόδους επίλυσης του προβλήματος, γ) επιλύσει το πρόβλημα, δ) γράψει τη λύση και ε) αξιολογήσει τη μέθοδο/ τις μεθόδους λύσης που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και την ορθότητα και καταλληλότητα του αποτελέσματος. Η αξιολόγηση της ικανότητας αυτής θα περιλαμβάνει τέσσερις πτυχές της επίλυσης προβλήματος: την κατανόηση, την ορθότητα, την ακρίβεια και την αυθεντικότητα (Stoyanova, 1997).

- Η **κατανόηση** αναφέρεται στην κατανόηση της δομής του προβλήματος στη βάση της επιλογής του μαθητή της κατάλληλης στρατηγικής για τη λύση. Ένα πρόβλημα που θα χαρακτηριστεί ως κατανοητό, εν μέρει κατανοητό ή μη κατανοητό.

- Η **ορθότητα** συνδέεται με την ορθότητα του αποτελέσματος. Τα αποτελέσματα θα προσδιοριστούν ως σωστά, εν μέρει σωστά ή όχι σωστά.
- Η **ακρίβεια** αναφέρεται στη μαθηματική ακρίβεια της δοσμένης λύσης. Οι λύσεις που θα δώσουν οι μαθητές θα χωριστούν σε τρεις ομάδες: ακριβή, εν μέρει ακριβή ή μη ακριβή.
- Η **αυθεντικότητα** - η τέταρτη πτυχή που θα αξιολογηθεί στις λύσεις των μαθητών - αναφέρεται στην αυθεντικότητα/πρωτοτυπία της στρατηγικής επίλυσης. Αυτό συνδέεται με την κομψότητα της στρατηγικής και το πώς σχετίζεται με την προηγούμενη εμπειρία του μαθητή. Αν δηλαδή οι μαθητές έλυσαν τα προβλήματα με τρόπο αναμενόμενο αναφορικά με το επίπεδο της τάξης και τα όσα έχουν διδαχθεί ή με πιο πρωτότυπο τρόπο. Οι λύσεις των προβλημάτων προβλήματα θα ταξινομηθούν ως αυθεντικές, εν μέρει αυθεντικές ή μη αυθεντικές.

Η έννοια της κατασκευής προβλήματος σε αυτή τη μελέτη θα διευκρινιστεί καλύτερα μέσω της έννοιας της δομής προβλήματος. Ο Halford (1987, όπ. αναφ. στη Stoyanova, 1997) ορίζει τη δομή σαν «*ένα σύνολο στοιχείων, με μια σειρά από σχέσεις ή λειτουργίες που ορίζονται στα στοιχεία*». Λαμβάνοντας την άποψη αυτή, τα μαθηματικά προβλήματα θα αναφέρονται «*ως δομές, των οποίων τα στοιχεία και οι σχέσεις είναι μαθηματικές έννοιες*». Έτσι, ένα συγκεκριμένο πρόβλημα είναι καλά δομημένο, όταν ο στόχος μπορεί να καθοριστεί από όλα τα δοσμένα στοιχεία και τις σχέσεις. Προβλήματα, τα οποία δεν είναι καλά δομημένα, θα αναφέρονται ως καταστάσεις (Stoyanova, 1997).

Η έννοια της διαδικασίας της **κατασκευής προβλήματος** (problem posing) τα τελευταία τριάντα χρόνια έχει αποσαφηνισθεί και έχει εμπλουτιστεί αρκετά. Σύμφωνα με τον Silver (1994) το «problem posing» αναφέρεται στην κατασκευή καινούριων προβλημάτων αλλά και στην αναδιατύπωση δοσμένων προβλημάτων. Οι Stoyanova & Ellerton (1996, σελ. 518) αναφέρουν σε άρθρο τους: «*Η κατασκευή προβλήματος ορίζεται ως μία διαδικασία κατά την οποία, με βάση τη μαθηματική εμπειρία, οι μαθητές κατασκευάζουν προσωπικές αναπαραστάσεις δεδομένων καταστάσεων και τις μετασχηματίζουν σε μαθηματικά προβλήματα που έχουν νόημα*». Σε αυτή τη μελέτη η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος ορίζεται ως η διαδικασία με την οποία, βάσει της μαθηματικής εμπειρίας τους, οι μαθητές κατασκευάζουν τις προσωπικές ερμηνείες συγκεκριμένων καταστάσεων και τις διαμορφώνουν ως ουσιαστικά καλά δομημένα μαθηματικά προβλήματα. Οι μαθηματικές καταστάσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν κατασκευή προβλήματος, θα ονομαστούν καταστάσεις κατασκευής προβλήματος (Stoyanova, 1997).

Οι κατηγορίες των **μαθηματικών καταστάσεων** για την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων είναι ταξινομημένες με βάση τα χαρακτηριστικά και ορισμένα δομικά στοιχεία των ίδιων των καταστάσεων. Κάθε μαθηματική κατάσταση μπορεί να κατηγοριοποιηθεί ως: ελεύθερη, ημι-δομημένη και δομημένη.

Στις ελεύθερες καταστάσεις οι μαθητές κατασκευάζουν προβλήματα χωρίς κανέναν περιορισμό από μια δεδομένη κατάσταση, που προέκυψε με φυσικό τρόπο ή δόθηκε σκόπιμα, για παράδειγμα οι κατασκευές μπορεί να αφορούν κάτι ενδιαφέρον, ένα συγκεκριμένο θέμα, έναν μαθηματικό διαγωνισμό, μπορεί ζητείται να είναι δύσκολες από τον λύτη για να λυθούν, μπορεί να προκύπτουν από το πλαίσιο της καθημερινής ζωής, από δεδομένα ή δοσμένες απαντήσεις, να περιλαμβάνουν τη χρήση μιας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας ή μεθόδου επίλυσης (Stoyanova, 1997).

Οι ημι-δομημένες καταστάσεις αναφέρονται σε περιπτώσεις όπου οι μαθητές έχουν μια κατάσταση και καλούνται να διερευνήσουν τη δομή της και να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα πάνω σ’ αυτήν, εφαρμόζοντας γνώσεις, δεξιότητες, έννοιες και σχέσεις από προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες τους (Stoyanova, Ellerton, 1996). Υπάρχουν μαθηματικές καταστάσεις που βασίζονται σε μια συγκεκριμένη δομή ενός προβλήματος χωρίς ξεκάθαρο στόχο ή με ελλιπή στοιχεία σε συνδυασμό με τα δεδομένα, τα εμπόδια και τον στόχο ή με πλεονάζουσες πληροφορίες στα δεδομένα, στα εμπόδια ή και στα δύο, κατασκευές στη βάση διαφορετικών ερμηνειών μιας μαθηματικής έννοιας ή που έχουν παραπάνω από μία λύση (Stoyanova, 1997). Σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται και οι *καταστάσεις κατασκευής που είναι βασισμένες σε μια συγκεκριμένη δομή λύσης, που μπορεί να* περιλαμβάνει τη χρήση μιας συγκεκριμένης μαθηματικής μεθόδου μέσα σε μια δεδομένη δομή προβλήματος κ.λπ.

Οι δομημένες καταστάσεις, αναφέρονται σε καταστάσεις που οι δραστηριότητες για την κατασκευή ενός προβλήματος βασίζονται σε ένα ορισμένο πρόβλημα ή μια δοσμένη λύση (Stoyanova, 1997). Στην πρώτη περίπτωση μπορούν να προκύψουν αλλάζοντας το μαθηματικό λεξιλόγιο ενός προβλήματος, παρουσιάζοντας οι μαθητές ένα συγκεκριμένο πρόβλημα με δικά τους λόγια χωρίς να αλλάζουν όμως τη φύση του προβλήματος, μεταβάλλοντας τη σημασιολογική δομή ενός προβλήματος ή ένα δοσμένο πρόβλημα, δηλώνοντας πολλούς στόχους σε ένα καλά δομημένο πρόβλημα, παρουσιάζοντας ένα πρόβλημα «εν συντομία», κατασκευάζοντας μια αλυσίδα προβλημάτων, σειρές προβλημάτων, πεδία προβλημάτων και κύκλους προβλημάτων. Στη δεύτερη περίπτωση μπορούν να προκύψουν διατυπώνοντας την κύρια ιδέα της λύσης ή επαναδιατυπώνοντας ένα πρόβλημα στη βάση της λύσης του ή να αφορούν κατασκευές προβλημάτων στη βάση ενός προβλήματος με διάφορες προσεγγίσεις λύσης ή με κοινή μέθοδο επίλυσης ή που μοιάζουν σε ένα δοσμένο πρόβλημα, αλλά έχουν διαφορετικές προσεγγίσεις επίλυσης ή να έχουν μη ρεαλιστικές λύσεις (Stoyanova, 1997).

Σύμφωνα πάλι με την Stoyanova (1997) η **επίδοση κατασκευής προβλημάτων** ενός μαθητή ορίζεται ως ο τρόπος με τον οποίο ο μαθητής χρησιμοποιεί την προηγούμενη εμπειρία του για να: α) κατανοήσει την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση που απαιτείται για την επίλυση μιας συγκεκριμένης κατάστασης κατασκευής προβλήματος, β) εφαρμόσει ένα σύνολο κατάλληλα δομημένων δράσεων κατασκευής προβλήματος και γ) διατυπώσει (ή γράψει) καλά δομημένα μαθηματικά προβλήματα, τα οποία (κατά κάποιον τρόπο) συνδέονται με τη δοθείσα κατάσταση κατασκευής προβλήματος.

Το σύστημα αξιολόγησης που πρότεινε η Stoyanova (1997) και υιοθετήθηκε και στην παρούσα έρευνα για τα προβλήματα που κατασκευάζονται από τους μαθητές συνδέεται αναγκαστικά με τον τύπο της κατηγορίας κατασκευής προβλημάτων, καθώς και με τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων που κατασκευάζονται. Τα προβλήματα που δημιουργούνται από τους μαθητές σε καθεμιά από τις δυο καταστάσεις (ημι-δομημένη ή δομημένη), αξιολογούνται σύμφωνα με τις ακόλουθες πέντε κοινές πτυχές: την ακρίβεια, την ορθότητα, την αυθεντικότητα, το επίπεδο δυσκολίας και το είδος του προβλήματος.

- Η **ακρίβεια** αναφέρεται στην ακρίβεια της μαθηματικής γλώσσας που χρησιμοποιείται. Η ακρίβεια θα χωριστεί σε τρία επίπεδα: ακριβής, εν μέρει ακριβής και μη ακριβής.
- Η **ορθότητα** σχετίζεται με την ορθότητα της δομής του προβλήματος. Τα προβλήματα που θα δημιουργηθούν από τους μαθητές θα αξιολογηθούν ως σωστά, εν μέρει σωστά ή όχι σωστά.
- Η **αυθεντικότητα** θα αξιολογήσει την ποιότητα της δομής του προβλήματος λαμβάνοντας υπόψη την έκταση στην οποία οι δομές των προβλημάτων που θα κατασκευαστούν σχετίζονται με εμπειρίες του μαθητή με την επίλυση των προβλημάτων. Ένα πρόβλημα θα θεωρηθεί ως αυθεντικό, όταν η δομή του είναι εφευρέθηκε από τον μαθητή, μερικώς αυθεντικό εφόσον είναι γνωστό το πρόβλημα, αλλά η δομή του ανακαλύφθηκε από τον μαθητή και μη αυθεντικό, αν το πρόβλημα μπορεί να συνδεθεί άμεσα με τις μαθηματικές εμπειρίες του μαθητή.
- Το **επίπεδο δυσκολίας** των προβλημάτων που θα κατασκευαστούν αναφέρεται στην πολυπλοκότητα της δομής της λύσης που απαιτείται για το πρόβλημα και πιο συγκεκριμένα στον αριθμό των πράξεων που απαιτούνται για την επίλυσή του. Τα προβλήματα που θα κατασκευαστούν από τους μαθητές θα αξιολογηθούν ως δύσκολα, εν μέρει δύσκολα και όχι δύσκολα. Θα πρέπει να τονιστεί ότι, επειδή οι μαθητές κατασκευάζουν προβλήματα από ένα ευρύ φάσμα θεμάτων, με διαφορετικές μορφές και με βάση μαθηματικές καταστάσεις από διαφορετικές κατηγορίες και τύπους, ήταν απαραίτητο το σύστημα κωδικοποίησης να συσταθεί με πιο γενικούς όρους.
- Οι **τύποι των προβλημάτων** που θα κατασκευαστούν από τους μαθητές θα χαρακτηριστούν ως αλγοριθμικά, λογικά ή γενικευμένα, ανάλογα με το είδος της γνώσης που υπάρχει πίσω από τη διαδικασία της λύσης. Ένα πρόβλημα θα θεωρηθεί ως αλγοριθμικό, όταν η λύση του εμπλέκει ένα πολύ γνωστό αλγόριθμο (αλγεβρικό, αριθμητικό ή γεωμετρικό) που περιλαμβάνεται στα σχολικά προγράμματα ή στο περιεχόμενο του προγράμματος. Ένα πρόβλημα που θα χαρακτηριστεί ως λογικό, όταν οι λύσεις που απαιτούν επαγωγική ή

απαγωγική λογική σκέψη. Όταν το πρόβλημα γενικεύει ένα πρότυπο αυτό θα αναφέρεται ως γενικευμένο.

Επειδή οι συνθήκες που διέπουν τη διαδικασία της κατασκευής προβλημάτων είναι πιθανό να επηρεάσουν το πρόβλημα, προστέθηκαν επιπλέον κριτήρια για τις ημι-δομημένες και δομημένες καταστάσεις κατασκευής προβλημάτων από τη Stoyanova (1997). Δύο νέα χαρακτηριστικά χρησιμοποιήθηκαν για την αξιολόγηση των κατασκευασμένων προβλημάτων σε ημι-δομημένες και δομημένες καταστάσεις - η **ευχέρεια** (αριθμός σωστών προβλημάτων που σχετίζονται με την κατάσταση κατασκευής προβλήματος) και η **ευελιξία** (αριθμός των διαφορετικών τύπων των προβλημάτων που δημιουργούνται).

Ωστόσο, για την αξιολόγηση των προβλημάτων που κατασκευάστηκαν από τους μαθητές στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκαν τα τέσσερα κριτήρια από τα εφτά που πρότεινε η Stoyanova (1997) και αυτά ήταν: η ακρίβεια, η ορθότητα, η αυθεντικότητα και το επίπεδο δυσκολίας. Αξίζει να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι τα κριτήρια: είδος του προβλήματος (αλγοριθμικά, λογικά ή γενικευμένα), ευελιξία (αριθμός των διαφορετικών τύπων των προβλημάτων που δημιουργούνται) και ευχέρεια (αριθμός σωστών προβλημάτων που σχετίζονται με την κατάσταση κατασκευής προβλήματος) δεν χρησιμοποιήθηκαν στην αξιολόγηση λόγω της φύσης των δραστηριοτήτων αλλά και του νεαρού της ηλικίας των υποκειμένων.

3. Μεθοδολογία

Μέθοδος

Πρόκειται για ένα διδακτικό ημι-πείραμα, με την έννοια των Campbell και Stanley (1963, όπ. αναφ. στο Robson, C., 2010) όπου το ερευνητικό σχέδιο έχει μια πειραματική προσέγγιση αλλά δεν πραγματοποιήθηκε τυχαίος καταμερισμός στην ομάδα χειρισμού. Μια μεμονωμένη πειραματική ομάδα προελέγχθηκε, δέχτηκε μια διδακτική παρέμβαση και στο τέλος ελέγχθηκε και πάλι. Η διαδικασία πραγματοποιήθηκε κατά το δεύτερο με τρίτο σχολικό τρίμηνο. Σε πρώτη φάση δόθηκε στους μαθητές (πειραματική ομάδα) ένα αρχικό τεστ με δύο δοκίμια που εξέταζαν την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων και δύο δοκίμια που εξέταζαν την ικανότητα κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων, για να διαπιστωθεί η επίδοση των μαθητών στην επίλυση και κατασκευή προβλημάτων πριν το πρόγραμμα παρέμβασης. Ακολούθησε μία διδακτική παρέμβαση οχτώ συναντήσεων πάνω στην κατασκευή μαθηματικού προβλήματος με βάση δομημένες και ημι-δομημένες μαθηματικές καταστάσεις. Στο τελευταίο στάδιο της έρευνας δόθηκε το τελικό τεστ στους μαθητές με δύο δοκίμια που αφορούσαν την ικανότητα επίλυσης και δύο που αφορούσαν την ικανότητα κατασκευής. Και τα τέσσερα δοκίμια του τελικού τεστ ακολουθούσαν τη φιλοσοφία αυτών του αρχικού, για να εξετασθεί αν η συμμετοχή στο πρόγραμμα παρέμβασης είχε κάποια επίδραση στην ικανότητα ΕΜΠ και ΚΜΠ των μαθητών. Τα γραπτά των μαθητών τόσο στο αρχικό όσο και στο τελικό τεστ αποτέλεσαν το ερευνητικό υλικό της μελέτης.

Δείγμα

Τα υποκείμενα της έρευνας αποτέλεσαν 21 μαθητές της Γ' τάξης του Δημοτικού (μέσος όρος ηλικίας 8 έτη) που φοιτούσαν στην ίδια τάξη σε αστικό ιδιωτικό σχολείο της Θεσσαλονίκης. Η τάξη αποτελούνταν από 10 κορίτσια και 11 αγόρια, που προέρχονταν από ανώτερες και μεσαίες κοινωνικοοικονομικά οικογένειες.

Εργαλεία

Για την επίτευξη των στόχων της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, τέσσερα δοκίμια στο αρχικό τεστ και τέσσερα στο τελικό. Η κατασκευή τους βασίστηκε στη μελέτη αντίστοιχων δοκιμίων άλλων ερευνών, όπως αυτές παρουσιάζονται στη διεθνή βιβλιογραφία και σχετίζονται με την κατασκευή και επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Τα δύο πρώτα δοκίμια αφορούσαν την επίλυση προβλημάτων ενώ τα δύο τελευταία την κατασκευή. Δεν δόθηκε μεγαλύτερος αριθμός δοκιμίων λόγω της μικρής ηλικίας των συμμετεχόντων. Τα δοκίμια του αρχικού τεστ δοκιμάστηκαν πιλοτικά σε 24 μαθητές της Γ΄ Δημοτικού (11 κορίτσια και 13 αγόρια) που δεν ανήκαν στο δείγμα της έρευνας. Η πιλοτική χορήγηση των δοκιμίων έγινε με στόχο να εντοπιστούν τυχόν αδυναμίες στη διατύπωση των έργων και να εκτιμηθεί ο απαιτούμενος χρόνος για τη συμπλήρωσή τους. Αφού η πιλοτική χορήγηση είχε επιτυχία, δεν τροποποιήθηκαν τα δοκίμια και αυτούσια χορηγήθηκαν στο δείγμα της έρευνας.

Το πρώτο δοκίμιο ΕΜΠ ήταν ένα πρόβλημα που λυνόταν με την έρευση ενός μοτίβου και βασίστηκε σε εργαλείο αντίστοιχης έρευνας της English (1998) σε παιδιά ίδιας ηλικίας, το οποίο μπρούσε να λυθεί με πράξη ή με αναλυτική καταγραφή του τρόπου σκέψης των μαθητών (καταμέτρηση των βημάτων μέχρι να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα). Το δεύτερο δοκίμιο ΕΜΠ ήταν ένα πρόβλημα αθροιστικής σύγκρισης μεταξύ δύο ποσοτήτων με απλούς όμως αριθμούς, η επίλυση του οποίου απαιτούσε την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων (και συγκεκριμένα δύο προσθέσεων). Έγινε προσπάθεια τα στοιχεία που περιλήφθηκαν στα προβλήματα να ανταποκρίνονται στο ηλικιακό επίπεδο των μαθητών και να συμφωνούν με τους στόχους που ορίζει το ΔΕΠΠΣ (2003) για τους μαθητές της Γ' Δημοτικού και συγκεκριμένα, επιδιώχθηκε οι μαθητές να ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις σχετικές με τις έννοιες της τάξης αυτής, να κάνουν δοκιμές, να ξεχωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του προβλήματος και να επιλέγουν τα αναγκαία δεδομένα για την επίλυσή του, να παρουσιάζουν με σαφήνεια την απάντησή τους, η οποία θα πρέπει να περιλαμβάνει τη στρατηγική επίλυσης και το αποτέλεσμα. Οι καταστάσεις που προτάθηκαν είτε αναφέρονται στη σύγχρονη καθημερινή ζωή των παιδιών ή έγινε προσπάθεια να είναι τέτοιες, ώστε να ενεργοποιούν το ενδιαφέρον τους να ασχοληθούν με τα προβλήματα. Τα προβλήματα που αφορούσαν την ΕΜΠ στο αρχικό τεστ παρουσιάζονται στο

Παράρτημα 1 και εξέταζαν το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή αποσκοπούσαν στη μέτρηση της ικανότητας επίλυσης μαθηματικού προβλήματος έτσι ώστε να φανεί αν μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής. Τα αντίστοιχα προβλήματα για το τελικό τεστ παρουσιάζονται στο Παράρτημα 2 και εξέταζαν ξανά το δεύτερο ερώτημα (μέτρηση ικανότητας ΕΜΠ) αλλά και το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή την τυχόν μεταβολή στην επίδοση της ικανότητας επίλυσης μαθηματικού προβλήματος των μαθητών έπειτα από τη συμμετοχή τους στο πρόγραμμα παρέμβασης.

Τα δοκίμια για την ΚΜΠ αποτελούνταν από δύο έργα, τα οποία εξέταζαν την αντίστοιχη ικανότητα με βάση μία δομημένη και μία ημι-δομημένη μαθηματική κατάσταση. Το τρίτο δοκίμιο, που εξέταζε την ικανότητα ΚΜΠ με βάση δομημένη κατάσταση, ζητούσε από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα που να έχει κοινή μέθοδο επίλυσης με το δεύτερο δοκίμιο (που αφορούσε την ΕΜΠ) και ανήκει στις δομημένες καταστάσεις ΚΜΠ που βασίζονται σε μια συγκεκριμένη λύση που πρότεινε η Stoyanova (1997). Το δοκίμιο που εξέταζε την ικανότητα ΚΜΠ με βάση ημι-δομημένη κατάσταση βασίστηκε στο εργαλείο έρευνας προηγούμενων ερευνών στο συγκεκριμένο θέμα (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman, 2005, Μουσουλίδης, Φιλίππου, & Χρίστου, 2003). Αυτό αποτελούνταν από μια εικόνα με πληροφορίες με διαφορετικές μορφές αναπαράστασης (εικονική και λεκτική). Οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να διαλέξουν τις πληροφορίες που θα χρησιμοποιούσαν. Η επιλογή των προβλημάτων αυτών βασίστηκε στη θεωρία της Stoyanova (1997) για τις μαθηματικές καταστάσεις. Τα προβλήματα που αφορούσαν την ΚΜΠ για το αρχικό τεστ παρουσιάζονται στο Παράρτημα 1 και εξέταζαν το πρώτο ερώτημα, κατά πόσο ικανοί είναι οι μαθητές να κατασκευάζουν προβλήματα με βάση δομημένες (μαθηματική πρόταση) για το πρώτο δοκίμιο και ημι-δομημένες (εικόνα) μαθηματικές καταστάσεις για το δεύτερο δοκίμιο καθώς και το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή αν η ικανότητα ΕΜΠ μπορεί να προβλέψει την ικανότητα ΚΜΠ, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των δοκιμίων που αφορούσαν την ΕΜΠ. Τα αντίστοιχα προβλήματα για το τελικό τεστ παρουσιάζονται στο Παράρτημα 2 και εξέταζαν το πρώτο ερώτημα (μέτρηση ικανότητας ΚΜΠ σε δομημένη και ημι-δομημένη κατάσταση), το δεύτερο (σχέση ικανότητας ΕΜΠ και ΚΜΠ) και το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή την τυχόν μεταβολή στην επίδοση της ικανότητας κατασκευής μαθηματικού προβλήματος των μαθητών έπειτα από τη συμμετοχή τους στο πρόγραμμα παρέμβασης.

Ερευνητική διαδικασία

Τα δύο δοκίμια ΕΜΠ και τα δύο δοκίμια ΚΜΠ του αρχικού τεστ χορηγήθηκαν ταυτόχρονα σε μορφή ενός φύλλου εργασίας σε ολόκληρη την τάξη μέσα στο ωρολόγιο πρόγραμμα σε μία συνάντηση και η διάρκειά τους ήταν μία διδακτική ώρα (45 λεπτά). Αφού δόθηκαν κάποιες διευκρινήσεις και οδηγίες στους μαθητές συνέχισαν μόνοι τους στη συμπλήρωση του φύλλου εργασίας χωρίς να δοθεί καμία βοήθεια. Έγινε σαφές στους μαθητές ότι δεν αποτελούσε κάποιο είδος γραπτής δοκιμασίας που αποσκοπούσε στην αξιολόγησή τους, αλλά ένα εργαλείο για να σχεδιαστεί ένα πρόγραμμα σχετικό με τα προβλήματα σύμφωνα με τις ανάγκες τους. Έγινε ανάλυση των δεδομένων, έτσι ώστε να βγουν κάποια αρχικά συμπεράσματα σχετικά με την ικανότητα ΚΜΠ και ΕΜΠ από τους μαθητές και την πιθανή σχέση μεταξύ των δυο αυτών ικανοτήτων.

Στη συνέχεια μεσολάβησε η διδακτική παρέμβαση και αφού πέρασε ένα διάστημα τριών εβδομάδων χορηγήθηκαν στους μαθητές τα δοκίμια ΕΜΠ και ΚΜΠ του τελικού τεστ. Ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία με το αρχικό τεστ. Κάθε παιδί εργάστηκε ατομικά και μέσα σε μία διδακτική ώρα είχαν όλοι ολοκληρώσει τα δοκίμια. Έγινε ξανά ανάλυση των δεδομένων του τελικού τεστ, έτσι ώστε να βγουν τα συμπεράσματα σχετικά με την επίδραση που τυχόν είχε το πρόγραμμα παρέμβασης στην ικανότητα ΚΜΠ και ΕΜΠ και την πιθανή σχέση μεταξύ των δυο αυτών ικανοτήτων.

