ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Μαθηματική εκπαίδευση Β΄ Ηλικιακού Κύκλου

Διπλωματική εργασία

Προσέγγιση της Αξιωματικής Θεμελίωσης από μαθητές Α΄ Λυκείου

της

Μαρίας Παπαγεωργίου
Α.Ε.Μ.: 582

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Τζεκάκη Μαριάννα, καθηγήτρια
Εξεταστές: Τζεκάκη Μαριάννα, καθηγήτρια
Καλδρυμίδου Μαρία καθηγήτρια
Πόταρη Δέσποινα, καθηγήτρια

Φλώρινα, Φεβρουάριος 2018

…the absence of a system is the cardinal psychological difference distinguishing spontaneous from scientific concepts...

Vygotsky

Περιεχόμενα 2

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μελέτη επιχειρείται η διδακτική προσέγγιση της Αξιωματικής Θεμελίωσης από μαθητές της Α΄ Λυκείου. Συγκεκριμένα, σε 43 μαθητές διερευνάται η δυνατότητα βελτίωσης της κατανόησης του ρόλου των αξιωμάτων, των ορισμών, των θεωρημάτων και της απόδειξης στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Παράλληλα καταγράφονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να αποδείξουν θεωρήματα στο πλαίσιο του Αξιωματικού Συστήματος. Οι μαθητές συμμετέχουν σε ειδικά σχεδιασμένη διδακτική παρέμβαση και εξετάζονται με ερωτηματολόγια πριν και μετά την παρέμβαση. Από τα αποτελέσματα της έρευνας διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές μπορούν, μέσα από κατάλληλες διαμορφωμένες δραστηριότητες, να προσεγγίσουν, ως ένα βαθμό, τη φύση της Αξιωματικής διαδικασίας.

Λέξεις κλειδιά: Αξιωματικό Σύστημα, Ευκλείδεια Γεωμετρία, ρόλος αξιωμάτων, ρόλος ορισμών, ρόλος θεωρημάτων, ρόλος απόδειξης, δυσκολίες στην κατασκευή απόδειξης.

ABSTRACT

The present study is focused on the educational approach of the Axiomatic Foundation from students of the 1st Grade of senior High School (Lyceum). Precisely, the subject that has been put under investigation is the possibility of improving the understanding of the role of the axioms, the definitions, the theorems and the proof of Euclidian Geometry, in a total of 43 students. The difficulties that have occurred from the students' part, while trying to prove the theorems within the Axiomatic System, have also been noted. The students took part in a specially designed educational intervention and were questioned via a questionnaire before and after that. From the conclusions of the study has been found that the students are capable of approaching, up to a point, the nature of the Axiomatic process, in a context of suitable classroom activities.

Key-words: Axiomatic System, Euclidian Geometry, axioms' role, definitions' role, theorems' role, proof's role, difficulties in the construction of the proof.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά:

Την επιβλέπουσα Καθηγήτρια κ. Μαριάννα Τζεκάκη, για τη βοήθεια, την καθοδήγηση, τη συνεργασία και τις πολύτιμες συμβουλές που μου έδωσε κατά την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Την Καθηγήτρια κ. Μαρία Καλδρυμίδου για τις σημαντικές παρατηρήσεις της και συμβουλές της.

Την Καθηγήτρια Κ. Δέσποινα Πόταρη που με τίμησε με τη συμμετοχή της στην τριμελή επιτροπή.

Τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εξερεύνηση του σύμπαντος και της ζωής, η περιγραφή και η ερμηνεία του κόσμου ήταν και είναι κύριες αναζητήσεις του ανθρώπου. Τα Μαθηματικά συνεισφέρουν και προάγουν αυτές τις αναζητήσεις, προσφέροντας σημαντικά εργαλεία. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Sardar, Ravetz και Van Loon (2015), τα Μαθηματικά είναι ένας οδηγός για τον κόσμο και, καθώς ο κόσμος μας γίνεται όλο και πιο σύνθετος και αβέβαιος, τα Μαθηματικά χρειάζονται όχι μόνο για να περιγράψουν τον κόσμο και τους επερχόμενους κινδύνους, αλλά και για να σχεδιάσουν τρόπους διαχείρισης και αντιμετώπισης των κρίσεων.

Ένας σημαντικός τομέας των Μαθηματικών είναι η Γεωμετρία. Μελετά το χώρο και τα σχήματα (Clements, 1998). Οι συντάκτες του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών για τα Μαθηματικά Α΄- Γ΄ Γυμνασίου στην αναθεωρημένη έκδοση του 2014 υποστηρίζουν ότι οι εφαρμογές της Γεωμετρίας σε προβλήματα της καθημερινότητας, η σύνδεσή της με τα Μαθηματικά και τις άλλες επιστήμες εξηγούν, γιατί η Γεωμετρία αρχίζει να εμφανίζει όλο και πιο σημαντικό ρόλο στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών πολλών χωρών. Υπογραμμίζουν ότι η αντίληψη, η κατανόηση και η διαχείριση προβλημάτων της καθημερινότητας προϋποθέτουν πλήθος γεωμετρικών και χωρικών σχέσεων.

Η σημασία της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δεν περιορίζεται μόνο στην μελέτη των σχημάτων του χώρου, στην χρηστική της αξία σε πολυάριθμες εφαρμογές και στην καλλιέργεια της χωρικής αντίληψης (ιδιαίτερα με τη Στερεομετρία). Η αξία της έγκειται, κυρίως, στην ανάδειξη της Μαθηματικής Απόδειξης και στην παρουσίαση της Αξιωματικής Θεμελίωσης ως τρόπου οργάνωσης της ανθρώπινης γνώσης. Η διδασκαλία της εισάγει τους μαθητές στον παραγωγικό συλλογισμό και τη βεβαιότητα που εξασφαλίζεται με αυτόν. Παράλληλα, γνωστοποιεί και εισάγει τους μαθητές, στην επιστημονική σκέψη («ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών», 2015).

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι ο πρώτος κλάδος που οργανώθηκε σε επιστήμη, και προέρχεται από τις φυσικές- καθημερινές εμπειρίες του ανθρώπου. Ο Kant υποστηρίζει ότι στηρίζεται σε μία εκ των προτέρων (a priori) αίσθηση του χώρου. (Izard et al, 2011). Τα ευρήματα της έρευνας που διεξήχθη το 2011 από τους Izard και συν. (2011), μια ομάδα ψυχολόγων, ενισχύουν την παραπάνω άποψη. Αυτοί κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι κατά τη παιδική ηλικία οι άνθρωποι, ακόμα και αν δεν έχουν καμία εκπαίδευση στα Μαθηματικά, αναπτύσσουν γεωμετρικές διαισθητικές αντιλήψεις που συμφωνούν με τις αρχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Εξέτασαν μια ομάδα Ινδιάνων του Αμαζονίου και διαπίστωσαν ότι είχαν διαισθητική κατανόηση βασικών ιδιοτήτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αν και δεν είχαν καμία εκπαίδευση σε αυτήν.

Σε αυτόν, τον πρώτο επιστημονικό κλάδο οργάνωσης της γνώσης, συναντώνται οι απαρχές της Αξιωματική Θεμελίωσης. Μια σημαντική μορφή επιστημονικής τεκμηρίωσης, που εκκινεί από τον Ευκλείδη και ολοκληρώνεται μετά από 2200 χρόνια. Ο Ευκλείδης στα Στοιχεία του, ξεκινώντας με ένα μικρό αριθμό διαισθητικών αξιωμάτων παράγει όλες τις υπόλοιπες προτάσεις. Είναι αυτός, που πρώτος οργανώνει όλες τις γεωμετρικές γνώσεις σε ένα σύστημα. Τα Στοιχεία του, παρουσίαζαν μια μέθοδο παραγωγής αξιόπιστης γνώσης και λογικής επιχειρηματολογίας, που επηρέασε και ενέπνευσε προσωπικότητες από διάφορους τομείς της επιστήμης και του πολιτισμού, όπως τους Isaac Newton, Thomas Jefferson, Abraham Lincoln και Albert Einstein. Τα Στοιχεία είναι το πιο διαδεδομένο έργο μετά τη Βίβλο. Για σχεδόν δύο χιλιετίες ήταν, βασικός πυλώνας της σκέψης και της λογικής του Δυτικού Πολιτισμού. (Clark, 2016).

Το αξιωματικό σύστημα που προτείνεται στα Στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας παρουσίαζε κενά και ατέλειες. Χρειάστηκε να περάσουν 22 αιώνες για να ολοκληρωθεί και να τελειοποιηθεί με τη βοήθεια της ανάπτυξης άλλων μαθηματικών τομέων, όπως της Ανάλυσης και της Θεωρίας Συνόλων. Όμως η αρχή και η βάση της Αξιωματικής Μεθόδου συναντάται στο έργο του Ευκλείδη. Μέθοδος, που βελτιώθηκε και καθορίστηκε με αυστηρούς κανόνες και αποτελεί τρόπο οργάνωσης της Μαθηματικής Γνώσης και πρότυπο ανάπτυξης της επιστημονικής γνώσης.

Σημαντικοί κλάδοι των Μαθηματικών, η Γεωμετρία, η Αριθμητική, η Θεωρία Συνόλων, θεμελιώνονται αξιωματικά. Επομένως, η μέθοδος αυτή, ως διαδικασία τεκμηρίωσης και θεμελίωσης είναι ύψιστης σημασίας στην Γεωμετρία, στα Μαθηματικά, αλλά και γενικότερα στην Επιστήμη. Η κατανόηση αυτής της μεθόδου είναι σημαντική για την προσέγγιση και ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του μαθηματικού τρόπου συλλογισμού. Προϋποθέτει την κατανόηση της διάκρισης των αξιωμάτων, την κατανόηση και αξιολόγηση των παραγωγικών συλλογισμών και της απόδειξης. Θέματα που είναι στο επίκεντρο της παρούσας έρευνας και θα μελετηθούν υπό το πρίσμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Τις τελευταίες τρεις δεκαετίες, στο πλαίσιο του μαθήματος της Γεωμετρίας των δύο πρώτων τάξεων του Λυκείου, οι μαθητές στην Ελλάδα έρχονται σε επαφή με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, καθώς και την εμπειρική αξιωματική μέθοδο, όχι βέβαια με την ακριβή μορφή που παρουσιάζεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Η παρούσα έρευνα επιχείρησε το σχεδιασμό διδακτικής παρέμβασης για την προσέγγιση της Αξιωματικής Θεμελίωσης της Γεωμετρίας από μαθητές της Α΄ Λυκείου. Συγκεκριμένα, κεντρικός ερευνητικός στόχος της εργασίας είναι να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό μια κατάλληλη διδακτική παρέμβαση μπορεί να βελτιώσει την κατανόηση των μαθητών για το ρόλο των δομικών στοιχείων της Γεωμετρίας και τη λειτουργία της απόδειξης στη σύνθεση και οικοδόμηση αυτού του εμπειρικού Αξιωματικού Συστήματος.

Η εργασία δομείται σε πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο, αρχικά επισημαίνεται η σημασία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως μοντέλο οργάνωσης μιας Θεωρίας. Ακολουθούν αναφορές σχετικά με τα δομικά στοιχεία, την απόδειξη και το ρόλο αυτών στο αξιωματικό σύστημα. Έπονται η ανάλυση του Duval (Boero, 2007) για τη λειτουργία ενός συλλογισμού και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με αναφορές σχετικά με τις δυσκολίες των μαθητών στην κατασκευή της απόδειξης στο πλαίσιο του Αξιωματικού Συστήματος.

Στο δεύτερο κεφάλαιο διατυπώνονται ο στόχος και τα ερευνητικά ερωτήματα και αποσαφηνίζεται το εννοιολογικό πλαίσιο. Η περιγραφή της μεθόδου, τα χαρακτηριστικά του δείγματος, η ερευνητική διαδικασία, το εργαλείο της έρευνας και η διδακτική παρέμβαση περιγράφονται στο τρίτο κεφάλαιο της Μεθοδολογίας. Τα αποτελέσματά της παρουσιάζονται στο τέταρτο κεφάλαιο. Η συζήτηση και τα συμπεράσματα, στα οποία αυτά οδηγούν, ακολουθούν στο πέμπτο και έκτο κεφάλαιο, αντίστοιχα. Τέλος, έπεται η βιβλιογραφία και το παράρτημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ως μοντέλο οργάνωσης μιας Θεωρίας

Θεμελιώδες χαρακτηριστικό όλων των κλάδων-περιοχών της μαθηματικής δραστηριότητας είναι η συνεχής αναδιοργάνωση και αναδιάρθρωση των

Μαθηματικών. Η Αξιωματική Μέθοδος αποτελεί σημαντικό μέσο αναδιοργάνωσης της υπάρχουσας γνώσης στα Μαθηματικά και μέσο παραγωγής νέας γνώσης. (μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες). Η συνεισφορά της στην ανάπτυξη των Μαθηματικών είναι μεγάλη και συνιστά ουσιαστικό μέρος της σύγχρονης μαθηματικής σκέψης (De Villiers, 1986). Μπορεί η ιστορική βάση της μεθόδου να βρίσκεται στον Αριστοτέλη, αλλά η πρώτη εφαρμογή της συναντάται στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Αυτός, χρησιμοποιώντας την Αξιωματική Μέθοδο, οργανώνει τις υπάρχουσες γεωμετρικές γνώσεις σε ένα σύστημα, το πρώτο μαθηματικό σύστημα.

Το σύστημα αυτό των αξιωμάτων και η πρώιμη εφαρμογή της Αξιωματικής Μεθόδου στα Στοιχεία του Ευκλείδη, ήταν τρόπος παραγωγής επιστημονικής γνώσης για πολλούς αιώνες. Από τον 13^{ο} ως το 18^{ο} σημειώνονται απόπειρες απόδειξης του Ευκλείδειου Αιτήματος της παραλληλίας. Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα γίνεται η ανακάλυψη της πρώτης μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αρκετοί μαθηματικοί αρχίζουν να υποψιάζονται την ανεξαρτησία του 5^{ου} αιτήματος από τα υπόλοιπα, όπως ο Gauss, Bolyaii και Lobachevsky. Ο τελευταίος, θεωρείται θεμελιωτής της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η συμβολή και των δύο στην ανάπτυξη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών θεωρείται σημαντική. (Αργυρόπουλος, 2016). Η ανακάλυψη αυτών των Γεωμετριών είναι καθοριστική για τη μορφή της Αξιωματικής Μεθόδου και τη φύση των Αξιωμάτων. Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα αρχές του 20^{ου} η θεμελίωση της Γεωμετρίας από τον Hilbert καθιερώνει την επικράτηση της τυπικής Αξιωματικής Μεθόδου. Η χρήση της οποίας διευρύνεται και στους υπόλοιπους τομείς της μαθηματικής επιστήμης. Από τα παραπάνω είναι ορατή η συμβολή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην κατοχύρωση της Αξιωματικής μεθόδου

Για πολλά χρόνια, στις περισσότερες χώρες του κόσμου, η Γεωμετρία αποτελούσε το πρώτο και ίσως το μοναδικό παράδειγμα ενός μαθηματικού συστήματος που συναντούσαν οι μαθητές της Μέσης Εκπαίδευσης. Παραδοσιακά, ήταν ο τόπος όπου οι μαθητές εισάγονταν στα θεωρητικά μαθηματικά όχι μόνο με τη γνωριμία τους με ένα σύστημα, αλλά και γιατί είχαν την ευκαιρία να αιτιολογούν, να εμπλακούν στη μαθηματική λογική και το συλλογισμό(Herbst, et. al., 2010).

Πιο συγκεκριμένα, η Ευκλείδεια Γεωμετρία παρέχει τη δυνατότητα στους μαθητές να προσεγγίσουν μια μαθηματική θεωρία, να ανιχνεύσουν τον τρόπο οργάνωσης της μαθηματικής γνώσης σε ένα σύστημα. Τη συμβολή της Γεωμετρίας στην κατανόηση της ανάπτυξης μαθηματικών θεωριών αναγνωρίζουν, όπως αναφέρουν οι Herbst, και συν. (2010), διακεκριμένοι μαθηματικοί όπως ο Usiskin και ο Poincare. Ο Usiskin επισημαίνει ότι η Γεωμετρία αποτελεί παράδειγμα ενός μαθηματικού συστήματος αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων. Ο Poincare τονίζει την απλότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που την καθιστά πιο κατανοητή από τις υπόλοιπες, αν και κάθε Γεωμετρία αποτελεί μια μαθηματική Θεωρία.

Διαχρονικά οι εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις στην μαθηματική εκπαίδευση επέφεραν σημαντικές αλλαγές στα Προγράμματα Σπουδών διεθνώς, εκτοπίζοντας το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τα Προγράμματα αρκετών χωρών, όπως της Αμερικής και της Αγγλίας. Διακεκριμένοι ερευνητές αυτών των χωρών, όπως Harel (1999), Jahnke και Wambach, (2013) και Clark (2016),θεωρούν αναγκαία τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Ο Harel (1999) μετά από έρευνα σε φοιτητές συμπεραίνει ότι θα ήταν προτιμότερο η διδασκαλία στα κολλέγια να ξεκινούσε με την Αξιωματική Ευκλείδεια Γεωμετρία και να συνεχιζόταν με άλλες Γεωμετρίες. Παράλληλα, θεωρεί επιτακτική την ανάγκη εισαγωγής του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στα Προγράμματα Σπουδών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Γιατί, στο πλαίσιο της, ο μαθητής μπορεί να έχει μία πρώτη γνωριμία και επαφή με ένα παραγωγικό σύστημα· την ύπαρξη του οποίου φαίνεται να αγνοούν εντελώς οι φοιτητές. Οι Jahnke και Wambach (2013) κρίνουν ότι κατά τη διάρκεια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης πρέπει να σχεδιάζονται διδακτικές παρεμβάσεις με θέμα την αξιωματική οργάνωση, ώστε οι μαθητές να είναι ενήμεροι για την ύπαρξη των αξιωμάτων, του ρόλου τους, αλλά και για το πώς, εντέλει, αποφασίζουν οι μαθηματικοί ποια αξιώματα θα αποδεχτούν. Κυρίως στο επίπεδο Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, η Γεωμετρία σε σχέση με την Άλγεβρα και την Ανάλυση, αποτελεί καλύτερο πλαίσιο κατανόησης της Αξιωματικής Ανάπτυξης μιας Θεωρίας (Clark, 2016).

Παρόμοιες θέσεις υποστηρίζονται και από έλληνες επιστήμονες, από τους συντάκτες τόσο του προγράμματος σπουδών της Α΄ Λυκείου που εφαρμόζεται από το 2011 στα σχολεία της Ελλάδος, όσο και του νέου προγράμματος για το Λύκειο που συντάχθηκε το 2015 στο πλαίσιο του προγράμματος «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών». Ειδικότερα, στο πρώτο αναφέρεται ότι η Θεωρητική Γεωμετρία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν μια αίσθηση της οικοδόμησης μιας Θεωρίας (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168, σ.16674). Στο δεύτερο, ως ένας από τους δύο κύριους στόχους της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο, καθορίζεται η παρουσίαση της Αξιωματικής Θεμελίωσης (ως τρόπου οργάνωσης της ανθρώπινης γνώσης). Επιπλέον, ως ένας από τους βασικούς σκοπούς της Μαθηματικής Εκπαίδευσης αναφέρεται η μύηση και η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Στα χαρακτηριστικά που διακρίνουν τους μαθητές που είναι ικανοί για μαθηματική σκέψη σημειώνεται και η ανάπτυξη της κατανόησης της διαφοράς μεταξύ των ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων. Η κατανόηση και αξιολόγηση μιας σειράς λογικών επιχειρημάτων και της απόδειξης υπογραμμίζονται ως κύρια χαρακτηριστικά των μαθητών που είναι ικανοί για μαθηματικό συλλογισμό. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία παρέχει το πλαίσιο καλλιέργειας και ανάπτυξης των παραπάνω χαρακτηριστικών.

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται, μέσα από το σχεδιασμό μιας παρέμβασης, οι μαθητές να ανιχνεύσουν τη δομή μιας μαθηματικής θεωρίας, της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, εστιάζοντας στα δομικά στοιχεία της. Στην παράγραφο που ακολουθεί παρουσιάζονται οι θέσεις σημαντικών εκπροσώπων της μαθηματικής κοινότητας σχετικά με αυτά.

1.2 Παρουσίαση ερευνητικών δεδομένων

1.2.1 Αναφορές στα δομικά χαρακτηριστικά και στην αποδεικτική διαδικασία του Αξιωματικού Συστήματος

Δομή του Αξιωματικού συστήματος

Σε κάθε Αξιωματικό Σύστημα, τα αξιώματα, οι ορισμοί και τα θεωρήματα είναι κύρια στοιχεία του συστήματος. Κάθε σύστημα περιέχει επίσης, ένα μικρό αριθμό απροσδιόριστων αρχικών όρων. Στο σύστημα αυτό, για το σύνολο των αξιωμάτων πρέπει να ικανοποιούνται κάποιες ιδιότητες-αρχές, όπως της συνέπειας, της ανεξαρτησίας και της πληρότητας. Οι ιδιότητες-αρχές της συνέπειας σχετίζονται με την απαίτηση της μη ύπαρξης στο σύστημα αντιφάσεων, δηλαδή προτάσεων που είναι ταυτόχρονα αληθής και ψευδής. Η αρχή-ιδιότητα της ανεξαρτησίας σχετίζεται με την μη ύπαρξη περιττών αξιωμάτων σε αυτό. Δηλαδή να μην υπάρχουν στο σύστημα αξιώματα που μπορεί να αποδειχθούν με βάση τα υπόλοιπα αξιώματα του συστήματος. Η αρχή-ιδιότητα της πληρότητας αφορά τη δυνατότητα να αποφανούμε για την ισχύ ή μη, κάθε πρότασης, που μπορεί να διατυπωθεί με τους όρους και τα αξιώματα του συστήματος.

Αποδεικτική διαδικασία σε ένα Αξιωματικό Σύστημα

Η διαδικασία οργάνωσης της γνώσης σε ένα σύστημα συντελείται με τη βοήθεια της Αξιωματικής Μεθόδου, και ονομάζεται αξιωματικοποίηση. Με αυτήν, από ένα μικρό αριθμό αξιωμάτων παράγονται όλες οι προτάσεις του συστήματος. Ο De Villiers (1986) αναφέρεται σε δύο είδη αξιωματικοποίησης, την περιγραφική (*Descriptive Axiomatization*) και την εποικοδομητική– κατασκευαστική (*Constructive Axiomatization*). Οι λειτουργίες τους είναι διαφορετικές, αλλά εξίσου σημαντικές. Κύρια λειτουργία της εποικοδομητικής – κατασκευαστικής αξιωματικοποίησης είναι η δημιουργία νέας γνώσης. Ένα γνωστό σύνολο αξιωμάτων, που τροποποιείται με αντικατάσταση, γενίκευση, αφαίρεση ή προσθήκη αξιωμάτων ή υποσυνόλου αξιωμάτων, μπορεί να οδηγήσει στην παραγωγή νέας γνώσης, όπως στις μη – Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Ο τρόπος ανάπτυξης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αντιστοιχεί στην περιγραφική αξιωματικοποίηση, μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η αναδιοργάνωση της υπάρχουσας μαθηματικής γνώσης. Μπορεί με την περιγραφική αξιωματικοποίηση να μη παράγεται νέα γνώση, αλλά επιτελούνται σημαντικές λειτουργίες. Μία από αυτές είναι ο εντοπισμός των κρυμμένων υποθέσεων-παραδοχών δηλαδή, η ανακάλυψη θεωρημάτων που στις αποδείξεις τους χρησιμοποιούν υποθέσεις-παραδοχές που δεν περιλαμβάνονται στα αξιώματα. Για παράδειγμα, οι παραδοχές που εντοπίζει ο Pasch στα στοιχεία του Ευκλείδη που αφορούν την έννοια του «μεταξύ». Μία εξίσου σημαντική λειτουργία της αξιωματικοποίησης είναι η αναγνώριση των κυκλικών συλλογισμών με στόχο την εξασφάλιση της εγκυρότητας των εξαγόμενων αποτελεσμάτων. Κατά την παραγωγική οργάνωση όλων των προτάσεων σε ένα σύστημα, οι αποδείξεις των προτάσεων του συστήματος παράγονται βάση μόνο προτάσεων, που έχουν ήδη αποδειχθεί με παράλληλη χρήση των ορισμών και των αξιωμάτων του συστήματος. Αν σε κάποια απόδειξη χρησιμοποιείται πρόταση που αποδεικνύεται στη συνέχεια,(φαινόμενο κυκλικού συλλογισμού), η απόδειξη δεν είναι έγκυρη. Η αξιωματικοποίηση μπορεί να συμβάλλει σε μία συνολική αντίληψη ενός θέματος για παράδειγμα, στην αντίληψη της δομής των πραγματικών αριθμών ως σώμα. Επιπλέον, μπορεί να οδηγήσει σε ανακάλυψη εναλλακτικών ανεξάρτητων συστημάτων, πιο οικονομικών, κομψών και ευέλικτων (πχ. τα αξιώματα Bachman στην προβολική Γεωμετρία). Σημαντικότατη είναι η συνεισφορά και χρήση της σε εφαρμογές εκτός της μαθηματικής επιστήμης, όπως, η αξιοποίηση της Άλγεβρας του

Boolean, στη μελέτη και ανάπτυξη των ψηφιακών ηλεκτρονικών κυκλωμάτων (De Villiers, 1986).

Φύση και ρόλος των αξιωμάτων σε ένα σύστημα

Τα αξιώματα σε κάθε θεωρία, για τους μαθηματικούς, είναι απλά, συμβάσεις. Πλέον στην εποχή μας, οι μαθηματικοί υιοθετούν αξιώματα ή υποθέσεις και εργάζονται με αυτά χωρίς να τα θεωρούν ως εμφανείς ή απολύτως αληθείς. Εντούτοις, ο υποθετικός χαρακτήρας των αξιωμάτων «παραμένει κρυμμένος από τους περισσότερους μαθητές» όπως αναφέρει ο Jahnke το 2010 (Zaslavsky et al., 2011). Ίσως στη Γεωμετρία, λόγω των πιθανών συνδέσεων των γεωμετρικών αντικειμένων με τα αντικείμενα του πραγματικού κόσμου, να παραποιείται η αντίληψη για τη φύση των αξιωμάτων. Αυτή η σύνδεση όμως δεν μπορεί να αποδείξει τις ιδιότητες των σχημάτων, όπως χαρακτηριστικά επισημαίνει ο Poincaré το 2001, ο οποίος αποσαφηνίζει ότι τα γεωμετρικά αξιώματα δεν είναι ούτε συνθέσεις που προκύπτουν από τη διαίσθηση (*à priori),* ούτε πειραματικά δεδομένα (Herbst et al., 2010).

Τα αξιώματα κατά τον DeVilliers (1996), αποτελούν απαραίτητα σημεία εκκίνησης ("*necessary starting points*") των μαθηματικών συστημάτων. Ενώ η Grigoriadou (2012) υποστηρίζει ότι είναι τα βασικά δομικά στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στηριζόμενοι σε αυτά, όπως και στους ορισμούς, μπορούμε να παράγουμε άλλες γενικές προτάσεις (Jahnke&Wambach, 2013). Διαφορετική, όπως αναφέρει ο Dawkins το 2014, είναι η άποψη του Freudenthal σχετικά με τα αξιώματα και το ρόλο τους στην οργάνωση μιας θεωρίας, ο οποίος το 1973 επισημαίνει ότι, στην παρουσίαση των επίσημων μαθηματικών, οι καθηγητές αντιμετωπίζουν τα αξιώματα ως σημεία εκκίνησης (“*starting points*”), αλλά ο ίδιος θεωρεί ότι είναι οι τελευταίες πινελιές (“*final touches*”) στην οργάνωση μιας μαθηματικής θεωρίας.

Φύση και ρόλος των ορισμών σε ένα σύστημα

Σε κάθε σύστημα οι ορισμοί, όπως και τα αξιώματα, είναι αυθαίρετες συμβάσεις. Στη Γεωμετρία όμως, που οι έννοιες είναι τόσο βαθιά εμπειρικά ριζωμένες, οι ορισμοί τείνουν να μη είναι και τόσο αυθαίρετες συμβάσεις. Κάτι που επισημαίνει ο Poincaré το 1968 με τη φράση «μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι αρχές της Γεωμετρίας είναι μόνο συμβάσεις· αλλά, αυτές οι συμβάσεις δεν είναι αυθαίρετες, και αν μεταφερθούν σε έναν άλλο κόσμο (τον οποίο αποκαλώ μη Ευκλείδειο και που προσπαθώ να φανταστώ) είμαστε υποχρεωμένοι να τις αλλάξουμε» (Mariotti& Fischbein, 1997).

Ο Freudenthal το 1973 αποκαλεί και τους ορισμούς, «τελευταίες πινελιές» στην οργάνωση μιας Θεωρίας, όπως τα αξιώματα, σημειώνοντας ότι οι περισσότεροι ορισμοί δεν είναι προκαθορισμένοι, αλλά διαμορφώνονται εκ των υστέρων. Επίσης αναφέρει ότι με τους ορισμούς περιγράφονται γνωστά αντικείμενα (DeVilliers,1998), ενώ για τους Mariotti και Fischbein (1997), με αυτούς εισάγονται τα αντικείμενα ή τα στοιχεία. Αυτοί επισημαίνουν την άποψη του DeVilliers, ότι μέσω των ορισμών ταξινομούνται τα γεωμετρικά αντικείμενα, και ο οποίος το 1998, προσδιορίζει το ρόλο των ορισμών χρησιμοποιώντας την έκφραση «συστηματοποίηση της υπάρχουσας γνώσης».

Κατά τον Vinner (2002), μέσω των ορισμών κατακτώνται οι έννοιες, αφού συντελούν στη διαμόρφωση της εικόνας της έννοιας, δηλαδή, της γνωστικής δομής που σχηματίζει το άτομο σχετικά με αυτήν. Αντιστοίχως, παρανοήσεις που πηγάζουν από την σχηματιζόμενη εικόνα της έννοιας, μπορούν να αποσαφηνιστούν με τη βοήθεια των ορισμών. Επιπρόσθετα, οι ορισμοί, όπως αναφέρουν οι Zaslavsky και Shir (2005), δημιουργούν τις βάσεις για τις αποδείξεις και την επίλυση προβλημάτων. Τέλος, οι ίδιοι επισημαίνουν ότι οι ορισμοί διευκολύνουν τη διακίνηση και επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών.

Φύση και ρόλος των θεωρημάτων σε ένα σύστημα

Σε ό,τι αφορά, ειδικότερα, στα θεωρήματα ξεχωρίζουν δύο οπτικές. Οι Mariotti και συν. (1997) θεωρούν ότι ένα «μαθηματικό θεώρημα» είναι ένα σύστημα που απαρτίζεται από τρία μέρη: μία δήλωση, μία απόδειξη και ένα «σώμα θεωρίας» ή μια «θεωρία αναφοράς». Ουσιαστικά το τρίτο αυτό μέρος, το «σώμα θεωρίας», αποτελεί το θεωρητικό πλαίσιο, δηλαδή το σύστημα των αρχών, των κανόνων και των συμπερασμάτων στο οποίο έχει νόημα η απόδειξη της δήλωσης (Mariotti, 2000). Ενώ οι Jahnke &Wambach (2013) εκτιμούν ότι κάθε θεώρημα μπορεί να θεωρηθεί ως μια πρόταση-δήλωση της μορφής «εάν- τότε». Δεν αναφέρονται στην εξωτερική μορφή του θεωρήματος, αλλά στο γεγονός ότι η αλήθεια ενός θεωρήματος εξαρτάται από την αλήθεια άλλων δηλώσεων. Έτσι κρίνουν ότι με την πρόταση-δήλωση της μορφής «εάν Α τότε Β», (είτε δηλώνεται ρητά είτε υπονοείται), ένα μαθηματικό θεώρημα δεν αφορά ένα «γεγονός Β», αλλά «το συμπέρασμα Β που εξάγεται ως συνέπεια της υπόθεσης Α». Επισημαίνουν ότι η απόλυτη βεβαιότητα των Μαθηματικών δεν βρίσκεται στα γεγονότα, αλλά στα συμπεράσματα. Τέλος, οι ίδιοι επισημαίνουν ότι η κατανόηση του ρόλου των παραδοχών, των αξιωμάτων και των υποθέσεων είναι σημαντική για να κατανοήσει κάποιος τι είναι απόδειξη.

Παράλληλα, η οργάνωση, η ταξινόμηση, και η παραγωγική διάταξη, τόσο των θεωρημάτων όσο και των ορισμών σε ένα μαθηματικό σύστημα διευκολύνουν τη μάθηση· γιατί συνδέουν λογικά τις προηγούμενες άσχετες και μεμονωμένες έννοιες και δηλώσεις. Επομένως, είναι πιο εύκολο κάποιος να συγκρατήσει στη μνήμη συναφείς έννοιες. Εκτός όμως από τους μαθησιακούς και παιδαγωγικούς ρόλους, σημαντικός ρόλος, επιστημολογικής φύσεως, είναι ο έλεγχος των ασυνεπειών και η αποφυγή κυκλικών συλλογισμών που επιτυγχάνεται με την παραπάνω διάταξη (DeVilliers, 1986).

Φύση και ρόλος της απόδειξης σε ένα σύστημα

Στην Ελλάδα, αλλά και παγκοσμίως, το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών επικεντρώνεται στην απόδειξη και τον πολυσχιδή ρόλο της. Στην παρούσα έρευνα, το ενδιαφέρον εστιάζεται στο ρόλο της στη δομή του αξιωματικού συστήματος της Γεωμετρίας. Ο Balacheff, (2010) δηλώνει ότι η «έννοια της απόδειξης» δεν είναι αυτόνομη, αλλά άρρηκτα συνυφασμένη με την έννοια της «επικύρωσης μιας δήλωσης» και την «έννοια μιας θεωρίας». Κάτι που, όπως ο ίδιος αναφέρει, έχει χαρακτηριστικά περιγραφεί και από την ιταλική σχολή και ειδικότερα από τους Mariotti το 1997. Παράλληλα, με τη φράση του «η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν είναι περισσότερο αληθής από τη Γεωμετρία του Riemannian», ουσιαστικά υιοθετεί την άποψη που διατύπωσε ο Habermas το1999. Σύμφωνα με αυτήν, ο βασικός ρόλος της απόδειξης δεν έγκειται στην απόδειξη της αλήθειας μιας δήλωσης, αλλά στην απόδειξη της εγκυρότητας της δήλωσης αυτής μέσα στο καθορισμένο πλαίσιο μιας Θεωρίας. Παρ’όλα αυτά, κατά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ο παραπάνω ρόλος της απόδειξης αποσιωπείται και φαίνεται παραδοσιακά να καλλιεργείται η ιδέα ότι η απόδειξη καθιερώνει την αλήθεια (Zaslavsky et al, 2011).

Το 1976 ο Bell διακρίνει τρεις διατάσεις στο ρόλο της απόδειξης, της επιβεβαίωσης (“*verification or justification”),* της διαφώτισης (“*illumination*”), τον οποίο ο DeVilliers μετονομάζει σε επεξήγηση (“*explanation”*), και της συστηματοποίησης (*systematization*) (Dawkins, 2014). Στους παραπάνω ρόλους, το

1990, ο DeVilliers προσθέτει άλλους δύο, αυτούς της ανακάλυψης (“*discovery”*) και της επικοινωνίας (“*communication”).* Οι πέντε αυτοί διαφορετικοί ρόλοι σχετίζονται με πέντε διαφορετικές λειτουργίες της απόδειξης: της αλήθειας-επικύρωσης μιας δήλωσης, της εξήγησης, δηλαδή, γιατί είναι αληθής μια δήλωση, της οργάνωσης σε ένα ευρύτερο παραγωγικό σύστημα, της ανακάλυψης ή εφεύρεσης νέων ευρημάτων και της μεταφοράς μαθηματικής γνώσης (Hanna & Barbeau, 2010). Σε αυτούς, όπως αναφέρει ο CadwalladerOlsker το (2011) οι Auslander και Weber πρόσθεσαν και το ρόλο της δικαίωσης ενός ορισμού *(“justification of definitions”*). Ο πρώτος χαρακτηριστικά αναφέρει ως παράδειγμα το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών που δικαιώνει τον ορισμό του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Ο δεύτερος σημειώνει επιπλέον ότι μέσω των αποδείξεων αναδεικνύονται τεχνικές και μέθοδοι όπως της μαθηματικής επαγωγής ή της άτοπου απαγωγής. Επιπλέον, ο Weber αναφέρει ότι στόχος κάποιων αποδείξεων είναι να διευκρινίσουν το τρίτο μέρος ενός θεωρήματος, όπως περιγράφηκε παραπάνω, κατά τους Mariotti και συν. το 1997, λέγοντας χαρακτηριστικά ότι «οι αποδείξεις δικαιώνουν τη χρήση ενός ορισμού ή της αξιωματικής δομής (Dawkins, 2014).

1.2.2. Δεδομένα για την κατανόηση των μαθητών σχετικά με τη δομή του αξιωματικού συστήματος

Η εμπειρική προέλευση πολλών εννοιών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας επηρεάζει και διαμορφώνει τις αντιλήψεις σχετικά με τη φύση των αξιωμάτων και των ορισμών. Η αντίληψη ότι τα αξιώματα είναι αυτονόητες αλήθειες ("*self-evident truths)* τροποποιήθηκε και άλλαξε με την ανακάλυψη και αποδοχή των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών. Ωστόσο αυτή την «κλασική» άποψη ότι, τα αξιώματα αποτελούν προτάσεις που αποδεχόμαστε χωρίς απόδειξη, γιατί εκφράζουν προφανείς-αυτονόητες αλήθειες, ανιχνεύει στις αντιλήψεις των μισών φοιτητών, μελλοντικών καθηγητών μαθηματικών σε έρευνα που διεξάγει ο DeVilliersτο 1984. Παρόμοιες αντιλήψεις εμφανίζονται ανάμεσα σε φοιτητές και δασκάλους για τους ορισμούς. Οι οποίοι, όπως προκύπτει από τις αναφορές των Linchevski, Vinner και Karsenty (1992), δεν φαίνεται να αντιλαμβάνονται ότι οι ορισμοί στα μαθηματικά είναι αυθαίρετοι. Ούτε καταλαβαίνουν ότι οι ορισμοί οφείλουν να είναι οικονομικοί, δηλαδή να μην περιέχουν περιττές πληροφορίες (DeVilliers, 1986, 1998).

Μεγάλος αριθμός ερευνών σε παγκόσμιο επίπεδο εστιάζει στις δυσκολίες κατανόησης που συναντούν οι μαθητές στο μάθημα της Γεωμετρίας και στις διαδικασίες της. Ο Nikoloudakis (2010) αναφέρει πλήθος ερευνών που καταγράφουν τις δυσκολίες αυτές (VanHieles, 1986; Hoffer, 1981; Usiskin 1982;1987; Burger and Shaughnessy, 1986; Crowley 1987; Fuys, Geddes, and Tischler 1988; Gutierrez, Jaime, and Fortuny 1991; Mason 1997; Wirszup, 1976). Παρόμοιες έρευνες διεξάγονται και στην Ελλάδα, όπως του Ζάχου το (2000) και του Τζίφα το (2005) (όπως αναφ. στο Ιγγλέζου, 2014).

Το 1984 οι Human και συν. σε μελέτη διαπιστώνουν ότι οι μαθητές που διδάσκονται τη Γεωμετρία με παραδοσιακές διδακτικές προσεγγίσεις, εμφανίζουν δυσκολίες στη διάκριση μεταξύ των αξιωμάτων και των θεωρημάτων. Αδυνατούν να αντιληφθούν την ανάγκη αποδοχής κάποιων προτάσεων ως αξιώματα, μέσω των οποίων στη συνέχεια μπορούν να αποδειχτούν τα θεωρήματα της Γεωμετρίας. (DeVilliers, 1986). Αργότερα, το 1986, ο Schoenfeld καταγράφει τις δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της φύσης της απόδειξης. Τέλος, το 1990 οι Hershkowitz και συν. σε επισκόπηση ερευνών, παρουσιάζουν τις δυσκολίες που εμφανίζουν οι μαθητές στην κατανόηση του ρόλου των δομικών στοιχείων ενός μαθηματικού συστήματος (όπως αναφ. στο Ιγγλέζου, 2014).

Μεμονωμένα κάποιοι ερευνητές, αλλά και οργανωμένες ομάδες επιστημόνων σχεδιάζουν και υλοποιούν διδακτικές παρεμβάσεις που στοχεύουν στην ανάδειξη και κατανόηση του ρόλου των αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων στη Γεωμετρία. Έτσι, το 1977 ομάδα ερευνητών από το πανεπιστήμιο του Stellenbosch διεξάγει ευρεία έρευνα, το πείραμα του USEME, με δύο κύριους στόχους: Την ανάπτυξη της ικανότητας κατασκευής οικονομικών ορισμών για γεωμετρικές έννοιες και της κατανόησης της φύσης και του ρόλου των αξιωμάτων, ορισμών και απόδειξης (DeVilliers, 1996, 1998). Το 2000, ο Θωμαΐδης σχεδιάζει παρέμβαση και εξετάζει την αναγνωστική ικανότητα μαθητών στην κατανόηση βασικών αρχών της ανάπτυξης της αξιωματικής θεωρίας (Θωμαΐδης, 2000). Το 2012, η Grigoriadou στην διδακτορική της διατριβή αναπτύσσει διδασκαλία τριών σταδίων. Στόχος του τρίτου σταδίου είναι η κατανόηση της ανάγκης ύπαρξης των αξιωμάτων-θεωρημάτων (Grigoriadou, 2012).

Η μεθοδολογία και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται στις προαναφερθείσες παρεμβάσεις είναι διαφορετικές. Στο πείραμα USEME χρησιμοποιείται η καθοδηγούμενη ανακάλυψη με τη βοήθεια κατάλληλα διαμορφωμένων ασκήσεων-έργων. Μικτή μέθοδος με παραδοσιακή διδασκαλία, συζήτηση και εργασία σε ομάδες εφαρμόζει ο Θωμαΐδης (2000), ενώ η Grigoriadou(2012) επιχειρεί επίτευξη των στόχων της μέσα από διαλογική συζήτηση.

Αναλυτικότερα, στην πρώτη παρέμβαση, στο πείραμα του USEME, δόθηκε μια σειρά ασκήσεων στους μαθητές που οδηγούσαν σε κυκλικά επιχειρήματα. Η αναγνώριση αυτής της κυκλικότητας, που ήταν πολύ δύσκολη για αρκετούς μαθητές, προσπελάστηκε μέσα από πολυάριθμες ασκήσεις-δοκιμές και σχετικές υποδείξεις. Τελικά, οι μαθητές διαπίστωσαν ότι, όσο και αν προσπαθούν, δεν μπορούν να αποδείξουν όλες τις προτάσεις σε ένα σύστημα, χωρίς να υποπέσουν σε κυκλικό συλλογισμό. Δηλαδή, κατανόησαν ότι είναι αναγκαία η αποδοχή αναπόδεικτα κάποιων προτάσεων ως σημεία εκκίνησης. Επιπλέον, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές ανέπτυξαν βαθύτερη κατανόηση της φύσης των αξιωμάτων και ικανότητα αναγνώρισης κυκλικών και μη έγκυρων συλλογισμών (DeVilliers, 1996). Αντιστοίχως για τους ορισμούς, δόθηκε ομάδα ασκήσεων που βοηθούσε τους μαθητές να αντιληφθούν ότι, αν και μία έννοια μπορεί να οριστεί με διαφορετικούς εναλλακτικούς τρόπους, είναι σημαντικό να οριστεί με τον πιο οικονομικό τρόπο και παράλληλα να οδηγεί σε σύντομες αποδείξεις των ιδιοτήτων. Επίσης, ζητήθηκε η κατασκευή ορισμών. Η πειραματική ομάδα εμφάνισε υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας στην κατασκευή ορθών και οικονομικών ορισμών (DeVilliers, 1998).