Διδακτική παρέμβαση

Η διδακτική παρέμβαση αφορούσε την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος με βάση δομημένες και ημι-δομημένες μαθηματικές καταστάσεις. Το πρόγραμμα σχεδιάστηκε σύμφωνα με τις τεχνικές διδασκαλίας που πρότειναν διάφοροι ερευνητές, ξεκινώντας από απλές δραστηριότητες, όπως η αναδιατύπωση προβλημάτων σε πρώτο στάδιο, έπειτα η κατασκευή παρόμοιων προβλημάτων με άλλα και σε τελικό στάδιο η κατασκευή προβλημάτων σε άλλες καταστάσεις πιο περίπλοκες (Gonzales, 1998, Kilpatrick, 1987, Bush & Fiala, 1993). Το πρόγραμμα της διδακτικής παρέμβασης πάνω στην ΚΜΠ αποτελούνταν από οχτώ συναντήσεις. Οι έξι είχαν διάρκεια μία διδακτική ώρα και οι δύο τελευταίες διήρκεσαν δύο διδακτικές ώρες. Οι τέσσερις πρώτες συναντήσεις αφορούσαν ΚΜΠ με βάση δομημένες μαθηματικές καταστάσεις. Η πρώτη συνάντηση είχε θέμα την αναδιατύπωση της εκφώνησης ενός δοσμένου προβλήματος, η δεύτερη την τροποποίηση των δεδομένων ενός δοσμένου προβλήματος, η τρίτη τη διατύπωση ερωτήσεων σε ένα πρόβλημα που δίνονταν μόνο τα δεδομένα και η τέταρτη την εύρεση περιττών και ελλιπών πληροφοριών σε δοσμένα προβλήματα. Οι τέσσερις τελευταίες συναντήσεις αφορούσαν ΚΜΠ με βάση ημι-δομημένες μαθηματικές καταστάσεις και αυτές ήταν η διατύπωση ερωτήσεων σε ένα πρόβλημα που δίνονταν τα δεδομένα και πιθανές απαντήσεις, η κατασκευή ενός προβλήματος που είχε κοινή μέθοδο επίλυσης με δοσμένο πρόβλημα, η διατύπωση ενός προβλήματος, όταν δινόταν μια πράξη ισότητας και η διατύπωση ενός προβλήματος, όταν δινόταν μια εικόνα. Κάθε εβδομάδα πραγματοποιούνταν και μία συνάντηση και ορίστηκε ως ημέρα των συναντήσεων η Παρασκευή. Πριν πραγματοποιηθούν οι δύο τελευταίες συναντήσεις (ΚΜΠ με πράξη ισότητας και με εικόνα) είχαν μεσολαβήσει και οι διακοπές του Πάσχα.

Τα προβλήματα που επιλέχθηκαν να επεξεργαστούν οι μαθητές ή να κατασκευάσουν στις συναντήσεις στο πρόγραμμα παρέμβασης ήταν τα περισσότερα αθροιστικής δομής και συνήθως με μικρούς αριθμούς, γιατί στόχος δεν ήταν να δοθεί έμφαση στη δυσκολία των αριθμητικών πράξεων αλλά περισσότερο στις σχέσεις μεταξύ των μεγεθών που αναφέρονταν στην εκφώνηση κάθε προβλήματος. Έγινε προσπάθεια να δοθούν προβλήματα που γλωσσικά δεν κατεύθυναν νοητικά τους μαθητές ή τους υπέβαλλαν την επιθυμητή πράξη (όπως πιο πολύ, περισσότερους, λιγότερα κ.ά.) αλλά το αντίθετο, προσπαθούσαν δηλαδή να αποδομήσουν αυτή τη λογική (κυρίως στα προβλήματα της πρώτης συνάντησης). Τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν βασίζονται σε αντίστοιχα του σχολικού εγχειρίδιού ή προέρχονται από τον διαδικτυακό τόπο «Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής» (http://mathslife.eled.uowm.gr/) με κατάλληλες τροποποιήσεις, ώστε να ανταποκρίνονται στην ηλικία των μαθητών και στους στόχους της έρευνας και παρουσιάζονται στο Παράρτημα 3.

Σε όλες τις συναντήσεις έγινε προσπάθεια να δημιουργηθεί ένα κλίμα, που θα προωθούσε τη δημιουργικότητα και την αλληλεπίδραση. Καταβλήθηκε σημαντική προσπάθεια ώστε οι μαθητές να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και με τον εκπαιδευτικό, με την πεποίθηση ότι με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές εσωτερίκευαν πιο εύκολα όσα μαθαίναν. Κάθε συνάντηση ξεκινούσε με μια συζήτηση με όλη την τάξη, όπου γίνονταν μια υπενθύμιση των προηγούμενων δραστηριοτήτων και έπειτα εξηγούνταν η φύση της νέας δραστηριότητας. Ακολουθούσαν οι απόψεις των παιδιών για τα προβλήματα που δίνονταν κάθε φορά και έπειτα οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να θέσουν τα δικά τους προβλήματα. Στη συνέχεια, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να συζητήσουν σε ομάδες (2 – 3 ατόμων) ιδέες σχετικά με άλλα προβλήματα που θα μπορούσαν να κατασκευαστούν. Στο τέλος, κάθε μαθητής μοιραζόταν στην ολομέλεια της τάξης το πρόβλημα που κατασκεύασε και, όταν το επίτρεπε ο χρόνος, οι μαθητές έλυναν μερικά από τα προβλήματα που κατασκεύαζαν οι συμμαθητές τους. Σε κάθε συνάντηση ο δάσκαλος λειτουργούσε ως καθοδηγητής, για να διευκολύνει τις προσπάθειες των μαθητών για κατασκευή προβλημάτων.

Αξιοπιστία και εγκυρότητα

Προκειμένου να εξασφαλισθεί η αξιοπιστία επιλέχθηκε δείγμα τέτοιο ώστε οι επιδόσεις των συμμετεχόντων να μην παρουσιάζουν μεγάλη παλινδρόμηση. Έτσι, στην έρευνα έλαβαν μέρος μαθητές με καλή, με μέτρια και με χαμηλή επίδοση. Επίσης, η διαδικασία που επιλέχθηκε να εφαρμοστεί δοκιμάστηκε αρχικά σε διαφορετικό δείγμα, για να ελεγχθεί η αποτελεσματικότητά της με τα δεδομένα εργαλεία και τις συνθήκες που θα εφαρμόζονταν και στο δείγμα μας. Ακόμα, η συνοχή των προβλημάτων τόσο στο αρχικό όσο και στο τελικό τεστ ήταν τέτοια, ώστε να μας εξασφαλίσει τα αντίστοιχα αποτελέσματα σε κάθε ερευνητικό ερώτημα. Η κλίμακα αξιολόγησης (βασισμένη σε αντίστοιχη έρευνα της Stoyanova, 1997) ορίστηκε με λεπτομέρεια στις πιθανές απαντήσεις των μαθητών, ώστε να επιτευχθεί η αμερόληπτη αξιολόγηση των δοκιμίων από τον αξιολογητή.

Η εγκυρότητα του περιεχομένου εξασφαλίστηκε με τη σύνδεση του εργαλείου (δοκιμιών των τεστ) και των ερευνητικών ερωτημάτων που εξετάζουν. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα δύο πρώτα δοκίμια των τεστ εξέταζαν την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων από τους μαθητές ως προς την κατανόηση, ορθότητα, αυθεντικότητα και ακρίβεια και συνδέονταν με το δεύτερο ερώτημα, κατά πόσο η ικανότητα επίλυσης μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής και με το τέταρτο ερώτημα (αφορά το τελικό τεστ), αν υπήρξε θετική μεταβολή στην ικανότητα επίλυσης των μαθητών μετά το πρόγραμμα της διδακτικής παρέμβασης. Τα δύο τελευταία δοκίμια εξέταζαν την ικανότητα κατασκευής προβλημάτων (σε δομημένη και ημι-δομημένη μαθηματική κατάσταση) ως προς την ακρίβεια, ορθότητα, αυθεντικότητα και επίπεδο δυσκολίας και συνδέονταν και για τα δύο τεστ με το πρώτο ερώτημα, κατά πόσο ικανοί είναι οι μαθητές να κατασκευάζουν προβλήματα με βάση δομημένες και ημι-δομημένες μαθηματικές καταστάσεις, το δεύτερο ερώτημα, αν η ικανότητα επίλυσης που εξετάσθηκε πιο πριν μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής και το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα (αφορά το τελικό τεστ), αν η ικανότητα κατασκευής επηρεάστηκε θετικά μετά τη διδακτική παρέμβαση.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τρόπος ανάλυσης εμπειρικών δεδομένων

Τα αποτελέσματα των δοκιμίων αφού βαθμολογήθηκαν, αναλύθηκαν και επεξεργάστηκαν με το πρόγραμμα SPSS. Τα δοκίμια του αρχικού τεστ παρουσιάζονται στο Παράρτημα 1 ενώ του τελικού τεστ στο Παράρτημα 2. Τα δοκίμια που αναφέρονται στην επίλυση των προβλημάτων αξιολογήθηκαν ως προς τέσσερα κριτήρια: την κατανόηση, την ορθότητα, την ακρίβεια και την αυθεντικότητα. Για την αξιολόγηση της ικανότητας ΕΜΠ των μαθητών χρησιμοποιήθηκε μια απλή κλίμακα τριών πόντων, όπως αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα της Stoyanova (1997). Τα τρία επίπεδα κάθε κατηγορίας αξιολόγησης αντιστοιχήθηκαν σε ένα σύστημα βαθμολόγησης των 3, 2 και 1 πόντου. Για παράδειγμα, αν η επίλυση ενός προβλήματος ταξινομήθηκε ως αυθεντική, τότε βαθμολογήθηκε με 3 πόντους ενώ αν χαρακτηρίστηκε ως μη αυθεντική, το σκορ ήταν 1.

Για το πρώτο δοκίμιο ΕΜΠ τόσο του αρχικού όσο και του τελικού τεστ, που στηριζόταν στην εύρεση μοτίβου για την επίλυσή του, η βαθμολογία στο κριτήριο της κατανόησης ήταν 3, αν ο μαθητής κατανόησε τη δομή του προβλήματος και χρησιμοποίησε την κατάλληλη στρατηγική για να το επιλύσει, 2 αν ο μαθητής κατάλαβε εν μέρει τη δομή ή δεν χρησιμοποίησε την κατάλληλη στρατηγική για να το λύσει και 1, αν ο μαθητής δεν κατανόησε καθόλου τη δομή του προβλήματος. Η βαθμολογία στο κριτήριο της ορθότητας ήταν 3 αν ο μαθητής απάντησε σωστά και στα δύο υποερωτήματα, 2 αν ο μαθητής έδωσε μία από τις δύο απαντήσεις σωστή και 1 αν δεν έδωσε καμία σωστή απάντηση. Για το κριτήριο της ακρίβειας η βαθμολογία ήταν 3 αν ο μαθητής παρουσίασε τη λύση του με ακρίβεια στη χρήση της μαθηματικής γλώσσας, 2 αν προσπάθησε να παρουσιάσει μια από τις δύο απαντήσεις με ακρίβεια ή και τις δυο απαντήσεις εν μέρει με ακρίβεια και 1 αν ο μαθητής δεν χρησιμοποίησε τη μαθηματική γλώσσα με ακρίβεια στις απαντήσεις του. Το κριτήριο της αυθεντικότητας σχετίστηκε με την πρωτοτυπία της στρατηγικής επίλυσης. Η βαθμολογία ήταν 3,αν η στρατηγική που χρησιμοποίησε ο μαθητής για την επίλυση του δοκιμίου ήταν πρωτότυπη και δεν σχετιζόταν με την προηγούμενη εμπειρία του, όπως αν προσπάθησε να βρει το μοτίβο και να λύσει το πρόβλημα με αριθμητική πράξη ή αριθμογραμμή. Η βαθμολογία ήταν 2 αν ο μαθητής βρήκε το μοτίβο γράφοντας τη συνέχειά του μέχρι το επιθυμητό σημείο και 1 αν ο μαθητής απλά απάντησε ότι υπάρχει μοτίβο, χωρίς να δείξει τη στρατηγική του ή δεν επεξήγησε την απάντησή του, για να μπορέσει να αξιολογηθεί η αυθεντικότητα.

Το δεύτερο δοκίμιο ΕΜΠ και των δύο τεστ απαιτούσε την έρευση ενός ενδιάμεσου αποτελέσματος για το τελικό αποτέλεσμα. Το σκορ στο κριτήριο της κατανόησης ήταν 3, αν ο μαθητής κατανόησε τη δομή του προβλήματος και βρήκε με την κατάλληλη στρατηγική και τα δύο αποτελέσματα, 2 αν ο μαθητής βρήκε μόνο το πρώτο αποτέλεσμα και σταμάτησε και 1 αν δεν απάντησε τίποτα. Στο κριτήριο της ορθότητας το σκορ ήταν 3 αν ο μαθητής βρήκε σωστά αποτελέσματα και στις δύο πράξεις, 2 αν βρήκε σωστό αποτέλεσμα μόνο στη μία από τις δύο και 1 αν δεν βρήκε κανένα σωστό αποτέλεσμα. Η βαθμολογία για την ακρίβεια ήταν 3 αν ο μαθητής έδινε με μαθηματική ακρίβεια τις πράξεις και τις απαντήσεις του, 2 αν έδινε με ακρίβεια μία από τις δύο πράξεις ή και τις δύο εν μέρει με ακρίβεια και 1 για καμία ακριβή πράξη. Η αυθεντικότητα σε αυτό το πρόβλημα αξιολογήθηκε με 3 αν ο μαθητής χρησιμοποίησε αριθμογραμμή ή πρόσθεση με τρεις προσθετέους, για την επίλυση του προβλήματος, 2 αν έλυσε το πρόβλημα με δύο προσθέσεις και 1 αν δεν έκανε καμία προσπάθεια.

Τα αποτελέσματα των δοκιμίων που αναφέρονται στην κατασκευή των προβλημάτων αξιολογήθηκαν ως προς τέσσερα κριτήρια: την ακρίβεια, την ορθότητα, την αυθεντικότητα και το επίπεδο δυσκολίας. Για την αξιολόγηση της ικανότητας ΚΜΠ των μαθητών χρησιμοποιήθηκε πάλι η κλίμακα τριών πόντων, όπως αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα της Stoyanova (1997). Τα τρία επίπεδα κάθε κατηγορίας αξιολόγησης αντιστοιχήθηκαν σε ένα σύστημα βαθμολόγησης των 3, 2 και 1 πόντου με το 3 να αντιστοιχεί στο υψηλότερο αποτέλεσμα και το 1 στο χαμηλότερο.

Για το τρίτο δοκίμιο που αναφέρεται στην κατασκευή προβλημάτων σε δομημένη μαθηματική κατάσταση οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα που θα λυνόταν με τον ίδιο τρόπο που λυνόταν το δεύτερο δοκίμιο επίλυσης. Η βαθμολογία στο κριτήριο της ακρίβειας ήταν 3, αν ο μαθητής έγραψε το πρόβλημά τους με ακρίβεια στη χρήση της μαθηματικής γλώσσας, 2 αν υπήρχε εν μέρει ακρίβεια στο πρόβλημα που δημιούργησε (έλειπαν δεδομένα ή ζητούμενα) και 1 για τα μη ακριβή προβλήματα ή για καμία προσπάθεια. Στο κριτήριο της ορθότητας έπαιξε ρόλο η κατανόηση και η σωστή επίλυση του δοθέντος προβλήματος, ώστε να μπορούν οι μαθητές να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα που θα λύνεται με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή με δύο διαδοχικές προσθέσεις ή μια πρόσθεση με τρεις προσθετέους. Έτσι, το σκορ ήταν 3 αν ο μαθητής κατασκεύασε ένα πρόβλημα έτσι ώστε να επιλύεται με τον παραπάνω τρόπο, 2 αν ο μαθητής κατασκεύασε ένα πρόβλημα που λυνόταν με μια πρόσθεση με δύο προσθετέους ή ένα πρόβλημα που λυνόταν με μια αφαίρεση και μια πρόσθεση (αντέστρεψαν το «περισσότερο» του προβλήματος με το «λιγότερο») και ένα αν το πρόβλημα δεν είχε καμία σχέση με το αρχικό ή δεν έκανε καμία προσπάθεια. Στο κριτήριο της αυθεντικότητας εξετάστηκε η πρωτοτυπία των προβλημάτων που κατασκεύασαν οι μαθητές σε σχέση με το δοθέν πρόβλημα και με τις προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών. Το σκορ ήταν 3 αν ο μαθητής κατασκεύασε ένα πρόβλημα που δεν έμοιαζε με το αρχικό και με άλλα αντίστοιχα που έχει συναντήσει συχνά, 2 αν το πρόβλημα στηριζόταν στο αρχικό αλλά άλλαζαν τα δεδομένα και 1 αν το πρόβλημα στηριζόταν πολύ στο αρχικό με ελάχιστες ή καθόλου αλλαγές. Το επίπεδο της δυσκολίας κρίθηκε με βάση τον αριθμό των πράξεων που χρειάζονται για την επίλυσή του προβλήματος. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα βαθμολογήθηκε με 3 αν χρειάζονταν τρεις ή παραπάνω πράξεις για την επίλυσή του, με 2 αν λυνόταν με δύο πράξεις και 1 σε προβλήματα μιας ή καμίας πράξης. Εδώ να σημειωθεί ότι η βαθμολογία 3 στο συγκεκριμένο κριτήριο και για αυτό το πρόβλημα δεν ήταν εφικτή, καθώς οι μαθητές στηρίχτηκαν σε ένα πρόβλημα που λυνόταν με δύο πράξεις το πολύ, για να κατασκευάσουν το δικό τους.

Τέλος, το τέταρτο δοκίμιο αφορούσε την κατασκευή προβλήματος σε ημι-δομημένη μαθηματική κατάσταση. Πιο συγκεκριμένα, ζητούσε από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα στηριζόμενοι σε μια εικόνα που συνοδευόταν από μια φράση με έναν περιορισμό. Η βαθμολογία για το κριτήριο της ακρίβειας ήταν 3, αν ο μαθητής διατύπωσε ένα πρόβλημα με ακρίβεια στη χρήση της μαθηματικής γλώσσας, 2 αν δεν έγραψε το πρόβλημα με ακρίβεια σε όλα τα στοιχεία (δεδομένα-ζητούμενα) και 1 αν έγραψε ένα μη ακριβές πρόβλημα ή δεν έκανε καμία προσπάθεια. Όσον αφορά το κριτήριο της ορθότητας το σκορ ήταν 3 αν ο μαθητής χρησιμοποίησε όλα τα δεδομένα της εικόνας σωστά, 2 αν δεν χρησιμοποίησε όλα τα δεδομένα σωστά και 1 αν δεν χρησιμοποίησε καθόλου τα δεδομένα της εικόνας. Η αυθεντικότητα βαθμολογήθηκε με 3 αν το πρόβλημα που κατασκευάστηκε από τον μαθητή ήταν πρωτότυπο, είχε δηλαδή πρωτότυπη δομή ή έθετε πρωτότυπες ερωτήσεις (ζητούμενα) που δεν σχετίζονταν με εμπειρίες τους, π.χ. «*Τι μπορεί να πάρει η Αγγελική και να της μείνουν 10€;*», 2 αν η δομή του προβλήματος και οι ερωτήσεις που έθετε ήταν πιο κοντά στις εμπειρίες τους, π.χ. «*Η οικογένεια της Αγγελικής διαθέτει 950€. Μπορούν να αγοράσουν τρία ραδιόφωνα, ένα ψυγείο και ένα σίδερο αν δώσουν και τα 950€; Πόσα ρέστα θα πάρουν;*» και 1 αν το πρόβλημα και οι ερωτήσεις δεν ήταν πρωτότυπες, π.χ. «*Η οικογένεια της Αγγελικής διαθέτει μόνο 950€ και θέλει να αγοράσει ένα ψυγείο που κάνει 600€. Πόσα ρέστα θα πάρουν;*» ή αν δεν έκανε καμία προσπάθεια. Το επίπεδο δυσκολίας και εδώ είχε σχέση με τον αριθμό των πράξεων που απαιτούταν, για να λυθεί. Το σκορ ήταν 3 αν το πρόβλημα λυνόταν με τρεις ή και περισσότερες πράξεις, 2 αν λυνόταν με δύο πράξεις και 1 αν χρειαζόταν μία πράξη για την επίλυσή του ή καμία.

Αποτελέσματα αρχικού τεστ

Αρκετοί μαθητές είχαν απορίες και ζητούσαν βοήθεια για να επιλύσουν το πρώτο δοκίμιο. Το 43% των μαθητών κατανόησαν τη δομή του προβλήματος και εφάρμοσαν την κατάλληλη στρατηγική, για να βρουν το μοτίβο και να επιλύσουν το πρόβλημα. Το 14% κατανόησε μερικώς τη δομή του προβλήματος, εντόπισε ότι η λύση του προβλήματος βρισκόταν στην εύρεση ενός μοτίβου αλλά δεν εφάρμοσε την κατάλληλη στρατηγική για να το βρει. Το υπόλοιπο 43% δεν κατανόησε καθόλου τη δομή του προβλήματος και πρότεινε λύσεις που δεν στηρίζονταν σε κάποια στρατηγική που πρόκυπτε από το πρόβλημα, όπως για παράδειγμα η λύση που πρότεινε ο μαθητής παρακάτω: «α) *Την όγδοη μέρα τακτοποιεί τα παιχνίδια της. Το βρήκα γιατί θα ξανασκορπίσουν όλα. β) Τη δέκατη τρίτη μέρα τακτοποιεί το γραφείο της. Το βρήκα γιατί θα ξανασκορπιστούν*». Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ίσες ομάδες, αυτοί που κατανόησαν το πρόβλημα και αυτοί που δεν το κατανόησαν, ενώ υπήρξε και μια μικρή ομάδα μαθητών που το κατανόησαν μερικώς.

Από το σύνολο των μαθητών το 38% κατάφερε να δώσει ορθές απαντήσεις στα δύο υποερωτήματα του δοκιμίου, το 14% απάντησε ορθά σε ένα από τα δύο ερωτήματα και το υπόλοιπο 48% οι υπόλοιποι έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις. Το πιο συχνό από τα λάθη των μαθητών εντοπίστηκε στην έρευση λάθος μοτίβου. Θεώρησαν ότι οι δουλειές του κοριτσιού επαναλαμβάνονταν ανά εφτά μέρες (ανά εβδομάδα) και όχι ανά 4, όπως μια μαθήτρια που απάντησε: «α)*Την όγδοη μέρα τακτοποιεί τα παιχνίδια της, γιατί αφού περάσει η μια βδομάδα ξαναρχίζει από την αρχή και έτσι θα κάνει ότι έκανε και την πρώτη μέρα. β)Τη δέκατη τρίτη μέρα τακτοποιεί το γραφείο της γιατί, αν κάνω μια πράξη που θα προσθέσω δύο εβδομάδες, θα βγει 14 αλλά εγώ θέλω 13, οπότε θα αφαιρέσω 1 και θα βγει 13*». Οι μαθητές που απάντησαν ορθά σε ένα από τα δύο ερωτήματα φάνηκε ότι έκαναν λάθος στο μέτρημα, όταν έγραφαν το μοτίβο για το ένα από τα δύο ερωτήματα.

Ακρίβεια στη χρήση μαθηματικής γλώσσας παρουσίασε το 10% από το σύνολο των μαθητών, εξήγησαν δηλαδή με αναλυτικό τρόπο την πορεία σκέψης τους για το αποτέλεσμα που βρήκαν, είτε ήταν σωστό είτε λανθασμένο, όπως η μαθήτρια που απάντησε: «α*) Την όγδοη μέρα τακτοποιεί τη βιβλιοθήκη της, γιατί την έβδομη μέρα κάνει τα ρούχα της και μετά από τα ρούχα το μοτίβο λέει τη βιβλιοθήκη. β) Την δέκατη τρίτη μέρα τακτοποιεί τα παιχνίδια της, γιατί σκέφτηκα ότι η πέμπτη μέρα είναι σαν την ένατη, η έκτη σαν τη δέκατη, η έβδομη σαν την ενδέκατη και η όγδοη σαν τη δωδέκατη. Και μετά αφού βρήκα την όγδοη μέρα, που ήταν η βιβλιοθήκη, είπα μετά τη βιβλιοθήκη είναι τα παιχνίδια*». Το 52% των μαθητών προσπάθησε να αποδώσει μερικώς με ακρίβεια τον τρόπο που σκέφτηκε και αυτό περιορίστηκε απλά στη δήλωση: «*Γιατί είναι μοτίβο*» ή «*Το σκέφτηκα μετρώντας*» ή «*Πηγαίνει* *σαν ντόμινο*», χωρίς να αναλύσει περισσότερο την πορεία της σκέψης του. Το υπόλοιπο 38% είτε δεν προσπάθησε καθόλου ή δεν πέτυχε να αποδώσει με ακρίβεια τη λύση που πρότεινε, όπως η παρακάτω μαθήτρια που απάντησε ορθά χωρίς όμως να δικαιολογήσει τις απαντήσεις της: «*α)Καθάρισε τη βιβλιοθήκη. β)Καθάρισε τα παιχνίδια*».

Η αυθεντικότητα στις απαντήσεις των μαθητών σχετιζόταν με προηγούμενες εμπειρίες τους σε παρόμοια προβλήματα και τον τρόπο που επιχειρηματολογούσαν πάνω στις απαντήσεις τους σε σχέση με αυτές. Κυρίως στις μικρές τάξεις οι μαθητές βρίσκουν το μοτίβο μετρώντας και πιο σπάνια με αριθμητικές πράξεις ή με κάποιον άλλο τρόπο. Έτσι την πιο υψηλή βαθμολογία στην αυθεντικότητα πήραν όσοι προσπάθησαν να παρουσιάσουν το μοτίβο με πράξεις, μόλις το 14%, ασχέτως αν η τελική απάντηση ήταν ορθή ή όχι, όπως ο παρακάτω μαθητής: «α*)Την όγδοη μέρα κάνει τα παιχνίδια της, γιατί 7+1=8. Β) Τη δέκατη τρίτη μέρα κάνει το γραφείο της γιατί 7+6=13*» (εδώ ο μαθητής έχει αντιληφθεί λανθασμένα ως μοτίβο τις 7 μέρες). Το 29% των μαθητών έδωσε εν μέρει αυθεντικές απαντήσεις, έφτασε δηλαδή στο αποτέλεσμά του απαριθμώντας τις μέρες και τις αντίστοιχες δουλειές με τη σειρά. Περισσότεροι από τους μισούς (57%) δεν έδωσαν αυθεντικές απαντήσεις, απάντησαν δηλαδή απλά ότι υπάρχει μοτίβο χωρίς να το αποδείξουν ή δεν επιχειρηματολόγησαν καθόλου πάνω στην απάντησή τους για να μπορέσει να αξιολογηθεί η αυθεντικότητα.

Οι μαθητές πέτυχαν καλύτερα αποτελέσματα στο δεύτερο δοκίμιο του αρχικού τεστ για την επίλυση προβλημάτων. Οι περισσότεροι μαθητές (67%) κατανόησαν το πρόβλημα και τη δομή του. Έτσι επέλεξαν την κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση του και απάντησαν ορθά : «*Και οι δύο μαζί έχουν 78 γραμματόσημα, γιατί 33+12=45, 45+33=78*». Το υπόλοιπο 33% κατανόησε εν μέρει το πρόβλημα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν ερμήνευσαν σωστά τη φράση «*ο Θοδωρής έχει 12 παραπάνω γραμματόσημα*» από ότι φάνηκε από τον τρόπο που επέλεξαν να επιλύσουν το πρόβλημα.

Το 67% των μαθητών απάντησαν ορθά στο πρόβλημα, όσοι δηλαδή το κατανόησαν κιόλας. Το 29% έδωσε εν μέρει σωστή απάντηση, γιατί υπολόγισε μόνο τη μια από τις δύο πράξεις σωστά (33+12=45) και σταμάτησε εκεί υποστηρίζοντας ότι αυτός ήταν ο συνολικός αριθμός των γραμματοσήμων των δύο παιδιών. Μόνο μία μαθήτρια (5%) ερμήνευσε αντίστροφα τη λέξη «παραπάνω» και έδωσε την εξής απάντηση: «*Έχουν 54 γραμματόσημα, γιατί 33-12=21, 21+33=54*».

Όλοι οι μαθητές παρουσίασαν με ακρίβεια την απάντησή τους, είτε αυτή ήταν σωστή είτε όχι, γιατί όλοι βασίστηκαν στη χρήση αριθμητικών πράξεων, για να παρουσιάσουν τη λύση τους. Επίσης, γι' αυτόν τον λόγο όλες οι απαντήσεις αξιολογήθηκαν ως εν μέρει αυθεντικές, μιας που η επίλυση ενός προβλήματος με πράξεις είναι κάτι συνηθισμένο και δεν παρουσιάζει πρωτοτυπία. Τα αποτελέσματα του αρχικού τεστ για το σύνολο των μαθητών για το πρώτο και το δεύτερο δοκίμιο φαίνονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1

Ποσοστά (και συχνότητες) των κριτηρίων αξιολόγησης ΕΜΠ για το σύνολο των μαθητών στο αρχικό τεστ για το πρώτο και το δεύτερο δοκίμιο

	Βαθμολογία					
	3		2		1	
	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο
Κατανόηση	43% (9)	67% (14)	14% (3)	33% (7)	43% (9)	
Ορθότητα	38% (8)	67% (14)	14% (3)	29% (6)	48% (10)	5% (1)
Ακρίβεια	10% (2)	100% (21)	52% (11)		38% (8)	
Αυθεντικότητα	14% (3)		29% (6)	100% (21)	57% (12)	

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που πέτυχαν οι μαθητές στην κατανόηση ήταν ανάλογα με αυτά που πέτυχαν στο κριτήριο της ορθότητας. Δηλαδή, όσοι μαθητές κατανόησαν το πρόβλημα ήταν σε θέση να δώσουν μια ορθή απάντηση. Το ίδιο σημειώθηκε και για το κριτήριο της ακρίβειας και της αυθεντικότητας. Όσοι μαθητές έδωσαν με ακρίβεια την απάντησή τους ήταν και σε θέση να την παρουσιάσουν με έναν πιο πρωτότυπο τρόπο. Και στο δεύτερο δοκίμιο φαίνεται ότι τα αποτελέσματα του κριτηρίου της κατανόησης συμβαδίζουν με αυτά της ορθότητας. Το σκορ που πετύχαιναν οι μαθητές στην κατανόηση ήταν αντίστοιχο με το σκορ που πετυχαίναν στην ορθότητα. Για το κριτήριο της ακρίβειας και αυθεντικότητας σε αυτό το δοκίμιο δεν μπορούμε να εξάγουμε κάποιο συμπέρασμα, γιατί η βαθμολογία ήταν ίδια για το σύνολο των μαθητών σε κάθε κριτήριο. Τις ενδείξεις αυτές επιβεβαιώνει ο συντελεστής συσχέτισης Spearman's rho, τα αποτελέσματα του οποίου παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2

Συσχετίσεις μεταξύ των κριτηρίων αξιολόγησης της ΕΜΠ στο αρχικό τεστ.

	Κατανόηση		Ορθότητα		Ακρίβεια		αυθεντικότητα	
	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο
Κατανόηση	1	1	,952**	, 990**	, 360	^{b}.	,043	^{b}.
Ορθότητα	, 952**	, 990**	1	1	,297	^{b}.	-,047	^{b}.
Ακρίβεια	,360	^{b}.	,297	^{b}.	1	^{b}.	,702**	^{b}.
Αυθεντικότητα	,043	^{b}.	,047	^{b}.	,702**	^{b}.	1	^{b}.

**Συσχέτιση σημαντική στο επίπεδο 0.01 (2-tailed).

^{b}Δεν υπολογίζεται, γιατί τουλάχιστον μία από τις μεταβλητές είναι σταθερή.

Για να μπορέσουμε να έχουμε μια καλύτερη εικόνα των αποτελεσμάτων και να αξιολογήσουμε την πορεία των μαθητών, έτσι ώστε να διαπιστώσουμε την τυχόν εξέλιξή τους μετά τη συμμετοχή τους στο πρόγραμμα παρέμβασης, οι μαθητές χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες με βάση τον μέσο όρο (mean) των βαθμολογιών που πέτυχαν σε όλα τα κριτήρια για τα δύο δοκίμια επίλυσης προβλημάτων του αρχικού τεστ. Μετά από επεξεργασία των δεδομένων, διαπιστώθηκε ότι ο χαμηλότερος μέσος όρος βαθμολογίας ήταν 1,50 (x_{min}=1,50) ενώ ο υψηλότερος ήταν 2,63 (x_{max}=2,63). Το εύρος μεταξύ των δύο αυτών βαθμολογιών είναι 1,13 (r=1,13) άρα το εύρος κάθε κατηγορίας και εφόσον θέλουμε να χωρίσουμε τους μαθητές σε τρεις, κυμαίνεται περίπου στο 0,38 (w=1,13:3≈0,38). Θα γίνει μια στρογγυλοποίηση προς τα πάνω και κατάλληλη αύξηση, έτσι ώστε η τελευταία κατηγορία να περιλαμβάνει όλες τις βαθμολογίες μέχρι το 3, που πιθανόν να έχουν πετύχει οι μαθητές στο τελικό τεστ. Έτσι το εύρος κάθε κατηγορίας είναι 0,5 και στον Πίνακα 3 φαίνονται οι κατηγορίες των μαθητών, οι συχνότητές τους και το ποσοστό κάθε κατηγορίας στο σύνολο του δείγματος. Οι μαθητές που ανήκουν στην πρώτη τάξη θα χαρακτηρίζονται ως μαθητές με χαμηλή επίδοση, οι μαθητές που ανήκουν στη δεύτερη τάξη με μέτρια επίδοση και οι μαθητές της τρίτης τάξης με υψηλή επίδοση.

Πίνακας 3

Κατανομή μαθητών σε κατηγορίες ανάλογα με τον Μ.Ο. βαθμολογίας στα δοκίμια ΕΜΠ του αρχικού τεστ

<table>
<tr><th>Κατηγορίες</th><th>Μ.Ο. βαθμολογίας ΕΜΠ</th><th>Συχνότητες</th><th>Ποσοστό</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Χαμηλή επίδοση
[1,50-2)</td><td>1,50</td><td>1</td><td rowspan="3">24%</td></tr>
<tr><td>1,63</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1,88</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Μέτρια επίδοση
[2-2,50)</td><td>2,00</td><td>2</td><td rowspan="4">43%</td></tr>
<tr><td>2,13</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2,25</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2,38</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Υψηλή επίδοση
[2,50-3)</td><td>2,50</td><td>4</td><td rowspan="2">33%</td></tr>
<tr><td>2,63</td><td>3</td></tr>
</table>

Από τον παραπάνω πίνακα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι περίπου το ένα τρίτο των μαθητών είναι ικανοί στην επίλυση προβλημάτων, το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (43%) όμως τα πετυχαίνουν μέτρια ενώ 24% των μαθητών έχουν χαμηλή επίδοση στην επίλυση προβλημάτων. Παρακάτω θα αναλύσουμε τα δοκίμια για την κατασκευή προβλημάτων και θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε κάποια αποτελέσματα σχετικά με τη σχέση που μπορεί να υπάρχει στους μαθητές κάθε κατηγορίας με την επίδοσή τους στην κατασκευή.

Προχωρώντας στην κατασκευή προβλημάτων, το τρίτο δοκίμιο του αρχικού τεστ αφορούσε την ΚΜΠ σε δομημένη μαθηματική κατάσταση και σχετιζόταν με το δεύτερο δοκίμιο για την επίλυση προβλημάτων. Οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα που να λύνεται με τον ίδιο τρόπο που λυνόταν το δεύτερο δοκίμιο. Το 76% των μαθητών κατασκεύασε ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μαθηματική γλώσσα με ακρίβεια. Σχεδόν όλοι βασίστηκαν στην εκφώνηση του δοσμένου προβλήματος και αλλάζοντας τα δεδομένα κατάφεραν να γράψουν ολοκληρωμένα το πρόβλημά τους. Το 14% έγραψε ένα πρόβλημα με εν μέρει ακρίβεια κι αυτό σημαίνει ότι δεν παρουσίασε σωστά όλες τις πληροφορίες ή το άφησε ημιτελές, όπως ο μαθητής: «*Η Ζωή και ο Αλέξανδρος είχαν 32 χαρτάκια και ο και ο Αλέξανδρος έχει 15 χαρτάκια περισσότερα από τη Ζωή*». Δύο μαθητές (10%) δεν κατάφεραν να κατασκευάσουν πρόβλημα, γι' αυτό αξιολογήθηκαν με το χαμηλότερο σκορ της κλίμακας, δηλαδή 1.

Το 62% των μαθητών έφτιαξε ένα εξολοκλήρου σωστό πρόβλημα που λυνόταν με δύο προσθέσεις, όπως και το αρχικό. Το 24% έφτιαξε ένα μερικώς ορθό πρόβλημα. Τα βασικότερα λάθη των παιδιών σε αυτή την περίπτωση εντοπίζονται είτε στην παράβλεψη της λέξης «παραπάνω» του αρχικού προβλήματος ή στην αντιστροφή της με τη λέξη «λιγότερα». Ένα παράδειγμα για την πρώτη περίπτωση λάθους είναι της μαθήτριας παρακάτω που έγραψε: «*Η Καλλία έχει 33 αυτοκόλλητα και η Γεωργία έχει 12 αυτοκόλλητα. Πόσα αυτοκόλλητα έχει και η Καλλία και η Γεωργία;*» ενώ για τη δεύτερη περίπτωση λάθους είναι του μαθητή που έγραψε: «*Ο Σταύρος έχει 60€. Ο αδερφός του έχει 20€ λιγότερα. Πόσα έχουν και οι δύο μαζί;*». Άλλο λάθος μιας μαθήτριας εντοπίστηκε στα λανθασμένα δεδομένα που έδωσε στο πρόβλημά της: «*Η Μαρία έχει 45 γραμματόσημα ενώ η Σοφία έχει 13 γραμματόσημα περισσότερα από τη Ζωή. Πόσα γραμματόσημα έχουν και τα δύο παιδιά μαζί;*». Εδώ αναφέρει τρία ονόματα στο πρόβλημά της χωρίς να δίνει για όλα τις απαραίτητες πληροφορίες, μάλλον λάθος που οφείλεται στην προσκόλλησή της στο αρχικό πρόβλημα. Το 14% δεν κατάφερε να φτιάξει ολοκληρωμένο πρόβλημα γι' αυτό αξιολογήθηκε με τη μικρότερη βαθμολογία.

Κανένας μαθητής δεν κατάφερε να κατασκευάσει ένα πρωτότυπο πρόβλημα, γιατί όλοι οι μαθητές βασίστηκαν αρκετά στο δοθέν. Το 57% των μαθητών έφτιαξε ένα μερικώς αυθεντικό πρόβλημα, που αυτό σημαίνει ότι κράτησαν ίδια τη δομή του προβλήματος αλλά τροποποίησαν τα δεδομένα ή/και τα ζητούμενα, π.χ. «*Ο Λουκάς έχει στη συλλογή του 25 αυτοκινητάκια, ενώ ο Γιώργος έχει 20 αυτοκινητάκια περισσότερα από τον Λουκά. Πόσα αυτοκινητάκια έχουν και τα δύο παιδιά μαζί;*», ενώ το υπόλοιπο 43% δεν κατάφερε να κατασκευάσει ένα πρωτότυπο πρόβλημα, γιατί το πρόβλημα που παρέδωσε ήταν σχεδόν πιστή αντιγραφή του αρχικού, π.χ. «*Η Ζωή έχει 33 αυτοκόλλητα ενώ ο Θοδωρής έχει 12 αυτοκόλλητα. Πόσα αυτοκόλλητα έχουν και τα δύο παιδιά μαζί;*».

Το επίπεδο δυσκολίας των προβλημάτων που κατασκευάστηκαν αφορούσε τον αριθμό πράξεων που απαιτούνταν για την επίλυσή του, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Εφόσον η κατασκευή αφορούσε δομημένη μαθηματική κατάσταση το επίπεδο δυσκολίας του κατασκευασμένου προβλήματος καθοριζόταν από το αρχικό πρόβλημα. Έτσι η μέγιστη βαθμολογία ήταν 2 για το συγκεκριμένο δοκίμιο στο οποίο έπρεπε οι μαθητές να γράψουν ένα πρόβλημα που να λύνεται με δύο προσθέσεις. Μαθητές σε ποσοστό 76% κατάφεραν να φτιάξουν ένα τέτοιο πρόβλημα ενώ το 24% των μαθητών έφτιαξε ένα πρόβλημα που λυνόταν με μια πράξη.

Το τέταρτο και τελευταίο δοκίμιο του αρχικού τεστ που αφορούσε ημι-δομημένη μαθηματική κατάσταση ήταν κάτι που οι μαθητές συναντούσαν πρώτη φορά. Μόλις το 19% των μαθητών κατάφερε να διατυπώσει ένα πρόβλημα με ακρίβεια. Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (52%) έφτιαξε ένα πρόβλημα μερικώς με ακρίβεια, δεν έδινε δηλαδή όλα τα απαραίτητα δεδομένα στο πρόβλημά του, για να μπορέσει κάποιος να το λύσει και χωρίς το πλαίσιο της δοσμένης εκφώνησης μπροστά του, όπως για παράδειγμα η μαθήτρια που έγραψε: «*Η Αγγελική θέλει να πάρει αυτό το ψυγείο. α)Μπορεί να το αγοράσει; β)Πόσα χρήματα θα της περισσέψουν; γ)Θα μπορέσει να αγοράσει και κάτι άλλο;*». Μαθητές σε ποσοστό 29% αξιολογήθηκαν με μη ακρίβεια στις απαντήσεις τους, διότι πιθανώς δεν κατανόησαν ή δεν κατάφεραν να διατυπώσουν πρόβλημα και περιορίστηκαν σε απλές δηλώσεις, όπως: «*Η οικογένεια του Χρήστου διαθέτει μόνο 650€*» και άλλοι διατύπωσαν ένα πολύ αφηρημένο πρόβλημα, π.χ. «*Η οικογένεια του Τάσου έχει 2.700€ και θέλουν να αγοράσουν πράγματα για το σπίτι τους. Μπορούν να τα αγοράσουν. Θα τους περισσέψουν χρήματα;*».

Οι μισοί από τους μαθητές (52%) διατύπωσαν ένα σωστό πρόβλημα χρησιμοποιώντας σωστά όλες τις πληροφορίες που δίνονταν στην εικόνα. Το 19% των μαθητών έφτιαξε ένα πρόβλημα στο οποίο δεν δίνονταν σωστά όλες οι πληροφορίες, αλλά κάποιες από αυτές π.χ. «*Οι γονείς της Αγγελικής θέλουν να πάρουν ένα ψυγείο, ένα ραδιόφωνο κι ένα πλυντήριο. Έχουν 3.000€, θα πάρουν ρέστα;*». Οι έξι από τους είκοσι έναν μαθητές (29%) δεν κατάφεραν να κατασκευάσουν καθόλου πρόβλημα και βαθμολογήθηκαν με σκορ 1. Τέσσερις εξ αυτών μαθητές/ριες περιορίστηκαν σε απλές δηλώσεις και έδωσαν ως απάντηση στο δοκίμιο μια φράση, όπως η παρακάτω: «*Η οικογένεια του Χρήστου διαθέτει μόνο 650€*». Οι υπόλοιποι δύο διατύπωσαν το πρόβλημα με λανθασμένα δεδομένα, π.χ.: «*Η οικογένεια του Πέτρου διαθέτει 1.300€. Τα πράγματα που διαθέτουν είναι το πλυντήριο, το ψυγείο και ο φούρνος. Πόσα πράγματα δεν διαθέτουν;*».

Μόνο πέντε μαθητές (24%) διατύπωσαν πρωτότυπα προβλήματα με ζητούμενα που δεν συναντούν συχνά στα προβλήματα που λύνουν στην καθημερινότητά τους σε αυτή την ηλικία. Ένα από αυτά τα προβλήματα ήταν το παρακάτω: «*Πήραν το πλυντήριο (300€) και το ψυγείο (600€) σε τρεις δόσεις. Στην πρώτη δόση έδωσαν 250€, στη δεύτερη 540€ άρα πόσα ευρώ είναι η τρίτη;*». Ωστόσο τα περισσότερα προβλήματα που έφτιαξαν οι μαθητές σχετίζονταν με εμπειρίες κοινότυπων προβλημάτων που είχαν συναντήσει μέχρι τότε πιο συχνά. Έτσι, το 19% των μαθητών χρησιμοποίησε στα ζητούμενα τουλάχιστον δύο από τις παρακάτω ερωτήσεις: «*Μπορούν να αγοράσουν… με αυτά τα χρήματα;*», «*Πόσα ευρώ ξόδεψαν;*», «*Πόσα ρέστα θα πάρουν/ Θα τους περισσέψουν χρήματα;*» ενώ το 57% περιορίστηκε μόνο στην αναμενόμενη ερώτηση: *Πόσα ρέστα θα πάρουν/ Θα τους περισσέψουν χρήματα;*» και τα προβλήματα αυτά αξιολογήθηκαν ως μη αυθεντικά. Σε αυτό το σημείο αξίζει να επισημάνουμε ότι σε αυτό το σύνολο είναι και τα τέσσερα παιδιά που περιορίστηκαν σε απλές δηλώσεις και αυτό που έγραψαν δεν μπορεί να θεωρηθεί πρόβλημα, όμως αξιολογήθηκαν και αυτά με σκορ 1, γιατί ήταν το χαμηλότερο αυτής της κλίμακας.

Τέλος, όσον αφορά το επίπεδο δυσκολίας τα προβλήματα που διατύπωσε το μόλις το 19% ήταν προβλήματα που για την επίλυσή τους απαιτούνταν τουλάχιστον τρεις πράξεις. Το 33% των μαθητών έγραψε προβλήματα που για την επίλυση τους απαιτούνταν δύο πράξεις και σχεδόν οι μισοί μαθητές (48%) κατασκεύασαν απλά προβλήματα που για τη λύση τους απαιτούταν μόνο μια πράξη (ή καμία στην περίπτωση των τεσσάρων μαθητών που δεν διατύπωσαν πρόβλημα). Τα αποτελέσματα για την ΚΜΠ στο αρχικό τεστ για το σύνολο των μαθητών στο τρίτο και τέταρτο δοκίμιο παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4

Ποσοστά (και συχνότητες) των κριτηρίων αξιολόγησης ΚΜΠ για το σύνολο των μαθητών στο αρχικό τεστ για το τρίτο και το τέταρτο δοκίμιο.

	Βαθμολογία					
	3		2		1	
	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο
Ακρίβεια	76% (16)	19% (4)	14% (3)	52% (11)	10% (2)	29% (6)
Ορθότητα	62% (13)	52% (11)	24% (5)	19% (4)	14% (3)	29% (6)
Αυθεντικότητα		24% (5)	57% (12)	19% (4)	43% (9)	57% (12)
Επίπεδο Δυσκολίας		19% (4)	76% (16)	33% (7)	24% (5)	48% (10)

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι στο τρίτο δοκίμιο το κριτήριο της ορθότητας σχετιζόταν αρκετά με το κριτήριο της ακρίβειας και του επιπέδου δυσκολίας. Δηλαδή, όσοι μαθητές ήταν σε θέση να κατασκευάσουν ένα σωστό πρόβλημα τότε ήταν πολύ πιθανό το πρόβλημα αυτό να είναι ακριβές και δύσκολο. Μικρότερη αλλά όχι ασήμαντη σχέση φάνηκε να έχει το κριτήριο της ορθότητας με αυτό της αυθεντικότητας. Όσοι από τους μαθητές διατύπωσαν ένα σωστό πρόβλημα τότε παρουσίαζαν και κάποια πρωτοτυπία σε αυτό ή και το αντίστροφο, όσοι δηλαδή δεν κατασκεύαζαν σωστά προβλήματα παρουσίαζαν κατά πλειοψηφία και μικρή πρωτοτυπία σε αυτά. Παρόμοια αποτελέσματα έχουμε και για το τέταρτο δοκίμιο όπου το κριτήριο της ορθότητας φαίνεται να σχετίζεται περισσότερο με την ακρίβεια στα προβλήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές και λιγότερο με την αυθεντικότητα και το επίπεδο δυσκολίας. Σε αυτό το δοκίμιο φάνηκε, επίσης, ότι το σκορ που πετύχαιναν οι μαθητές στην αυθεντικότητα ήταν αντίστοιχο με το σκορ που πετυχαίναν στο επίπεδο δυσκολίας, δηλαδή τα πρωτότυπα προβλήματα ήταν δύσκολα ενώ τα μη πρωτότυπα ήταν πιο απλά. Τις ενδείξεις αυτές επιβεβαιώνει ο συντελεστής συσχέτισης Spearman's rho, τα αποτελέσματα του οποίου παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.

Πίνακας 5
Συσχετίσεις μεταξύ των κριτηρίων αξιολόγησης της ΚΜΠ στο αρχικό τεστ.

	Ακρίβεια		Ορθότητα		Αυθεντικότητα		Επίπεδο Δυσκολίας	
	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο
Ακρίβεια	1	1	,627**	,835**	,235	,138	,756**	,264
Ορθότητα	,627**	,835**	1	1	,551**	,446*	,790**	,468*
Αυθεντικότητα	,235	,138	,551**	,446*	1	1	,420	,715**
Επίπεδο Δυσκολίας	,756**	,264	,790**	,468*	,420	,715**	1	1

**Συσχέτιση σημαντική στο επίπεδο 0.01(2-tailed).
*Συσχέτιση σημαντική στο επίπεδο 0.05 (2-tailed).

Προκειμένου να ελεγχθεί η επίδοση του κάθε μαθητή στην κατασκευή βγήκε και εδώ ο μέσος όρος (mean) των βαθμολογιών που πέτυχε σε όλα τα κριτήρια για τα δύο δοκίμια κατασκευής προβλημάτων του αρχικού τεστ. Μετά από επεξεργασία των δεδομένων, διαπιστώθηκε ότι ο χαμηλότερος μέσος όρος βαθμολογίας ήταν 1 (x_{min}=1,00) ενώ ο υψηλότερος ήταν 2,63 (x_{max}=2,63). Το εύρος μεταξύ των δύο αυτών βαθμολογιών είναι 1,63 (r=1,63), αλλά για να διατηρήσουμε το εύρος της κάθε κατηγορίας ίδιο με αυτό της ΕΜΠ δημιουργήθηκε μία κατηγορία ακόμα που περιλαμβάνει βαθμολογίες πιο χαμηλές από το 1,5. Οι μαθητές που ανήκουν στην πρώτη τάξη θα χαρακτηρίζονται ως μαθητές με πολύ χαμηλή επίδοση, οι μαθητές που ανήκουν στη δεύτερη τάξη με χαμηλή επίδοση, οι μαθητές της τέταρτης με μέτρια επίδοση και οι μαθητές της τέταρτης τάξης με υψηλή επίδοση. Παρακάτω, στον Πίνακα 6, φαίνονται οι κατηγορίες των μαθητών, οι συχνότητές τους και το ποσοστό κάθε κατηγορίας στο σύνολο του δείγματος. Το 10% του δείγματος σημείωσε πολύ χαμηλή επίδοση και δεν κατάφερε να κατασκευάσει τουλάχιστον ένα από τα δύο προβλήματα, το 33% σημείωσε χαμηλή επίδοση, εξίσου το ίδιο ποσοστό σημείωσε μέτρια επίδοση ενώ υψηλή επίδοση στην ΚΜΠ παρουσίασε το 24% των μαθητών.

Πίνακας 6
Κατανομή μαθητών σε κατηγορίες ανάλογα με τον Μ.Ο. βαθμολογίας στα δοκίμια ΚΜΠ του αρχικού τεστ

Κατηγορίες	Μ.Ο. βαθμολογίας ΚΜΠ	Συχνότητες	Ποσοστό
Πολύ χαμηλή επίδοση [1-1,5)	1,00	1	10%
	1,38	1	
Χαμηλή επίδοση [1,50-2)	1,63	3	33%
	1,75	3	
	1,88	1	
Μέτρια επίδοση [2-2,50)	2,00	3	33%
	2,13	2	
	2,25	1	
	2,38	1	

Υψηλή επίδοση [2,50-3)	2,50 2,63	3 2	24%

Σε αυτό το σημείο θα ελέγξουμε αν οι μαθητές, που είχαν υψηλή, μέτρια και χαμηλή επίδοση στην επίλυση προβλημάτων (όπως παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 2), είχαν αντίστοιχη επίδοση στην κατασκευή. Οι συχνότητες των μαθητών ανάλογα με την επίδοση που πέτυχαν στην επίλυση και στην κατασκευή παρουσιάζονται στον Πίνακα 7. Οι πέντε μαθητές που είχαν χαμηλή επίδοση στην ΕΜΠ πέτυχαν στην πλειοψηφία τους καλύτερα αποτελέσματα στην ΚΜΠ. Δύο από αυτούς κατασκεύασαν προβλήματα κάτω του μετρίου ενώ οι τρεις από αυτούς πέτυχαν από μέτρια έως υψηλή επίδοση. Οι εννιά μαθητές που είχαν μέτρια επίδοση στην ΕΜΠ ισομοιράστηκαν: τρεις είχαν από πολύ χαμηλή ως χαμηλή επίδοση, τρεις είχαν μέτρια και τρεις που είχαν υψηλή επίδοση στην ΚΜΠ. Τέλος, από τους εφτά μαθητές που πέτυχαν υψηλή βαθμολογία στα δοκίμια ΕΜΠ, οι τρεις κατασκεύασαν προβλήματα που βαθμολογήθηκαν χαμηλά, οι δύο μέτρια και ένας πέτυχε υψηλή βαθμολογία στο πρόβλημα που κατασκεύασε. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οποιαδήποτε επίδοση είχε ένας μαθητής στην επίλυση δεν συνεπαγόταν κατ’ ανάγκη και αντίστοιχη επίδοση στην κατασκευή.

Πίνακας 7
Συχνότητες μαθητών με ανάλογα με την επίδοση που πέτυχαν στην ΕΜΠ και στην ΚΜΠ στο αρχικό τεστ.

		Επίδοση στην ΚΜΠ			
		Πολύ χαμηλή	Χαμηλή	Μέτρια	Υψηλή
Επίδοση στην ΕΜΠ	Χαμηλή	1	1	2	1
	Μέτρια	1	2	3	3
	Υψηλή		4	2	1

Αποτελέσματα παρέμβασης

Οι τέσσερις πρώτες συναντήσεις ήταν βασισμένες σε δομημένες μαθηματικές καταστάσεις για την κατασκευή προβλημάτων. Στην πρώτη συνάντηση οι μαθητές κλήθηκαν να πουν με δικά τους λόγια την εκφώνηση τριών προβλημάτων χωρίς όμως να αλλάξουν τη φύση τους. Στη δεύτερη συνάντηση οι μαθητές αντιμετώπισαν την τροποποίηση των δεδομένων τριών προβλημάτων που τους παρουσιάστηκαν. Στην τρίτη συνάντηση οι μαθητές ασχολήθηκαν με τη διατύπωση ερωτήσεων σε δύο προβλήματα που δίνονταν μόνο τα δεδομένα. Στην τέταρτη συνάντηση οι μαθητές κλήθηκαν να εντοπίσουν τις περιττές πληροφορίες για δύο προβλήματα και τις ελλιπείς για άλλα δύο. Σε όλες τις συναντήσεις γινόταν αρχικά μια μικρή επανάληψη στο ότι είχαμε δουλέψει μέχρι εκείνη τη στιγμή και ακολουθούσε στο τέλος και η επίλυση των προβλημάτων που παρουσιάζονταν από τους μαθητές.