Η δεύτερη παρέμβαση, του Θωμαΐδη, αφορούσε στην ενότητα των παραλλήλων ευθειών και αποτελούνταν από τέσσερις φάσεις. Στην πρώτη ακολουθήθηκε παραδοσιακού τύπου διδασκαλία, στην οποία παρουσιάστηκαν ο ορισμός της παραλληλίας, το Ευκλείδειο αίτημα και οι αποδείξεις κάποιων θεωρημάτων ύπαρξης. Στη δεύτερη, με χρήση ιστορικού σημειώματος προκλήθηκε συζήτηση σχετικά με τη φύση των αξιωμάτων. Στην τρίτη φάση, αναγνώστηκαν και σχολιάστηκαν οι αποδείξεις κάποιων θεωρημάτων. Στην τελευταία φάση, ζητήθηκε από τους μαθητές που εργάζονταν σε ομάδες, να αποδείξουν κάποια ιδιότητα- πόρισμα. Παρατηρήθηκε ότι, αν και οι μαθητές αναπτύσσουν επιχειρήματα και είναι σε θέση να παράγουν αποδεικτικούς συλλογισμούς, εντούτοις, συχνά εμφανίστηκαν φαινόμενα «φαύλου κύκλου», δηλαδή κυκλικών συλλογισμών. Διαπιστώθηκε, λοιπόν, ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της παραγωγικής διάταξης των προτάσεων στο αξιωματικό σύστημα (Θωμαΐδης, 2000).

Τέλος, στην τρίτη παρέμβαση, της Grigoriadou (2012), η δημιουργία ενός «χάρτη» που περιείχε όλες τις προτάσεις τις οποίες είχαν αποδείξει οι μαθητές, καθώς και ο σχεδιασμός και η σύνδεση των σχέσεων κάθε πρότασης με τις προηγούμενες προτάσεις, έδωσε το έναυσμα για την αρχή μιας συζήτησης. Με κατάλληλες ερωτήσεις προς τους μαθητές, αυτοί άρχισαν να αντιλαμβάνονται μέσω μιας «διαδικασίας προς τα πίσω», ότι υπάρχουν κάποιες προτάσεις, δηλαδή τα αξιώματα, από τις οποίες προέρχονται όλες οι υπόλοιπες προτάσεις. (Grigoriadou, 2012).

Από τα παραπάνω προκύπτουν τρία βασικά συμπεράσματα: Πρώτον, η Ευκλείδεια Γεωμετρία αποτελεί ένα από τα πιο απλά μοντέλα διδασκαλίας μιας θεωρίας. Δεύτερον, η κατανόηση της σημασίας του ρόλου των αξιωμάτων, των ορισμών, των θεωρημάτων και της απόδειξης σε μία μαθηματική θεωρία αποτελούν ουσιαστικά ζητήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τρίτον, εναλλακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία θα μπορούσαν να επιφέρουν μεταβολές σε ζητήματα αντίληψης και κατανόησης αυτών των ρόλων. Αυτά τα συμπεράσματα σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας διδάσκεται στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου στα σχολεία στην Ελλάδα, διαμορφώνουν τις προϋποθέσεις και αιτιολογούν την ανάγκη σχεδιασμού διδακτικών ερευνητικών παρεμβάσεων, όπως η παρούσα· παρεμβάσεις δηλαδή, που διαπραγματεύονται ζητήματα σχετικά με τη δομή του αξιωματικού συστήματος. Αρωγός σε αυτή την προσπάθεια είναι η γνωστική ανάπτυξη της λειτουργίας ενός συλλογισμού που παρουσιάζεται στην ενότητα που ακολουθεί.

Ανάλυση του Duval για τη λειτουργία ενός συλλογισμού

Ο Duval (όπως αναφ. στο Boero, 2007) παρουσιάζει τη θεώρησή του για την ανάλυση της γνωστικής πολυπλοκότητας της λειτουργίας ενός συλλογισμού. Σε αυτήν αναπτύσσει τις εννοιολογικές διαστάσεις μιας πρότασης. Αναγνωρίζει τρεις διαστάσεις, το περιεχόμενο (“content”), την εγκυρότητα (“*value*”) και τη θέση (“*status*”) της πρότασης. Σχετικά με την πρώτη διάσταση, του περιεχομένου, διακρίνει το περιεχόμενο μιας πρότασης σε περιεχόμενο περιγραφής (“*report*”), όπως προκύπτει μέσα από την παρατήρηση των αντικειμένων ή των καταστάσεων, και σε θεωρητικό περιεχόμενο(“*theoretical*”). Τη δεύτερη διάσταση, της εγκυρότητας τη διαχωρίζει σε: επιστημολογική εγκυρότητα (“*epistemic*”), σε λογική αλήθεια (“*logical truth*”) και επικοινωνιακή (“*communication*”). Υποστηρίζει ότι η σύνδεση ανάμεσα στην επιστημολογική εγκυρότητα και την λογική αλήθεια αποτελεί καθοριστικό σημείο για την αποδεικτική διαδικασία και την κατανόηση για το πώς λειτουργεί η απόδειξη στα Μαθηματικά.

Ως θέση (“*status*”) της πρότασης ορίζει την ειδική λειτουργία που έχει κάθε πρόταση σε σχέση με άλλες προτάσεις σε έναν συλλογισμό ή μια απόδειξη. Διαχωρίζει αυτόν τον ρόλο κάθε πρότασης σε δύο επίπεδα. Στο τοπικό επίπεδο οργάνωσης μιας πρότασης που αποκαλεί λειτουργική θέση *(“operating status”*) και στο ανώτερο επίπεδο οργάνωσης που αποκαλεί θεωρητική θέση (“*theoretical status”*). Το τοπικό αναφέρεται στο πιθανό ρόλο που μπορεί να έχει μία πρόταση σε ένα συλλογισμό. Το θεωρητικό στο ρόλο που μπορεί να έχει μία πρόταση στο πλαίσιο μιας θεωρίας και στην οργάνωση αυτής μέσα σε ένα σύνολο προτάσεων όπως αξίωμα, ορισμός θεώρημα και εικασία.

Για τον Duval, κάθε παραγωγικός συλλογισμός έχει δύο επίπεδα οργάνωσης. Το πρώτο επίπεδο, που ονομάζει απλό παραγωγικό βήμα (*“level of a deduction step*”), αφορά στην οργάνωση των προτάσεων μέσα σε αυτό. Κάθε τέτοιο απλό βήμα χαρακτηρίζεται από τρία μέρη: την «προϋπόθεση-υπόθεση» *(“premise”*), το «συμπέρασμα» (“*conclusion”*) και την «τρίτη δήλωση» (*“third statement”*). Σε κάθε τέτοιο βήμα, κάθε πρόταση λειτουργεί με έναν από τους παραπάνω τρεις τρόπους. Προφανώς, το πρώτο επίπεδο μπορεί να αποτελούν ένα ή περισσότερα απλά βήματα. Η οργάνωση αυτών των βημάτων γίνεται σε ένα δεύτερο επίπεδο. Κάποια από τα συμπεράσματα των προηγούμενων βημάτων συνθέτουν την υπόθεση ενός επόμενου βήματος. Οπότε, η ανάπτυξη και η σύνδεση των προτάσεων στο συλλογισμό και τη δημιουργία, τελικά, της απόδειξης δεν είναι γραμμική, αλλά δενδροειδής (“*tree like*”), (Boero, 2007).

Υπό το πρίσμα της ανάλυσης του Duval θα διερευνηθεί ο ρόλος των προτάσεων στη συγκεκριμένη έρευνα. Παράλληλα, η καταγραφή των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, όταν προσπαθούν να κατασκευάσουν αποδείξεις μέσα σε αυτό το σύστημα είναι ένας από τους επιμέρους στόχους της έρευνας. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται σχετικές αναφορές.

Αναφορά στην απόδειξη και στις δυσκολίες κατασκευής της στο πλαίσιο του αξιωματικού συστήματος

Η κατανόηση της φύσης και της δομής ή η αναπαραγωγή και η κατασκευή της απόδειξης συγκεντρώνει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών. Σε ό,τι αφορά στη φύση της απόδειξης οι Raman (2003) και Ιγγλέζου (2014) ανακαλούν τα δεδομένα πολλών ερευνών (Schoenfeld, 1986;Chazan,1993;Moore, 1994), που δείχνουν ότι πολλοί μαθητές αλλά και φοιτητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο να κατανοήσουν τη φύση της απόδειξης. Ενώ, ο Raman (2003) επισημαίνει ότι οι έρευνες των Simon το 1996 και Knuth το 2002 αναδεικνύουν ότι το πρόβλημα υπάρχει και εμφανίζεται αντίστοιχα τόσο σε φοιτητές, μελλοντικούς δάσκαλους, όσο και σε έμπειρους καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σχετικά με την αποδεικτική διαδικασία, ο Nikoloudakis (2010) αναφέρει ότι πολλοί ερευνητές, (Senk, 1985;Schoenfeld, 1985; Martin&Harel,1989; Harel&Sowder, 1998),διαπιστώνουν και καταγράφουν τη δυσκολία των μαθητών κατά την κατασκευή της απόδειξης. Επιπλέον, προσθέτει ότι, σύμφωνα με τα ευρήματα άλλων ερευνητών, (Burger&Shaughnessy,1986;Hoffer, 1983; Wirszup, 1976), οι μαθητές συναντούν προβλήματα και κατά την αναπαραγωγή των αποδείξεων των προτάσεων που παρουσιάζονται στα βιβλία τους. Ενώ, οι Miyazaki και συν. (2016), στην πρόσφατη έρευνά τους εστιάζουν στην κατανόηση της δομής της απόδειξης, αφού τα δεδομένα από προηγούμενες μελέτες δείχνουν ότι αποτελεί προϋπόθεση για την κατανόηση και την κατασκευή της απόδειξης.

Σύμφωνα με τον Duval (όπως αναφ. στο Boero, 2007), για να κατανοήσει πραγματικά ένας μαθητής την απόδειξη, χρειάζεται πρώτον, να κατανοήσει τη λειτουργική θέση των προτάσεων μέσα σε κάθε βήμα του συλλογισμού, η οποία περιγράφηκε αναλυτικά σε προηγούμενη ενότητα. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η κατανόηση της λειτουργίας του θεωρήματος μέσα σε κάθε βήμα του συλλογισμού. Γιατί, πολλές φορές οι μαθητές, αντιμετωπίζουν ένα θεώρημα ως έναν ισχυρισμό. Όμως το θεώρημα, αφορά μια διμερή σχέση, της μορφής «εάν– τότε» *(“if-then”*), που το συμπέρασμά της ισχύει, μόνο αν, πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις. Τα παραπάνω σημεία, όπως αναφέρει, είναι κρίσιμα και η μη κατανόησή τους, δημιουργούν πολλές παρανοήσεις και δυσκολίες στους μαθητές. Ως αποτέλεσμα, προσθέτει, ότι αναμειγνύουν την υπόθεση που δίνεται με το συμπέρασμα μιας δήλωσης, ή συγχέουν μία δήλωση με την αντίστροφη της, ή δεν ελέγχουν αν ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις ενός θεωρήματος.

Δεύτερον, ο μαθητής, για να κατανοήσει την απόδειξη, χρειάζεται να κατανοήσει τη σύνδεση των βημάτων στο δεύτερο επίπεδο. Η μη κατανόηση αυτής της σύνδεσης, ιδιαίτερα, η μετατροπή του συμπεράσματος ενός προηγούμενου βήματος του πρώτου επιπέδου σε υπόθεση, σε ένα βήμα του δεύτερου επιπέδου, είναι ένα πολύ κρίσιμο σημείο. Γιατί η αδυναμία διάκρισης αυτής της αλλαγής, του ρόλου μιας πρότασης, από το ένα επίπεδο στο άλλο, αφενός, είναι πηγή δυσκολιών και παρανοήσεων·

αφετέρου, δεν επιτρέπει την επικάλυψη των βημάτων μεταξύ των επιπέδων με συνέπεια την εμφάνιση κενών (“*gap*”) στην αποδεικτική διαδικασία (Boero, 2007).

Όπως αναφέρουν οι Miyazaki και συν. (2016), ένα ζήτημα σημαντικό στο οποίο και εστιάζουν, είναι η αποδοχή των κυκλικών συλλογισμών από τους μαθητές. Μελετούν επεισόδια στα οποία μαθητές ενός σχολείου Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην Ιαπωνία στο μάθημα της Γεωμετρίας αναπτύσσουν συζήτηση για την εγκυρότητα συλλογισμών που περιέχουν κυκλικούς συλλογισμούς (*“logical circularity”*). Θεωρούν ότι η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν έναν κυκλικό συλλογισμό είναι ένα ζήτημα, το οποίο δεν έχει διερευνηθεί αρκετά· θέμα που, όπως αναφέρουν, ανακινούν σε μελέτη τους το 2008 και οι Hanna και DeVilliers.

Στα Μαθηματικά, χρησιμοποιούνται διάφορες μορφές αναπαραστάσεων των θεωρητικών εννοιών· ιδιαίτερα στη Γεωμετρία, οι έννοιες αποδίδονται με τη βοήθεια σχημάτων. Στην προσπάθεια απόδειξης μίας πρότασης στη Γεωμετρία, δυσκολίες μπορεί να πηγάζουν από τη διαχείριση του σχήματος. Συχνά, το σχήμα ενισχύει την οπτική διαίσθηση και μπορεί να σταθεί εμπόδιο στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού (Mesquita, 1998). Επιπλέον, οι μαθητές, κατά τους Yang και Lin (2008),εστιάζουν στην οπτικοποίηση, πιστεύουν σε ό,τι βλέπουν· επαληθεύοντας έτσι τη ρήση του Schoenfeld για τους μαθητές “*seeing is believing*”, που διαπιστώνει ότι, για τους μαθητές, η κατασκευή υπερισχύει της επικύρωσης. Συναφή συμπεράσματα, σύμφωνα με τους Sinclair και συν. (2016), διαπιστώνουν οι Gal και Linchevski το 2010. Αυτοί τονίζουν ότι η οπτική αντίληψη μπορεί να είναι ανεπαρκής, αφού οι μαθητές μένουν προσκολλημένοι στην πρώτη ματιά μιας γεωμετρικής μορφής. Παράλληλα, μπορεί να εμποδίσει τη χρήση και ανάπτυξη εννοιών και ιδιοτήτων. Συνεπώς, και την ανάπτυξη ενός συλλογισμού.

Ο Harel (1999), σε έρευνά του σε φοιτητές, διαπιστώνει τη δυσκολία αυτών να χειριστούν συμβολικά σχήματα (*“sympolic figures”)* σε αφηρημένες αλγεβρικές δομές. Υποστηρίζει ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία αποτελεί εξαιρετικό πλαίσιο για να δει κάποιος ότι τα συμβολικά σχήματα είναι αναπαραστάσεις της πραγματικότητας και όχι η ίδια η πραγματικότητα. Συγκεκριμένα, αναφέρει ότι οι μαθητές για να αποδείξουν την πρόταση «αν οι εντός εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών του επιπέδου είναι ίσες τότε οι ευθείες είναι παράλληλες», χρειάζεται, δουλεύοντας με την «εις άτοπον απαγωγή», να υποθέσουν ότι οι ευθείες τέμνονται. Οπότε το σχήμα που προκύπτει, συνήθως, προκαλεί ιδιαίτερη δυσκολία· έρχεται σε σύγκρουση με την εικόνα της ευθείας γραμμής που έχουν σχηματίσει. Όμως έτσι, θα αρχίσουν να συνειδητοποιούν ότι το σχήμα είναι αναπαράσταση μιας υποθετικής χωρικής κατάστασης. Θεωρεί, λοιπόν, αναγκαία την επαναφορά της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στα Αναλυτικά Προγράμματα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης της χώρας του. Επιπλέον, υπογραμμίζει ότι η γεωμετρία των δύο ή τριών διαστάσεων μπορεί να βοηθήσει κάποιον, ως ένα ενδιάμεσο στάδιο, να περάσει σε ένα προχωρημένο ανώτατο επίπεδο μαθηματικής σκέψης· ιδιαίτερα, να αποκτήσει αντίληψη της δομής της απόδειξης (Harel, 1999).

Πέρα από τις δυσκολίες που σχετίζονται με το σχήμα, σημαντικά εμπόδια εμφανίζονται, όταν η απόδειξη κάποιας πρότασης γίνεται με τη μέθοδο της «απαγωγής σε άτοπο». ΟιTall και συν. (2011), επισημαίνουν πλήθος ερευνών, (Antonini, 2001; Epp, 1998; Leron, 1985; Reid and Dobbin,1998; Tall,1979), που αναδεικνύουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με αυτήν την αποδεικτική μέθοδο. Επίσης, αναφέρουν ότι, τόσο η φύση όσο και ο τρόπος απόδειξης με τη συγκεκριμένη μέθοδο, εγείρουν προβλήματα και δυσκολίες. Γιατί, για να αποδείξει κάποιος την ισχύ μιας πρότασης, υποθέτει ότι η πρόταση δεν ισχύει και προσπαθεί να οδηγηθεί σε μία αντίφαση, ώστε τελικά να αποδεχτεί αυτήν την πρόταση. Αν και, όπως σημειώνει ο Freudenthal το 1973, ακόμη και μικρά παιδιά, παράγουν και χρησιμοποιούν αυθόρμητα συλλογισμούς με δομή παρόμοια με αυτή της «εις άτοπου απαγωγής». Για παράδειγμα, δηλώσεις της μορφής «ο Πέτρος είναι στο σπίτι, διότι, αν δεν ήταν, η πόρτα δεν θα ήταν κλειδωμένη»*(“Peter is at home since otherwise the door would not be locked”,* Tall et al. 2011). Οι Antonini και Mariotti (2006), δηλώνουν πως η ικανότητα των μικρών παιδιών και γενικότερα των μαθητών να παράγουν παρόμοιες δηλώσεις επισημαίνεται και από πολλούς άλλους ερευνητές εκτός από τον Freudenthal (Thompson, 1996; Reid&Dobbin, 1998; Antonini, 2003a, Antonini, 2003b).

Τα δεδομένα πολλών ερευνών, όπως αναφέρουν οι Antonini και Mariotti (2016), συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές συναντούν περισσότερες δυσκολίες με τις έμμεσες αποδείξεις από ό,τι με τις άμεσες· δυσκολίες, που παρουσιάζονται σε όλο το φάσμα της εκπαίδευσης, σε μαθητές, αλλά και σε φοιτητές. Αναφέρουν ότι, κατά την άποψη κάποιων ερευνητών, (Thompson, 1996; Antonini, 2003a; Wu Yu, 2003), αυτές, πηγάζουν από την άρνηση μιας δήλωσης που απαιτείται σε αυτό το είδος των αποδείξεων, της «απαγωγής σε άτοπο». Επιπλέον, αναφέρουν την άποψη του Leron, που το 1985, δηλώνει ότι οι γνωστικές απαιτήσεις κατά την πορεία αυτού του είδους των αποδείξεων είναι υψηλές. Γιατί, η άρνηση της πρότασης που θέλουν να αποδείξουν, οδηγεί στην αποδοχή μιας λανθασμένης υπόθεσης και με βάση αυτήν επιχειρηματολογούν. Έτσι, αναπτύσσουν ένα συλλογισμό, εργάζονται σε ένα «κόσμο αδύνατο», (“*false, impossible world”*), καταλήγουν σε μια αντίφαση και στο τέλος καλούνται να απορρίψουν αυτόν τον «κόσμο». Ως συνέπεια, οι μαθητές αισθάνονται δυσαρεστημένοι και εξαπατημένοι. Στο ίδιο συμπέρασμα με τον Leron, καταλήγουν και οι ίδιοι στην έρευνά τους.

Η παραπάνω συνοπτική παρουσίαση θα είναι αρωγός κατά την καταγραφή των δυσκολιών που θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές, κατά την κατασκευή της απόδειξης, στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

ΣΤΟΧΟΣ ΚΑΙ ΕΡΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Η Αξιωματική Θεώρηση αποτελεί τρόπο οργάνωσης της Μαθηματικής Γνώσης. Οι ορισμοί, τα αξιώματα και τα θεωρήματα αποτελούν κύρια συστατικά ενός Αξιωματικού Συστήματος και η απόδειξη κατέχει κεντρικό ρόλο σε αυτό. Το ενδιαφέρον της έρευνας εστιάζεται στο ρόλο των παραπάνω χαρακτηριστικών. Το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας παρέχει τη δυνατότητα στους μαθητές να γνωρίσουν ένα Αξιωματικό Σύστημα στο οποίο τα αξιώματα και οι πρωταρχικές έννοιες υπαγορεύονται από τη φυσική εμπειρία. Υπό αυτό το πρίσμα θα αποσαφηνιστούν οι έννοιες που εμπλέκονται στα ερευνητικά ερωτήματα. Όμως, για τις ανάγκες της έρευνας και για να μη δημιουργηθεί σύγχυση με την ορολογία ανάμεσα στους μαθητές, υιοθετείται η ονομασία θεώρημα για κάθε πρόταση που μπορεί να αποδειχτεί (συμπεριλαμβάνονται θεωρήματα και πορίσματα).