- *1^{η} Συνάντηση - Αναδιατύπωση εκφώνησης δοσμένου προβλήματος*

Η πρώτη συνάντηση είχε σχέση με την αναδιατύπωση της εκφώνησης ενός δοσμένου προβλήματος. Στην αρχή έγινε μια εισαγωγή – συζήτηση, στην οποία αναφέρθηκε πόσο σημαντική είναι η εκφώνηση ενός προβλήματος για την κατανόησή του, που θα οδηγήσει στη σωστή επίλυση του. Οι μαθητές με μέτρια επίδοση αλλά και πιο χαμηλή εξέφρασαν την άποψη ότι ορισμένες φορές οι εκφωνήσεις είναι πολύ μεγάλες, κάτι που τους αγχώνει ή είναι δυσνόητες, περιέχουν δηλαδή δύσκολες προτάσεις ή όρους και αυτό τους δυσκολεύει να κατανοήσουν το πρόβλημα.

Στη συνέχεια τους παρουσιάστηκε το πρώτο πρόβλημα, πάνω στο οποίο θα εργάζονταν: «*Ο Κώστας έχει 9 βόλους. Έχει 3 περισσότερους απ' τον Πέτρο. Πόσους βόλους έχει ο Πέτρος*;». Αρχικά, αρκετοί σήκωσαν το χέρι, για να δώσουν τη λύση του προβλήματος. Ωστόσο, τους έγινε σαφές ότι σε αυτό το στάδιο δεν ήταν η λύση που ψάχναμε. Δόθηκε έμφαση στην προσπάθεια να πουν με άλλα λόγια την εκφώνηση του προβλήματος, σαν να το εξηγούν σε κάποιον που δεν έχει καταλάβει το νόημα, χωρίς να αλλάξουν τα δεδομένα, τις σχέσεις μεταξύ τους και τα ζητούμενα. Διστακτικά σήκωσαν το χέρι κάποιοι καλοί μαθητές. Οι ιδέες που ακούστηκαν ήταν οι εξής: «*Ο Κώστας έχει 9 βόλους. Έχει 3 πιο πολλούς από τον Πέτρο. Πόσους βόλους έχει ο Πέτρος*;», «*Ο Κώστας έχει 9 βόλους. Ο Πέτρος έχει 3 λιγότερους από τον Κώστα. Πόσους βόλους έχει ο Πέτρος*;». Όταν ακούστηκε η τελευταία αλλαγή, αρκετοί μαθητές με μέτρια επίδοση που φάνηκε ότι δεν το είχαν κατανοήσει στην αρχή, ώστε να συμμετέχουν στην αλλαγή της εκφώνησης, σπεύσανε να σηκώσουν χέρι για να πουν την ιδέα τους. Ακούστηκε από πολλούς μαθητές η ίδια αλλαγή, αλλά ο καθένας είχε τον χρόνο του να μιλήσει. Δύο εξίσου ενδιαφέρουσες αναδιατυπώσεις, που πρότειναν δύο καλοί μαθητές, ήταν οι εξής: «*Ο Κώστας έχει 9 βόλους. Οι βόλοι του ξεπερνάν τους βόλους του Πέτρου για 3. Πόσους βόλους έχει ο Πέτρος;*» και «*Ο Κώστας έχει 9 βόλους. Οι βόλοι του είναι περισσότεροι απ' του Πέτρου και διαφέρουν κατά 3. Πόσους βόλους έχει ο Πέτρος;*».

Έπειτα, προβλήθηκε στους μαθητές το επόμενο πρόβλημα που κινήθηκε στην ίδια λογική: «*Η Στέλλα έχει 15€. Έχει 5€ λιγότερα από τον αδερφό της. Πόσα ευρώ έχει ο αδερφός της*;». Περισσότεροι μαθητές με μέτρια επίδοση συμμετείχαν αυτή τη φορά. Η προηγούμενη εμπειρία που είχαν φάνηκε ότι τους είχε βοηθήσει. Οι ιδέες που ακούστηκαν ήταν οι εξής : «*Η Στέλλα έχει 15€. Ο αδερφός της έχει 5€ πιο πολλά από τη Στέλλα. Πόσα ευρώ έχει ο αδερφός της*;», «*Η Στέλλα έχει 15€. Ο αδερφός της έχει 5€ περισσότερα. Πόσα ευρώ έχει ο αδερφός της*;». Αφού ακούστηκαν οι παραπάνω ιδέες, μαθητές με χαμηλή επίδοση σήκωσαν το χέρι, για να συμμετέχουν. Η μία μαθήτρια από αυτή την κατηγορία πρότεινε την αλλαγή: «*Η Στέλλα έχει 15€.Τα χρήματα του αδερφού διαφέρουν κατά 5€. Πόσα ευρώ έχει ο αδερφός της*;», στην οποία φάνηκε μια αδυναμία στην αλλαγή της εκφώνησης, καθώς για να είναι ακριβώς ίδιο το νόημά της με το δοσμένο, έπρεπε να είχε αναφέρει και το ποιος από τους δύο έχει τα περισσότερα χρήματα.

Το τρίτο πρόβλημα αυτής της συνάντησης ήταν το εξής: «*Ένας έμπορος πούλησε την Παρασκευή 20 μέτρα ύφασμα. Αυτά ήταν κατά 10 περισσότερα από αυτά που πούλησε το Σάββατο. Πόσα μέτρα πούλησε το Σάββατο;*». Κι εδώ ακούστηκαν ενδιαφέρουσες ιδέες σχετικά με την αναδιατύπωση της εκφώνησης πιο πολύ από μαθητές με καλή και μέτρια επίδοση. Εκτός από τις αναμενόμενες, που κινούνταν στην ίδια λογική με τις προηγούμενες: «*Το Σάββατο πούλησε 10 μέτρα λιγότερο*», «*Την Παρασκευή πούλησε 10 μέτρα πιο πολλά απ' το Σάββατο*» ή «*Την Παρασκευή πούλησε 10 μέτρα περισσότερα απ' το Σάββατο*», ακούστηκε και μια πιο πρωτότυπη αλλαγή από έναν καλό μαθητή: «*Το Σάββατο πούλησε τα μισά μέτρα από την Παρασκευή*». Σε αυτό το πρόβλημα παρατηρούμε ότι βοηθούσαν οι αριθμοί, ώστε να τεθεί και με άλλον έναν τρόπο η εκφώνηση του προβλήματος.

- *2η Συνάντηση- Τροποποίηση δεδομένων δοσμένου προβλήματος*

Η δεύτερη «πρόκληση» που περίμενε τους μαθητές σε αυτή τη συνάντηση ήταν να τροποποιήσουν τα δεδομένα ενός δοσμένου προβλήματος. Ως αφόρμηση τέθηκε η ερώτηση: «*Αλλάζουμε ποτέ τα δεδομένα, δηλαδή τα γνωστά στοιχεία, ενός προβλήματος στο μυαλό μας;*». Λίγοι μαθητές σήκωσαν το χέρι, αυτοί που ήταν κατά βάση καλοί λύτες, και οι απαντήσεις που ακούστηκαν ήταν: «*Όταν μας μπερδεύουν*» ή «*Όταν βρίσκουμε προβλήματα με μεγάλους αριθμούς*». Αυτό φάνηκε να ξαφνιάζει τους υπόλοιπους μαθητές, γιατί ήταν μάλλον μια στρατηγική που δεν είχαν σκεφτεί και χρησιμοποιήσει στο παρελθόν.

Το πρώτο πρόβλημα με το οποίο δουλέψαμε ήταν το εξής: «*Ο κύριος Βασίλης είχε στο χωράφι του 145 ελαιόδεντρα. Μετά από χαλαζόπτωση καταστράφηκαν 65 ελαιόδεντρα. Πόσα ελαιόδεντρα έμειναν στο χωράφι του;*». Αρχικά, οι μαθητές εντόπισαν τα δεδομένα του προβλήματος, δηλαδή τις γνωστές πληροφορίες που μας δίνονταν, για να μπορέσουν στη συνέχεια να τις αλλάξουν. Πρόθυμα σήκωσαν χέρι σχεδόν όλοι οι μαθητές, για να δώσουν την απάντηση. Αφού συμφώνησαν όλοι ότι τα δεδομένα ήταν τα 145 ελαιόδεντρα που υπήρχαν αρχικά και τα 65 ελαιόδεντρα που καταστράφηκαν, ακούστηκαν οι ιδέες: «*45 αρχικά – 13 καταστράφηκαν*», «*25 αρχικά – 17 καταστράφηκαν*», «*40 αρχικά – 25 καταστράφηκαν*», «*10 αρχικά – 3 καταστράφηκαν*», «*5 αρχικά – 2 καταστράφηκαν*» και αρκετές ακόμα που κινήθηκαν στην ίδια λογική. Κάποιοι ανέφεραν ότι αν κάποιος δεν καταλάβαινε το πρόβλημα και έπρεπε να τροποποιήσει τα δεδομένα τότε θα εξυπηρετούσαν τα παραδείγματα που ανέφεραν οι συμμαθητές τους με μικρούς αριθμούς. Όλοι πρότειναν τα δικά τους παραδείγματα, που ήταν σωστά, αυθόρμητα χωρίς να συνειδητοποιήσουν τι έπρεπε να προσέξουν στην αλλαγή των αριθμών. Όταν ρωτήθηκαν: «*Προσέξατε κάτι εσείς, όταν προτείνατε τις αλλαγές;*», λίγα χέρια σηκώθηκαν, κυρίως από καλούς μαθητές. Ένας μαθητής απάντησε ότι ο αριθμός που έβαζαν στην αρχή έπρεπε να είναι μεγαλύτερος από τον δεύτερο αριθμό, που δήλωνε τα δέντρα που καταστράφηκαν, για να μπορέσει να λυθεί το πρόβλημα.

Στη συνέχεια, παρουσιάστηκε στους μαθητές το δεύτερο πρόβλημα: «*Ο Όλυμπος, το ψηλότερο βουνό της Ελλάδας, έχει ύψος 2.918 μέτρα ενώ το Έβερεστ,* *το ψηλότερο βουνό του κόσμου, έχει ύψος 8.848 μέτρα. Πόσο ψηλότερο είναι το Έβερεστ από τον Όλυμπο;*». Σε αυτό το σημείο ζητήθηκε από τους μαθητές να εντοπίσουν τα δεδομένα του προβλήματος. Αρκετοί μαθητές συμμετείχαν και ήθελαν να απαντήσουν. Μια μέτρια μαθήτρια απάντησε ότι τα δεδομένα ήταν το ύψος του Όλυμπου (2.918 μέτρα) και το ύψος του Έβερεστ (8.848 μέτρα). Κατάλαβαν ότι αυτό που έπρεπε να κάνουν κι αυτή τη φορά ήταν να αλλάξουν τα δεδομένα. Κάποιες από τις ιδέες που ακούστηκαν ήταν: «100μ. – 50μ.», «75μ. – 25μ.», «32μ. – 15μ.», «78μ. – 43μ.», «15μ. – 5μ.». Μερικοί καλοί μαθητές θεώρησαν πως δεν μπορούμε να κάνουμε αλλαγή δεδομένων σε αυτό το πρόβλημα, γιατί τα ύψη των δύο βουνών είναι καθορισμένα και θα ήταν παράλογο να τα αλλάξουμε.

Το τελευταίο πρόβλημα με το οποίο δουλέψαμε ήταν το εξής: «*Μια βιομηχανία παιχνιδιών παράγει κάθε μήνα 500 ξύλινα στρατιωτάκια, 168 πλαστικά στρατιωτάκια περισσότερα από τα ξύλινα και 200 μεταλλικά στρατιωτάκια λιγότερα από τα πλαστικά. Πόσα στρατιωτάκια παράγει συνολικά κάθε μήνα;*». Αυτό το πρόβλημα ήταν λίγο πιο περίπλοκο. Αφού οι μαθητές εντόπισαν τα δεδομένα του προβλήματος κλήθηκαν να προτείνουν τις αλλαγές τους. Φάνηκε ότι αρκετοί, κυρίως οι καλοί αλλά και πιο μέτριοι μαθητές, πρώτα προσπάθησαν να το λύσουν, για να μπορέσουν να προτείνουν αλλαγή. Οι ιδέες που ακούστηκαν ήταν πιο λίγες και προέρχονταν από τους πιο καλούς λύτες. Οι συνδυασμοί αριθμών που προτάθηκαν ήταν οι εξής: «*50 – 20 – 30*», «*25 – 22 – 18*», «*28 – 20 – 13*», «*50 – 12 – 10*», «*35 – 15 – 10*». Οι μαθητές προτίμησαν να χρησιμοποιήσουν μικρότερους αριθμούς και όλες οι αλλαγές που πρότειναν ήταν επιλύσιμες.

- *3η Συνάντηση- Διατύπωση ερωτήσεων σε ένα πρόβλημα που δίνονται μόνο τα δεδομένα*

Το πρώτο πρόβλημα με το οποίο δούλεψαν οι μαθητές ήταν το ακόλουθο: «*Η Λίζα και ο Βλάσης πήγαν στο λούνα παρκ. Η Λίζα ανέβηκε 2 φορές στα συγκρουόμενα, 1 φορά στη ρόδα και 3 φορές στο τρενάκι. Ο Βλάσης ανέβηκε 4 φορές στα συγκρουόμενα, 2 φορές στη ρόδα και 1 φορά στο τρενάκι. Το εισιτήριο για τα συγκρουόμενα ήταν 2€, για τη ρόδα 4€ και για το τρενάκι 3€*». Μετά από λίγα λεπτά σκέψης αρκετοί μαθητές σήκωσαν χέρι. Οι ερωτήσεις που πρότειναν οι μαθητές με μέτρια και χαμηλή επίδοση ήταν οι παρακάτω: «*Πόσα χρήματα πλήρωσε η Λίζα για όλα τα παιχνίδια;*»,» *Πόσα χρήματα πλήρωσε ο Βλάσης για όλα τα παιχνίδια;*», «*Πόσα ευρώ πλήρωσε το κάθε παιδί στα συγκρουόμενα;*», «*Πόσα χρήματα πλήρωσαν και τα δύο παιδιά μαζί;*». Οι πιο καλοί μαθητές πρότειναν τα παρακάτω: «*Πόσες φορές περισσότερες ανέβηκε ο Βλάσης στα συγκρουόμενα από τη Λίζα;*», «*Πόσες φορές περισσότερες ανέβηκε η Λίζα στο τρενάκι από τον Βλάση*;», «*Αν είχαν μαζί τους 50€, πόσα χρήματα τους περίσσεψαν*;». Προτάθηκαν και άλλες σκέψεις που ήταν σχεδόν ίδιες με τις παραπάνω, με άλλη διατύπωση.

Ακολούθησε η παρουσίαση του επόμενου προβλήματος, απ' το οποίο έλειπαν τα ζητούμενα: «*Η Όλγα με τους γονείς της επισκέφτηκαν τον ζωολογικό κήπο. Για να γυρίσουν όλο τον ζωολογικό κήπο χωρίς στάση χρειάζονται 3 ώρες. Η οικογένεια σταμάτησε για 10 λεπτά να ταΐσουν τις πάπιες, άλλα 10 λεπτά να* *φωτογραφηθούν με τις καμηλοπαρδάλεις και 20 λεπτά για να φάνε. Τα εισιτήρια τους γράφουν ότι εκδόθηκαν στις 10:00 π.μ. Η Όλγα θέλει να κανονίσει ραντεβού με τη φίλη της, την Αφροδίτη, έξω από τον ζωολογικό κήπο, για να παίξουν*». Όλοι οι μαθητές χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο για αυτό το πρόβλημα, ώστε να μπορέσουν να διατυπώσουν ερωτήσεις. Στη συνέχεια, μαθητές με μέτρια επίδοση πρότειναν τις παρακάτω ερωτήσεις: «*Πόση ώρα χρειάστηκαν, για να γυρίσουν όλο τον ζωολογικό κήπο;*», «*Πόση ώρα παραπάνω από τον κανονικό έκανε η οικογένεια με τις στάσεις που έκανε*;», «*Τι ώρα βγήκαν από τον ζωολογικό κήπο*;», ενώ οι καλοί μαθητές πρότειναν και τα παρακάτω: «*Τι ώρα πρέπει η Όλγα να δώσει ραντεβού με την Αφροδίτη για να παίξουν;*», «*Αν έχουν δώσει ραντεβού στις 4, πόση ώρα πρέπει να περιμένουν έξω από τον ζωολογικό κήπο*;». Από μαθητές με πιο χαμηλή επίδοση προτάθηκαν και ερωτήσεις του τύπου «*Πόση ώρα έκαναν να ταΐσουν τις πάπιες*;» ή «*Πόση ώρα χρειάστηκαν για να φάνε*;», που απαντώνται από τα δεδομένα του προβλήματος και πάνω σε αυτές έγινε μια συζήτηση για το πώς διατυπώνουμε τα ζητούμενα ενός προβλήματος.

4η Συνάντηση - Εύρεση περιττών ή ελλιπών πληροφοριών σε δοσμένο πρόβλημα

Το πρώτο πρόβλημα ήταν το παρακάτω: «*Ο Αχιλλέας, η Δάφνη, ο Χρήστος και η Μυρτώ είναι 8 χρονών. Αποφάσισαν να φυτέψουν λουλούδια στην αυλή του σχολείου τους. Ξεκίνησαν στις 9:00 το πρωί και τελείωσαν στις 10:30. Ο Αχιλλέας φύτεψε 3 γλαστράκια με ζουμπούλια, η Δάφνη 5 γλαστράκια με κρίνα, ο Χρήστος 4 γλαστράκια με τουλίπες και η Μυρτώ 6 γλαστράκια με πανσέδες. Κάθε γλαστράκι κόστιζε 3€. Πόσα γλαστράκια φύτεψαν συνολικά τα παιδιά*;». Το πρόβλημα έγινε αμέσως κατανοητό και η πλειοψηφία της τάξης σήκωνε χέρι, για να απαντήσει. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι μαθητές με χαμηλή επίδοση συμμετείχαν και ο καθένας βρήκε και από μία πληροφορία που ήταν περιττή. Στο τέλος τις διαγράψαμε όλες από τον πίνακα (ηλικία παιδιών, την ώρα που ξεκίνησαν και τέλειωσαν, το κόστος κάθε γλάστρας), για να μείνουν μόνο τα χρήσιμα δεδομένα και τα ζητούμενα.

Συνέχεια είχε το επόμενο πρόβλημα: «*Μια παιδική κατασκήνωση λειτούργησε την περασμένη χρονιά από τον Ιούνιο μέχρι τον Αύγουστο. Μπορούσε να φιλοξενήσει το πολύ 120 παιδιά κάθε μήνα. Τον Ιούνιο φιλοξένησε 40 κορίτσια και 35 αγόρια. Τον Ιούλιο φιλοξένησε 45 κορίτσια και 50 αγόρια. Τον Αύγουστο φιλοξένησε 50 κορίτσια και 60 αγόρια. Κάθε παιδί έπρεπε να πληρώσει 400€ για κάθε μήνα. Πόσα κορίτσια φιλοξένησε συνολικά η κατασκήνωση και τους τρεις μήνες;*». Και σε αυτό το πρόβλημα συμμετείχαν σχεδόν όλοι οι μαθητές, καλοί, μέτριοι και με πιο χαμηλή επίδοση. Κάθε παιδί που κλήθηκε να απαντήσει βρήκε και μια περιττή πληροφορία (αριθμός αγοριών σε κάθε μήνα, κόστος διαμονής στην κατασκήνωση ανά παιδί, όριο παιδιών που φιλοξενεί η κατασκήνωση). Στο τέλος, τις διαγράψαμε από τον πίνακα και λύσαμε το πρόβλημα.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν στους μαθητές τα προβλήματα, που δεν είχαν επαρκείς πληροφορίες για να επιλυθούν. Οι μαθητές δεν είχαν συναντήσει στα σχολικά εγχειρίδια προβλήματα με ελλιπείς πληροφορίες, οπότε ήταν κάτι πρωτάκουστο για αυτούς. Το πρώτο ήταν το παρακάτω: «*Τρία αδέρφια επισκέφτηκαν ένα κατάστημα παιχνιδιών. Ο Παύλος ήθελε να αγοράσει μια μπάλα αξίας 12€, η Μαρία ένα επιτραπέζιο παιχνίδι και ο Μιχάλης ένα παζλ αξίας 9€. Τους φτάνουν τα χρήματα, για να αγοράσουν αυτά που θέλουν;*». Σε αυτό το πρόβλημα ακόμα και οι καλοί λύτες άργησαν να καταλάβουν τι χρειάζεται να κάνουν. Όμως αφού φάνηκε ότι το ξαναδιάβασαν, κατάλαβαν τι έλειπε, για να μπορεί να λυθεί το πρόβλημα και τότε σήκωσαν χέρι να πουν την απάντηση. Όσοι σήκωσαν χέρι, κυρίως καλοί και μέτριοι μαθητές, είπαν την σκέψη τους. Τελικά οι σκέψεις που ακούστηκαν συνοψίζονται στις παρακάτω προτάσεις, που έλειπαν για είναι ολοκληρωμένο το πρόβλημα: η τιμή του επιτραπέζιου παιχνιδιού και τα χρήματα που διαθέτουν.

Το δεύτερο και τελευταίο πρόβλημα αυτής της συνάντησης ήταν το εξής: «*Για τα όγδοα γενέθλια του Βασίλη, ο πατέρας του ξόδεψε 30€ για το δώρο του, 25€ για την τούρτα και 5€ για ένα κουτί με 10 κεράκια. Πόσα χρήματα του έμειναν;*»
Σε αυτό το πρόβλημα η φράση «*5€ για ένα κουτί με 10 κεράκια*» μπέρδεψε κάποιους μαθητές με μέτρια επίδοση, που πρότειναν ότι η πληροφορία που έλειπε ήταν η τιμή και των δέκα κεριών. Όμως, οι καλοί μαθητές επεσήμαναν ότι η αναφορά της ποσότητας των κεριών ήταν περιττή πληροφορία και τότε έγινε περισσότερο κατανοητό το πρόβλημα και ποιες πληροφορίες απουσιάζουν. Ένας μαθητής με πιο χαμηλή επίδοση υποστήριξε ότι η πληροφορία που έλειπε ήταν τα χρήματα που ξόδεψε συνολικά ο πατέρας και τότε ένας καλός μαθητής απάντησε ότι αυτό μας το δίνουν τα δεδομένα και ότι η πληροφορία που έλειπε ήταν τα χρήματα που είχε αρχικά ο πατέρας.

Οι επόμενες τέσσερις συναντήσεις αφορούσαν την κατασκευή προβλημάτων σε ημι-δομημένες μαθηματικές καταστάσεις. Στην πέμπτη συνάντηση οι μαθητές κλήθηκαν να διατυπώσουν ερωτήσεις σε προβλήματα που δίνονταν τα δεδομένα και οι απαντήσεις τους. Σε αυτά τα προβλήματα έπρεπε να βρουν δύο ερωτήσεις που αντιστοιχούσαν στις δοθείσες απαντήσεις. Στην έκτη μας συνάντηση ασχοληθήκαμε με την κατασκευή προβλημάτων που έχει κοινή μέθοδο επίλυσης με δύο δοσμένα προβλήματα. Στην έβδομη συνάντηση πειραματιστήκαμε στην κατασκευή προβλημάτων βασισμένα σε μαθηματική πράξη (πρόσθεση) και στην όγδοη και τελευταία συνάντησή μας οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν το δικό τους πρόβλημα βασισμένο σε μια εικόνα.

- *5η Συνάντηση- Διατύπωση ερωτήσεων σε ένα πρόβλημα που δίνονται τα δεδομένα και πιθανές απαντήσεις*

Στην πέμπτη συνάντηση με τους μαθητές έγινε μια γρήγορη αναδρομή σε όσα είχαν γίνει μέχρι τότε στις προηγούμενες συναντήσεις και ακολούθησε η εισαγωγή στο καινούριο θέμα. Το πρώτο πρόβλημα ήταν το παρακάτω: «*Η Αλεξάνδρα και 3 φίλες της επισκέφθηκαν το θέατρο. Στο διάλειμμα πήγαν στο κυλικείο του θεάτρου και αγόρασαν ποπ κορν και αναψυκτικά. Όλες πήραν και από τα δύο είδη, εκτός από την Αλεξάνδρα που δεν πήρε ποπ κορν και μια φίλη της που* *δεν πήρε αναψυκτικό. Η μία συσκευασία ποπ κορν κόστιζε 4€ και το κάθε αναψυκτικό κόστιζε 3€. Απάντηση α) Πλήρωσαν 12€. Απάντηση β) Πλήρωσαν 21€.*»

Έγινε ανάγνωση του προβλήματος δύο τρεις φορές, για να γίνουν κατανοητές όλες οι πληροφορίες του. Μια μαθήτρια με μέτρια επίδοση εντόπισε τα δεδομένα και τα γράψαμε στον πίνακα. Κατάλαβαν όλοι ότι έπρεπε να βρουν δύο ερωτήσεις, αφού δίνονται δύο απαντήσεις στο τέλος. Η πρώτη ερώτηση, που αντιστοιχούσε στην πρώτη απάντηση, φάνηκε να δυσκολεύει τους μαθητές με μέτρια και χαμηλή επίδοση, καθώς δεν σήκωναν χέρι και έπειτα από δική μου πρωτοβουλία να τους ρωτήσω διατύπωναν ερωτήσεις, που η λύση τους δεν ταίριαζε στη δοθείσα απάντηση. Τελικά, ένας καλός μαθητής βρήκε τη σωστή ερώτηση «*Πόσα χρήματα πλήρωσαν για τα ποπ κορν*;». Η ερώτηση για τη δεύτερη απάντηση βρέθηκε πιο γρήγορα από τους ίδιους μαθητές που απάντησαν λανθασμένα την προηγούμενη φορά, ίσως γιατί βοηθούσε η προηγούμενη απάντηση. Έτσι μια μαθήτρια με χαμηλή επίδοση βρήκε τη δεύτερη ερώτηση: «*Πόσα ευρώ/ χρήματα πλήρωσαν για όλα*;».

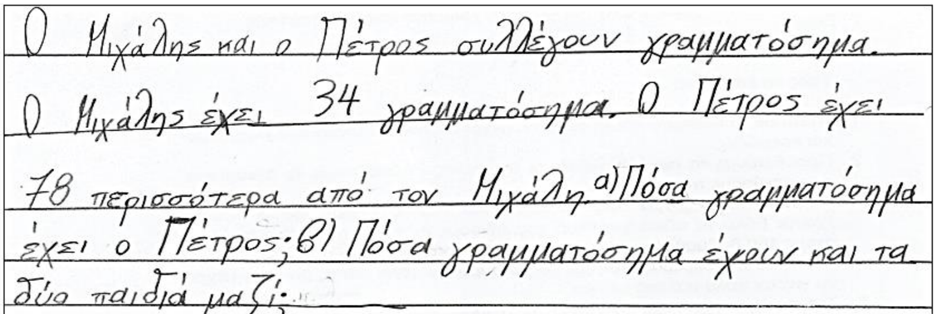
Το δεύτερο πρόβλημα ήταν το παρακάτω: «*Ένας φοιτητής για τις εξετάσεις του Φεβρουαρίου έχει διαβάσει την πρώτη βδομάδα 200 σελίδες, τη δεύτερη βδομάδα 150 σελίδες και την τρίτη βδομάδα 300 σελίδες από το βιβλίο του. Απάντηση α) Διάβασε 150 σελίδες περισσότερες. Απάντηση β) Διάβασε 650 σελίδες*». Στην πρώτη ερώτηση που έπρεπε να διατυπώσουν τους καθοδηγούσε η λέξη «περισσότερες», όμως σε αυτό το σημείο όλοι χρειάστηκαν αρκετά λεπτά για δοκιμάσουν στο μυαλό τους τους αριθμούς και να βρουν τι πρέπει να ρωτήσουν. Στη συνέχεια άρχισαν να σηκώνονται τα πρώτα χέρια από τους καλούς λύτες και έπειτα συμμετείχαν περισσότεροι κυρίως μέτριοι μαθητές και όχι όσοι είχαν χαμηλή επίδοση. Διατύπωσαν την ερώτηση που είχαν σκεφτεί όλοι, χωρίς να επιβεβαιωθεί η ορθότητά της, για να μπορούν να μιλήσουν όλοι όσοι σήκωναν χέρι. Η πλειοψηφία ρώτησαν «*Πόσες σελίδες περισσότερες διάβασε την τρίτη από τη δεύτερη βδομάδα*;» ενώ δύο μαθητές με μέτρια επίδοση ρώτησαν «*Πόσες σελίδες περισσότερες διάβασε την πρώτη από τη δεύτερη εβδομάδα*;». Στη δεύτερη ερώτηση που έπρεπε να διατυπώσουν σήκωσαν χέρι και μαθητές με πιο χαμηλή επίδοση. Όλοι διατύπωσαν την ερώτηση: «*Πόσες σελίδες διάβασε συνολικά;*» χωρίς κάποιος να αναφέρει κάτι λανθασμένο.

Το τρίτο και τελευταίο πρόβλημα αυτής της συνάντησης ήταν το παρακάτω: «*Ο πατέρας του Πάνου έχει μηνιαίο μισθό 1.500€. Από αυτά διαθέτει 350€ για ενοίκιο, 400€ για φαγητό, 250€ για τους λογαριασμούς του σπιτιού και αποταμιεύει τα υπόλοιπα. Απάντηση α) Αποταμιεύει 500€. Απάντηση β) Θα έχει αποταμιεύσει 3.000€».* Σε αυτό το πρόβλημα αποσαφηνίστηκαν κάποιες λέξεις που δυσκόλεψαν τους μαθητές στην κατανόησή του. Αφού επεξεργάστηκαν λίγη ώρα τα δεδομένα και τους αριθμούς, γρήγορα κάποιοι κατάλαβαν την ερώτηση που αντιστοιχεί στην πρώτη απάντηση. Αρκετοί καλοί και μέτριοι μαθητές βρήκαν τη σωστή ερώτηση: «*Πόσα ευρώ/ χρήματα αποταμιεύει τον μήνα/ σε έναν μήνα*;». Η διατύπωση της δεύτερης ερώτησης δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές. Λιγότερα χέρια σηκώθηκαν και χρειάστηκε περισσότερη ώρα για την επεξεργασία αυτής της απάντησης. Τελικά, λίγοι μαθητές, αυτοί που ήταν καλοί λύτες, βρήκαν τη σωστή ερώτηση που αντιστοιχούσε στη δεύτερη απάντηση: «*Πόσα χρήματα/ευρώ θα έχει αποταμιεύσει σε έξι μήνες/ μισό χρόνο;*». Σε αυτό το πρόβλημα οι μαθητές με χαμηλή επίδοση δεν συμμετείχαν αρκετά και με δική μου παρότρυνση να εκφράσουν την ιδέα τους δεν είχαν κάτι να πουν.

- *6η Συνάντηση- Κατασκευή προβλήματος που να έχει κοινή μέθοδο επίλυσης με δοσμένο πρόβλημα*

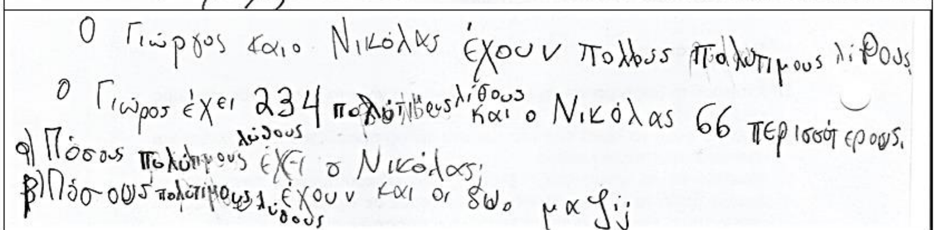
Το πρώτο πρόβλημα που δόθηκε τους μαθητές κινούταν στη λογική του δεύτερου δοκιμίου των δύο τεστ και λυνόταν με δύο προσθέσεις ή μια πρόσθεση με τρεις προσθετέους και ήταν το εξής: «*Η Βιολέτα και ο Αργύρης μαζεύουν χρωματιστούς βόλους. Η Βιολέτα έχει 23 βόλους. Ο Αργύρης έχει 22 βόλους παραπάνω από τη Βιολέτα. Πόσους βόλους έχουν και τα δύο παιδιά μαζί;*». Όλοι οι μαθητές κατασκεύασαν το δικό τους πρόβλημα με σωστό τρόπο αλλά βασισμένοι πολύ στη λογική του δοθέντος. Υπήρξε δηλαδή μικρή πρωτοτυπία στα προβλήματα που κατασκεύασαν ακόμα και οι καλοί μαθητές, άλλαξαν μόνο τα ονόματα, τις ποσότητες και το είδος του αντικειμένου, όπως φαίνεται και παρακάτω στην Εικόνα 1.

α)



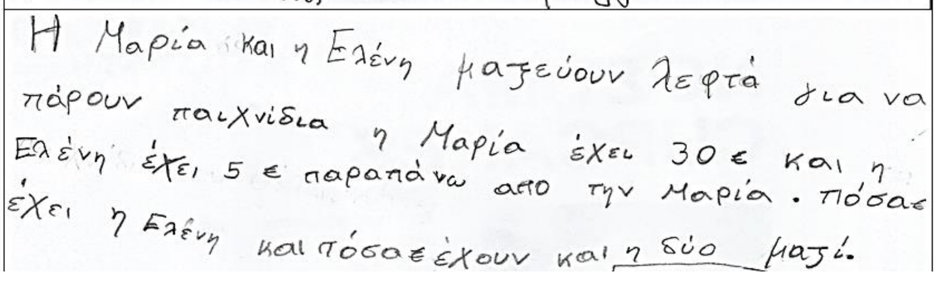
Ο Μιχάλης και ο Πέτρος συλλέγουν γραμματόσημα. Ο Μιχάλης έχει 34 γραμματόσημα. Ο Πέτρος έχει 78 περισσότερα από τον Μιχάλη. α) Πόσα γραμματόσημα έχει ο Πέτρος; β) Πόσα γραμματόσημα έχουν και τα δύο παιδιά μαζί;

β)



Ο Γιώργος και ο Νικόλας έχουν πολλούς πολύτιμους λίθους. Ο Γιώρος έχει 234 πολύτιμους λίθους και ο Νικόλας 66 περισσότερους. α) Πόσους πολύτιμους λίθους έχει ο Νικόλας; β) Πόσ-ους πολύτιμους λίθους έχουν και οι δύο μαζί;

γ)



Η Μαρία και η Ελένη μαζεύουν λεφτά για να πάρουν παιχνίδια η Μαρία έχει 30€ και η Ελένη έχει 5€ παραπάνω απο την Μαρία. Πόσα έχει η Ελένη και πόσα έχουν και η δύο μαζί.

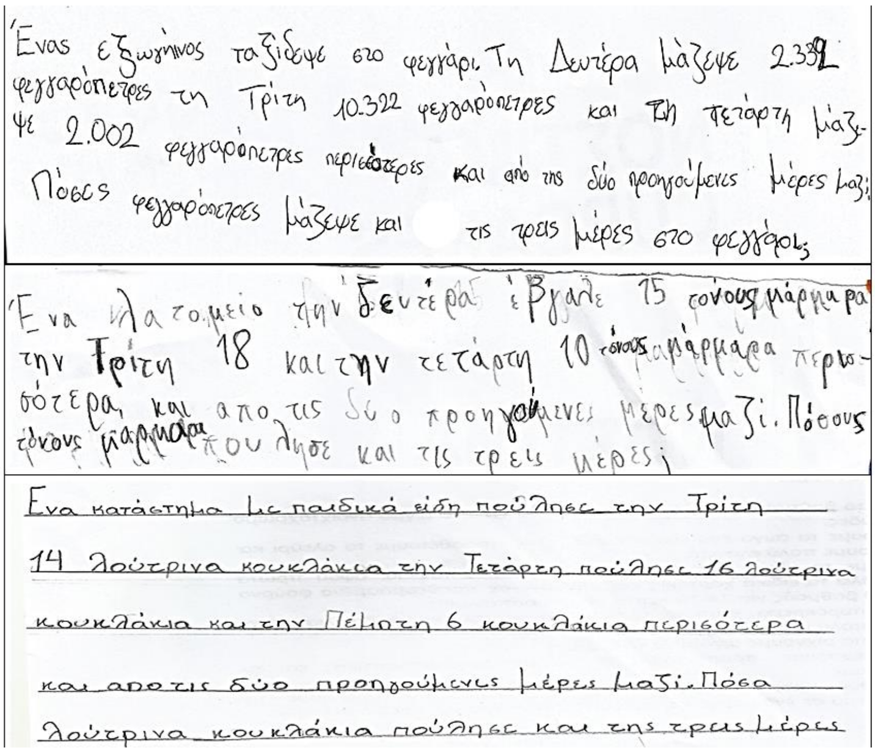
Εικόνα 1
α) Πρόβλημα που κατασκεύασε μαθητής με καλή επίδοση, β) με μέτρια επίδοση και γ) με χαμηλή επίδοση.

Το δεύτερο πρόβλημα αυτής της συνάντησης ήταν λίγο πιο σύνθετο, καθώς για την επίλυσή του απαιτούνταν τρεις προσθέσεις ή δύο προσθέσεις με περισσότερους από δύο προσθετέους και ήταν το εξής: *«Ένα κατάστημα με πασχαλινά είδη πούλησε τη Μεγάλη Πέμπτη 13 λαμπάδες, τη Μεγάλη Παρασκευή 15 λαμπάδες και το Μεγάλο Σάββατο 5 λαμπάδες περισσότερες και από τις δυο προηγούμενες μέρες μαζί. Πόσες λαμπάδες πούλησε και τις τρεις μέρες;»*. Τα προβλήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές ήταν σωστά στο σύνολό τους αλλά και πάλι ήταν βασισμένα σε μεγάλο βαθμό στο αρχικό πρόβλημα, με αλλαγές στα δεδομένα του αρχικού προβλήματος. Στην Εικόνα 2 που ακολουθεί παρουσιάζονται κάποια δείγματα από τη δουλειά των μαθητών πάνω σε αυτή τη δραστηριότητα. Στο τέλος της συνάντησης έγινε η παρουσίαση των προβλημάτων που κατασκευάστηκαν από τους μαθητές.

α)

β)

γ)



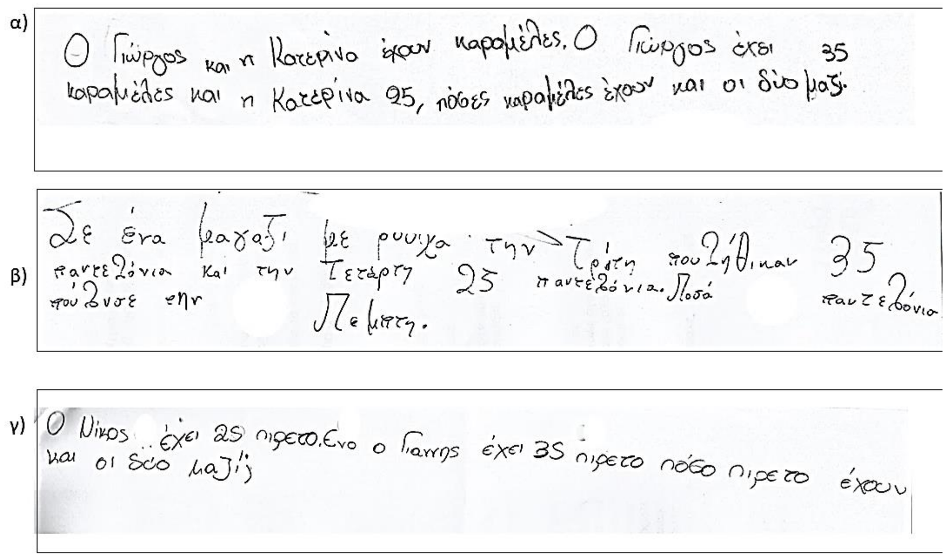
Εικόνα 2

α) Πρόβλημα που κατασκεύασε μαθητής με καλή επίδοση, β) με μέτρια επίδοση και γ) με χαμηλή επίδοση

- *7η Συνάντηση- Κατασκευή προβλήματος βασισμένο σε μια μαθηματική πράξη*

Στην έβδομη συνάντηση οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν προβλήματα σύμφωνα με κάποιες μαθηματικές πράξεις. Για το πρώτο πρόβλημα τους δόθηκε η πράξη «35+25=60» και κανένας άλλος περιορισμός. Η πλειοψηφία των μαθητών κατάφερε να κατασκευάσει σωστά προβλήματα, παραδείγματα των οποίων ακολουθούν παρακάτω στην Εικόνα 3.

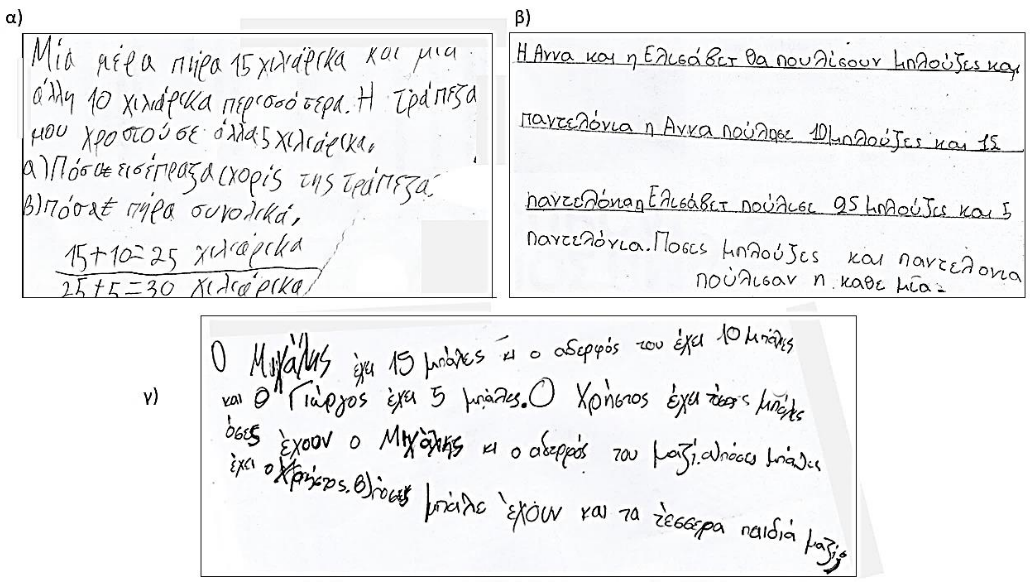
Για το δεύτερο πρόβλημα δόθηκαν στους μαθητές δύο πράξεις: «15+10=25 και 25+5=30» και τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα που θα λυνόταν με αυτές τις δύο πράξεις. Αρκετοί μαθητές με μέτρια επίδοση χρησιμοποίησαν τις δύο αυτές πράξεις σε δύο διαφορετικά πλαίσια στο πρόβλημα που έγραψαν ενώ λίγοι, καλοί λύτες, κατάφεραν να γράψουν ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μία πράξη ως συνέχεια της άλλης. Οι μαθητές με χαμηλότερη επίδοση κατασκεύασαν προβλήματα που ήταν εν μέρει ορθά ή ημιτελή. Κάποια παραδείγματα από τα προβλήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές στο πλαίσιο αυτής της δραστηριότητας παρουσιάζονται στην Εικόνα 4. Στο τέλος όλοι οι μαθητές παρουσίασαν στους συμμαθητές τους τα προβλήματα που είχαν κατασκευάσει.


α)
Ο Γιώργος και η Κατερίνα έχουν καραμέλες. Ο Γιώργος έχει 35 καραμέλες και η Κατερίνα 25, πόσες καραμέλες έχουν και οι δύο μαζί.

β)
Σε ένα μαγαζί με ρούχα την Τρίτη πούλησαν 35 παντελόνια και την Τετάρτη 25 παντελόνια. Πόσα παντελόνια πούλησε την Πέμπτη.

γ)
Ο Νίκος έχει 25 πιρετο. Ενω ο Γιαννης έχει 35 πιρετο πόσο πιρετο έχουν και οι δύο μαζί

Εικόνα 3
α) Πρόβλημα που κατασκεύασε μαθητής με καλή επίδοση, β) με μέτρια επίδοση και γ) με χαμηλή επίδοση


α)
Μία μέρα πήρα 15 χιλιάρικα και μια άλλη 10 χιλιάρικα περισσότερα. Η τράπεζα μου χροστούσε άλλα 5 χιλιάρικα.
α) Πόσα εισέπραξα χωρίς της τράπεζα;
β) Πόσα πήρα συνολικά;
15+10=25 χιλιάρικα
25+5=30 χιλιάρικα

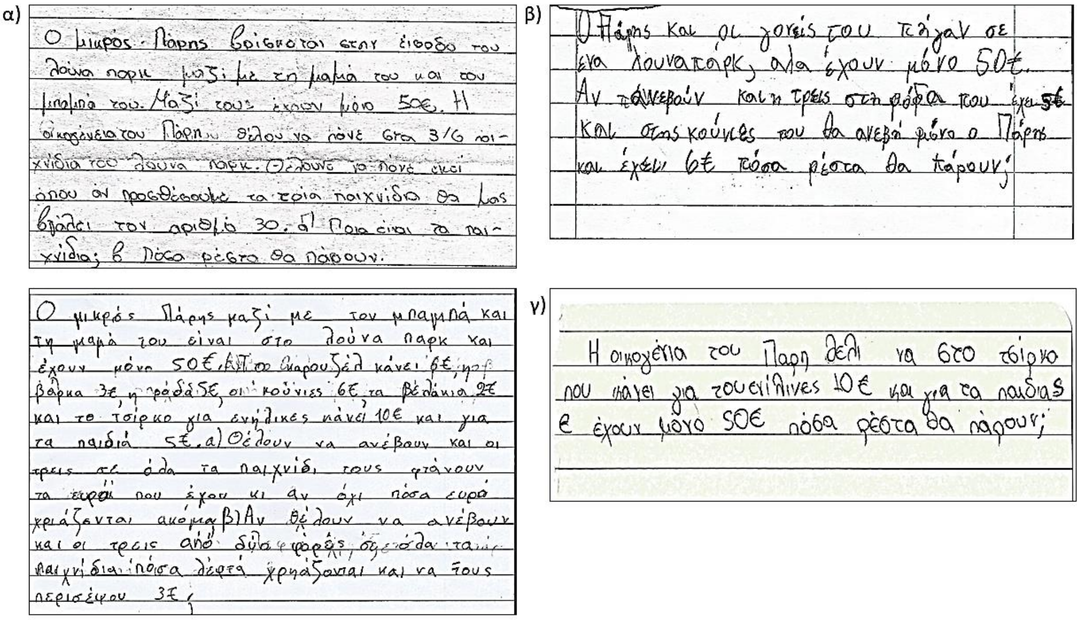
β)
Η Άννα και η Ελισάβετ θα πουλήσουν μπλούζες και παντελόνια η Άννα πούλησε 10 μπλούζες και 15 παντελόνια η Ελισάβετ πούλησε 25 μπλούζες και 5 παντελόνια. Πόσες μπλούζες και παντελόνια πούλησαν η καθε μία;

γ)
Ο Μιχάλης έχει 15 μπάλες κι ο αδερφός του έχει 10 μπάλες και ο Γιώργος έχει 5 μπάλες. Ο Χρήστος έχει τόσες μπάλες όσες έχουν ο Μιχάλης κι ο αδερφός του μαζί. Πόσες μπάλες έχει ο Χρήστος. Πόσες μπάλες έχουν και τα τέσσερα παιδιά μαζί;

Εικόνα 4
α) Πρόβλημα που κατασκεύασε μαθητής με καλή επίδοση, β) με μέτρια επίδοση και γ) με χαμηλή επίδοση

- *8η Συνάντηση- Κατασκευή προβλήματος βασισμένο σε μια εικόνα*

Στην όγδοη και τελευταία συνάντηση δόθηκε στους μαθητές μια εικόνα που έδειχνε ένα λούνα παρκ με τις τιμές σε κάθε παιχνίδι και μια οικογένεια (μπαμπάς, μαμά, παιδί) που είχε μαζί της 50€. Σύμφωνα με τα δεδομένα της εικόνας οι μαθητές έπρεπε να κατασκευάσουν ένα δικό τους πρόβλημα. Αντίστοιχες εικόνες υπήρχαν στο τελευταίο δοκίμιο των δύο τεστ. Οι μαθητές αντιμετώπισαν με ενθουσιασμό τη διδακτική παρέμβαση πάνω στην ΚΜΠ με βάση την εικόνα. Συμμετείχαν όλοι πρόθυμα. Οι καλοί μαθητές προσπάθησαν να κατασκευάσουν σύνθετα προβλήματα με πολλά δεδομένα, ζητούμενα και περιορισμούς, που θα δυσκόλευαν τους συμμαθητές τους στην επίλυση, όταν θα τα παρουσίαζαν στην τάξη. Οι μαθητές με μέτρια επίδοση κατασκεύασαν σωστά προβλήματα, λιγότερο σύνθετα και πιο κοντά στις εμπειρίες που είχαν με μαθηματικά προβλήματα. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι αδύνατοι μαθητές που δεν συμμετείχαν συχνά στο μάθημα των Μαθηματικών έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και κατάφεραν να κατασκευάσουν απλά αλλά ολοκληρωμένα προβλήματα. Κάποια από τα προβλήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές στην τελευταία συνάντηση της παρέμβασης φαίνονται παρακάτω στην Εικόνα 5.



Εικόνα 5

α) Προβλήματα που κατασκεύασαν μαθήτριες με καλή επίδοση, β) με μέτρια επίδοση και γ) με χαμηλή επίδοση

Αποτελέσματα τελικού τεστ

Τα δοκίμια του τελικού τεστ ακολουθούσαν τη φιλοσοφία του αρχικού. Έτσι, το πρώτο δοκίμιο της επίλυσης ήταν ένα πρόβλημα που απαιτούσε την εφαρμογή της κατάλληλης στρατηγικής, για την εύρεση του μοτίβου και την επίλυση του προβλήματος. Όσον αφορά τα κριτήρια της κατανόησης και της ορθότητας υπήρξε ταύτιση των αποτελεσμάτων για αυτό το δοκίμιο. Οι περισσότεροι από τους μισούς μαθητές (71%) κατανόησαν το πρόβλημα και κατάφεραν να απαντήσουν ορθά και στα δύο υποερωτήματά του: «*α) Στο όγδοο πηδηματάκι θα πηδήξει 4 νούφαρα και β) στο δέκατο τέταρτο πηδηματάκι τρία νούφαρα, γιατί υπάρχει μοτίβο*». Το 19% κατανόησε μερικώς το πρόβλημα και απάντησε ορθά στο ένα από τα δύο ερωτήματα. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι όλοι οι μαθητές αυτής της κατηγορίας εντόπισαν σωστά το μοτίβο στο πρώτο υποερώτημα (ότι επαναλαμβάνεται ανά 4) αλλά στο δεύτερο άλλαξαν το μοτίβο (το έκαναν ανά 7) και βρήκαν λάθος αποτέλεσμα: «*α) Στο όγδοο πηδηματάκι θα πηδήξει 4 νούφαρα, γιατί το μοτίβο πηγαίνει 1,3,2,4,1,3,2,□. β)Στο δέκατο τέταρτο πηδηματάκι θα πηδήξει 2 νούφαρα. Γιατί το μοτίβο σταματάει στο έβδομο πηδηματάκι και είναι 2 νούφαρα, άρα κάνουμε 7+7=14, μας βγαίνει αυτό που θέλαμε 14, άρα είναι 2 νούφαρα*». Το 10% των μαθητών δεν κατανόησε καθόλου το πρόβλημα και είτε δεν έδωσε καμία απάντηση (μία μαθήτρια) είτε εντόπισε το μοτίβο λάθος εξαρχής (ότι επαναλαμβάνεται ανά 7), όπως ο μαθητής που έγραψε: «*α)Στο όγδοο πηδηματάκι θα πηδήσει 1 νούφαρο, γιατί είναι ένα μοτίβο. β)Στο δέκατο τέταρτο πηδηματάκι θα πηδήξει δύο νούφαρα, γιατί 7+7=14*». Αυτοί οι δύο μαθητές έλαβαν σκορ 1 στο κριτήριο της κατανόησης και της ορθότητας.

Στο τελικό τεστ το 43% έδωσε ολοκληρωμένα και με ακρίβεια την απάντησή του, είτε αυτή ήταν σωστή είτε όχι, όπως ο μαθητής παρακάτω: «*α)Στο όγδοο πηδηματάκι θα πηδήξει 4 νούφαρα, γιατί από το 1ο μέχρι το 4ο πηδηματάκι είναι ένα μοτίβο. Από το 5ο πηδηματάκι αρχίζει ξανά από την αρχή. β) Στο δέκατο τέταρτο πηδηματάκι θα πηδήσει 3 νούφαρα, για τον ίδιο λόγο με το προηγούμενο*». Οι περισσότεροι αυτής της κατηγορίας, για να δικαιολογήσουν την απάντησή τους επανέλαβαν το μοτίβο μέχρι το επιθυμητό σημείο. Το 43% απάντησε με σχετική ακρίβεια γιατί περιορίστηκε απλά στη δήλωση: «*Γιατί είναι μοτίβο*» ή «Πάει εναλλάξ» ή «*Έγραψα τα πηδηματάκια και μετά έκανα το μοτίβο*», χωρίς όμως να έχει παρουσιάσει στο γραπτό την πορεία σκέψης του. Το 14% είτε δεν απάντησε τίποτα (μία μαθήτρια) είτε δεν δικαιολόγησε καθόλου τις απαντήσεις του, γι' αυτό αξιολογήθηκε με σκορ 1.

Όσον αφορά την αυθεντικότητα, την πιο υψηλή βαθμολογία πήραν όσοι προσπάθησαν να παρουσιάσουν το μοτίβο με πράξεις ή με κάποιον άλλο τρόπο πέραν του μετρήματος. Μόνο το 14% των μαθητών παρουσίασε με πρωτότυπο τρόπο τη λύση του, αν και δεν βρήκαν ορθές απαντήσεις γιατί εντόπισαν λάθος το μοτίβο: «*β) Στο δέκατο τέταρτο πηδηματάκι θα πηδήξει 2 νούφαρα, γιατί το έβδομο πηδηματάκι είναι τελευταίο άρα 7+7=14*». Το 48% προσπάθησε και έδωσε μερικώς αυθεντικές απαντήσεις. Σε αυτούς συμπεριλαμβάνονται οι μαθητές που έφτασαν στο αποτέλεσμα επαναλαμβάνοντας το μοτίβο μέχρι τον στόχο: «*α)Στα οχτώ πηδηματάκια θα πηδήσει 4 νούφαρα, γιατί το μοτίβο πάει 1,3,2,4,1,3,2. β)Στο δέκατο τέταρτο πηδηματάκι θα πηδήσει 3 νούφαρα, γιατί 9→1, 10→3, 11→2, 12→4, 13→1, 14→3*». Το 38% των μαθητών έδωσε μη αυθεντικές απαντήσεις, απάντησε δηλαδή απλά ότι υπάρχει μοτίβο, χωρίς να δείξει πώς οδηγήθηκε στην απάντηση που παρουσίασε. Έτσι η αυθεντικότητα εδώ αξιολογήθηκε με το χαμηλότερο σκορ της κλίμακας.