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι ο σχεδιασμός και η υλοποίηση μιας διδακτικής παρέμβασης στην ενότητα των παραλλήλων ευθειών για να προσεγγίσουν οι μαθητές της Α΄ Λυκείου τη δομή του Αξιωματικού Συστήματος στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Συγκεκριμένα, διερευνάται η κατανόηση που έχουν για τη λειτουργία των δομικών στοιχείων του συστήματος, πριν και μετά τη παρέμβαση. Ειδικότερα επιχειρείται να δοθούν απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

1) Πως αντιλαμβάνονται οι μαθητές το ρόλο των αξιωμάτων, των ορισμών των θεωρημάτων και της απόδειξης στη δομή του Αξιωματικού Συστήματος πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση;

2) Πως αξιοποιούν οι μαθητές τα αξιώματα, τους ορισμούς και τα θεωρήματα στις αποδείξεις πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση;

3) Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατασκευή των αποδείξεων των προτάσεων των παραλλήλων ευθειών;

Για το ρόλο των προτάσεων στο αξιωματικό σύστημα πλαίσιο αναφοράς αποτελεί η ανάλυση του Dyval (Boero, 2007) για τη λειτουργία ενός συλλογισμού. Αυτός διαχωρίζει το ρόλο της κάθε πρότασης σε δύο επίπεδα οργάνωσης ,στο ανώτερο που ονομάζει θεωρητική θέση και στο τοπικό που ονομάζει λειτουργική θέση. Αναφέρεται διεξοδικά στις λειτουργίες των προτάσεων στο τοπικό επίπεδο οργάνωσης ενός συλλογισμού, οι οποίες παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ο παραπάνω διαχωρισμός για το ρόλο των προτάσεων και η ανάλυση της λειτουργίας τους σε ένα συλλογισμό, εξυπηρετούν τις ανάγκες της έρευνας και υιοθετούνται στην παρούσα μελέτη για τη διαμόρφωση των λειτουργικών ορισμών της έρευνας. Συγκεκριμένα:

- «λειτουργικός ρόλος-θέση» μιας πρότασης στην παραγωγική οργάνωση μιας απόδειξης ονομάζεται η ειδική λειτουργία που μπορεί να επιτελεί κάθε πρόταση σε κάθε απλό παραγωγικό βήμα της απόδειξης ως προϋπόθεση-υπόθεση, συμπέρασμα ή τρίτη δήλωση.

- «θεωρητικός ρόλος-θέση» μιας πρότασης ονομάζεται η ειδική λειτουργία που μπορεί να επιτελεί κάθε πρόταση στην οργάνωση της πρότασης σε ένα σύνολο προτάσεων στο πλαίσιο του Αξιωματικού Συστήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Στο διάγραμμα1 που ακολουθεί στην επόμενη σελίδα, παρουσιάζεται με τη βοήθεια ενός παραδείγματος, ένα απλό παραγωγικό-συλλογιστικό βήμα με στόχο να αποσαφηνιστούν οι τρείς αυτές ειδικές λειτουργίες των προτάσεων σε αντιστοιχία με τα διαγράμματα που χρησιμοποιεί Dyval (Boero, 2007) για τη λειτουργική θέση μιας πρότασης σε τοπικό επίπεδο.

προϋπόθεση-υπόθεση:
Σ σημείο του επιπέδου με ΣΑ=ΣΒ και Ο μέσο του ΑΒ

συμπέρασμα
αν ένα σημείο Σ ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ

τρίτη δήλωση
η ευθεία ΣΟ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ

Διάγραμμα 1.Οι ειδικές λειτουργίες των προτάσεων σε ένα απλό συλλογιστικό βήμα.

Σχετικά με το θεωρητικό ρόλο- θέση των αξιωμάτων, ο DeVilliers (1996) αναφέρει ότι τα αξιώματα είναι απαραίτητα σημεία εκκίνησης σε ένα μαθηματικό σύστημα (“*necessary starting points*”). Ενώ οι Jahnke και Wambach (2013) υποστηρίζουν ότι τα αξιώματα είναι γενικές προτάσεις και εξαιτίας αυτού μπορούμε να παράγουμε άλλες γενικές προτάσεις από αυτές. Σύμφωνα με τις θέσεις των παραπάνω και για το σκοπό της έρευνας ο θεωρητικός ρόλος των αξιωμάτων εξετάζεται στις ακόλουθες δύο διαστάσεις:

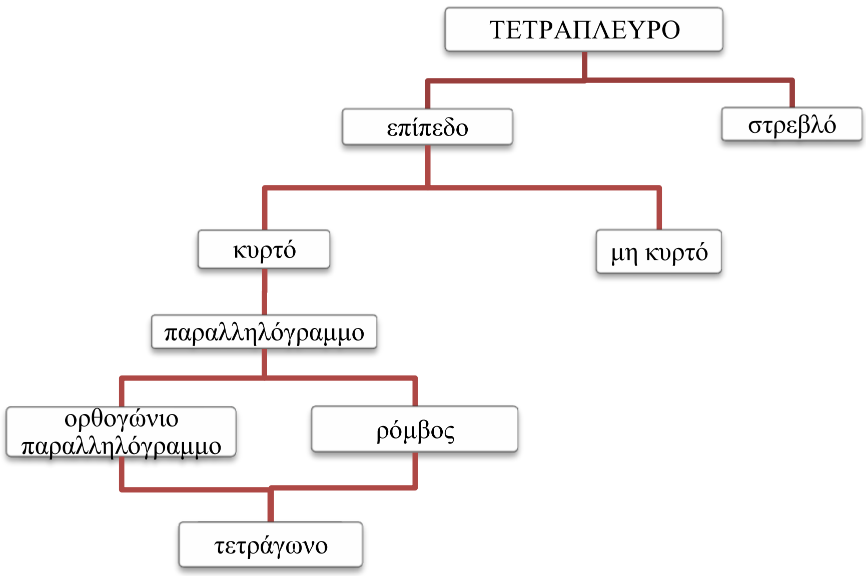
- ο ρόλος τους ως **απαραίτητα σημεία εκκίνησης** με στόχο την αποφυγή κυκλικών συλλογισμών-φαύλου κύκλου (τη χρήση μιας πρότασης στην απόδειξη ενός θεωρήματος και απόδειξη της αντίστοιχης πρότασης με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος)
- ο ρόλος τους **ως θεμέλια** πάνω στα οποία στηρίζεται η παραγωγή των υπολοίπων προτάσεων.

Ο Freudenthal, όπως αναφέρει ο DeVilliers (1998), στην περιγραφική διαδικασία θεσμοθέτησης ενός ορισμού υποστηρίζει ότι ένας ορισμός περιγράφει συνοπτικά ένα ήδη γνωστό αντικείμενο ξεχωρίζοντας κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητες. Οι Mariotti και Fischbein (1997) δηλώνουν ότι μέσω των ορισμών εισάγεται ένα αντικείμενο ή ένα στοιχείο. Παράλληλα σημειώνουν ότι, κατά τον DeVilliers, οι ορισμοί παράγουν ταξινομήσεις των γεωμετρικών αντικειμένων με βάση καλά ορισμένες γεωμετρικές ιδιότητες αυτών. Ο DeVilliers (1998) χρησιμοποιεί τον όρο συστηματοποίηση της υπάρχουσας γνώσης προσδιορίζοντας τον ρόλο των ορισμών.

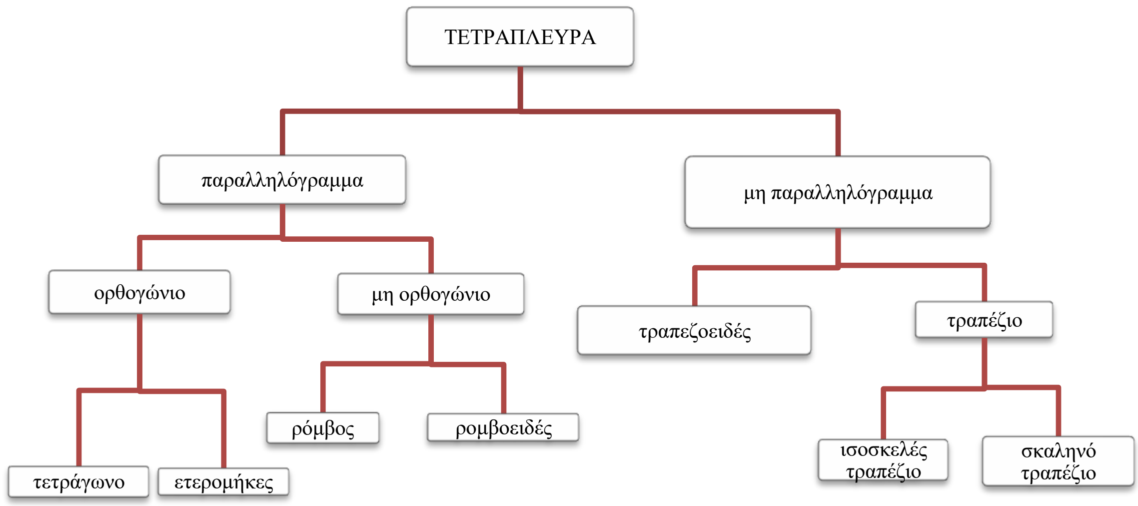
Ενώ οι Jahnke και Wambach (2013) σημειώνουν ότι οι ορισμοί είναι γενικές προτάσεις από τις οποίες παράγονται άλλες γενικές προτάσεις. Συγκεντρώνοντας τις θέσεις των προηγούμενων ερευνητών σχετικά με το θεωρητικό ρόλο των ορισμών, ο θεωρητικός ρόλος των ορισμών εξετάζεται στις οι ακόλουθες τρεις διατάσεις:

- ως **θεμέλια, βάσεις** νέων ορισμών και νέων ιδιοτήτων
- ως **περιγραφή-εισαγωγή** ενός γνωστού γεωμετρικού αντικειμένου
- στη **δημιουργία ταξινόμησης** με στόχο τη συστηματοποίηση με παραγωγικό τρόπο των νέων ιδιοτήτων που προκύπτουν από τις ιδιότητες που περιγράφουν την έννοια που ορίζεται.

Σε ότι αφορά στην τρίτη διάσταση της ταξινόμησης ακολουθεί διευκρινιστικό παράδειγμα. Είναι γνωστό ότι, διαφορετικοί ορισμοί παράγουν διαφορετικές ταξινομήσεις. Οι ορισμοί για τα τετράπλευρα, που χρησιμοποιούνται από την κοινότητα των μαθηματικών σήμερα, παράγουν τη σύγχρονη ταξινόμηση των τετραπλεύρων όπως παρουσιάζεται στο διάγραμμα 2. Στην ιστορία της Γεωμετρίας έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες ταξινομήσεις, όπως η ταξινόμηση των τετραπλεύρων κατά τον Ποσειδώνιο και τον Ήρωνα στο διάγραμμα 3, (Αργυρόπουλος και συν. 2016).



Διάγραμμα 3:Η σύγχρονη ταξινόμηση των τετραπλεύρων.



Διάγραμμα 3:Η ταξινόμηση των τετραπλεύρων κατά τον Ποσειδώνιο και τον Ήρωνα

Η σύγχρονη ταξινόμηση (διάγραμμα 2) είναι πιο λειτουργική και οικονομική. Για παράδειγμα όλες οι ιδιότητες που αποδεικνύονται για το ορθογώνιο και τον ρόμβο είναι και ιδιότητες και του τετραγώνου. Ενώ, στην ταξινόμηση κατά τον Ποσειδώνιο και τον Ήρωνα (διάγραμμα 3) οι ιδιότητες των διαγωνίων, χρειάζεται να αποδειχτούν χωριστά τόσο για το ρόμβο όσο και για το τετράγωνο.

Η συστηματοποίηση και η αξιωματικοποίηση περιλαμβάνουν τη λογική παραγωγική διάταξη αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων Η διάταξη αυτή επιτρέπει τη σύνδεση των άσχετων, αρχικά, θεωρημάτων. Μια τέτοια διάταξη, σύμφωνα με τον Freudenthal, όπως αναφέρει ο DeVilliers, (1986) επιτρέπει μια υψηλή και ολοκληρωμένη κατανόηση ενός θέματος. Παράλληλα αυτή η διάταξη, σύμφωνα με τον DeVilliers (1986) παρέχει τη δυνατότητα να ελεγχθούν τυχόν ασυνέπειες και κυκλικοί συλλογισμοί μεταξύ των θεωρημάτων. Στην παρούσα έρευνα υιοθετούνται οι προηγούμενες απόψεις αλλά τροποποιούνται αμυδρά για τις ανάγκες της έρευνας. Έτσι, ο θεωρητικός ρόλος των θεωρημάτων εξετάζεται ως προς τις ακόλουθες δύο διατάσεις:

- η διάταξη με στόχο την **οργάνωση και τη σύνδεση** των θεωρημάτων.
- η διάταξη με στόχο τον **έλεγχο και την αποφυγή κυκλικότητας** μεταξύ αυτών.

Ο πολυδιάστατος ρόλος της απόδειξης τονίζεται ιδιαίτερα στην βιβλιογραφία και συζητήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ο Dawkins (2014) παρουσιάζει την άποψη τουBell σχετικά με το ρόλο των αποδείξεων, ο οποίος το 1976 προσδίδει τρεις διαστάσεις στον ρόλο της απόδειξης εκ των οποίων οι δύο, ως το μέσο επιβεβαίωσης και ως το μέσο συστηματοποίησης, κρίνεται ότι καλύπτουν τις ανάγκες αυτής της έρευνας. Με τον όρο επιβεβαίωση αναφέρεται στον έλεγχο αλήθειας-επικύρωσης μιας δήλωσης. Παράλληλα ο όρος συστηματοποίηση περιλαμβάνει την οργάνωση όλων των ανεξάρτητων προτάσεων μέσα σε ένα σύστημα με λογική σειρά ώστε να αποφευχθούν φαινόμενα κυκλικών συλλογισμών (φαύλου κύκλου). Ενδέχεται, κατά την διεξαγωγή της έρευνας, να αναδειχθούν από τους μαθητές διαφορετικές διαστάσεις του ρόλου της απόδειξης οι οποίες αν προκύψουν θα παρουσιαστούν στα αποτελέσματα. Θεωρείται ότι οι παραπάνω δύο ρόλοι της απόδειξης σχετίζονται με τη διάρθρωση της δομής ενός αξιωματικού συστήματος. Γἰ αυτό, εξετάζεται ο ρόλος της απόδειξης ως προς τις ακόλουθες δύο διαστάσεις:

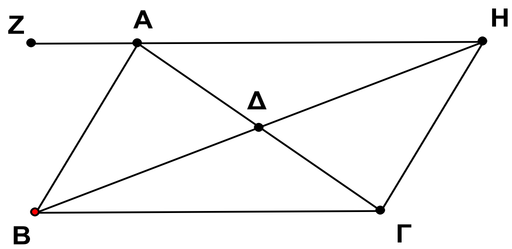
- ως **μέσω συστηματοποίησης** όλων των προτάσεων σε ένα σύστημα με στόχο την αποφυγή κυκλικών συλλογισμών
- ως **μέσο επιβεβαίωσης-επικύρωσης** της αλήθειας μιας πρότασης στο αξιωματικό σύστημα.

Στο θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας, παρουσιάστηκε αναλυτικά η θεώρηση τουDuvalγια τη δομή της απόδειξης και τη λειτουργία των προτάσεων σε αυτή (Boero, 2007).Ο οποίος υποστηρίζει, ότι η οργάνωση και ανάπτυξη των προτάσεων στη δόμηση μιας απόδειξης ή ενός συλλογισμού, είναι δενδροειδής (“*tree like*”).Παρόμοια είναι και η άποψη τωνMiyazaki και συν. (2016), που θεωρούν τη δομή της απόδειξης ως ένα δίκτυο προτάσεων ανάμεσα σε υποθέσεις και συμπεράσματα. Στην παρούσα έρευνα υιοθετείται η θέση του Duval για τη δομή μιας απόδειξης. Έτσι θεωρείται ότι:

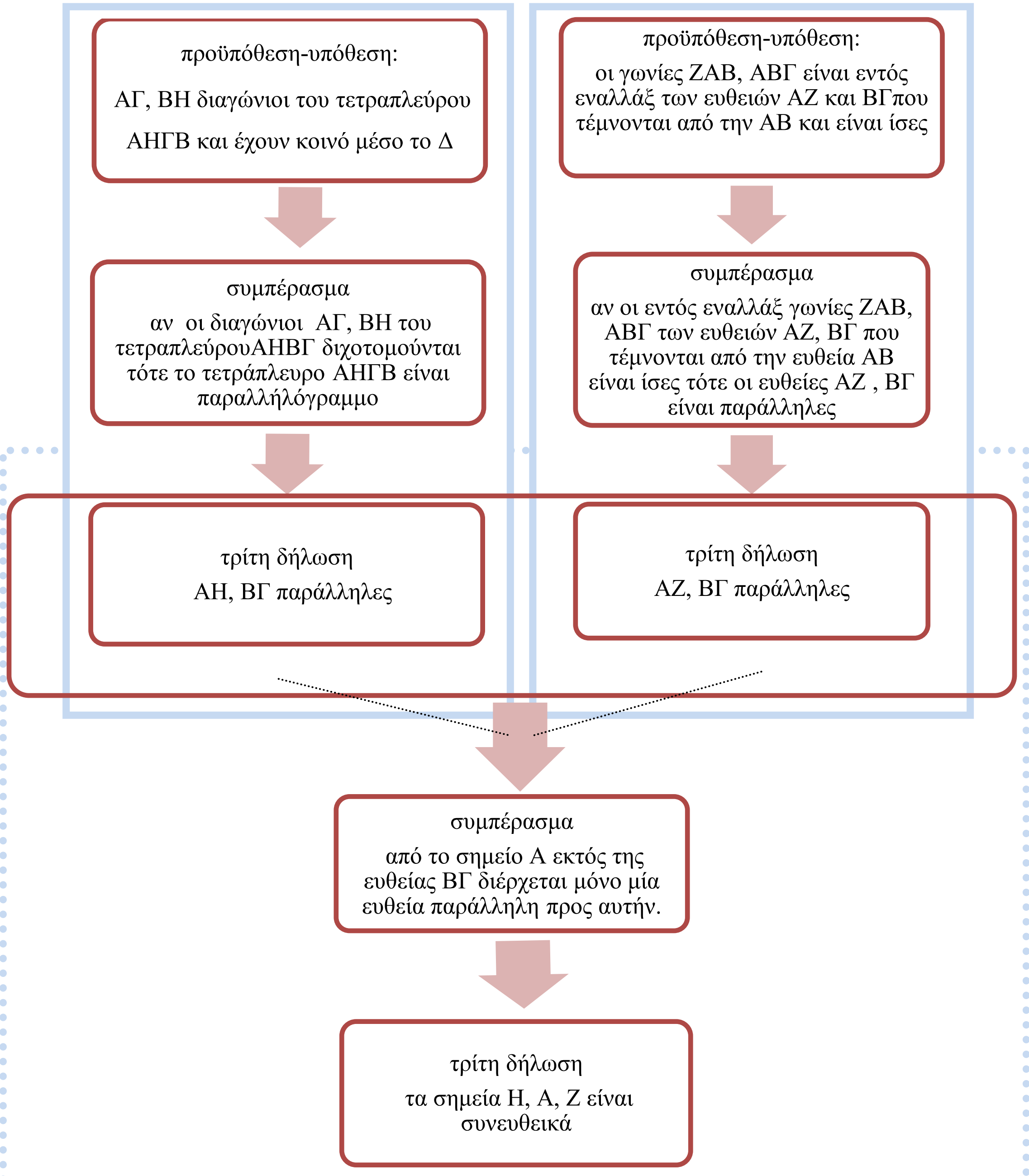
- η δομή της απόδειξης είναι δενδροειδής και η οργάνωση των προτάσεων γίνεται αρχικά σε ένα πρώτο επίπεδο σε απλά παραγωγικά-συλλογιστικά βήματα, τα οποία συνδέονται και οργανώνονται σε ένα δεύτερο επίπεδο σε νέα βήματα αντίστοιχης δομής με τα απλά βήματα

Στο διάγραμμα 4 που έπεται, παρουσιάζεται μέσω ενός παραδείγματος η δενδροειδής δομή της απόδειξης στα δύο επίπεδα (με συμπαγή σιέλ γραμμή το πρώτο επίπεδο οργάνωσης, με στρογγυλή σιέλ κουκίδα το δεύτερο επίπεδο οργάνωσης). Η δομή ενός απλού βήματος παρουσιάστηκε στο διάγραμμα 1.

Παράδειγμα:αν για το σχήμα που ακολουθεί ισχύουν: $\widehat{ZAB} = \widehat{AB\Gamma}$, Δ κοινό μέσο των τμημάτων ΑΓ, ΒΗ να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Α, Η είναι συνευθειακά.



Απόδειξη:



Διάγραμμα 4: η δενδροειδής δομή μιας απόδειξης σε δύο επίπεδα

Ένα θέμα που βρίσκεται στο ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας εδώ και πολλά χρόνια με πολυάριθμα ευρήματα είναι οι δυσκολίες των μαθητών στην κατασκευή απόδειξης. Σχετική και εκτενή αναφορά έγινε σε ενότητα του προηγούμενου κεφαλαίου. Το τρίτο ερώτημα αυτής της εργασίας εστιάζει στις δυσκολίες που θα συναντήσουν οι μαθητές στη προσπάθειά τους να αποδείξουν κάποια από τα θεωρήματα της ενότητας «παράλληλες ευθείες» στο πλαίσιο του αξιωματικού συστήματος. Οι ανάγκες της έρευνας επικεντρώνονται στην αναζήτηση και καταγραφή των δυσκολιών που σχετίζονται με τη δομή του αξιωματικού συστήματος. Ειδικότερα, στις δυσκολίες που προκύπτουν σε σχέση με την κατανόηση του ρόλου των αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων (όπως ορίστηκαν παραπάνω) και τη χρήση τους στην οργάνωση μιας απόδειξης. Επιπλέον, αναμένονται δυσκολίες που πηγάζουν από την «εις άτοπο απαγωγή», το είδος της μεθόδου που χρησιμοποιείται για να αποδειχθούν πολλά από τα θεωρήματα της ενότητας «παράλληλες ευθείες». Τέλος, αναμένονται δυσκολίες που προκύπτουν από το χειρισμό του γεωμετρικών σχημάτων. Οι Yang και Lin (2008) επισημαίνουν ότι οι μαθητές εστιάζουν συχνά στην οπτικοποίηση, πιστεύουν σε ό,τι βλέπουν επαληθεύοντας έτσι τη γνωστή ρήση του Schoenfeld “*seeing is believing*”. Αρχικά το πλαίσιο αναφοράς της έρευνας για τις δυσκολίες καθορίζεται από αυτές τις τρεις κατηγορίες δυσκολιών. Ενδέχεται κατά τη διδακτική παρέμβαση να παρατηρηθούν και άλλες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και συνιστούν νέες κατηγορίες, οι οποίες θα αναδιοργανωθούν και θα παρουσιαστούν στα αποτελέσματα της έρευνας.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η διερεύνηση της κατανόησης των μαθητών για τα δομικά στοιχεία του αξιωματικού συστήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι στο επίκεντρο της παρούσας μελέτης. Στις παραγράφους που ακολουθούν, παρουσιάζονται κάποιες απόψεις και θεωρίες σχετικά με το πώς ορίζεται η κατανόηση από διάφορους ερευνητές και διατυπώνονται οι αντίστοιχοι λειτουργικοί ορισμοί.