Στο δεύτερο δοκίμιο οι περισσότεροι μαθητές (71%) κατανόησαν το πρόβλημα και τη δομή του. Έτσι επέλεξαν την κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση του και απάντησαν ορθά : «*Έτρεξε συνολικά 60 γύρους και τις δύο μέρες, γιατί 25+10=35, 35+25=60*». Το υπόλοιπο 29% κατανόησε εν μέρει το πρόβλημα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αυτοί οι μαθητές δεν ερμήνευσαν σωστά τη φράση «*ο αθλητής έτρεξε 10 γύρους περισσότερους τη δεύτερη μέρα*» από ότι φάνηκε από τον τρόπο που επέλεξαν να επιλύσουν το πρόβλημα. Κανένας μαθητής δεν υπήρξε που να μην κατανόησε καθόλου το πρόβλημα.

Το 67% των μαθητών απάντησαν ορθά στο πρόβλημα, σχεδόν όσοι το κατανόησαν κιόλας. Η διαφορά με το κριτήριο της κατανόησης ήταν ένας μαθητής που η πορεία σκέψης του ήταν σωστή, αλλά στην απάντησή του είχε κάνει ένα αριθμητικό λάθος. Το 33% απάντησε εν μέρει σωστά, γιατί υπολόγισε σωστά μόνο την πρώτη (25+10=35) από τις δύο πράξεις, που απαιτούνταν για να λυθεί το πρόβλημα και δεν προχώρησε παρακάτω. Έτσι αυτοί οι μαθητές απάντησαν: «*Έτρεξε 35 γύρους και τις δύο μέρες, γιατί 25+10=35*». Κανένας μαθητής δεν βρέθηκε που να μην έχει δώσει καμία ορθή απάντηση,

Όλοι οι μαθητές παρουσίασαν με ακρίβεια την απάντησή τους, είτε αυτή ήταν σωστή είτε όχι, γιατί όλοι χρησιμοποίησαν αριθμητικές πράξεις, για να παρουσιάσουν τη λύση τους. Επίσης, γι’ αυτόν τον λόγο σχεδόν όλες οι απαντήσεις αξιολογήθηκαν ως εν μέρει αυθεντικές, μιας που η επίλυση ενός προβλήματος με πράξεις είναι κάτι συνηθισμένο και δεν παρουσιάζει πρωτοτυπία, πέραν ενός μαθητή. Αυτός, αφού παρουσίασε τη λύση του με πράξεις, χρησιμοποίησε και μια δεύτερη μέθοδο:

$$\left.\begin{array}{r}25\\10\end{array}\right) 35 \qquad \left.\begin{array}{r}35\\25\end{array}\right) 60$$

Τα αποτελέσματα για το πρώτο και το δεύτερο δοκίμιο που αφορούν την επίλυση προβλήματος στο τελικό τεστ παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 8.

Πίνακας 8

Ποσοστά (και συχνότητες) των κριτηρίων αξιολόγησης ΕΜΠ για το σύνολο των μαθητών στο τελικό τεστ για το πρώτο και το δεύτερο δοκίμιο

	Βαθμολογία					
	3		2		1	
	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο
Κατανόηση	71% (15)	71% (15)	19% (4)	29% (6)	10% (2)	
Ορθότητα	71% (15)	67% (14)	19% (4)	33% (7)	10% (2)	
Ακρίβεια	43% (9)	100% (21)	43% (9)		14% (3)	
Αυθεντικότητα	14% (3)	5% (1)	48% (10)	95% (20)	38% (8)	

Και στο τελικό τεστ παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που πέτυχαν οι μαθητές στην κατανόηση ήταν ανάλογα με αυτά που πέτυχαν στο κριτήριο της ορθότητας. Δηλαδή, όσοι μαθητές κατανόησαν το πρόβλημα ήταν σε θέση να δώσουν μια σωστή απάντηση στο πρώτο και στο δεύτερο δοκίμιο. Για το πρώτο δοκίμιο το κριτήριο της ακρίβειας φαίνεται ότι σχετίζεται σε ένα βαθμό με το κριτήριο της αυθεντικότητας. Όσοι μαθητές έδωσαν με ακρίβεια την απάντησή τους ήταν και σε θέση να την παρουσιάσουν με έναν πιο πρωτότυπο τρόπο. Στο δεύτερο δεν μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι αντίστοιχο, γιατί η βαθμολογία ήταν ίδια για το σύνολο των μαθητών στο κριτήριο της ακρίβειας. Τις ενδείξεις αυτές επιβεβαιώνει ο συντελεστής συσχέτισης Spearman's rho, τα αποτελέσματα του οποίου παρουσιάζονται στον Πίνακα 9.

Πίνακας 9
Συσχετίσεις μεταξύ των κριτηρίων αξιολόγησης της ΕΜΠ στο τελικό τεστ.

	Κατανόηση		Ορθότητα		Ακρίβεια		Αυθεντικότητα	
	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο	1ο δοκίμιο	2ο δοκίμιο
Κατανόηση	1	1	1**	, 894**	,166	b.	-,259	,141
Ορθότητα	1**	, 894**	1	1	,166	b.	-,259	,158
Ακρίβεια	,166	b.	,166	b.	1	b.	,676**	b.
Αυθεντικότητα	-,259	,141	-,259	,158	,676**	b.	1	1

**Συσχέτιση σημαντική στο επίπεδο 0.01 (2-tailed).
bΔεν υπολογίζεται, γιατί τουλάχιστον μία από τις μεταβλητές είναι σταθερή.

Όπως οι μαθητές χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες με βάση τον μέσο όρο (mean) των βαθμολογιών που πέτυχαν σε όλα τα κριτήρια για τα δύο δοκίμια επίλυσης προβλημάτων στο αρχικό τεστ έτσι χωρίστηκαν και στο τελικό τεστ. Μετά από επεξεργασία των δεδομένων, διαπιστώθηκε ότι ο χαμηλότερος μέσος όρος βαθμολογίας για το τελικό τεστ ήταν 1,88 (x_{min}=1,88) ενώ ο υψηλότερος ήταν 2,88 (x_{max}=2,88). Στον Πίνακα 10 παρουσιάζονται οι κατηγορίες των μαθητών, οι συχνότητές τους και το ποσοστό κάθε κατηγορίας στο σύνολο του δείγματος. Παρατηρούμε ότι στην επίλυση προβλημάτων στο τελικό τεστ μόνο ένας μαθητής σημείωσε χαμηλή επίδοση, εφτά μαθητές σημείωσαν μέτρια ενώ η πλειοψηφία των μαθητών, 13 μαθητές, πέτυχαν βαθμολογίες με μέσο όρο πάνω από 2,5, δηλαδή υψηλή επίδοση. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα στο αρχικό τεστ ήταν 5, 9 και 7 μαθητές αντίστοιχα στην κάθε κατηγορία. Εξετάζοντας τα αποτελέσματα αναλυτικά για κάθε μαθητή, παρατηρήθηκε ότι 8 μαθητές από το σύνολο του δείγματος βελτίωσαν την επίδοσή τους και άλλαξαν κατηγορία στο τελικό τεστ. Συγκεκριμένα, 4 μαθητές που σημείωσαν χαμηλή επίδοση στο αρχικό τεστ τώρα πέτυχαν υψηλή, 1 που σημείωσε χαμηλή στο αρχικό στο τελικό πέτυχε μέτρια και 3 μαθητές που είχαν πετύχει μέτρια επίδοση στο αρχικό τεστ στο τελικό πέτυχαν υψηλή. Όλοι οι υπόλοιποι έμειναν σταθεροί στην ίδια κατηγορία που βρίσκονταν ενώ μόνο 1 μαθητής σημείωσε πτώση στην επίδοσή του, αφού από την κατηγορία υψηλής επίδοσης που βρισκόταν αρχικά τώρα έπεσε στην κατηγορία μέτριας επίδοσης.

Πίνακας 10
Κατανομή μαθητών σε κατηγορίες ανάλογα με τον Μ.Ο. βαθμολογίας στα δοκίμια ΕΜΠ του τελικού τεστ

Κατηγορίες	Μ.Ο. βαθμολογίας ΕΜΠ	Συχνότητες	Ποσοστό
Χαμηλή επίδοση [1,50-2)	1,88	1	5%
Μέτρια επίδοση [2 – 2,50)	2,00	1	33%
	2,13	2	
	2,25	2	
	2,38	2	
Υψηλή επίδοση [2,50-3)	2,50	5	62%
	2,63	2	
	2,75	5	
	2,88	1	

Το τρίτο δοκίμιο του αρχικού τεστ αφορούσε την ΚΜΠ σε δομημένη μαθηματική κατάσταση και σχετιζόταν πάλι με το δεύτερο δοκίμιο για την επίλυση προβλημάτων. Παρόμοια αποτελέσματα με το αρχικό τεστ έχουμε για το αυτό το δοκίμιο ΚΜΠ δομημένης μαθηματικής κατάστασης στο τελικό τεστ. Το 71% των μαθητών κατασκεύασε ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μαθηματική γλώσσα με ακρίβεια. Σχεδόν όλοι είχαν σαν οδηγό την εκφώνηση του δοσμένου προβλήματος και αλλάζοντας τα δεδομένα κατάφεραν να γράψουν ολοκληρωμένα το πρόβλημά τους. Ένα παράδειγμα από έναν μαθητή αυτής της κατηγορίας είναι το παρακάτω: «*Ένας έμπορος αυτοκινήτων πούλησε την πρώτη χρονιά 50.238 αυτοκίνητα και τη δεύτερη χρονιά πούλησε 13.985 περισσότερα από την πρώτη χρονιά. Πόσα πούλησε και τις δύο χρονιές μαζί;*». Το 29% έγραψε ένα εν μέρει ακριβές πρόβλημα κι αυτό σημαίνει ότι δεν παρουσίασε σωστά όλες τις πληροφορίες ή ότι η διατύπωσή του είχε εκφραστικές αδυναμίες που δεν οδηγούσαν σε ολοκληρωμένη κατανόηση του προβλήματος από τον αναγνώστη: «*Η Γεωργία πήγε σε ένα ξενοδοχείο 25 ώρες και 10 περισσότερους σε ένα άλλο. Πόσες ώρες έκατσαν και τις δύο μέρες στο ξενοδοχείο;*». Δεν υπήρξε κανένας μαθητής που το πρόβλημά του ήταν μη ακριβές ή που δεν κατάφερε να κατασκευάσει καθόλου ένα πρόβλημα.

Το 71% των μαθητών έφτιαξε ένα εξολοκλήρου σωστό πρόβλημα που λυνόταν με δύο προσθέσεις, όπως και το αρχικό. Το 29% έφτιαξε ένα μερικώς ορθό πρόβλημα. Τα βασικότερα λάθη των παιδιών σε αυτή την περίπτωση εντοπίζονταν είτε στην κατασκευή ενός προβλήματος που λυνόταν με μόνο πρόσθεση (τέσσερις μαθητές) ή στην κατασκευή προβλήματος που η εκφώνηση δεν ήταν πολύ ακριβής και έτσι, ανάλογα πώς θα ερμήνευε κανείς το πρόβλημα, λυνόταν μόνο με μία αφαίρεση ή με μια αφαίρεση και μια πρόσθεση αντί για δύο προσθέσεις (δύο μαθητές). Ένα παράδειγμα για την πρώτη περίπτωση λάθους είναι του μαθητή που έγραψε: «*Ένας αστροναύτης πήγε 344 φορές στο φεγγάρι τον πρώτο χρόνο και τον* *δεύτερο χρόνο πήγε 428 φορές στο φεγγάρι. Πόσες φορές πήγε στο φεγγάρι και τους δύο χρόνους;*» ενώ για τη δεύτερη περίπτωση λάθους είναι της μαθήτριας που έγραψε: «*Ένας αγώνας ποδοσφαίρου έκανε την πρώτη εβδομάδα 30 προπονήσεις και την επόμενη 16 λιγότερες. Πόσες προπονήσεις έκανε;*».

Ένας μαθητής (5%) κατάφερε να κατασκευάσει πρωτότυπο πρόβλημα, που λυνόταν με δύο προσθέσεις, αλλά δεν είχε σχέση καθόλου με το αρχικό: «*Σε ένα αρτοποιείο το οκτάσπορο κάνει 5€, η φρατζόλα 8€ και το τυρόψωμο 7€. Α) Πόσα ευρώ κοστίζει το οκτάσπορο και η φρατζόλα μαζί; Β)Πόσα ευρώ κάνουν όλα μαζί;*». Η πλειοψηφία των μαθητών (67%) έγραψε ένα μερικώς αυθεντικό πρόβλημα, γιατί βασίστηκε αρκετά στη δομή του δοθέντος προβλήματος και τροποποίησε μόνο τα δεδομένα ή/και τα ζητούμενα, π.χ. «*Ένας σκιέρ ανέβηκε στο χιονοδρομικό και έκανε σκι. Τη μια μέρα έκανε σκι 36 κατεβασιές τη μαύρη πίστα και 20 περισσότερες τη δεύτερη. Πόσες κατεβασιές έκανε συνολικά και τις δύο μέρες;*». Το υπόλοιπο 29% δεν κατάφερε να κατασκευάσει ένα πρωτότυπο πρόβλημα, γιατί το πρόβλημα που παρέδωσε ήταν σχεδόν το ίδιο με το αρχικό, π.χ. «*Σε μια προπόνηση μια ομάδα έκανε 25 σουτ και 10 περισσότερα σουτ την επόμενη μέρα. Πόσα σουτ έκανε η ομάδα και τις δύο μέρες;*».

Το επίπεδο δυσκολίας των προβλημάτων που κατασκευάστηκαν αφορούσε τον αριθμό πράξεων που απαιτούνταν για την επίλυσή του, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Εδώ ισχύει το ίδιο που ίσχυε και στο αρχικό τεστ, αφού δηλαδή η κατασκευή αφορούσε δομημένη μαθηματική κατάσταση, το επίπεδο δυσκολίας του κατασκευασμένου προβλήματος καθοριζόταν από το αρχικό πρόβλημα. Έτσι η μέγιστη βαθμολογία ήταν 2 για το συγκεκριμένο δοκίμιο στο οποίο έπρεπε οι μαθητές να γράψουν ένα πρόβλημα που να λύνεται με δύο προσθέσεις. Τα αποτελέσματα σε αυτό το κριτήριο ήταν ίδια με αυτά του αρχικού τεστ. Το 76% των μαθητών κατάφερε να φτιάξει ένα τέτοιο πρόβλημα ενώ το 24% των μαθητών έφτιαξε ένα πρόβλημα που λυνόταν με μια πράξη.

Το τέταρτο και τελευταίο δοκίμιο του αρχικού τεστ αφορούσε ημι-δομημένη μαθηματική κατάσταση και παρουσίαζε μια εικόνα ενός καταστήματος παιχνιδιών με τον τιμοκατάλογο και ένα παιδάκι που είχε μαζί του συγκεκριμένο αριθμό χρημάτων. Το 29% των μαθητών κατάφερε να διατυπώσει ένα πρόβλημα με ακρίβεια, π.χ. «*Ο Βαγγέλης έχει 30€ μαζί του. Αγόρασε την κούκλα των 9€, την μπάλα των 5€, τις κορύνες των 6€ και το αρκουδάκι των 7€. α) Πόσα ευρώ πλήρωσε συνολικά; β) Πόσα ευρώ του περίσσεψαν;*». Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (52%) έφτιαξαν ένα πρόβλημα μερικώς με ακρίβεια, έδιναν κάποια δεδομένα με πιο αφηρημένο τρόπο και κάποιος χωρίς την εικόνα μπροστά του δεν ήταν σε θέση να το λύσει, όπως για παράδειγμα ο μαθητής που έγραψε: «*Ο Δημητράκης θέλει να αγοράσει κάποια παιχνίδια. Έχει μαζί του 30€. Θέλει να πάρει το αυτοκινητάκι, που κοστίζει 22€ και το αρκουδάκι, που κοστίζει 7€. Α) Θα πάρει ρέστα; Β)Αν είχε 100€, θα μπορούσε να αγοράσει όλα τα παιχνίδια; Αν όχι πόσα ευρώ θα χρειαζόταν ακόμη;*». Το 19% των μαθητών παρουσίασαν μη ακριβή προβλήματα, διότι η έκφρασή τους παρουσίασε πολλές αδυναμίες και έτσι δεν ήταν ξεκάθαρα τα δεδομένα ή/και τα ζητούμενα του προβλήματος που κατασκεύασαν, όπως η μαθήτρια που έγραψε: «*Ο μικρός Κωνσταντής πήγε στο κατάστημα παιχνιδιών. Θέλει ένα αυτοκινητάκι και το αρκουδάκι. Έχει μόνο 30€ μαζί του. α) Θα του περισσέψουν ρέστα; β) Αν όχι θα του περισσέψουν λεφτά;*». Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε το γεγονός ότι κανένας μαθητής δεν βρέθηκε να μην έχει καταφέρει να διατυπώσει ένα πρόβλημα και να περιοριστεί σε απλές δηλώσεις, όπως στο αρχικό τεστ.

Η πλειοψηφία των μαθητών (76%) διατύπωσαν το πρόβλημά τους με ορθό τρόπο, χρησιμοποιώντας σωστά όλες τις πληροφορίες που δίνονταν στην εικόνα. Το 19% των μαθητών έφτιαξε ένα πρόβλημα στο οποίο δίνονταν σωστά μόνο κάποιες από τις πληροφορίες της εικόνας, π.χ, «*Ο Θέμης έχει 30€ μαζί. Μπορεί να αγοράσει την μπάλα, τις κορύνες, το αρκουδάκι;*» ή έδινε σωστά όλα τα δεδομένα και τα ζητούμενα αλλά η λύση του προβλήματος δεν συμφωνούσε με τον περιορισμό της εικόνας (ότι το παιδάκι είχε αρχικά μόνο 30€) π.χ. «*Ο Κωνσταντίνος πήγε σε ένα κατάστημα παιχνιδιών. Έχει μαζί του 30€. Αγόρασε 3 βάρκες, 5 κορύνες, 1 αρκουδάκι, 2 αυτοκινητάκια και 3 τουβλάκια αλλά είχε έκπτωση 123€. α)Πόσα λεφτά θα πληρώσει; β)Αν δεν είχε έκπτωση και είχε 180€ πόσα θα έπρεπε να πληρώσει;*». Μόνο ένας μαθητής (5%) δεν κατάφερε να κατασκευάσει σωστό πρόβλημα και βαθμολογήθηκε με σκορ 1. Το πρόβλημα που έγραψε παρουσίαζε κάποια δεδομένα με τρόπο δικό του, όχι όπως δίνονταν στην εικόνα: «*Ο Γιώργος θέλει να πάρει δύο μπάλες, που η μια κάνει 5€ και θέλει να πάρει μια κούκλα για την αδερφή του που κάνει 9€ και θέλει να πάρει μόνο 1 τουβλάκι που κάνει μόνο 1€*». Επίσης, από την κατασκευή του απουσίαζαν τα ζητούμενα, αν και επειδή είχε λύσει το πρόβλημα που κατασκεύασε κάνοντας μια πρόσθεση όλους τους αριθμούς που είχε αναφέρει, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ερώτηση στο πρόβλημά του θα ήταν: «*Πόσα χρήματα θα πληρώσει;*».

Μόνο τρεις μαθητές (14%) διατύπωσαν πρωτότυπα προβλήματα με ζητούμενα που δεν συναντούν συχνά στα προβλήματα που λύνουν στην καθημερινότητά τους σε αυτή την ηλικία. Ένα από αυτά τα προβλήματα ήταν το παρακάτω: «*Ο Δημήτρης θέλει να πάει να αγοράσει παιχνίδια και έχει μαζί του 30€. Θέλει να αγοράσει τα 4/8 των παιχνιδιών. Τα παιχνίδια που θα αγοράσει θα βγάζουν άθροισμα 29€. α)Ποια είναι τα παιχνίδια; β)Πόσο κοστίζει το κάθε παιχνίδι που αγόρασε και πόσα ρέστα πήρε; γ)Αν είχε 40€ και ήθελε να αγοράσει τα 2/8, ποια είναι αυτά και πόσο κάνουν;*». Οι περισσότεροι μαθητές (67%) έφτιαξαν προβλήματα εν μέρει αυθεντικά που σχετίζονταν με άλλα που συνάντησαν συχνά στο παρελθόν. Αυτή η κατηγορία μαθητών χρησιμοποίησε τουλάχιστον δύο από τις παρακάτω ερωτήσεις στα ζητούμενα των προβλημάτων που κατασκεύασε: «*Του φτάνουν τα λεφτά να τα αγοράσει/ Αν όχι πόσα ευρώ χρειάζεται ακόμη;*», «*Πόσα ευρώ θα πληρώσει;*», «*Πόσα ρέστα θα πάρει;», «Θα του περισσέψουν χρήματα/ Αν ναι τι άλλο μπορεί να πάρει;*», «*Αν είχε …. ευρώ, θα μπορούσε να πάρει και ….;»*. Το 19% περιορίστηκε σε μία ερώτηση μόνο στο πρόβλημα που έγραψε και αυτή ήταν μια από τις δύο παρακάτω: «*Πόσα ρέστα θα πάρει;/Πόσα ευρώ θα περισσέψουν;» ή «Μπορεί να αγοράσει* ….;/ Πόσο θα πληρώσει για …;».

Τέλος, όσον αφορά το επίπεδο δυσκολίας οι μαθητές ισομοιράστηκαν σχεδόν σε τρεις κατηγορίες. Τα προβλήματα που διατύπωσε το 29% ήταν προβλήματα που για την επίλυσή τους απαιτούνταν τουλάχιστον τρεις πράξεις, το 38% των μαθητών κατασκεύασε προβλήματα που για την επίλυση τους απαιτούνταν δύο πράξεις και το 33% κατασκεύασε προβλήματα, που για τη λύση τους απαιτούταν μόνο μια πράξη. Τα αποτελέσματα για την ΚΜΠ στο αρχικό τεστ για το σύνολο των μαθητών στο τρίτο και τέταρτο δοκίμιο παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 11.

Πίνακας 11

Ποσοστά (και συχνότητες) των κριτηρίων αξιολόγησης ΚΜΠ για το σύνολο των μαθητών στο τελικό τεστ για το τρίτο και το τέταρτο δοκίμιο

	Βαθμολογία					
	3		2		1	
	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο
Ακρίβεια	71% (15)	29% (6)	29% (6)	52% (11)		19% (4)
Ορθότητα	71% (15)	76% (16)	29% (6)	19% (4)		5% (1)
Αυθεντικότητα	5% (1)	14% (3)	67% (14)	67% (14)	29% (6)	19% (4)
Επίπεδο Δυσκολίας		29% (6)	76% (16)	38% (8)	24% (5)	33% (7)

Στο τρίτο δοκίμιο το κριτήριο της ορθότητας σχετιζόταν αρκετά με το κριτήριο του επιπέδου δυσκολίας, δηλαδή όσοι μαθητές ήταν σε θέση να κατασκευάσουν ένα σωστό πρόβλημα τότε ήταν πολύ πιθανό το πρόβλημα αυτό να είναι δύσκολο. Αν και από τον παραπάνω πίνακα μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι η ακρίβεια σχετίζεται απόλυτα με την ορθότητα, δεν ισχύει κάτι τέτοιο, γιατί αρκετοί που πέτυχαν σκορ 3 στην ακρίβεια σημείωσαν σκορ 2 στην ορθότητα και το αντίστροφο. Για το τέταρτο δοκίμιο το κριτήριο της αυθεντικότητας φαίνεται να σχετίζεται περισσότερο με το επίπεδο δυσκολίας στα προβλήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές, δηλαδή τα πρωτότυπα προβλήματα ήταν δύσκολα ενώ τα μη πρωτότυπα ήταν πιο απλά. Τις ενδείξεις αυτές επιβεβαιώνει ο συντελεστής συσχέτισης Spearman's rho, τα αποτελέσματα του οποίου παρουσιάζονται στον Πίνακα 12.

Πίνακας 12

Συσχετίσεις μεταξύ των κριτηρίων αξιολόγησης της ΚΜΠ στο τελικό τεστ.

	Ακρίβεια		Ορθότητα		Αυθεντικότητα		Επίπεδο Δυσκολίας	
	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο	3ο δοκίμιο	4ο δοκίμιο
Ακρίβεια	1	1	,300	,262	,105	,242	,141	,169
Ορθότητα	,300	,262	1	1	,105	,369	,884**	,413
Αυθεντικότητα	,105	,242	,105	,369	1	1	,168	,733**
Επίπεδο Δυσκολίας	,141	,169	,884**	,413	,168	,733**	1	1

**Συσχέτιση σημαντική στο επίπεδο 0.01 (2-tailed).

Προκειμένου να ελεγχθεί η επίδοση του κάθε μαθητή στην κατασκευή βγήκε και εδώ ο μέσος όρος (mean) των βαθμολογιών που πέτυχε σε όλα τα κριτήρια για τα δύο δοκίμια κατασκευής προβλημάτων του τελικού τεστ. Μετά από επεξεργασία των δεδομένων, διαπιστώθηκε ότι ο χαμηλότερος μέσος όρος βαθμολογίας ήταν 1,38 (x_{min}=1,38) ενώ ο υψηλότερος ήταν 2,88 (x_{max}=2,88). Παρακάτω, στον Πίνακα 13, φαίνονται οι κατηγορίες των μαθητών, οι συχνότητές τους και το ποσοστό κάθε κατηγορίας στο σύνολο του δείγματος. Ένας μαθητής σημείωσε πολύ χαμηλή επίδοση, 2 μαθητές σημείωσαν χαμηλή επίδοση, 14 σημείωσαν μέτρια επίδοση ενώ υψηλή επίδοση στην ΚΜΠ παρουσίασαν 4 μαθητές. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την ΚΜΠ στο αρχικό τεστ ήταν 2 μαθητές, 7, 7 και 5 μαθητές σε κάθε κατηγορία αντίστοιχα. Εξετάζοντας τα αποτελέσματα αναλυτικά για κάθε μαθητή, παρατηρήθηκε ότι 7 μαθητές από το σύνολο του δείγματος βελτίωσαν την επίδοσή τους και άλλαξαν κατηγορία στο τελικό τεστ. Συγκεκριμένα, 4 μαθητές που σημείωσαν χαμηλή επίδοση στο αρχικό τεστ τώρα πέτυχαν μέτρια, 1 μαθητής από χαμηλή επίδοση πέτυχε υψηλή, 1 από μέτρια σημείωσε υψηλή και 1 μαθητής από πολύ χαμηλή επίδοση πέτυχε μέτρια. Όλοι οι υπόλοιποι μαθητές έμειναν σταθεροί στην ίδια κατηγορία εκτός από 3 μαθητές που έπεσαν από την υψηλή επίδοση στη μέτρια (να σημειωθεί ότι στην κατηγορία της υψηλής επίδοσης στο αρχικό τεστ ήταν οριακά, γιατί έβγαζαν 2,5 μέσο όρο βαθμολογίας).

Πίνακας 13

Κατανομή μαθητών σε κατηγορίες ανάλογα με τον Μ.Ο. βαθμολογίας στα δοκίμια ΚΜΠ του τελικού τεστ

Κατηγορίες	Μ.Ο. βαθμολογίας ΚΜΠ	Συχνότητες	Ποσοστό
Πολύ χαμηλή επίδοση [1-1,50)	1,38	1	5%
Χαμηλή επίδοση [1,50-2)	1,63	1	10%
	1,88	1	
Μέτρια επίδοση [2-2,50)	2,00	2	66%
	2,13	5	
	2,25	2	
	2,38	5	
Υψηλή επίδοση [2,50-3)	2,50	2	19%
	2,63	1	
	2,88	1	

Σε αυτό το σημείο θα ελέγξουμε αν οι μαθητές, που είχαν υψηλή, μέτρια και χαμηλή επίδοση στην επίλυση προβλημάτων (όπως παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 7), είχαν αντίστοιχη επίδοση στην κατασκευή στο τελικό τεστ. Οι συχνότητες των μαθητών ανάλογα με την επίδοση που πέτυχαν στην επίλυση και στην κατασκευή παρουσιάζονται στον Πίνακα 14. Ο ένας μαθητής που είχε χαμηλή επίδοση στην ΕΜΠ πέτυχε καλύτερα αποτελέσματα στην ΚΜΠ καθώς σημείωσε μέτρια επίδοση. Από τους εφτά μαθητές που είχαν μέτρια επίδοση στην ΕΜΠ ο ένας πέτυχε πολύ χαμηλή επίδοση, δύο είχαν χαμηλή και τέσσερις που είχαν μέτρια επίδοση στην

ΚΜΠ. Τέλος, από τους δεκατρείς μαθητές που πέτυχαν υψηλή βαθμολογία στα δοκίμια ΕΜΠ, οι εννιά κατασκεύασαν προβλήματα που βαθμολογήθηκαν μέτρια και τέσσερις πέτυχαν υψηλή βαθμολογία στα προβλήματα που κατασκεύασαν. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για το τελικό τεστ υπήρξε μια τάση οι μαθητές που πέτυχαν μέτρια ή υψηλή επίδοση στην ΕΜΠ να πετυχαίνουν και μέτρια ή υψηλή επίδοση στην ΚΜΠ.

Πίνακας 14
Συχνότητες μαθητών με ανάλογα με την επίδοση που πέτυχαν στην ΕΜΠ και στην ΚΜΠ στο τελικό τεστ.

		Επίδοση στην ΚΜΠ			
		Πολύ χαμηλή	Χαμηλή	Μέτρια	Υψηλή
Επίδοση στην ΕΜΠ	Χαμηλή			1	
	Μέτρια	1	2	4	
	Υψηλή			9	4

Σύγκριση αποτελεσμάτων αρχικού και τελικού τεστ

Προκειμένου να διαπιστώσουμε αν σημειώθηκε μεταβολή σε κάθε κριτήριο αξιολόγησης των δοκιμίων από το αρχικό στο τελικό τεστ, μελετήθηκε η εξέλιξη της βαθμολογίας όλων των μαθητών για κάθε κριτήριο της ΕΜΠ και της ΚΜΠ ξεχωριστά. Όσον αφορά το πρώτο δοκίμιο επίλυσης προβλημάτων παρατηρούμε ότι η πλειοψηφία των μαθητών σημείωσαν μια σημαντική βελτίωση στα κριτήρια της ακρίβειας, της ορθότητας και της κατανόησης ενώ λιγότεροι μαθητές βελτίωσαν την αυθεντικότητα των απαντήσεών τους. Περισσότεροι μαθητές κατανόησαν το πρώτο πρόβλημα και ήταν σε θέση να το λύσουν σωστά με ακρίβεια στην απάντησή τους στο τελικό τεστ. Τα αποτελέσματα για το δεύτερο δοκίμιο επίλυσης προβλημάτων μας δείχνουν μικρές αλλαγές στην επίδοση. Οι βαθμολογίες που πέτυχαν οι μαθητές έμειναν σχεδόν ανεπηρέαστες, αφού η μεγαλύτερη μερίδα μαθητών κράτησαν σταθερή επίδοση σε όλα τα κριτήρια. Στον Πίνακα 15 παρουσιάζεται η κατανομή των μαθητών ανά κριτήριο της ΕΜΠ σε σχέση με το αν πέτυχαν καλύτερα, τα ίδια ή χειρότερα αποτελέσματα στο τελικό τεστ.

Πίνακας 15
Συχνότητες μαθητών ανάλογα με την εξέλιξη τους ανά κριτήριο της ΕΜΠ.

	1ο δοκίμιο			2ο δοκίμιο		
	Καλύτερη επίδοση	Σταθερή επίδοση	Χειρότερη επίδοση	Καλύτερη επίδοση	Σταθερή επίδοση	Χειρότερη επίδοση
Κατανόηση	9	10	2	4	14	3
Ορθότητα	10	9	2	4	13	4
Ακρίβεια	13	5	3	0	21	0
Αυθεντικότητα	6	12	3	1	20	0

Προχωρώντας στην κατασκευή προβλημάτων, παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα για το τρίτο δοκίμιο, που αφορούσε την κατασκευή προβλήματος σε δομημένη μαθηματική κατάσταση, περισσότεροι μαθητές τα πήγαν καλύτερα στο κριτήριο της ορθότητας και της αυθεντικότητας και ενώ στο κριτήριο της ακρίβειας και του επίπεδου δυσκολίας το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών κράτησαν σταθερή επίδοση, ένας μικρός αριθμός ατόμων βελτίωσαν την επίδοσή τους και άλλοι τόσοι σημείωσαν χειρότερη επίδοση. Στο τέταρτο και τελευταίο δοκίμιο, που αφορούσε την κατασκευή προβλήματος σε ημι-δομημένη μαθηματική κατάσταση, οι μαθητές πέτυχαν καλύτερες επιδόσεις πιο πολύ στο κριτήριο της αυθεντικότητας, της ορθότητας και του επιπέδου δυσκολίας και λιγότερο της ακρίβειας. Περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να διατυπώσουν στο τελικό τεστ ένα σωστό πρόβλημα με έμφαση στην πρωτοτυπία και το επίπεδο δυσκολίας. Στον Πίνακα 16 παρουσιάζεται η κατανομή των μαθητών ανά κριτήριο της ΕΜΠ σε σχέση με το αν πέτυχαν καλύτερα, τα ίδια ή χειρότερα αποτελέσματα στο τελικό τεστ

Πίνακας 16
Συχνότητες μαθητών ανάλογα με την εξέλιξη τους ανά κριτήριο της ΚΜΠ.

	3ο δοκίμιο			4ο δοκίμιο		
	Καλύτερη επίδοση	Σταθερή επίδοση	Χειρότερη επίδοση	Καλύτερη επίδοση	Σταθερή επίδοση	Χειρότερη επίδοση
Ακρίβεια	3	15	3	6	12	3
Ορθότητα	7	10	4	8	11	2
Αυθεντικότητα	9	7	5	9	9	3
Επίπεδο Δυσκολίας	4	13	4	8	9	4

5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Κύριος σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η μελέτη της ικανότητας κατασκευής μαθηματικού προβλήματος από τους μαθητές της Γ’ τάξης δημοτικού πριν και μετά τη συμμετοχή τους σε ένα πρόγραμμα παρέμβασης και έπειτα η διερεύνηση της σχέσης που μπορεί να υπάρχει μεταξύ των ικανοτήτων ΚΜΠ και ΕΜΠ. Για να γίνει αυτό σχεδιάστηκε ένα αρχικό τεστ, που εξέταζε τις δύο ικανότητες (επίλυση – κατασκευή), ένα πρόγραμμα παρέμβασης πάνω στην κατασκευή προβλήματος και ένα τελικό τεστ αντίστοιχο του αρχικού. Τα αποτελέσματα των δύο τεστ καθώς και του προγράμματος παρέμβασης μας οδηγούν στην εξαγωγή κάποιων συμπερασμάτων, όπως παρουσιάζονται παρακάτω, οργανωμένα σε δύο κατηγορίες: αυτά που αφορούν την κατασκευή προβλήματος και αυτά που αφορούν τη σχέση ανάμεσα στην επίλυση και την κατασκευή.

Κατασκευή μαθηματικού προβλήματος πριν και μετά τη συμμετοχή στο πρόγραμμα

Τα αποτελέσματα της έρευνας (σύμφωνα με τον Πίνακα 6) έδειξαν ότι οι μισοί περίπου μαθητές (57%) ήταν σε θέση να κατασκευάζουν προβλήματα πριν την παρέμβαση, αφού σημείωσαν από μέτρια έως υψηλή επίδοση. Ωστόσο, υπήρξε και ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό μαθητών (43%) που είτε δεν μπορούσαν να ανταποκριθούν καθόλου στην κατασκευή προβλημάτων ή οι κατασκευές τους ήταν ελλιπείς, αφού σημείωσαν επίδοση από πολύ χαμηλή έως χαμηλή. Στο τελικό τεστ τα ποσοστά για τις αντίστοιχες κατηγορίες είναι 85% και 15% (Πίνακας 13). Η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών, όπως γίνεται φανερό, κατάφεραν να ανταποκριθούν από μέτρια μέχρι πολύ καλά στα δοκίμια κατασκευής προβλημάτων. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, εφτά μαθητές από το σύνολο του δείγματος βελτίωσαν την επίδοσή τους, δηλαδή το 1/3 του δείγματος, και άλλαξαν κατηγορία στο τελικό τεστ. Οι περισσότεροι από αυτούς (πέντε) εξελίχθηκαν και μεταπήδησαν στην επόμενη κατηγορία (τέσσερις από χαμηλή επίδοση σε μέτρια και ένας από μέτρια σε υψηλή). Λιγότεροι (δύο) κατάφεραν να περάσουν δύο κατηγορίες πιο ψηλά (ένας από πολύ χαμηλή σε μέτρια και ένας από χαμηλή σε υψηλή). Η πτώση 3 μαθητών από την υψηλή στη μέτρια επίδοση δεν θεωρείται σημαντικό γεγονός για το μέγεθος του δείγματος και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι βρίσκονταν αρχικά στην κατηγορία της υψηλής επίδοσης οριακά, βγάζοντας 2,5 μέσο όρο βαθμολογίας. Από τα παραπάνω μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η συμμετοχή των μαθητών σε ένα πρόγραμμα παρέμβασης στην κατασκευή μαθηματικού προβλήματος μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερα αποτελέσματα στην ικανότητά τους να κατασκευάζουν προβλήματα, κυρίως σε αυτούς που έχουν χαμηλή επίδοση.

Εξετάζοντας αναλυτικά την εξέλιξη που σημείωσαν οι μαθητές σε κάθε κριτήριο της κατασκευής προβλημάτων (Πίνακας 16) παρατηρούμε ότι για το 3^{ο} δοκίμιο, που αφορούσε δομημένη μαθηματική κατάσταση, περισσότεροι από τους μισούς μαθητές πέτυχαν παρόμοια αποτελέσματα στα κριτήρια της ακρίβειας και του επιπέδου δυσκολίας στο αρχικό και τελικό τεστ, κράτησαν δηλαδή σταθερή επίδοση. Στο κριτήριο της ορθότητας και αυθεντικότητας περισσότεροι μαθητές σημείωσαν βελτίωση. Για το 4^{ο} δοκίμιο, που αφορούσε ημι-δομημένη μαθηματική κατάσταση, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν οι μισοί περίπου μαθητές κράτησαν σταθερή την επίδοση τους σε όλα τα κριτήρια ενώ το 1/3 περίπου των μαθητών βελτίωσαν την επίδοσή τους σε όλα τα κριτήρια. Μπορούμε, επομένως, να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι, έπειτα από τη συμμετοχή των μαθητών σε ένα πρόγραμμα παρέμβασης, αυτοί είναι σε θέση να διατυπώνουν πιο σωστά και πρωτότυπα προβλήματα και στις δύο καταστάσεις. Στις δομημένες μαθηματικές καταστάσεις δεν φάνηκε να επηρεάζεται σημαντικά η ακρίβεια και το επίπεδο δυσκολίας των κατασκευασμένων προβλημάτων, η πρώτη λόγω ίσως του μικρού της ηλικίας των μαθητών, που οδηγεί πολλές φορές σε βιαστικές διατυπώσεις των όσων έχουν στο μυαλό τους και το δεύτερο λόγω πιθανόν της φύσης των δραστηριοτήτων αυτών, καθώς το πρόβλημα - πρότυπο τους καθοδηγεί αρκετά και τους υποδεικνύει τον αριθμό των πράξεων με τον οποίο θα έπρεπε να λύνεται το πρόβλημα που κατασκευάζουν. Ωστόσο στις ημι-δομημένες καταστάσεις υπάρχει βελτίωση και σε αυτά τα κριτήρια, μετά τη συμμετοχή στο πρόγραμμα, αφού στην κατασκευή προβλήματος με βάση την εικόνα στο τέλος παρατηρήθηκε μεγαλύτερη ακρίβεια στη διατύπωση των προβλημάτων και αυξημένο επίπεδο δυσκολίας σε σχέση με το αρχικό τεστ. Στο πνεύμα αυτό κινείται και η έρευνα της English (1997b) και της Crespo (2003), που μελέτησαν την κατασκευή προβλημάτων σε μαθητές της πέμπτης τάξης και εκπαιδευτικούς αντίστοιχα και βρήκαν ότι τα υποκείμενα που συμμετείχαν στο πρόγραμμά της καθεμίας είχαν θέσει στο τέλος πιο σύνθετα προβλήματα.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας για την κατασκευή προβλήματος στο αρχικό τεστ (Πίνακας 4) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι περισσότεροι μαθητές πέτυχαν σκορ από 2 μέχρι 3 σε όλα τα κριτήρια του δοκιμίου που αφορούσε δομημένη μαθηματική κατάσταση έναντι αυτού που αφορούσε ημι-δομημένη. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με τη διεθνή βιβλιογραφία, όπου έρευνες έδειξαν ότι οι μαθητές είχαν χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας στην κατασκευή προβλήματος σε ελεύθερο και ημι-δομημένο πλαίσιο σε σχέση με το δομημένο πλαίσιο (Stoyanova & Ellerton, 1996, Stoyanova, 1997) όπως, επίσης, και με την έρευνα των Μουσουλίδη, Φιλίππου και Χρίστου (2003), η οποία έδειξε ότι η επίδοση των μαθητών στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων σε ημι-δομημένες μαθηματικές καταστάσεις ήταν χαμηλότερη από την επίδοση τους στην κατασκευή προβλήματος με βάση δομημένες. Ωστόσο, όπως σημειώθηκε παραπάνω, μετά τη συμμετοχή των μαθητών στο πρόγραμμα παρέμβασης οι μαθητές πέτυχαν καλύτερα σκορ στο τελικό τεστ στην κατασκευή προβλήματος σε ημι-δομημένη μαθηματική κατάσταση σε όλα τα κριτήρια ενώ στη δομημένη μόνο στην ορθότητα και την αυθεντικότητα. Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η εξάσκηση σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων μπορεί να επηρεάσει θετικά την επίδοση των μαθητών στην κατασκευή προβλημάτων σε διάφορες μαθηματικές καταστάσεις.

Αξίζει σε αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι κατά το πρόγραμμα παρέμβασης στις συναντήσεις που αφορούσαν δομημένες μαθηματικές καταστάσεις οι μαθητές αρχικά συμμετείχαν πιο διστακτικά, αλλά στη συνέχεια οι περισσότεροι συμμετείχαν ενεργά και με αυτοπεποίθηση για τις απαντήσεις τους. Κατά τη διάρκεια των συναντήσεων που αφορούσαν ημι-δομημένες μαθηματικές καταστάσεις οι μαθητές χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο για να χειριστούν τις πληροφορίες και να γράψουν τα δικά τους προβλήματα. Όμως, στις συναντήσεις αυτές έδειξαν περισσότερο ενθουσιασμό και συμμετείχαν ενεργά ακόμα και οι μαθητές που δεν έδειχναν ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά τον υπόλοιπο χρόνο. Αυτό συμφωνεί και με τα ευρήματα των English (1998) και Silver (1994) που συμπέραναν ότι η εμπειρία των μαθητών με διαδικασίες κατασκευής προβλημάτων εμπνέουν ενθουσιασμό και παρέχουν κίνητρα. Οι μαθητές με μέτρια και καλή επίδοση κυρίως επιθυμούσαν να κατασκευάσουν ένα ενδιαφέρον και δύσκολο πρόβλημα. Η ενεργή συμμετοχή στο πρόγραμμα παρέμβασης καθώς και η προσπάθεια των μαθητών να κατασκευάσουν προβλήματα δύσκολα και πρωτότυπα για τους συμμαθητές τους επιβεβαιώνει τον Winograd (1991), που συμπέρανε στην έρευνά του ότι οι μαθητές είχαν υψηλό κίνητρο για να κατασκευάσουν προβλήματα που οι συμμαθητές τους θα έβρισκαν ενδιαφέροντα ή δύσκολα.

Επίλυση μαθηματικού προβλήματος πριν και μετά τη συμμετοχή στο πρόγραμμα

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, όπως παρουσιάστηκαν και στους Πίνακες 3 και 10, οι μαθητές χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με την επίδοσή τους στα δοκίμια της επίλυσης. Στο αρχικό τεστ η μεγαλύτερη μερίδα μαθητών σημείωσαν μέτρια επίδοση ενώ στο τελικό οι πιο πολλοί μαθητές πέτυχαν υψηλή επίδοση. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, παρατηρήθηκε ότι 8 μαθητές, δηλαδή περίπου το 1/3 από το σύνολο του δείγματος, βελτίωσαν την επίδοσή τους και άλλαξαν κατηγορία στο τελικό τεστ. Οι τρεις από αυτούς μεταπήδησαν δυο κατηγορίες (από χαμηλή επίδοση σε υψηλή) και οι άλλοι πέντε πέρασαν μια κατηγορία επίδοσης πιο ψηλά (ένας από χαμηλή σε μέτρια ή τέσσερις από μέτρια σε υψηλή). Επομένως, παρατηρήθηκε πρόοδος στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων από τους μαθητές χαμηλή και μέτρια επίδοση μετά τη συμμετοχή τους στο πρόγραμμα παρέμβασης, γεγονός που επιβεβαιώνει ανάλογες ερευνητικές μελέτες, που αποδεικνύουν ότι η κατασκευή προβλημάτων έχει θετική επίδραση στην ικανότητα των μαθητών να λύνουν προβλήματα (Leung & Silver, 1997) και συγκεκριμένα της English (1997a, 1997b, 1998), που υποστήριξε ότι οι μαθητές που εμπλέκονται σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων βελτιώνουν τον τρόπο σκέψης τους, τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και την αυτοπεποίθησή τους στην επίλυση προβλημάτων.

Στο αρχικό τεστ οι μαθητές σημείωσαν χαμηλότερες βαθμολογίες στο 1^{ο} δοκίμιο ενώ στο τελικό τεστ περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να κατανοήσουν, να λύσουν σωστά και με ακρίβεια το αντίστοιχο δοκίμιο (Πίνακας 15). Αρκετοί μαθητές, στο αρχικό τεστ, όταν τους ζητήθηκε να λύσουν το πρώτο πρόβλημα, απλά έγραψαν την απάντησή τους χωρίς να δώσουν κάποια αιτιολόγηση. Μετά τη συμμετοχή τους στο πρόγραμμα κατασκευής προβλημάτων, περισσότεροι μαθητές συνειδητοποίησαν πώς να επιλέξουν την κατάλληλη στρατηγική, για να φτάσουν στη σωστή απάντηση και να την παρουσιάσουν με ακριβή τρόπο. Στο τελικό τεστ περισσότεροι από τους μισούς μαθητές σημείωσαν μια σημαντική βελτίωση στο κριτήριο της ακρίβειας, περίπου οι μισοί πέτυχαν καλύτερα αποτελέσματα στο κριτήριο της ορθότητας και της κατανόησης ενώ οι μισοί μαθητές κράτησαν σταθερή την επίδοσή τους στην αυθεντικότητα των απαντήσεών τους. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι ένα μεγάλο μέρος των μαθητών κατανόησαν καλύτερα το πρώτο πρόβλημα και ήταν σε θέση να το λύσουν πιο σωστά και με περισσότερη ακρίβεια στην απάντησή τους στο τελικό τεστ. Οι πιο πολλοί μαθητές κατάφεραν να κατανοήσουν το πρόβλημα στο 2^{ο} δοκίμιο, να το λύσουν σωστά και με ακρίβεια τόσο στο αρχικό τεστ όσο και στο τελικό. Η αυθεντικότητα ήταν σταθερή, καθώς όλοι επέλεξαν να λύσουν το πρόβλημα με αριθμητικές πράξεις. Το γεγονός ότι η πλειοψηφία των μαθητών κράτησε σταθερή επίδοση στο 2^{ο} δοκίμιο σε όλα τα κριτήρια εξηγείται ίσως από προηγούμενες εμπειρίες των παιδιών με παρόμοια προβλήματα, που είχαν συναντήσει και λύσει στα σχολικά εγχειρίδια και έτσι ήταν εξοικειωμένοι με αυτά και τον τρόπο επίλυσής τους. Έτσι, η συμμετοχή στο πρόγραμμα παρέμβασης δεν φαίνεται να επηρέασε σημαντικά την επίδοση των μαθητών στα κριτήρια της επίλυσης για αυτό το δοκίμιο.

Κατασκευή μαθηματικού προβλήματος και επίλυση

Τα αποτελέσματα της έρευνας μας δίνουν κάποια στοιχεία για τη σχέση που πιθανόν υπάρχει ανάμεσα στην επίλυση και την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος. Ιδιαίτερα στο πρόγραμμα παρέμβασης παρατηρήθηκε ότι σε κάποιες περιπτώσεις οι μαθητές, οι οποίοι κατάφερναν να επιλύουν σωστά τα προβλήματα, ήταν σε θέση να κατασκευάζουν πρωτότυπα προβλήματα με μεγαλύτερη ακρίβεια στη διατύπωση, πιο σωστά και πιο δύσκολα. Στις τελευταίες συναντήσεις, που αφορούσαν ημι-δομημένες μαθηματικές καταστάσεις, οι μαθητές που ήταν καλοί λύτες προβλημάτων προσπαθούσαν να θέσουν πιο πολύπλοκα προβλήματα, για να δυσκολέψουν τους συμμαθητές τους, όταν θα τα μοιράζονταν στην τάξη. Αντίθετα, οι μαθητές που ήταν μέτριοι ή πιο αδύναμοι στην επίλυση προβλημάτων κατασκεύαζαν πιο απλοϊκά προβλήματα. Η παρατήρηση αυτή επαληθεύει την έρευνα της Ellerton (1986), στην οποία ανέφερε ότι οι πιο ικανοί μαθητές κατασκεύασαν προβλήματα που ήταν πιο περίπλοκα, χρειάζονταν δηλαδή περισσότερες πράξεις, από αυτά που κατασκεύασαν οι λιγότερο ικανοί μαθητές.

Ωστόσο η κατηγοριοποίηση των μαθητών, όπως παρουσιάστηκε στους Πίνακες 7 και 14 για το αρχικό και τελικό τεστ αντίστοιχα, δίνει κάποια πιο ακριβή στοιχεία για τη σχέση μεταξύ επίλυσης και κατασκευής. Στο αρχικό τεστ η επίδοση στην επίλυση δε φάνηκε να σχετίζεται με την επίδοση στην κατασκευή. Μαθητές με χαμηλή επίδοση στην επίλυση τα κατάφερναν μέτρια ή και πολύ καλά στην κατασκευή και το αντίθετο, μαθητές με υψηλή επίδοση στην επίλυση πετύχαιναν μέτρια ή χαμηλά αποτελέσματα στην κατασκευή. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί ίσως από το γεγονός ότι οι καλοί μαθητές δεν είχαν εξασκηθεί ποτέ σε παρόμοιες δραστηριότητες κατασκευής και αρχικά δεν κατανόησαν τι έπρεπε να κάνουν και δεν απέδωσαν το μέγιστο των ικανοτήτων τους. Επίσης, οι μαθητές με πιο χαμηλή επίδοση ίσως βρήκαν αυτές τις δραστηριότητες πιο απλές από την επίλυση και κατάφεραν να πετύχουν καλύτερες βαθμολογίες σε αυτές. Στο τελικό τεστ φάνηκε να υπάρχει μια πιο έντονη σχέση μεταξύ της επίλυσης και της κατασκευής. Μαθητές που σημείωσαν μέτρια επίδοση στην επίλυση πέτυχαν οι περισσότεροι μέτρια επίδοση και στην κατασκευή ενώ οι μαθητές με υψηλή επίδοση στην επίλυση σημείωσαν από μέτρια μέχρι υψηλή επίδοση στην κατασκευή.

Πίνακας 17
Συσχέτιση (Spearman's rho) μεταξύ ικανότητας ΕΜΠ και ΚΜΠ.

		Αρχικό τεστ	Τελικό τεστ
		Μ.Ο. βαθμολογίας ΚΜΠ	Μ.Ο. βαθμολογίας ΚΜΠ
Μ.Ο. βαθμολογίας ΕΜΠ	Correlation Coefficient	,033	,421*
	Sig. (1-tailed)	,444	,029
	N	21	21

*. Συσχέτιση σημαντική στο επίπεδο 0.05 (1-tailed).

Ο συντελεστής συσχέτισης Spearman's rho ανάμεσα στους μέσους όρους των βαθμολογιών κάθε μαθητή στα δοκίμια επίλυσης και κατασκευής του αρχικού και τελικού τεστ μας δίνουν για το αρχικό τεστ μια πολύ ασθενή σχέση (r=0,033) μεταξύ των δύο ικανοτήτων ενώ για το τελικό μια μέτριας εντάσεως σχέσης (r=0,421). Έτσι, γίνεται φανερό ότι με τα δεδομένα του αρχικού τεστ δεν μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η ικανότητα επίλυσης μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής προβλημάτων. Όμως, τα αποτελέσματα του τελικού τεστ δείχνουν μια πιο έντονη σχέση μεταξύ επίλυσης και κατασκευής, γεγονός που μας κάνει να υποθέτουμε ότι η συμμετοχή σε ένα πρόγραμμα παρέμβασης πιθανόν να επηρεάζει τη σχέση αυτή. Μέσα από τη συμμετοχή στο πρόγραμμα κατασκευής προβλημάτων κάποιοι μαθητές εξοικειώθηκαν περισσότερο με τη δομή ενός προβλήματος, γνώρισαν και εφάρμοσαν διαφορετικές στρατηγικές για την επίλυση και την κατασκευή προβλημάτων. Έτσι, επηρεάστηκε η επίδοσή τους στην επίλυση και την κατασκευή, γεγονός που πιθανόν επίδρασε στη σχέση των δύο ικανοτήτων στο τελικό τεστ. Προτείνεται περισσότερη έρευνα πάνω σε αυτόν τον τομέα, ώστε να διαπιστωθεί η σχέση μεταξύ των ικανοτήτων και από ποιους παράγοντες επηρεάζεται. Μια ένδειξη ότι η ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής αναφέρθηκε, επίσης, στην έρευνα των Μουσουλίδη, Φιλίππου και Χρίστου (2003), οι οποίοι όμως πρότειναν επίσης περαιτέρω έρευνα για τη διερεύνηση αυτής της πρόβλεψης. Παρομοίως, οι Cai και Hwang (2002) είχαν διαπιστώσει διαφορετικές σχέσεις στην ικανότητα επίλυσης και κατασκευής ανάμεσα σε μαθητές των ΗΠΑ (ασθενής σχέση) και της Κίνας (ισχυρή σχέση) και υποστήριξαν ότι αυτό δεν θα πρέπει να ερμηνευθεί ως μια γενικότερη έλλειψη σχέσης μεταξύ επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων, αλλά τα αίτια της διαφοράς μπορούν να αποδοθούν στο είδος των στρατηγικών που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές των ΗΠΑ και της Κίνας.