Η Βοσνιάδου (2001) αναφέρει ότι τα σύγχρονα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών, τείνουν να εστιάζουν στην κατανόηση και στη σκέψη. Εξάλλου, η γνώση που κατανοείται, διατηρείται στη μνήμη, μπορεί να ανακληθεί εύκολα από αυτήν και να εφαρμοστεί σε άλλες καταστάσεις. Επισημαίνει ότι η διδασκαλία με στόχο την κατανόηση, ζητούμενο από κάθε εκπαιδευτικό, προϋποθέτει μια διδασκαλία κατά την οποία ζητούνται εξηγήσεις, παραδείγματα, εντοπισμός ομοιοτήτων, διαφορών και εξαγωγή γενικεύσεων. Επίσης, η συζήτηση, τόσο ανάμεσα στους μαθητές όσο και μεταξύ αυτών και του εκπαιδευτικού, η διατύπωση-έκφραση των σκέψεων και των δράσεων τους, ευνοούν την κατανόηση (Βοσνιάδου, 2001). Με την παραπάνω άποψη συμφωνούν και οι συντάκτες του Προγράμματος Σπουδών για το Λύκειο (στο πλαίσιο του προγράμματος «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών»), οι οποίοι θεωρούν ασαφή την έκφραση «ο μαθητής έχει, (ή πρέπει να) κατανοήσει…». Γι' αυτό, καθορίζουν μια σειρά από ενέργειες, όπως: εξηγήσεις, χρήση συλλογισμών και επιχειρημάτων, ερμηνείες με πολλαπλούς τρόπους, εφαρμογές, κριτικές θεωρήσεις μιας κατάστασης-ενός φαινομένου κ.α., που η πραγματοποίησή τους συνεπάγεται την ουσιαστική κατανόηση.

Οι εκφάνσεις της έννοιας κατανόησης είναι πολλές, με συνέπεια την ανάπτυξη διαφόρων θεωριών με στόχο την περιγραφή της. Δύο από τις πιο σύγχρονες Θεωρίες για την κατανόηση που διατυπώθηκαν το 2005, παρουσιάζει η Κολέζα (2013). Είναι η θεωρία των Kalantzis και Cope και των Wiggins και Tighe. Οι πρώτοι αναφέρονται σε επτά «διαδικασίες γνώσεις»(*“knowledge processes”*), τις εξής: βιώνοντας το γνωστό, βιώνοντας το νέο, εννοιολόγηση με ονοματοποίηση, εννοιολόγηση με θεωρητικοποίηση, κριτική ανάλυση, άμεση εφαρμογή και δημιουργική εφαρμογή. Ο σχεδιασμός και η εφαρμογή δραστηριοτήτων για κάποιο θέμα, που ενεργοποιούν τις παραπάνω διαδικασίες γνώσεων, συνεπάγονται την κατανόησή τους. Ονομάζουν τη θεωρία τους «Μάθηση μέσω Σχεδιασμού».

«Κατανόηση μέσω σχεδιασμού» (*“Understanding by design”*) αποκαλούν τη θεωρία τους, οι Wiggins και Tighe (2005). Σε αυτήν, διακρίνουν έξι πρόσωπα για την κατανόηση (*“the six facets of understanding”*):της εξήγησης, της ερμηνείας, της εφαρμογής, της προοπτικής, της ενσυναίσθησης και της αυτογνωσίας. Ενδεικτικές ενέργειες που περιγράφουν, αντιστοίχως, καθένα από τα έξι πρόσωπα είναι οι εξής: η δυνατότητα κάποιου να δίνει αιτιολογημένες εξηγήσεις, να περιγράφει και να χρησιμοποιεί ποικίλους και διαφορετικούς τρόπους ένα θέμα, να εφαρμόζει τις γνώσεις του σε γνωστές και άγνωστες καταστάσεις, να εξετάζει με κριτική ματιά μια κατάσταση, να διερευνά τις οπτικές των άλλων για το ίδιο ζήτημα και να αναγνωρίζει τις αδυναμίες και παρανοήσεις του σχετικά με ένα θέμα (Κολέζα 2013).

Η Θεωρία των «έξι προσώπων», των Wiggins και Tighe, αξιοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα για την ανάλυση των διαστάσεων της έννοιας «κατανόησης». Συγκεκριμένα, εξετάζεται η κατανόηση που έχουν οι μαθητές για το ρόλο αξιωμάτων, των ορισμών των θεωρημάτων και της απόδειξης στη δομή του Αξιωματικού Συστήματος, ως προς τις εξής τρεις διαστάσεις της έννοιας της κατανόησης:

- η ερμηνεία του ρόλου των παραπάνω στοιχείων όπως παρουσιάζονται μέσα από τις περιγραφές των μαθητών, λεκτικές ή με παραδείγματα ή με οποιαδήποτε μορφή αναπαράστασης (**διάσταση ερμηνείας**)
- η απόδοση αιτιολογημένων εξηγήσεων για την ύπαρξη ή όχι κενών σε μια απόδειξη, τα οποία σχετίζονται με το τρόπο χρήσης των παραπάνω στοιχείων στις αντίστοιχες αποδεικτικές διαδικασίες (**διάσταση εξήγησης**).
- η εφαρμογή των παραπάνω στοιχείων στην οργάνωση μιας απόδειξης(**διάσταση της εφαρμογής**)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 Περιγραφή της μεθόδου, του δείγματος και της διερευνητικής διαδικασίας

Στην παρούσα έρευνα μελετήθηκε η βελτίωση στην κατανόηση που παρουσιάζουν οι μαθητές μετά από παρέμβαση για το ρόλο των αξιωμάτων, ορισμών, θεωρημάτων και της απόδειξης στη δομή του αξιωματικού συστήματος. Η προσέγγιση αυτής της μελέτης έγινε μέσω κατάλληλου διδακτικού σχεδιασμού. Περιελάμβανε μια διδακτική παρέμβαση και την αξιολόγηση της κατανόησης που έχουν οι μαθητές τόσο για το ρόλο των παραπάνω στοιχείων του συστήματος, όσο και των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατασκευή της απόδειξης. Ο διδακτικός σχεδιασμός αφορούσε στην ενότητα των παραλλήλων ευθειών. Επιλέχτηκε, γιατί στις περισσότερες αποδείξεις των ιδιοτήτων των παραλλήλων ευθειών χρησιμοποιούνται τόσο τα αξιώματα όσο και αρκετές από τις προτάσεις που αποδεικνύονται στην ίδια ενότητα. Επομένως, στην συγκεκριμένη ενότητα αναδεικνύεται ο παραγωγικός τρόπος οργάνωσης των προτάσεων και ο ρόλος τους, ιδιαίτερα των αξιωμάτων.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά το σχολικό έτος 2016-2017 σε δημόσιο σχολείο της Δυτικής Θεσσαλονίκης, στο 1ο Γ.Ε.Λ Σταυρούπολης. Συμμετείχαν 43μαθητές δύο τμημάτων της Α΄ Λυκείου (ξεκίνησαν 44 μαθητές αλλά στη διεξαγωγή των αποτελεσμάτων συμπεριλήφθηκαν τα δεδομένα από τους 43 μαθητές, φαινόμενο που θα εξηγηθεί στους περιορισμούς της έρευνας, στην ενότητα της συζήτησης). Οι μαθητές των δύο τμημάτων προέρχονταν από τρία διαφορετικά Γυμνάσια της περιοχής. Έτσι, λήφθηκαν τα απαραίτητα μέτρα, που θα περιγραφούν στην ενότητα της διδακτικής παρέμβασης ώστε οι μαθητές να έχουν στο βαθμό που αυτό είναι δυνατό, τα ίδιο γνωστικό υπόβαθρο. Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε, σε 8 διδακτικές ώρες στο ένα τμήμα, σε 9 στο άλλο και σε διάστημα περίπου τριών εβδομάδων.

Η ερευνητική διαδικασία διαχωρίζεται σε 4 φάσεις. Στην 1η φάση της έρευνας έγινε πιλοτική εφαρμογή του πρώτου δοκιμίου (pretest). Δόθηκε προς συμπλήρωση σε 15 μαθητές της Α΄ Λυκείου που φοιτούσαν στα τμήματα που δε συμμετείχαν στην παρέμβαση. Οι απαντήσεις των 15 μαθητών οδήγησαν στη βελτίωση των εκφραστικών μέσων, στην τροποποίηση του τρόπου παρουσίασης κάποιων δραστηριοτήτων και στην τελική διαμόρφωση του αντίστοιχου δοκιμίου. Επιπλέον διαπιστώθηκε ότι ο απαιτούμενος χρόνος συμπλήρωσης του δοκιμίου κυμαίνεται από 60 έως 90 λεπτά, διαφορετικός για κάθε μαθητή. Στην 2η φάση της έρευνας οι μαθητές των δύο τμημάτων που θα συμμετείχαν στη παρέμβαση, κλήθηκαν να συμπληρώσουν το πρώτο δοκίμιο (pretest), σε δύο συνεχόμενες διδακτικές ώρες των 45 λεπτών, εντός του σχολείου με παρουσία της καθηγήτριας-ερευνήτριας. Η παρέμβαση διεξήχθη στην 3η φάση της έρευνας, δύο βδομάδες περίπου μετά την 2η φάση. Στο ένα τμήμα διήρκησε 8 ώρες, στο άλλο 9 και αναλύεται διεξοδικά σε επόμενη ενότητα. Στην 4η και τελευταία φάση της έρευνας, περίπου έξι βδομάδες μετά τη παρέμβαση, δόθηκε για συμπλήρωση το δεύτερο δοκίμιο (posttest). Για τις απαντήσεις διατέθηκε ίδιος χρόνος με το προηγούμενο δοκίμιο και συμπληρώθηκε επίσης με τη παρουσία της καθηγήτριας-ερευνήτριας. Το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε από την εφαρμογή του πρώτου δοκιμίου έως τη συμπλήρωση του δεύτερου, ήταν περίπου 9 με 10 βδομάδες. Στην επόμενη υποενότητα περιγράφονται τα δύο δοκίμια.

3.2 Ανάλυση των ερευνητικών εργαλείων

Για τη μέτρηση της κατανόησης σχετικά με το ρόλο των αξιωμάτων, των ορισμών θεωρημάτων και της απόδειξης στη δομή του αξιωματικού συστήματος κατασκευάστηκαν δύο ερευνητικά εργαλεία τα δύο δοκίμια που έχουν παρόμοια δομή και αποτελούνται από 4 μέρη το καθένα. Τα δοκίμια οργανώθηκαν σε δύο άξονες ερωτημάτων σε αντιστοιχία με τα δύο ερευνητικά ερωτήματα.

- ο πρώτος άξονας ερωτημάτων αφορά την κατανόηση που έχουν οι μαθητές και ειδικότερα, το πως ερμηνεύουν το ρόλο των αξιωμάτων, των ορισμών, των θεωρημάτων και της απόδειξης στο αξιωματικό σύστημα.
- ο δεύτερος άξονας ερωτημάτων αφορά την αξιοποίηση των παραπάνω στοιχείων στις αποδείξεις.

Το περιεχόμενο του πρώτου άξονα περιλαμβάνει ερωτήσεις (αντιστοιχούν στο 1^{ο} και στο 2^{ο}μέρος των δοκιμίων), που αφορούν την περιγραφή των ρόλων των αξιωμάτων, των ορισμών, των θεωρημάτων και της απόδειξης και διάκριση αυτών των στοιχείων. Αναλυτικότερα στο 1^{ο} μέρος των δύο δοκιμίων, που είναι ακριβώς ίδιο και στα δύο, ζητείται από τους μαθητές να περιγράψουν με λόγια ή με παράδειγμα τι είναι αξίωμα και ποιος ο ρόλος του (αντίστοιχα ορισμός-θεώρημα-απόδειξη). Στο 2^{ο}μέρος των δύο δοκιμίων, δίνονται δεκαέξι ίδιες προτάσεις και ζητείται να χαρακτηριστούν ως προς το είδος τους. Αν και το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην εφαρμογή των δύο δοκιμίων ήταν 9 βδομάδες, αρκετό για να μη θυμούνται οι μαθητές ποιες προτάσεις είχαν ζητηθεί να χαρακτηριστούν στο πρώτο δοκίμιο, εντούτοις για να μειωθεί η πιθανότητα να συμπληρωθεί το δεύτερο δοκίμιο από μνήμης, έγιναν κάποιες αλλαγές στο τρόπο οργάνωσης των προτάσεων σε αυτό το μέρος του δοκιμίου. Έτσι, οι 16 προτάσεις, που ζητήθηκαν για χαρακτηρισμό στο δεύτερο δοκίμιο, τοποθετήθηκαν σε διαφορετική σειρά σε σχέση με τη σειρά που τοποθετήθηκαν στο πρώτο δοκίμιο. Παράλληλα, για καθεμία από τις 16 προτάσεις του δεύτερου δοκιμίου, χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικά γράμματα, για την αναπαράσταση των μαθηματικών αντικειμένων που περιγράφονται σε αυτές, από αυτά, που χρησιμοποιήθηκαν για κάθε πρόταση στο πρώτο δοκίμιο. Για παράδειγμα, ο ορισμός του ισοσκελούς τριγώνου που δόθηκε για χαρακτηρισμό στο πρώτο δοκίμιο ήταν η 1^{η} πρόταση στη σειρά των 16 προτάσεων, που δόθηκαν για χαρακτηρισμό και με τη μορφή: «Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ τότε ΑΒ=ΑΓ». Στο δεύτερο δοκίμιο, ο ίδιος ορισμός, ήταν η 7^{η} πρόταση στη σειρά των 16 προτάσεων και με την εξής μορφή: «Αν το τρίγωνο ΖΗΘ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΗΘ τότε ΖΗ=ΖΘ». Η περιγραφή των ρόλων των αξιωμάτων των ορισμών, των θεωρημάτων και της απόδειξης, καθώς και η διάκριση αυτών των στοιχείων σχετίζονται με την κατανόηση που έχουν οι μαθητές για αυτά τα στοιχεία και συγκεκριμένα με τη διάσταση της ερμηνείας (η πρώτη από τις διαστάσεις της έννοιας κατανόησης όπως ορίστηκαν στο εννοιολογικό πλαίσιο).

Το περιεχόμενο του δεύτερου άξονα περιλαμβάνει ερωτήσεις (αντιστοιχούν στο 3^o και στο 4^o μέρος των δοκιμίων),που εξετάζουν το πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν τα αξιώματα, τους ορισμούς και τα θεωρήματα στις αποδεικτικές διαδικασίες. Ειδικότερα, ως προς το 3^o μέρος τα δύο δοκίμια παρουσιάζουν την ίδια δομή αλλά στο καθένα χρησιμοποιούνται διαφορετικά προβλήματα-ασκήσεις. Συγκεκριμένα στο 3^o μέρος των δοκιμίων, παρουσιάζονται σε δύο θέματα, δύο αποδείξεις με τη βοήθεια αριθμημένων βημάτων. Η απόδειξη στο 1^o θέμα είναι πλήρης ενώ η απόδειξη στο 2^o ελλιπής. Η δυνατότητα να αντιληφθεί ο μαθητής αν υπάρχουν κενά ή όχι σε μια αποδεικτική διαδικασία, ο ακριβής προορισμός της θέσης αυτών, η αναγνώριση του είδους της πρότασης που λείπει και η ακριβής διατύπωση αυτής δείχνουν αν ο μαθητής είναι σε θέση να δώσει εξηγήσεις. Αυτές οι εξηγήσεις αν υπάρχουν, αναδεικνύουν το βαθμό κατανόησης που έχει ο μαθητής για το ρόλο της πρότασης στην απόδειξη. Η χρήση και η κατάλληλη αξιοποίηση των αξιωμάτων, των ορισμών και των θεωρημάτων από τους μαθητές, για να αιτιολογήσουν-εξηγήσουν αν μια απόδειξη είναι πλήρης ή όχι σχετίζεται με τη διάσταση της εξήγησης (η δεύτερη από τις διαστάσεις της έννοιας κατανόησης όπως ορίστηκαν στο εννοιολογικό πλαίσιο).

Στο 4^o μέρος των δοκιμίων, οι μαθητές καλούνται να τοποθετήσουν στη σωστή σειρά τις προτάσεις που συνιστούν μία απόδειξη. Αυτές μπορεί να είναι ένας ορισμός, ένα αξίωμα, ένα θεώρημα ή μια τρίτη πρόταση. Η εύρεση της σωστής διαδοχής δείχνει ότι ο μαθητής όχι μόνο γνωρίζει τη λειτουργία των προτάσεων αλλά μπορεί και να εφαρμόζει αυτή τη γνώση σε νέες καταστάσεις. Αφού, για να τις τοποθετήσει στη σωστή σειρά, πρέπει να αντιληφθεί ποιες από αυτές είναι υπόθεση, προϋπόθεση ή συμπέρασμα, δηλαδή να έχει βαθύτερη κατανόηση του λειτουργικού ρόλου των προτάσεων σε μια απόδειξη. Η χρήση και η κατάλληλη αξιοποίηση των αξιωμάτων, των ορισμών και των θεωρημάτων για να οργανώσουν μια απόδειξη σχετίζεται με τη διάσταση της εφαρμογής (η τρίτη από τις διαστάσεις της έννοιας κατανόησης όπως ορίστηκαν στο εννοιολογικό πλαίσιο).

Τα δοκίμια αποτέλεσαν τα εργαλεία συγκέντρωσης δεδομένων για την εξαγωγή αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων σχετικά με τα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης. Για τη συλλογή δεδομένων σχετικά με το 3ο ερευνητικό ερώτημα έγινε αξιοποίηση τόσο των φύλλων εργασίας με τίτλο «**συμπληρώνοντας το συλλογισμό…**» (3ο φύλλο εργασίας) όσο και των σημειώσεων που καταγράφηκαν κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων της 3ης ενότητας της διδακτικής παρέμβασης που περιγράφεται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Εγκυρότητα και αξιοπιστία

Η οργάνωση των εργαλείων μέτρησης, των δύο δοκιμίων σε δύο άξονες ερωτημάτων, σε αντιστοιχία με τα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα, που παρουσιάστηκε στις προηγούμενες παραγράφους, καθώς και η σύνδεση του περιεχομένου των ερωτήσεων που περιλαμβάνει ο κάθε άξονας ερωτημάτων με τους ορισμούς των εννοιών και των διαστάσεων τους όπως ορίστηκαν στο εννοιολογικό πλαίσιο θεωρείται ότι, διασφαλίζει την εγκυρότητα περιεχομένου των εργαλείων μέτρησης, όπως και την εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής. Το διάγραμμα 4 που ακολουθεί στην επόμενη σελίδα, παρουσιάζει την ανάλυση της δομής των εργαλείων και τις συνδέσεις-αντιστοιχίες ερευνητικών ερωτημάτων-αξόνων ερωτημάτων-διαστάσεων ορισμών.

Επιπρόσθετα, η οργάνωση των δραστηριοτήτων της διδακτικής παρέμβασης, (παρουσιάζεται στην ενότητα που ακολουθεί) και η ανάλυση των αποτελεσμάτων (πιν 1) σε αντιστοιχία με τους ορισμούς, ενισχύουν την εγκυρότητα της έρευνας.

Η πιλοτική εφαρμογή του δοκιμίου, η συμπλήρωση των δοκιμίων εντός του σχολείου, με παρουσία της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού, όπως και το περιεχόμενο και ο τρόπος γραφής των ερωτήσεων ενισχύουν την αξιοπιστία των ερευνητικών εργαλείων, (δοκιμίων), της έρευνας. Επιπλέον η λεπτομερής παρουσίαση πολλών αυτούσιων περιγραφών των μαθητών, οι φωτογραφίες από τα έργα των μαθητών κατά τη διάρκεια της παρέμβασης και τα φύλλα εργασίας (κεφάλαιο αποτελεσμάτων) εξασφαλίζουν την εμπιστοσύνη σχετικά με την αλήθεια των δεδομένων. Τα παραπάνω, θεωρείται ότι, συμβάλλουν στην αξιοπιστία της έρευνας.

Διάγραμμα 4: Ανάλυση της δομής του εργαλείου και σύνδεση του με τα ερευνητικά ερωτήματα και τους ορισμούς των εννοιών και των διαστάσεων του.

3.3 Οργάνωση της διδακτικής παρέμβασης.

Πριν από την υλοποίηση της σχεδιασμένης διδακτικής παρέμβασης, προηγήθηκε η σύντομη διδασκαλία του δεύτερου κεφαλαίου του σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου, «τα βασικά γεωμετρικά σχήματα». Γιατί, υπήρχαν μαθητές, που δεν είχαν διδαχθεί στο Γυμνάσιο, όλες τις απαραίτητες και προβλεπόμενες γεωμετρικές έννοιες, ορισμούς και ιδιότητες. Οι περισσότερες από αυτές εμπεριέχονται στο δεύτερο αυτό κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου. Με στόχο, όλοι οι μαθητές να συμμετέχουν ενεργά και υπό ίσους όρους, στις δραστηριότητες της συγκεκριμένης παρέμβασης, κρίθηκε αναγκαία η σύντομη διδασκαλία αυτού του κεφαλαίου, παρόλο που το αντίστοιχο κεφάλαιο δεν εμπεριέχεται στην διδακτέα ύλη του μαθήματος.

Στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης τα παιδιά εργάστηκαν σε ομάδες και ενεπλάκησαν σε παιγνιώδεις δραστηριότητες που ομαδοποιούνται σε τέσσερις ενότητες. Οι τρεις από τις ενότητες δραστηριοτήτων, $1^{η}$, $2^{η}$ και $4^{η}$, βρίσκονται σε αντιστοιχία με τα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας. Αφορούν, στην κατανόηση λειτουργικού και θεωρητικού ρόλου, των αξιωμάτων, των ορισμών, των θεωρημάτων και της απόδειξης όπως και στην αξιοποίηση αυτών των στοιχείων στην απόδειξη. Η $3^{η}$ ενότητα δραστηριοτήτων αφορά στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατασκευή της απόδειξης αλλά, συνδέεται και με τη χρήση των παραπάνω στοιχείων μέσα στην απόδειξη. Επομένως οι δραστηριότητες της αντίστοιχης ενότητας συνδέονται τόσο το τρίτο ερευνητικό ερώτημα όσο και με το δεύτερο.

Αναλυτικότερα, στην $1^{η}$ ενότητα δραστηριοτήτων με τίτλο **«χαρακτηρίζοντας προτάσεις»** ($1^{ο}$ φύλλο εργασίας) παρουσιάζονται οι αποδείξεις 2 προτάσεων. Οι προτάσεις που συνιστούν κάθε απόδειξη είναι γραμμένες και τοποθετημένες μέσα στο κείμενο σε πλαίσια. Κάθε ομάδα χαρακτήριζε τις προτάσεις (κατά τη κρίση των μελών της) και τις αντέγραφε σε καρτέλες διαφορετικών χρωμάτων. Στις κίτρινες τα αξιώματα, στις ροζ-μωβ τους ορισμούς, στις θαλασσί τα θεωρήματα και στις πράσινες τις άλλες (τρίτες) προτάσεις. Στη συνέχεια τοποθετούσαν σε ένα χαρτόνι τις καρτέλες στη σειρά όπως παρουσιαζόταν στο φύλλο εργασίας. Έτσι, η απόδειξη κάθε δραστηριότητας ήταν μια σύνθεση, ένα κολάζ από καρτέλες διαφορετικών χρωμάτων, όπου το κάθε χρώμα δήλωνε το είδος της κάθε πρότασης. Στο τέλος κάθε δραστηριότητας το έργο κάθε ομάδας φωτογραφιζόταν και αναρτιόνταν στην e-class. Όταν όλες οι ομάδες ολοκλήρωσαν τις δραστηριότητες του φύλλου εργασίας, ακολούθησε συζήτηση στην τάξη στην οποία εξέφρασαν την άποψη της ομάδας (ταυτόχρονα στον πίνακα προβάλλονταν το φύλλο εργασίας). Η εκπαιδευτικός με κατάλληλες ερωτήσεις κατηύθυνε τη συζήτηση και συναποφάσισαν -σε με τους μαθητές για τους τελικούς χαρακτηρισμούς. Οι μαθητές είχαν πρόσβαση στο έργο της ομάδας τους αλλά και στα έργα όλων των ομάδων της τάξης καθώς και στις σωστές απαντήσεις κάθε δραστηριότητας, αφού όλο το υλικό αναρτιόνταν στην e-class μετά την περάτωση του αντίστοιχου μαθήματος. Η συνεχής εναλλασσόμενη χρήση των προτάσεων αυτών στο χτίσιμο ενός αποδεικτικού συλλογισμού στόχευαν τόσο στην ανάδειξη του λειτουργικού ρόλου των προτάσεων αυτών στην απόδειξη μιας πρότασης όσο και στην ενίσχυση της ικανότητας διάκρισης των παραπάνω προτάσεων (διάσταση ερμηνείας).

Πριν τη 2η ενότητα δραστηριοτήτων μεσολάβησε η υπενθύμιση και αναδιατύπωση των ορισμών των εντός εναλλάξ γωνιών, εντός εκτός και επί τα αυτά και των εντός και επί τα αυτά γωνιών, τους οποίους είχαν συναντήσει στην Α΄ Γυμνασίου.

Στη 2η ενότητα δραστηριοτήτων με τίτλο **«αναζητώντας τη σωστή σειρά»** (2ο φύλλο εργασίας), κάθε ομάδα δοκιμάζει να βάλει τις προτάσεις που είναι αναγκαίες για μια απόδειξη στη σωστή διαδοχή. Δίνονται όλες οι προτάσεις που είναι απαραίτητες για την πλήρη απόδειξη μιας πρότασης, τυπωμένες σε καρτέλες διαφορετικών χρωμάτων. Η επιλογή της θέσης της πρότασης στην απόδειξη στοχεύει να βοηθήσει τους μαθητές όχι μόνο να αναγνωρίσουν τον λειτουργικό ρόλο της κάθε πρότασης, αλλά να αρχίσουν να χρησιμοποιούν τις προτάσεις αυτές ως εργαλεία. Η σωστή χρήση των εργαλείων προϋποθέτει βαθύτερη κατανόηση για το ρόλο που μπορεί να έχει μία πρόταση ως υπόθεση, προϋπόθεση ή συμπέρασμα μέσα σε έναν συλλογισμό και εφαρμογή των γνώσεων αυτών σε μία απόδειξη. (διάσταση εφαρμογής). Παράλληλα, επειδή το χρώμα της καρτέλας καθορίζει το είδος της πρότασης, ενδέχεται να ενισχυθεί και η ικανότητα διάκρισης των προτάσεων (διάσταση ερμηνείας).

Πριν την ενασχόληση των μαθητών με τις δραστηριότητες της 3ης ενότητας με τίτλο «**συμπληρώνοντας το συλλογισμό…»** (3ο φύλλο εργασίας) έγινε αναφορά στο Ευκλείδειο αίτημα της παραλληλίας.

Η 3η ενότητα περιλαμβάνει 4 δραστηριότητες. Σε κάθε δραστηριότητα δίνονται κάποια αρχικά βήματα και κάθε ομάδα καλείται να συνεχίσει και να ολοκληρώσει το συλλογισμό. Τα βήματα αυτά είναι περισσότερα στην 1η δραστηριότητα και μειώνονται σταδιακά στις επόμενες δραστηριότητες (φθίνουσα καθοδήγηση). Σχήμα δίνεται μόνο στην 1η δραστηριότητα. Επιπλέον στο τέλος του φύλλου εργασίας δίνονται γραμμένα και τοποθετημένα μέσα σε πλαίσια τα θεωρήματα, οι ορισμοί και τα αξιώματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τις ομάδες. Σε καθεμία από τις 4 δραστηριότητες ζητείται η απόδειξη 4 προτάσεων που στο σχολικό βιβλίο αναφέρονται ως ιδιότητες των παραλλήλων ευθειών.

Μπορεί κάθε ομάδα να είχε στη διάθεση της όλα τα εργαλεία για την δημιουργία των αποδείξεων των 4 ιδιοτήτων, αλλά για την κατασκευή και συμπλήρωση του συλλογισμού δεν αρκεί απλά η επιλογή της κατάλληλης πρότασης· χρειάζονται αιτιολογημένες εξηγήσεις για το πώς θα χρησιμοποιηθούν οι προτάσεις αυτές, ώστε να καταλήξουν σε ένα συλλογισμό που δεν θα παρουσιάζει κενά στην οργάνωση. (διάσταση της εξήγησης). Οι δυσκολίες και τα εμπόδια που συνάντησαν οι ομάδες καταγράφηκαν και παρουσιάζονται στην αντίστοιχη υποενότητα με τα αποτελέσματα.

Στην $4^{η}$ ενότητα με τίτλο **«χαρτογραφώντας τις συνδέσεις των προτάσεων»** ($4^{ο}$ φύλλο εργασίας) η δραστηριότητα της ενότητας στοχεύει στην ανίχνευση του θεωρητικού ρόλου των αξιωμάτων-ορισμών-θεωρημάτων. Δίνονται τυπωμένα σε καρτέλες των τριών χρωμάτων τα αξιώματα, οι ορισμοί και τα θεωρήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην ενότητα των παραλλήλων. Κάθε ομάδα τοποθετεί τις καρτέλες σε χαρτόνι και προσπαθεί να συνδέσει με γραμμές τις προτάσεις ώστε να φαίνεται ποιες από αυτές συμμετείχαν στην απόδειξη των θεωρημάτων της ενότητας. Σε αυτήν τη δραστηριότητα επιτρέπεται η χρήση του σχολικού βιβλίου, όπως και η χρήση όλων των προηγούμενων φύλλων εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $4^{Ο}$

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται σε τρεις ενότητες τα αποτελέσματα της έρευνας.

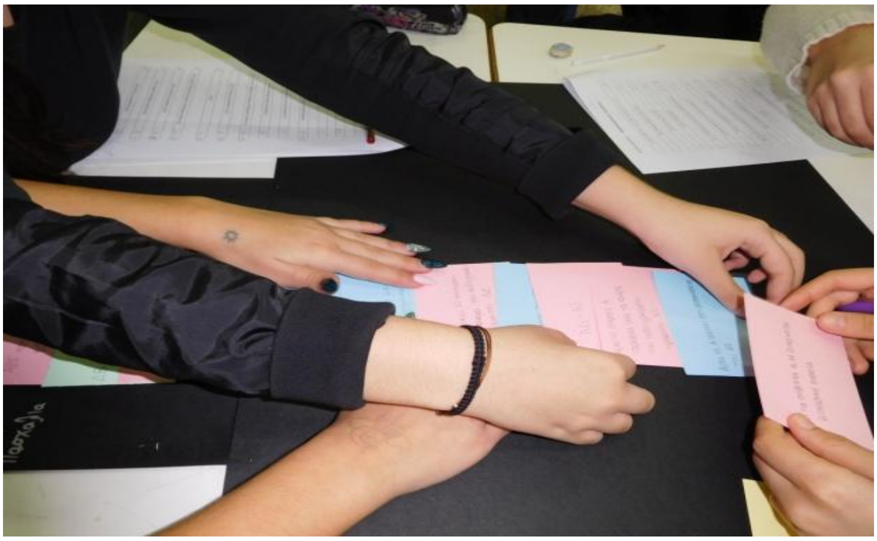
4.1 Εξέλιξη της διδακτικής παρέμβασης

«Χαρακτηρίζοντας προτάσεις»

Η ενασχόληση των μαθητών με τις δραστηριότητες της ενότητας πυροδότησε ένα διάλογο με αρκετές συγκρούσεις ανάμεσα στα μέλη της κάθε ομάδας για το τι είναι ορισμός, αξίωμα και θεώρημα.

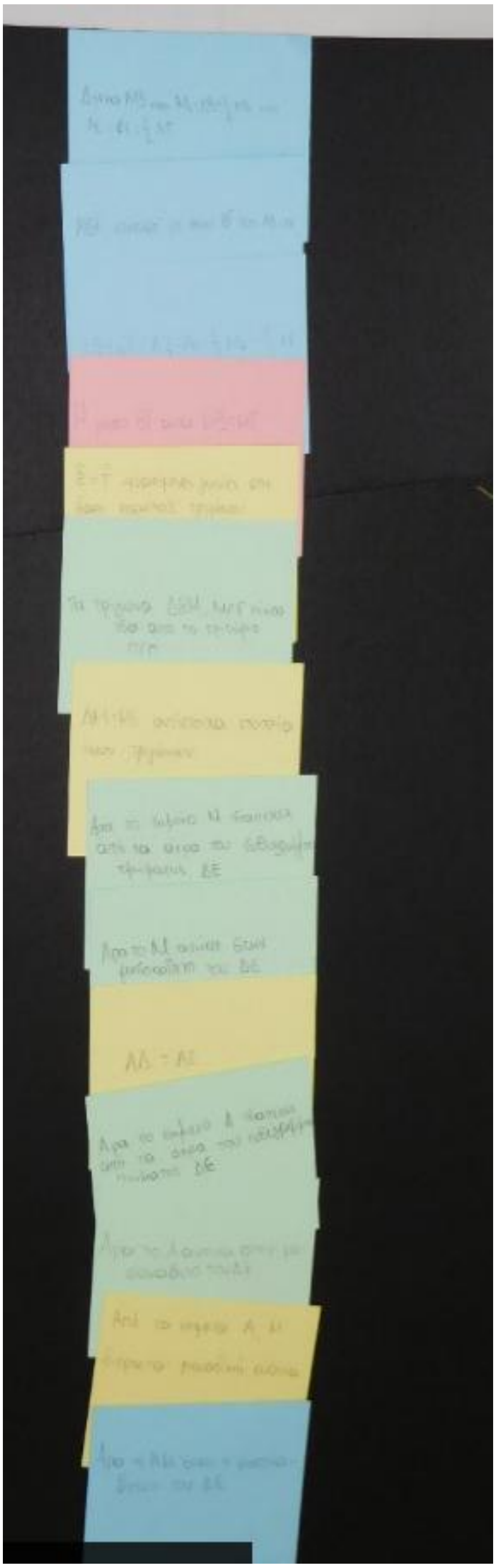
Στην $1^{η}$ δραστηριότητα δίνονταν ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση την πλευρά ΒΓ και Δ, Ε, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Δίνονταν επίσης όλες οι προτάσεις τοποθετημένες στη σωστή σειρά από τις οποίες συνεπάγεται ότι η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ. Ακολουθούν ενδεικτικές φωτογραφίες που παρουσιάζουν τις δράσεις και τα έργα των μαθητών.

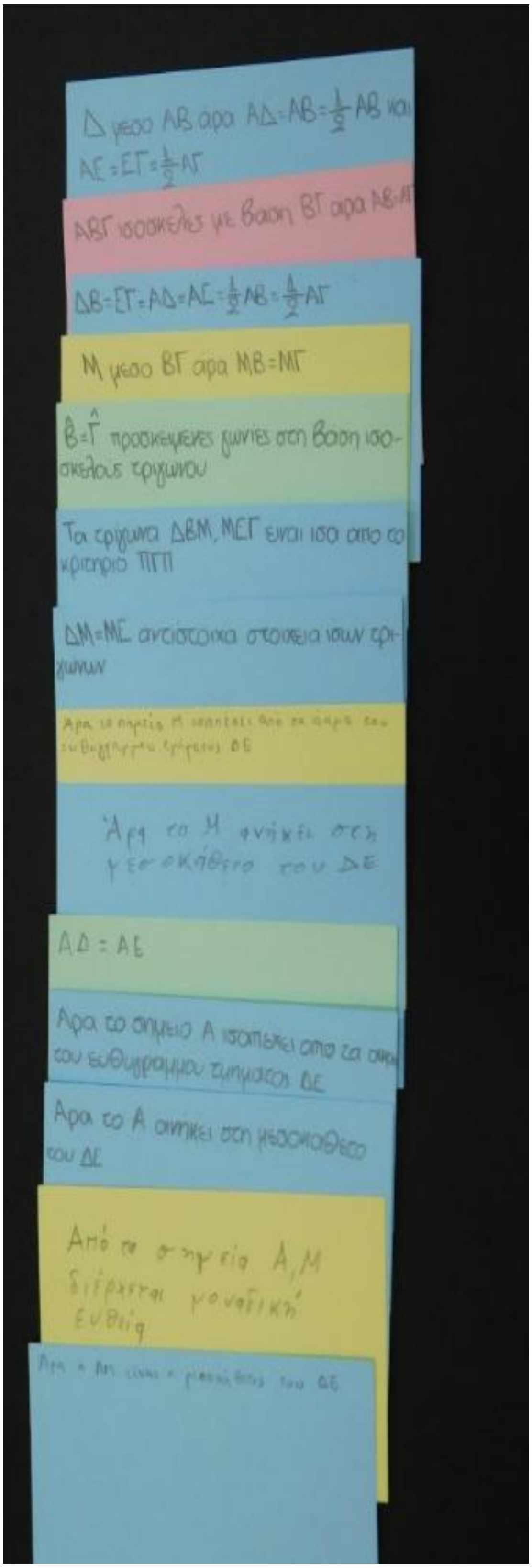
Φωτογραφία 1: χαρακτηρισμός των προτάσεων και αντιγραφή σε καρτέλες των 4 χρωμάτων από μαθητές μιας ομάδας



Φωτογραφία 2: Τοποθέτηση των καρτελών στη σειρά από μαθητές κάποιας ομάδας

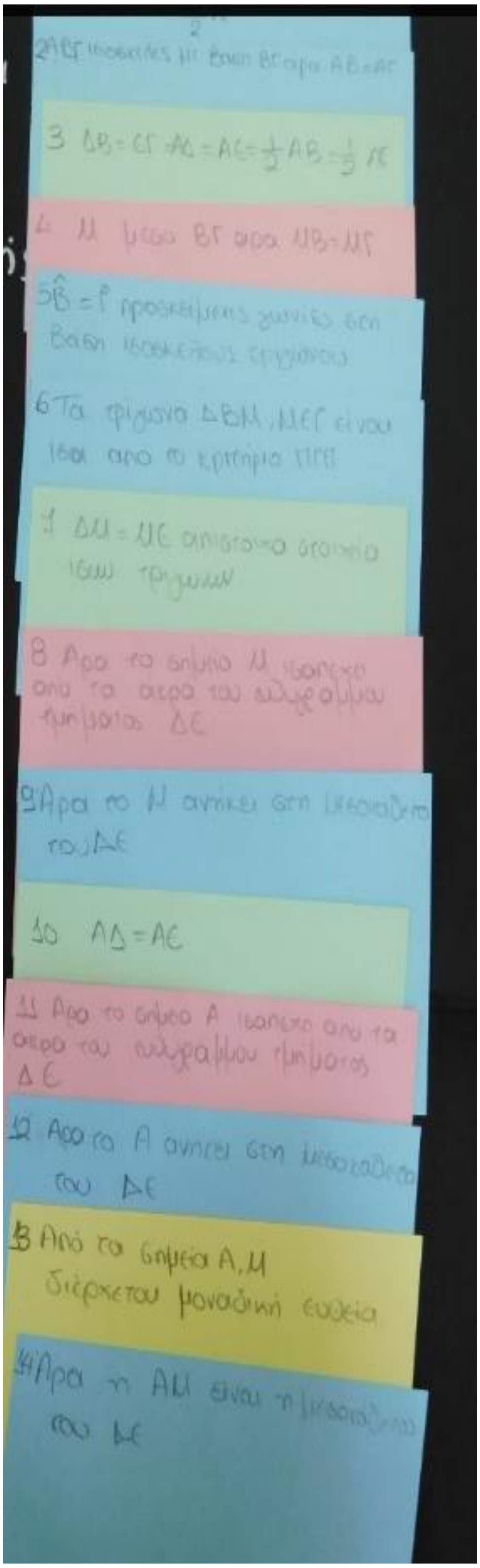
Στις επόμενες 4 φωτογραφίες παρουσιάζονται οι επιλογές των διαφορετικών χρωμάτων για τις ίδιες προτάσεις εμφανίζοντας τις διαφοροποιήσεις τεσσάρων ομάδων ως προς τους χαρακτηρισμούς των προτάσεων.