Πιο ξεκάθαρα για τη σχέση επίλυσης και κατασκευής ήταν τα ευρήματα των Silver και Cai (1996), που έδειξαν ότι οι μαθητές με υψηλή επίδοση στην επίλυση προβλημάτων είχαν και υψηλή επίδοση στην κατασκευή όπως και ο ισχυρισμός του Kilpatrick (1987), ότι δηλαδή η ποιότητα των ερωτήσεων που οι μαθητές θέτουν θα μπορούσε να χρησιμεύσει ως δείκτης του πόσο καλά μπορεί ο ίδιος να λύσει τα προβλήματα. Ωστόσο από την παρούσα έρευνα γίνεται φανερό ότι δεν μπορούμε να συμπεράνουμε με ακρίβεια αν αυτοί που είναι καλοί λύτες προβλημάτων μπορούν και να κατασκευάσουν καλά προβλήματα ή το αντίθετο, αν αυτοί που δεν τα καταφέρνουν στην επίλυση προβλημάτων θα έχουν και αντίστοιχα αποτελέσματα και στην κατασκευή.

Περιορισμοί

Παρόλο που η παρέμβαση που εφαρμόσθηκε στην παρούσα έρευνα φέρνει κάποια θετικά αποτελέσματα για την επίλυση και κατασκευή προβλημάτων, υπήρχαν κάποιοι περιορισμοί κατά την εφαρμογή της. Η πίεση της διδακτικής ύλης ήταν ο πιο σημαντικός παράγοντας, που δεν άφηνε πολλές ελευθερίες στη διαχείριση του διαθέσιμου χρόνου. Η τρίτη δημοτικού είναι μια τάξη με πολλές νέες γνώσεις στα Μαθηματικά για τα παιδιά, που απαιτούν χρόνο για την κατανόηση και αφομοίωσή τους. Έτσι ο χρόνος ανάμεσα στη διδασκαλία των Μαθηματικών σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα και το πρόγραμμα παρέμβασης έπρεπε να μετριασθεί. Η ηλικία των μαθητών, επίσης, ήταν ένας περιορισμός στον τρόπο που σχεδιάστηκε το πρόγραμμα. Εφόσον οι μαθητές θα ασχολούνταν πρώτη φορά με το θέμα της κατασκευής επιλέχθηκαν μαθηματικές καταστάσεις (δομημένες και ημι-δομημένες) πιο εύκολες και διαχειρίσιμες για αυτούς. Επίσης, το μικρό της ηλικίας των μαθητών μερικές φορές λειτουργούσε ανασταλτικά και στη διεξαγωγή των τεστ. Στις μικρές ηλικίες τα παιδιά προτιμούν δραστηριότητες που μοιάζουν με παιχνίδι και είναι πιο ενεργητικές παρά δραστηριότητες που αφορούν το γράψιμο και τους θέτουν σε πιο παθητικούς ρόλους. Έτσι γίνεται κατανοητό ότι μπορεί να μην αντιμετώπιζαν όλοι οι μαθητές τα τεστ με την ανάλογη ωριμότητα, αλλά απλά να έγραφαν κάτι για να ξεμπερδεύουν γρήγορα. Επίσης, με βάση αυτό το κριτήριο επιλέχθηκαν και λίγα στον αριθμό δοκίμια, δύο για την επίλυση και δύο για την κατασκευή, τα αποτελέσματα των οποίων μπορεί να μην αντιπροσωπεύουν στο έπακρο τις ικανότητες επίλυσης και κατασκευής κάθε μαθητή.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές ακόμα και σε μικρές ηλικίες είναι σε θέση να θέτουν τα δικά τους προβλήματα. Δεν βρέθηκε κάποια ισχυρή ένδειξη ότι η ικανότητα επίλυσης μπορεί να προβλέψει την ικανότητα κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων. Ωστόσο, η εισαγωγή ενός προγράμματος παρέμβασης κατασκευής μαθηματικού προβλήματος στη διδασκαλία των μαθηματικών φαίνεται ότι μπορεί να λειτουργήσει ευνοϊκά στην ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν αλλά και να επιλύουν προβλήματα.

Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας φέρνουν κάποια νέα δεδομένα για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών. Αρχικά το πρόγραμμα παρέμβασης μπορεί να αποτελέσει ένα σημείο εκκίνησης και ένα εργαλείο για τους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν σε μικρές τάξεις του δημοτικού, έτσι ώστε να σχεδιάσουν καταστάσεις για την κατασκευή προβλημάτων σύμφωνα με την ύλη και το επίπεδο της τάξης. Αυτό μπορεί να βοηθήσει τη διδασκαλία για την επίλυση προβλημάτων παρέχοντας στους μαθητές νέες στρατηγικές γι' αυτή, όπως για παράδειγμα η αναδιατύπωση της εκφώνησης των προβλημάτων. Επίσης, η ενασχόληση των μαθητών με καταστάσεις κατασκευής προβλημάτων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στην ενεργή συμμετοχή τους στο μάθημα, να παρέχει κίνητρα και να βελτιώσει τη στάση τους για τα Μαθηματικά.

Επίσης, η ενασχόληση των μαθητών με καταστάσεις κατασκευής προβλημάτων μπορεί να φανεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την αξιολόγηση των μαθητών και τη διάγνωση των δυσκολιών που αντιμετωπίζει ο καθένας. Κυρίως οι δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων σε ημι-δομημένη κατάσταση δίνουν στον μαθητή την ευκαιρία να χρησιμοποιήσει την προηγούμενη εμπειρία του και να την εφαρμόσει προσπαθώντας να φτιάξει κάτι δικό του. Μέσα από τα προβλήματα που κατασκευάζει ένας μαθητής μπορεί να φανεί τι τον δυσκολεύει ή τι δεν έχει κατανοήσει και με αυτόν τον τρόπο και ο ίδιος ο μαθητής μπορεί ελέγχει τη δική του διαδικασία μάθησης αλλά και ο εκπαιδευτικός θα μπορέσει να παρέχει την κατάλληλη υποστήριξη, ώστε να βοηθήσει τον μαθητή να ξεπεράσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζει.

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια πιλοτική εφαρμογή ενός διδακτικού ημι-πειράματος. Κρίνεται σκόπιμο, επομένως, προκειμένου τα αποτελέσματα να μπορούν να γενικευθούν και να είναι ισχυρά, να πραγματοποιηθεί με μεγαλύτερο δείγμα που θα περιλαμβάνει ομάδα ελέγχου εκτός από πειραματική ομάδα. Επίσης, το πρόγραμμα παρέμβασης μπορεί να εμπλουτιστεί και να βελτιωθεί. Αν εφαρμοσθεί σε κάποια άλλη τάξη του δημοτικού, που η ύλη δεν είναι τόσο απαιτητική και οι μαθητές είναι πιο ώριμοι, μπορεί να ενσωματωθούν σε αυτό παραπάνω δραστηριότητες. Θα μπορούσαν να γίνουν συναντήσεις που να αφορούν και ελεύθερες μαθηματικές καταστάσεις, έτσι ώστε να εξετασθεί η ικανότητα των μαθητών στην κατασκευή και σε αυτόν τον τομέα. Επιπλέον, μπορούν να γίνουν μικρές συνεντεύξεις με κάποιους μαθητές, για να αξιολογηθεί ο τρόπος που σκέφτονται οι μαθητές πάνω στις δικές τους κατασκευές προβλημάτων. Αυτό θα μας παρέχει μία βάση, για να μελετήσουμε τις στρατηγικές που χρησιμοποιεί κάθε μαθητής, όταν κατασκευάζει ένα πρόβλημα. Επίσης, τα τεστ θα μπορούσαν να εμπλουτιστούν με περισσότερα δοκίμια, έτσι ώστε να επιτευχθεί μια πιο αντικειμενική αξιολόγηση της ικανότητας επίλυσης, κατασκευής και της μεταξύ τους σχέσης. Τέλος, για να εξασφαλισθεί η σταθερότητα των αποτελεσμάτων σε βάθος χρόνου προτείνεται να γίνει η χορήγηση κάποιου δοκιμίου σε ένα μεταγενέστερο στάδιο.

7.ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing.* Hillsdale,NJ: Erlbaum.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1993). *Problem posing: Reflections and applications.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bush, W., & Fiala, A. (1993). Problem Stories: A New Twist on Problem Posing. Στο S. Brown, & M. Walter, *Problem Posing: Reflections and Applications* (σσ. 167-173). Η.Π.Α.: Lawrence Erlbaum Associates.

Cai, J., & Cifarelli, V. (2005). Exploring mathematical exploration:how two college students formulated and solved their own mathematical problems. *Focus on learning problems in mathematics, 27*(3), pp. 43-72.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior*(21), pp. 401-421.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In F. M. Singer, N. F. Elletron, & J. Cai, *Mathematical Problem Posing From Research to Effective Practice* (pp. 3-34). New York: Springer.

Christou, C., & Philippou, G. (1998). The Developmental Nature of Ability to Solve One-Step Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4).

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralbatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 37*(3), pp. 149-158.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teacher's practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*, pp. 243-270.

Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematical problems: A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 261-271.

Ellerton, N. F. (1988). Exploring children's perception of mathemaiics through letters and problems wlillen by children. In A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th lnterntltional Conference for the Psychology of Mathematics Education. I*, pp. 280-287. Veszprem, Hungary: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*, σσ. 87-101.

English, L. D. (1997). Development of seventh-grade students' problem posing. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the twenty-first annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, pp. 241-248. University of Helsinki: Lahti Research and Training Center.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, pp. 183-217.

English, L. D. (1998). Children's Problem Posing within Formal and Informal Contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), pp. 83-106.

Gonzales, N. A. (1998). A Blueprint for Problem Posing. *School Science and Mathematics, 98*(8), pp. 448-456.

Kilpatrick, J. (1987). Problem Formulating: Where Do Good Problems Come From? In A. H. Schoenfeld, *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Earlbaum.

Kontorovich, I., & Koichu, B. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics*(83), σσ. 71-86.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), σσ. 149-161.

Leung, S. S. (1993). Mathematical problem posing: The influence of task formats, mathematics knowledge, and creative thinking. In I. Hirubashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. L. Lin (Ed.), *Proceedings oft he 17th lnterMtional Cmiference for the Psychology of Mathematics Education. 3*, pp. 33-40. Tsukuba, Japan: UniversitY ofTsukuba.

Leung, S. S. (1997). On the Role of Creative Thinking in Problem Posing. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 97*(3), pp. 81-85.

Leung, S., & Silver, E. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), σσ. 5-24.

Mamona-Downs, J. (1993). On analysing problem posing. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. L. Lin (Ed.), *Proceedings of the 17th lnternational Conference for the Psychology of Mathematics Education. 3*, pp. 41-47. Tsukuba, Japan: International Group for the Psychology in Mathematics Education.

Moses, B., Bjork, E., & Goldenberg, E. (1993). Beyond Problem Solving: Problem Posing. Στο S. Brown, & M. Walter, *Problem Posing: Reflections and Applications* (σσ. 178-188). Η.Π.Α.: Lawrence Erlbaum Associates.

Pittalis, M., Christou, C., Mousoulides, N., & Pitta-Pantazi, D. (2004). A Structural Model for Problem Posing. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, pp. 49-56.

Polya, G. (1957). *How to solve it?* Princeton, NJ: Princeton University Press.

PISA, (2003). Problem Solving for tomorrow's World. *Organisation for economic cooperation and development*.

Robson, C. (2010). *Η έρευνα του πραγματικού κόσμου*. Αθήνα: Gutenberg.

Rosli, R., Capraro, M., Goldsby, D., Gonzalez y Gonzalez, E., Onwuegbuzie, A., & Capraro, R. (2015). Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing. Στο F. Singer, N. Ellerton, & J. Cai, *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (σσ. 333-353). New York: Springer.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academic Press.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), pp. 19-28.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), 29*(3), pp. 75-80.

Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics, 83*, pp. 157-162.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An Analysis of Arithmetic Problem Posing by Middle School Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), pp. 521-539.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing Mathematical Problems: An Exploratory Study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), pp. 293-309.

Silver, E. A., & Mamona, J. (1989). Problem posing by middle school mathematics theachers. Στο C. Maher, G. Goldin, & R. Davis (Επιμ.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (σσ. 263-269). New Brunswick, New Jersey: Center for Mathematics, Science, and Computer Education.

Singer, F. M., Cai, J., & Ellerton, N. F. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational Studies in Mathematics, 83*, pp. 1-7.

Singer, F. M., Pelczer, I., & Voica, C. (2011). Problem posing modification as a criterion of mathematical creativity. In T. Rowland, & E. Swoboda (Ed.), *Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* Poland: University of Rzeszów.

Stoyanova, E. N. (1997). Extending and exploring students' problem solving via problem posing. Edith Cowan UniVersity.

Stoyanova, E. N., & Ellerton, N. F. (1996). A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics. In P. Clarkson (Ed.), *Technology In mathematics education* (pp. 518-525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Svetela, W., & Nicol, C. (1992). Evaluating problem solving in Mathematics. *Educational Leadership, 49*(8), pp. 42-59.

Winograd, K. (1991). Writing, solving and sharing original math story problems: case studies in the cognitive behaviour of fifth grade children's cognitive behaviour. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association.* Chicago.

ΔΕΠΠΣ (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο*. Ανακτήθηκε στις 12 Νοεμβρίου 2016, από http://www.pi-schools.gr/programs/depps.

Θεοδούλου, Ρ., Φιλίππου, Γ. (2003). Η ικανότητα κατασκευής μαθηματικού προβλήματος και η σχέση της με την επίδοση στα μαθηματικά. *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*. Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Μουσουλίδης, Ν., Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2003). Ένα μοντέλο της ικανότητας κατασκευής μαθηματικού προβλήματος σε δομημένο και ημι-δομημένο περιβάλλον. *2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.* Εθνικό Καπποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Πανεπιστήμιο Κύπρου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Φύλλο Εργασίας

<u>Προβλήματα</u>

1. Η Χαρά βοηθάει τη μητέρα της, που δουλεύει πολλές ώρες την ημέρα, στις δουλειές του σπιτιού. Χρησιμοποιεί το παρακάτω πρόγραμμα. Κάθε μέρα τακτοποιεί:

$1^η$ μέρα: Τα παιχνίδια της
$2^η$ μέρα: Το γραφείο της
$3^η$ μέρα: Τα ρούχα της
$4^η$ μέρα: Τη βιβλιοθήκη της
$5^η$ μέρα: Τα παιχνίδια της
$6^η$ μέρα: Το γραφείο της
$7^η$ μέρα: Τα ρούχα της

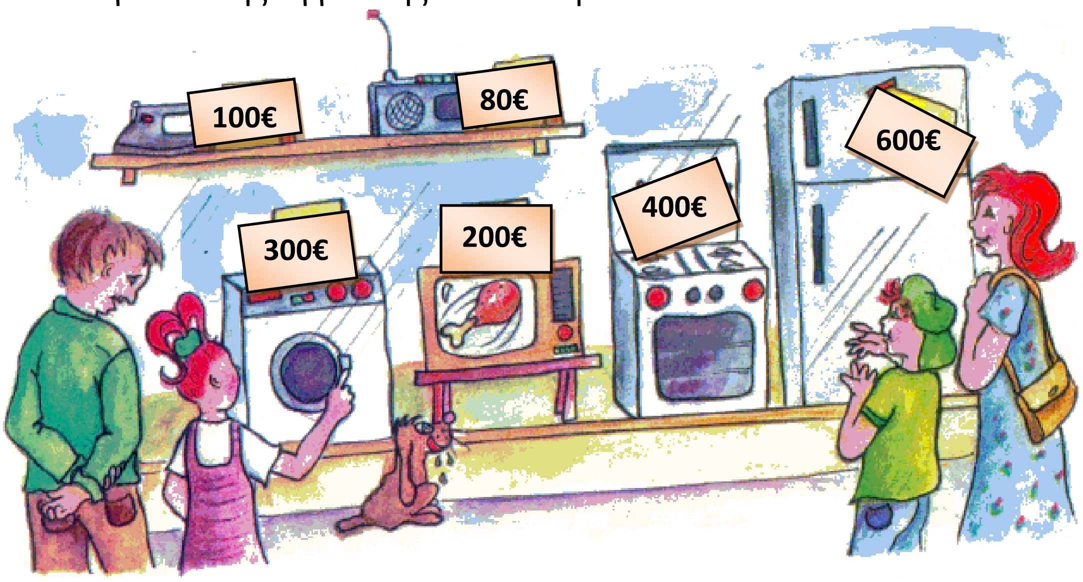
α) Τι κάνει η Χαρά την <u>$8^η$ μέρα</u>;

β) Μπορείς να βρεις έναν γρήγορο τρόπο, για να σκεφτείς τι κάνει η Χαρά τη <u>$13^η$ μέρα</u>; Εξήγησε τον τρόπο που σκέφτηκες.

2. Η Ζωή έχει στη συλλογή της 33 γραμματόσημα, ενώ η ο Θοδωρής έχει 12 γραμματόσημα περισσότερα από τη Ζωή. Πόσα γραμματόσημα έχουν και τα δύο παιδιά μαζί;

3. Μπορείς να φτιάξεις ένα πρόβλημα, που να λύνεται με τον ίδιο τρόπο που λύνεται και το παραπάνω;

4. Η οικογένεια της Αγγελικής διαθέτει μόνο 950€.



Μπορείς να φτιάξεις ένα πρόβλημα, που να μπορεί να λυθεί με κάποιες από τις πληροφορίες που δίνει η εικόνα;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

Φύλλο Εργασίας

<u>Προβλήματα</u>

1. Ο Φρόγκι, ένας μικρός βάτραχος, παίζει στα νερά μιας λίμνης πηδώντας από νούφαρο σε νούφαρο. Σε κάθε πηδηματάκι πηδάει:

1^{ο} πηδηματάκι: 1 νούφαρο

2^{ο} πηδηματάκι: 3 νούφαρα

3^{ο} πηδηματάκι: 2 νούφαρα

4^{ο} πηδηματάκι: 2 νούφαρα

5^{ο} πηδηματάκι: 1 νούφαρο

6^{ο} πηδηματάκι: 3 νούφαρα

7^{ο} πηδηματάκι: 2 νούφαρα

α) Πόσα νούφαρα θα πηδήξει στο <u>8^{ο} πηδηματάκι</u> και γιατί;

β) Μπορείς να βρεις έναν γρήγορο τρόπο, για να σκεφτείς πόσα νούφαρα θα πηδήξει στο <u>14^{ο} πηδηματάκι</u>; Εξήγησε τον τρόπο που σκέφτηκες.

2. Ένας αθλητής έτρεξε σε ένα γήπεδο 25 γύρους τη μία μέρα και 10 περισσότερους τη δεύτερη. Πόσους γύρους έτρεξε συνολικά και τις δύο μέρες;

3. Μπορείς να φτιάξεις ένα πρόβλημα, που να λύνεται <u>με τον ίδιο τρόπο</u> που λύνεται και το παραπάνω;

____

____

____

____

____

4.Μπορείς να φτιάξεις ένα πρόβλημα, που να μπορεί να λυθεί με κάποιες από τις πληροφορίες που δίνει η εικόνα;

____

____

____

____

____

____

____

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

1η Συνάντηση:

- Ο Κώστας έχει 9 βόλους. Έχει 3 περισσότερους από τον Πέτρο. Πόσους βόλους έχει ο Πέτρος;
- Η Στέλλα έχει 15€. Έχει 5€ λιγότερα από τον αδερφό της. Πόσα ευρώ έχει ο αδερφός της;
- Ένας έμπορος πούλησε την Παρασκευή 20 μέτρα ύφασμα. Αυτά ήταν 10 μέτρα περισσότερα από αυτά που πούλησε το Σάββατο. Πόσα μέτρα πούλησε το Σάββατο;

2η Συνάντηση:

- Ο κύριος Βασίλης είχε στο χωράφι του 145 ελαιόδεντρα. Μετά από χαλαζόπτωση καταστράφηκαν 65 ελαιόδεντρα. Πόσα ελαιόδεντρα έμειναν στο χωράφι του;
- Ο Όλυμπος, το ψηλότερο βουνό της Ελλάδας, έχει ύψος 2.918 μέτρα ενώ το Έβερεστ, το ψηλότερο βουνό του κόσμου, έχει ύψος 8.848 μέτρα. Πόσο ψηλότερο είναι το Έβερεστ από τον Όλυμπο;
- Μια βιομηχανία παιχνιδιών παράγει κάθε μήνα 500 ξύλινα στρατιωτάκια, 168 πλαστικά στρατιωτάκια περισσότερα από τα ξύλινα και 200 μεταλλικά στρατιωτάκια λιγότερα από τα πλαστικά. Πόσα στρατιωτάκια παράγει συνολικά κάθε μήνα;

3η Συνάντηση:

- Η Λίζα και ο Βλάσης πήγαν στο λούνα παρκ. Η Λίζα ανέβηκε 2 φορές στα συγκρουόμενα, 1 φορά στη ρόδα και 3 φορές στο τρενάκι. Ο Βλάσης ανέβηκε 4 φορές στα συγκρουόμενα, 2 φορές στη ρόδα και 1 φορά στο τρενάκι. Το εισιτήριο για τα συγκρουόμενα ήταν 2€, για τη ρόδα 4€ και για το τρενάκι 3€.
- Η Όλγα με τους γονείς της επισκέφτηκαν τον ζωολογικό κήπο. Για να γυρίσουν όλο τον ζωολογικό κήπο χωρίς στάση χρειάζονται 3 ώρες. Η οικογένεια σταμάτησε για 10 λεπτά να ταΐσουν τις πάπιες, άλλα 10 λεπτά να φωτογραφηθούν με τις καμηλοπαρδάλεις και 20 λεπτά για να φάνε. Τα εισιτήρια τους γράφουν ότι εκδόθηκαν στις 10:00 π.μ. Η Όλγα θέλει να κανονίσει ραντεβού με τη φίλη της, την Αφροδίτη, έξω από τον ζωολογικό κήπο, για να παίξουν.

4η Συνάντηση:

- Η Αλεξάνδρα και 3 φίλες της επισκέφθηκαν το θέατρο. Στο διάλειμμα πήγαν στο κυλικείο του θεάτρου και αγόρασαν ποπ κορν και αναψυκτικά. Όλες πήραν και από τα δύο είδη, εκτός από την Αλεξάνδρα που δεν πήρε ποπ κορν και μια φίλη της που δεν πήρε αναψυκτικό. Η μία συσκευασία ποπ κορν κόστιζε 4€ και το κάθε αναψυκτικό κόστιζε 3€. **Απάντηση**: α) Πλήρωσαν 12€. β) Πλήρωσαν 21€.

- Ένας φοιτητής για τις εξετάσεις του Φεβρουαρίου έχει διαβάσει την πρώτη βδομάδα 200 σελίδες, τη δεύτερη βδομάδα 150 σελίδες και την τρίτη βδομάδα 300 σελίδες από το βιβλίο του. **Απάντηση**: α) Διάβασε 150 σελίδες περισσότερες. β) Διάβασε 650 σελίδες.

- Ο πατέρας του Πάνου έχει μισθό 1.500€. Από αυτά διαθέτει 350€ για ενοίκιο, 400€ για φαγητό, 250€ για τους λογαριασμούς του σπιτιού και αποταμιεύει τα υπόλοιπα. **Απάντηση**: α) Αποταμιεύει 500€. β) Θα έχει αποταμιεύσει 3.000€.

5η Συνάντηση:

- Ο Αχιλλέας, η Δάφνη, ο Χρήστος και η Μυρτώ είναι 8 χρονών. Αποφάσισαν να φυτέψουν λουλούδια στην αυλή του σχολείου τους. Ξεκίνησαν στις 9:00 το πρωί και τελείωσαν στις 10:30. Ο Αχιλλέας φύτεψε 3 γλαστράκια με ζουμπούλια, η Δάφνη 5 γλαστράκια με κρίνα, ο Χρήστος 4 γλαστράκια με τουλίπες και η Μυρτώ 6 γλαστράκια με πανσέδες. Κάθε γλαστράκι κόστιζε 3€. Πόσα γλαστράκια φύτεψαν συνολικά τα παιδιά;
- Μια παιδική κατασκήνωση λειτούργησε την περασμένη χρονιά από τον Ιούνιο μέχρι τον Αύγουστο. Μπορούσε να φιλοξενήσει το πολύ 120 παιδιά κάθε μήνα. Τον Ιούνιο φιλοξένησε 40 κορίτσια και 35 αγόρια. Τον Ιούλιο φιλοξένησε 45 κορίτσια και 50 αγόρια. Τον Αύγουστο φιλοξένησε 50 κορίτσια και 60 αγόρια. Κάθε παιδί έπρεπε να πληρώσει 400€ για κάθε μήνα. Πόσα κορίτσια φιλοξένησε συνολικά η κατασκήνωση και τους τρεις μήνες;
- Τρία αδέρφια επισκέφτηκαν ένα κατάστημα παιχνιδιών. Ο Παύλος ήθελε να αγοράσει μια μπάλα αξίας 12€, η Μαρία ένα επιτραπέζιο παιχνίδι και ο Μιχάλης ένα παζλ αξίας 9€. Τους φτάνουν τα χρήματα, για να αγοράσουν αυτά που θέλουν;
- Για τα όγδοα γενέθλια του Βασίλη, ο πατέρας του ξόδεψε 30€ για το δώρο του, 25€ για την τούρτα και 5€ για ένα κουτί με 10 κεράκια. Πόσα χρήματα του έμειναν;

6η Συνάντηση:

- Η Βιολέτα και ο Αργύρης μαζεύουν χρωματιστούς βόλους. Η Βιολέτα έχει 23 βόλους. Ο Αργύρης έχει 22 βόλους παραπάνω από τη Βιολέτα. Πόσους βόλους έχουν και τα δύο παιδιά μαζί;
- Ένα κατάστημα με πασχαλινά είδη πούλησε τη Μεγάλη Πέμπτη 13 λαμπάδες, τη Μεγάλη Παρασκευή 15 λαμπάδες και το Μεγάλο Σάββατο 5

λαμπάδες περισσότερες και από τις δυο προηγούμενες μέρες μαζί. Πόσες λαμπάδες πούλησε και τις τρεις μέρες;

7^{η} Συνάντηση:

«Προσπάθησε να φτιάξεις ένα πρόβλημα που να λύνεται με την παρακάτω πράξη.»

35 + 25 = 60

8^{η} Συνάντηση:

«Προσπάθησε να φτιάξεις ένα πρόβλημα που να βασίζεται στην παρακάτω εικόνα.»