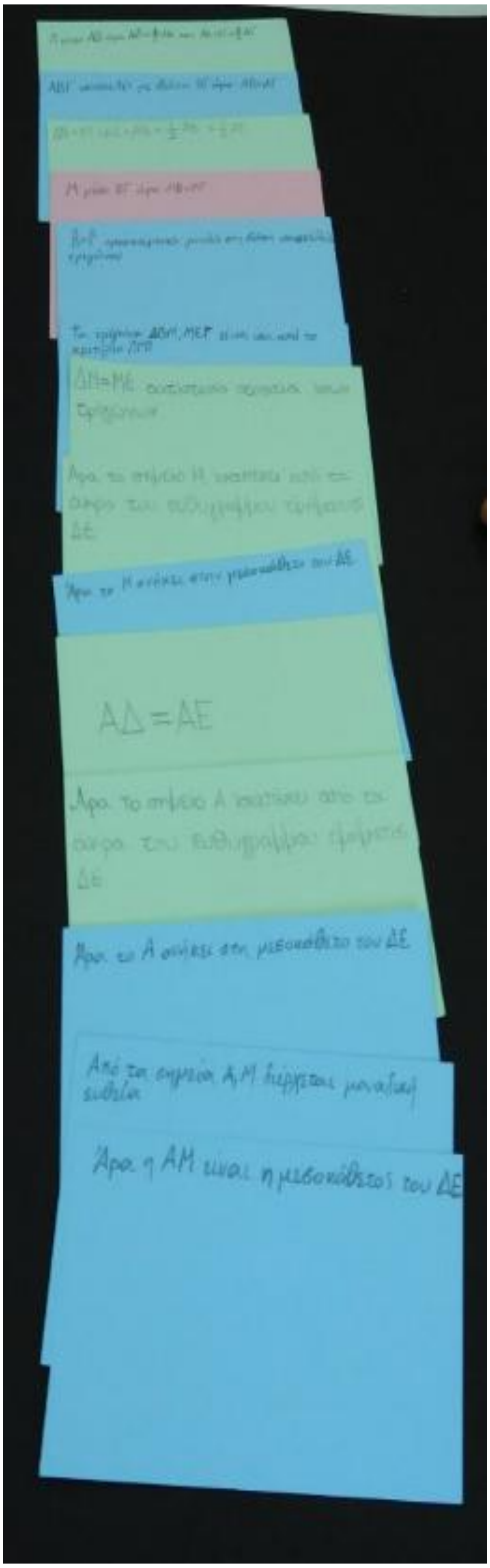




Φωτογραφία 3:Χαρακτηρισμός των προτάσεων από μια ομάδα

Φωτογραφία 4: Χαρακτηρισμός των προτάσεων από μια δεύτερη ομάδα

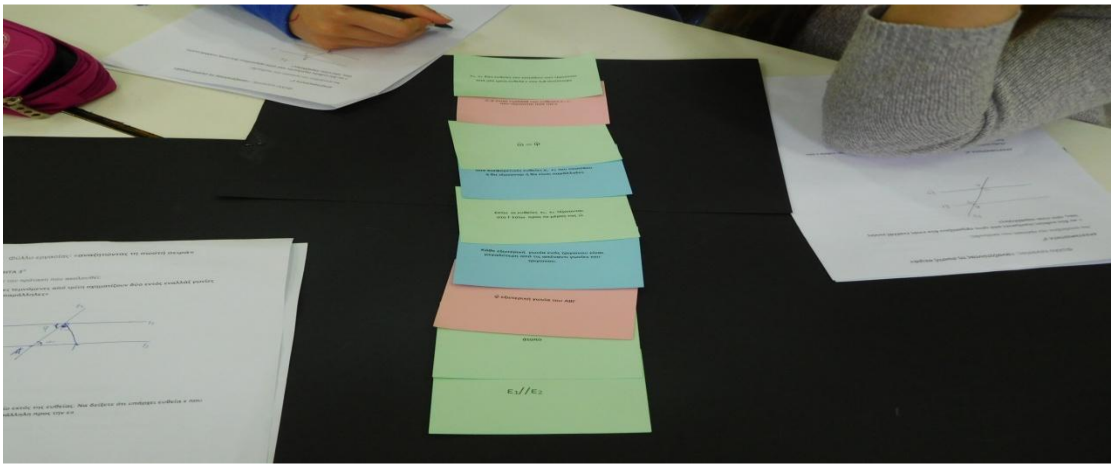




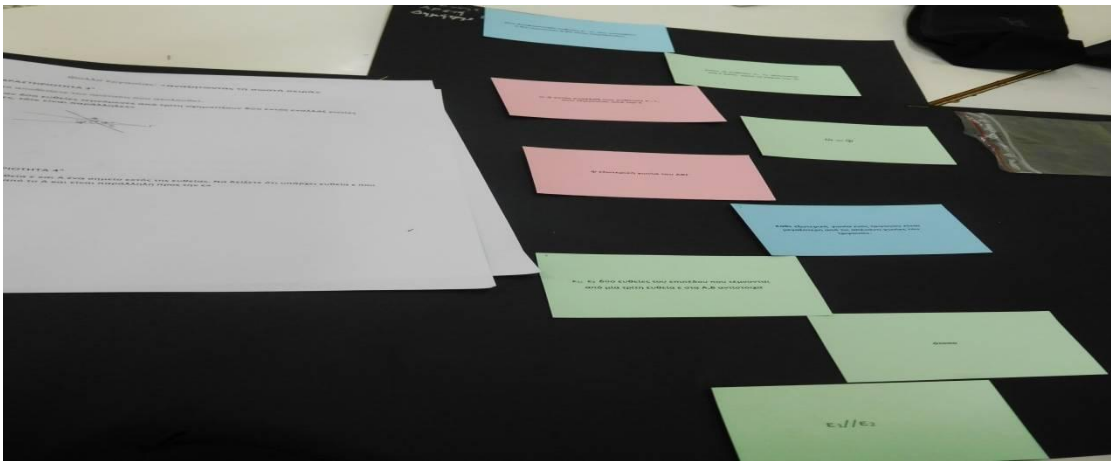
Φωτογραφία 5: Χαρακτηρισμός των προτάσεων από μια τρίτη ομάδα «Αναζητώντας τη σωστή σειρά»

Φωτογραφία 6: Χαρακτηρισμός των προτάσεων από μια τέταρτη ομάδα

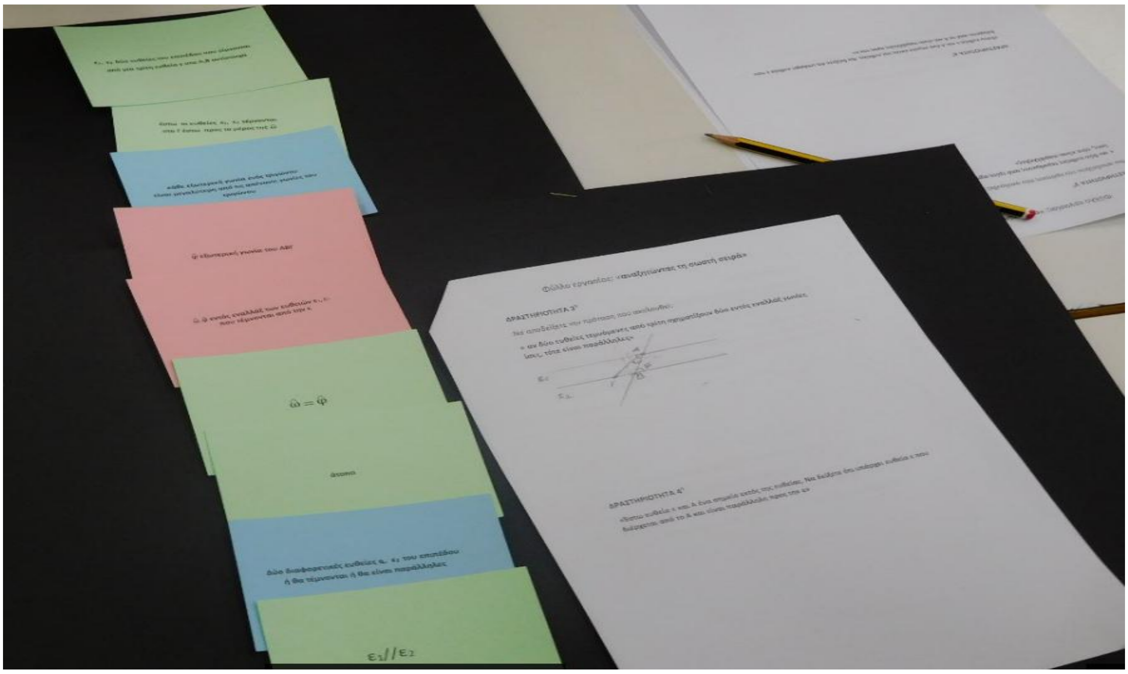
Στην ενότητα αυτή δόθηκαν 3 δραστηριότητες. Η μία αφορούσε την απόδειξη της πρότασης ότι, αν οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη είναι ίσες, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες. Η άλλη σχετιζόταν με την ύπαρξη και κατασκευή ευθείας που διέρχεται από ένα σημείο Α και είναι παράλληλη προς δεδομένη ευθεία ε. Η τελευταία δραστηριότητα της ενότητας αναφερόταν στην παραλληλία δύο διαφορετικών ευθειών, όταν αυτές είναι κάθετες σε μία τρίτη ευθεία σε διαφορετικά σημεία της. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε στην τάξη ήταν παρόμοια με αυτήν της προηγούμενης ενότητας μόνο που ο χρόνος που διατέθηκε στο τέλος για συζήτηση στην τάξη σχετικά με την αιτιολόγηση των σωστών επιλογών ήταν λίγος. (περιορισμούς έρευνας) . Στη συνέχεια παρατίθενται ενδεικτικές φωτογραφίες των έργων των μαθητών. Σε αυτές διακρίνονται κάποιες από τις διαφορετικές προσεγγίσεις των ομάδων στις 3 δραστηριότητες της ενότητας.



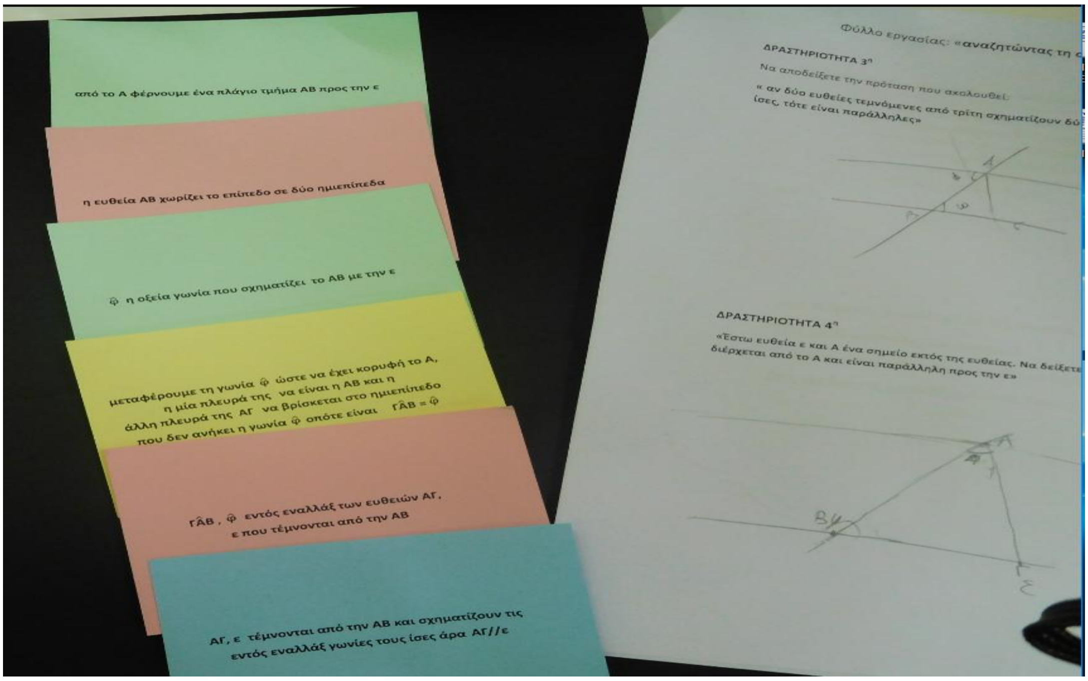
Φωτογραφία7: Η σωστή σειρά κατά την κρίση μιας ομάδας στην απόδειξη της πρότασης «αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες»



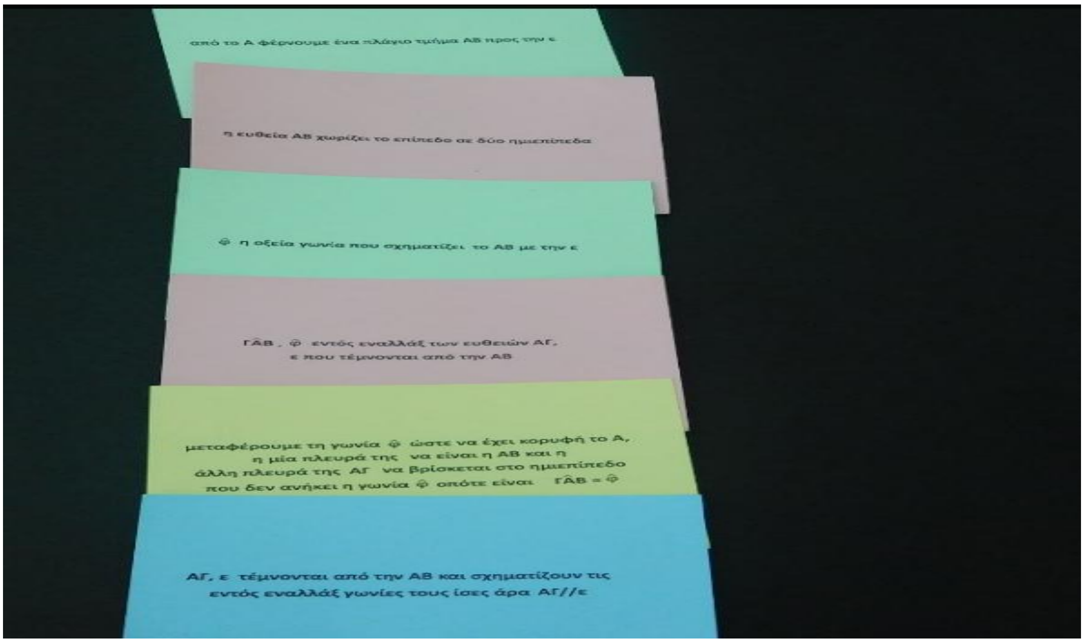
Φωτογραφία 8: Η σωστή σειρά κατά την κρίση μιας δεύτερης ομάδας στην απόδειξη της πρότασης «αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες»



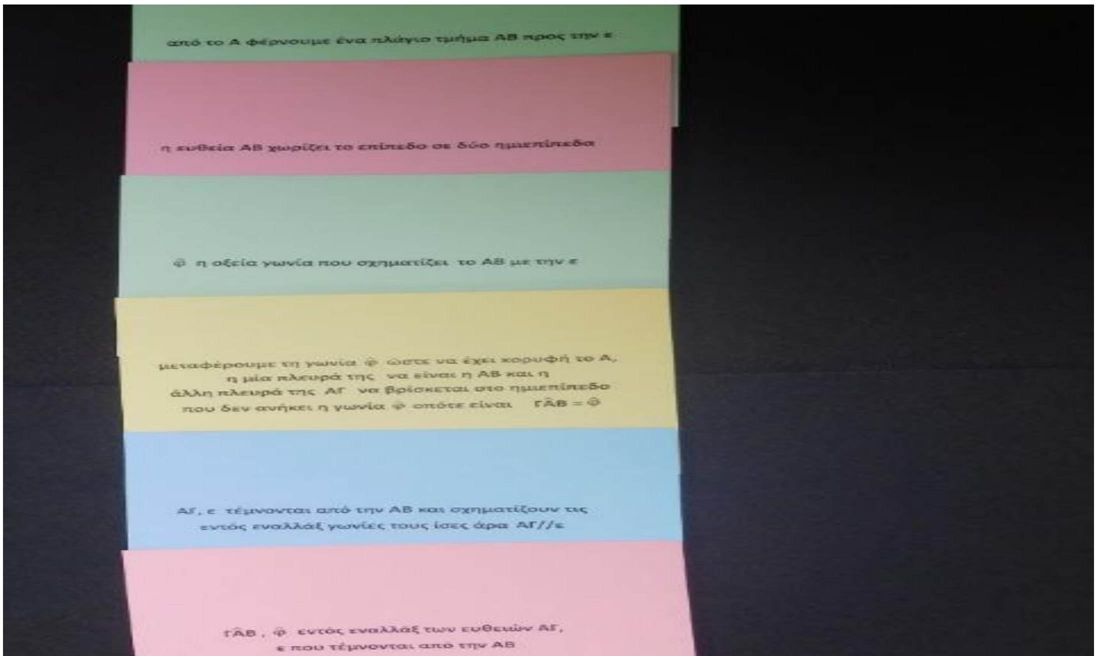
Φωτογραφία 9: Η σωστή σειρά κατά την κρίση μιας τρίτης ομάδας στην απόδειξη της πρότασης «αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες»



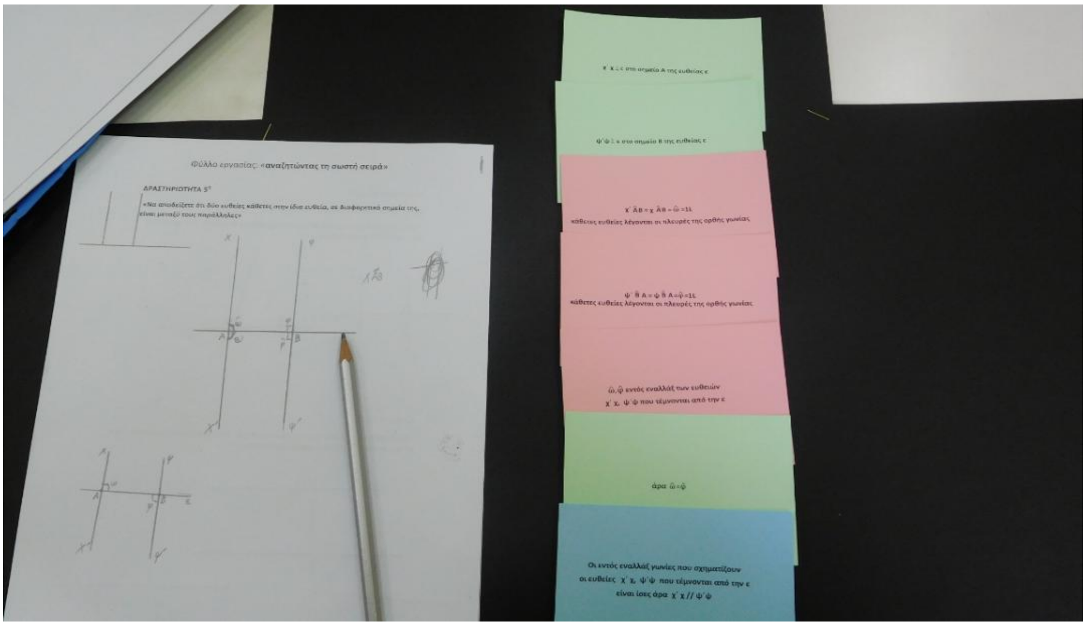
Φωτογραφία 10: Η σωστή σειρά κατά την κρίση μιας ομάδας στην απόδειξη της πρότασης «Έστω ευθεία ε και Α ένα σημείο εκτός της ευθείας. Να δείξετε ότι υπάρχει ευθεία ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την ε»



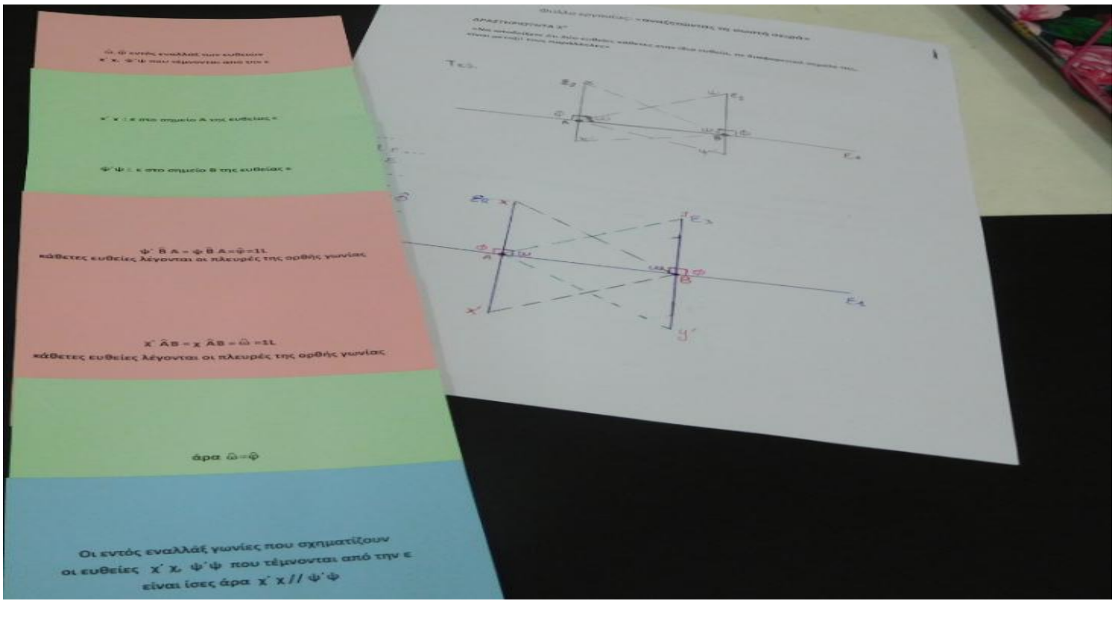
Φωτογραφία 11: Η σωστή σειρά κατά την κρίση μιας δεύτερης ομάδας στην απόδειξη της πρότασης «Έστω ευθεία ε και Α ένα σημείο εκτός της ευθείας. Να δείξετε ότι υπάρχει ευθεία ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την ε»



Φωτογραφία 12: Η σωστή σειρά κατά την κρίση μιας τρίτης ομάδας στην απόδειξη της πρότασης «Έστω ευθεία ε και Α ένα σημείο εκτός της ευθείας. Να δείξετε ότι υπάρχει ευθεία ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την ε»



Φωτογραφία 13: Η σωστή σειρά κατά την κρίση μιας ομάδας στην απόδειξη της πρότασης «δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες»

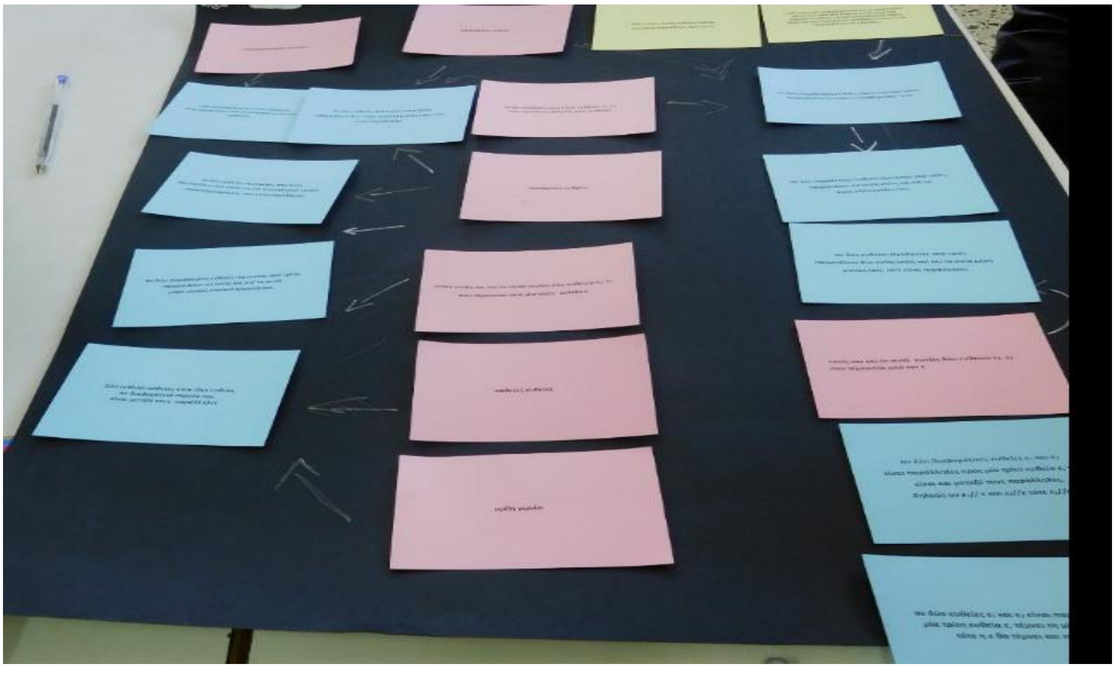


Φωτογραφία 14: Η σωστή σειρά κατά την κρίση μιας δεύτερης ομάδας στην απόδειξη της πρότασης «δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες»

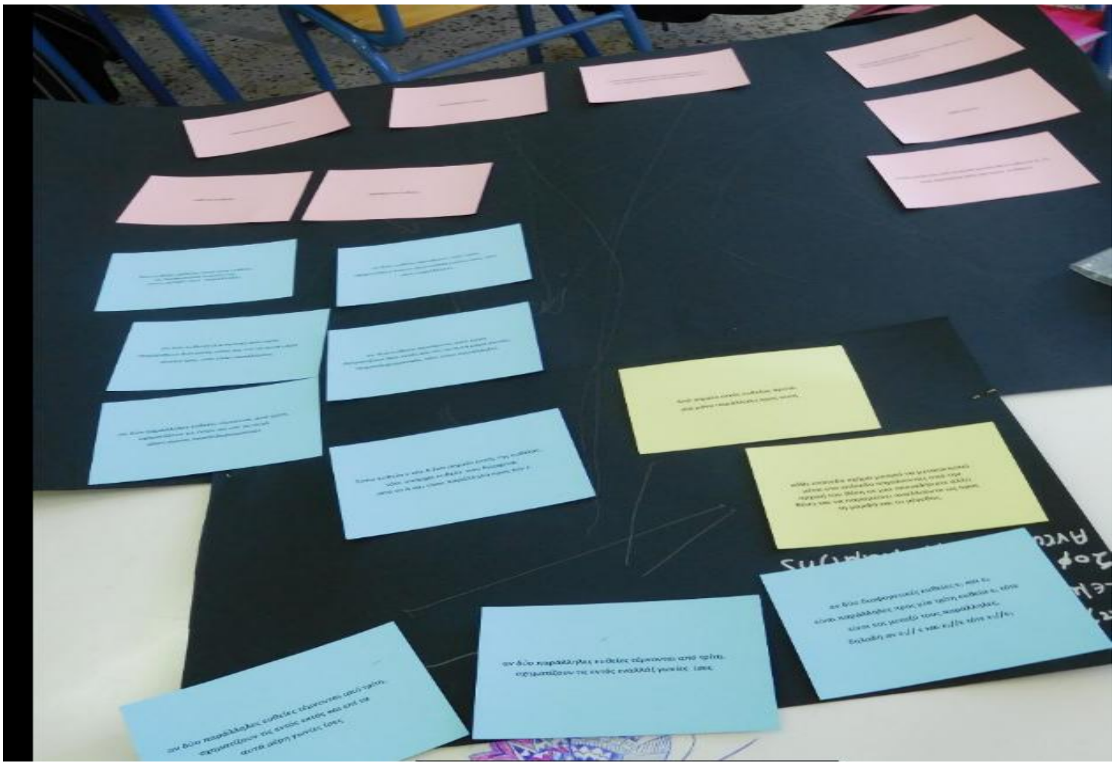
Φωτογραφία 15: Η σωστή σειρά κατά την κρίση μιας τρίτης ομάδας στην απόδειξη της πρότασης «δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες»

«Χαρτογραφώντας τις συνδέσεις των προτάσεων»

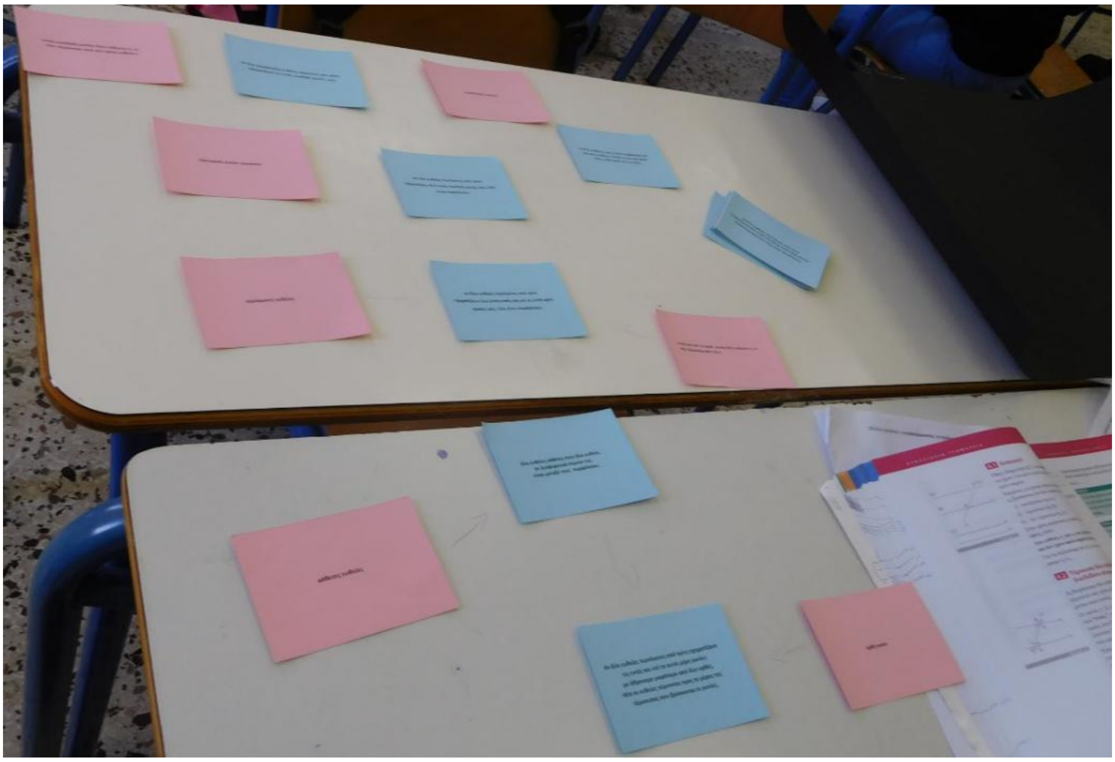
Ο βαθμός δυσκολίας της δραστηριότητας, ο λίγος χρόνος που είχε στη διάθεσή της κάθε ομάδα, (μία διδακτική ώρα) και ο μεγάλος αριθμός των προτάσεων που είχαν να διαχειριστούν οι ομάδες, δρουν ανασταλτικά στην επίτευξη της δραστηριότητας και θα πρέπει να ληφθούν υπόψη στον ανασχεδιασμό των φύλλων εργασίας. Ακολουθούν ενδεικτικές φωτογραφίες που παρουσιάζουν τις συνθέσεις κάποιων ομάδων.



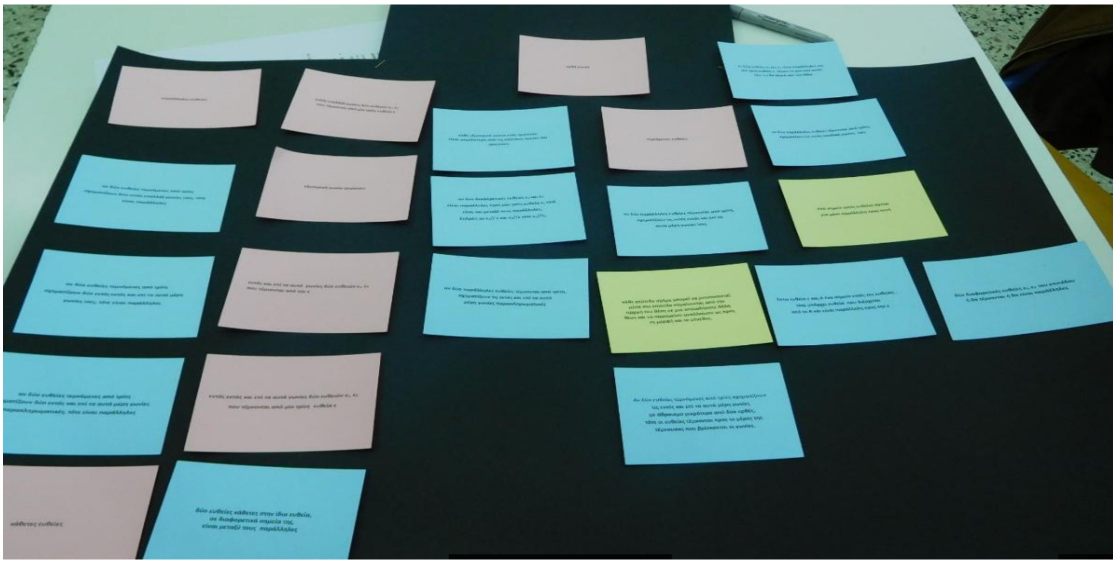
Φωτογραφία 16: Προσπάθεια χαρτογράφησης των συνδέσεων των προτάσεων που χρησιμοποιήθηκαν στις αποδείξεις των προτάσεων στην ενότητα «παραλλήλων ευθειών»



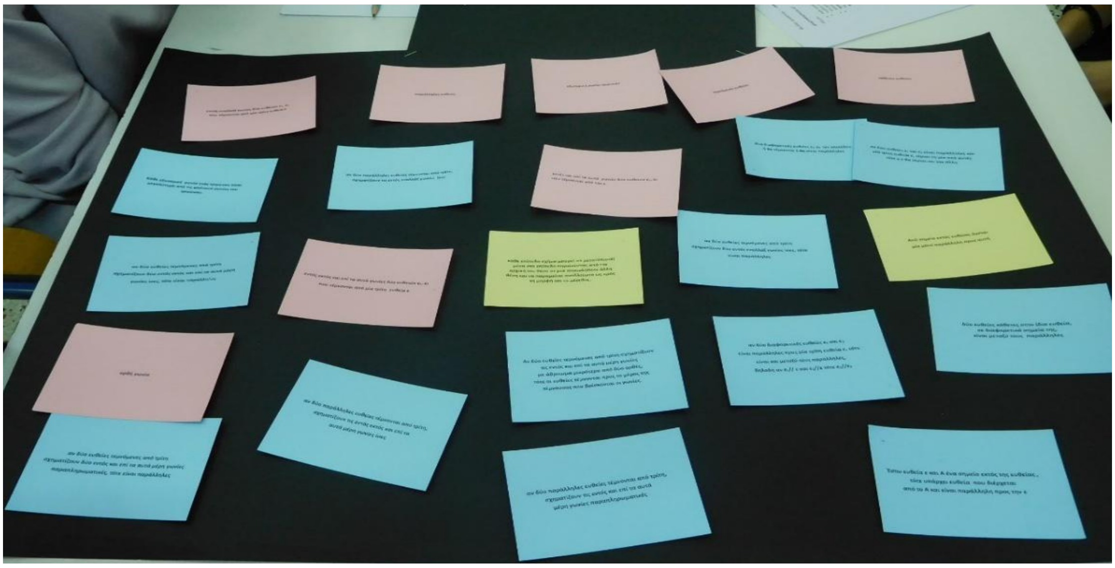
Φωτογραφία 17: Προσπάθεια χαρτογράφησης των συνδέσεων των προτάσεων που χρησιμοποιήθηκαν στις αποδείξεις των προτάσεων στην ενότητα «παραλλήλων ευθειών»



Φωτογραφία 18: Προσπάθεια χαρτογράφησης των συνδέσεων των προτάσεων που χρησιμοποιήθηκαν στις αποδείξεις των προτάσεων στην ενότητα «παραλλήλων ευθειών»



Φωτογραφία 19: Προσπάθεια χαρτογράφησης των συνδέσεων των προτάσεων που χρησιμοποιήθηκαν στις αποδείξεις των προτάσεων στην ενότητα «παραλλήλων ευθειών»



Φωτογραφία 20: Προσπάθεια χαρτογράφησης των συνδέσεων των προτάσεων που χρησιμοποιήθηκαν στις αποδείξεις των προτάσεων στην ενότητα «παραλλήλων ευθειών»

4.2. Παρουσίαση ευρημάτων για το ρόλο των αξιωμάτων, ορισμών, θεωρημάτων και απόδειξης στη δομή της Γεωμετρίας

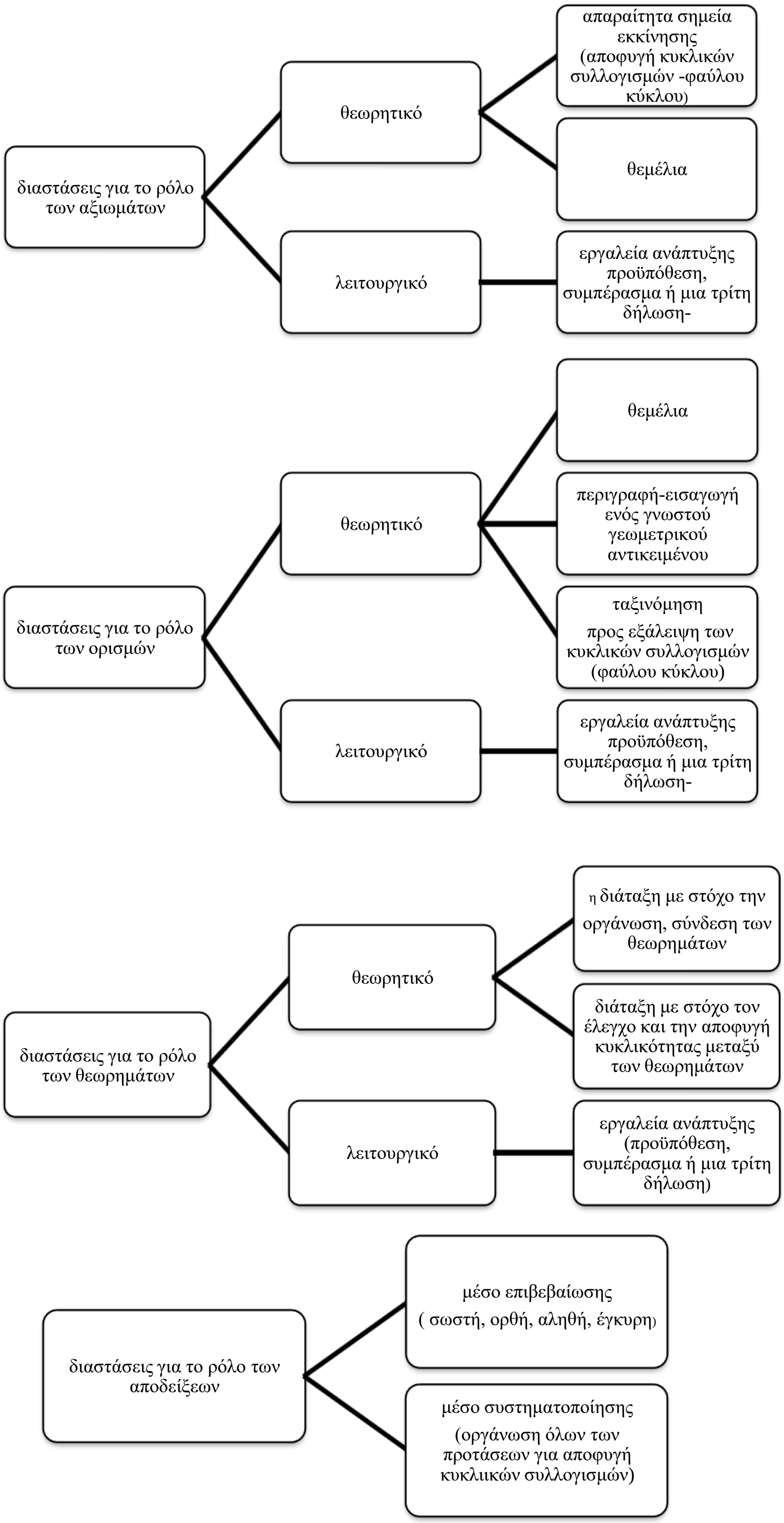
Σε αυτήν ενότητα τα αποτελέσματα προέκυψαν από τη συλλογή των απαντήσεων των μαθητών/τριών στα δύο δοκίμια, πριν και μετά από τη διδακτική παρέμβαση. Η αποκωδικοποίηση και κατανομή των απαντήσεων έγινε με βάση τη σχέση και αντιστοιχία των διαστάσεων των εμπλεκόμενων εννοιών, όπως αυτές ορίζονται και αποσαφηνίζονται στο εννοιολογικό πλαίσιο στην αντίστοιχη ενότητα. Ο πίνακας 1 που ακολουθεί παρουσιάζει αυτή την ανάλυση:

ΔΙΑΣΤΑΣΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1^{ος} άξονας: ερωτήσεις σχετικές με την ερμηνεία

2^{ος} άξονας: ερωτήσεις σχετικές με την εξήγηση

3^{ος}άξονας: ερωτήσεις σχετικές με την εφαρμογή



ΠΙΝΑΚΑΣ 1:Αντιστοιχίες διαστάσεων των εμπλεκόμενων εννοιών στα ερευνητικά ερωτήματα με στόχο την αποκωδικοποίηση και κατανομή των δεδομένων

4.2.1 . Αντιλήψεις των μαθητών για το αξίωμα

Αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του αξιώματος πριν από την παρέμβαση

Στην ερώτηση που αφορά τι θεωρούν οι μαθητές ότι είναι αξίωμα, 5 απαντήσεις στις 43 χαρακτηρίστηκαν ως σωστές(πχ. «συμβάσεις των επιστημόνων») ή σχεδόν σωστές (πχ. «δεχόμαστε, φαίνονται αληθείς αλλά δεν μπορούν να αποδειχτούν»). Απαντήσεις στις οποίες δινόταν σωστή περιγραφή αλλά λάθος παράδειγμα ή σημειωνόταν η έκφραση «δεν έχει αποδειχθεί ακόμα» εκτιμήθηκαν ως μερικώς σωστές. Τέτοιες απαντήσεις παρουσίασαν 10 μαθητές στους 43. Μη κατανόηση της σημασίας προκύπτει από 9 απαντήσεις σε σύνολο 43, ενώ 17 μαθητές στους 43 είτε δεν συμπλήρωσαν τίποτα είτε απάντησαν δε γνωρίζω. Παρατίθενται ενδεικτικές απαντήσεις μαθητών ανά κατηγορία. (Στις απαντήσεις των μαθητών διορθώθηκαν μόνο τα ορθογραφικά λάθη).

Σωστές και σχεδόν σωστές απαντήσεις:

…είναι κάτι που δεν έχει απόδειξη αλλά είναι κάτι σαν συμφωνία που γίνεται για διευκόλυνση στη Γεωμετρία

…αξίωμα είναι κάτι που δεχόμαστε αλλά δεν αποδεικνύεται

…μια περίπτωση που αποδεχτήκανε κάποιοι επιστήμονες

…είναι κάποιες αλήθειες, κάποια πράγματα που δεχόμαστε χωρίς απόδειξη

Μερικώς σωστές απαντήσεις:

… είναι όταν αποδεχόμαστε ότι κάτι ισχύει (πχ το σημείο δεν έχει διαστάσεις)

…είναι μια θέση την οποία δεν έχουμε αποδείξει, μια ιδιότητα που δίνεται σε έναν όρο της Γεωμετρίας

…είναι κάποια πράγματα που θεωρούνται δεδομένα χωρίς να αποδείξουμε κάτι

…είναι κάποιοι κανόνες που δεν μπορεί κανείς να τους αμφισβητήσει και δεν υπάρχουν εξαιρέσεις

…είναι οι «θεωρίες» που δεν έχουν αποδειχθεί

Απαντήσεις που υποδεικνύουν μη κατανόηση της σημασίας

…είναι όταν έχουμε έναν ορισμό και μας βοηθάει να καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα

…το αποδεχόμαστε όπως είναι

…είναι όταν πιστεύομε ότι κάτι ισχύει δηλαδή αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ τότε ΑΒ=ΑΓ

…είναι θεωρίες που δεν έχουν αποδειχθεί ακόμη και δεν έχουμε αρκετά στοιχεία

Αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του αξιώματος μετά από την παρέμβαση

Μετά την παρέμβαση η κατανομή των απαντήσεων στην ερώτηση σχετικά με το τι είναι αξίωμα διαφοροποιείται.. Από τις 43 οι 27 εντάσσονται στην κατηγορία «σωστές ή σχεδόν σωστές», 9 στην κατηγορία «μερικώς σωστές», 3 χαρακτηρίζονται ως «μη κατανόηση της σημασίας» και 4 απαντήσεις στην κατηγορία «δεν ξέρω/κενό».

Σωστές και σχεδόν σωστές απαντήσεις:

…είναι μία πρόταση που συμφωνούν όλοι οι επιστήμονες πως ισχύει,

…είναι κάτι που δεχόμαστε ότι ισχύει χωρίς να χρειάζεται απόδειξη,

…ισχυρισμοί που δεχόμαστε ως αληθείς αλλά δεν μπορούμε να αποδείξουμε.

…είναι κάτι που ισχύει χωρίς να χρειαστεί να το αποδείξω, δηλαδή δεχόμαστε ότι ισχύει

…είναι μια πρόταση η οποία αναφέρεται σε έναν κανόνα που δεν αποδεικνύεται, αλλά όμως τον δεχόμαστε ως αληθή

Μερικώς σωστές απαντήσεις:

…είναι κάτι το οποίο απλώς ισχύει αλλά δεν μπορούμε να το αποδείξουμε (και απλώς το αποδεχόμαστε)

…είναι ένας όρος τον οποίο δεν μπορούμε να τον αποδείξουμε αλλά όλοι γνωρίζουμε ότι ισχύει και αληθεύει

…το αξίωμα δεν μπορεί να αποδειχθεί

…αξίωμα είναι λόγια τα οποία έχουν ειπωθεί για το σχήμα ή για τις ευθείες, τις γωνίες κ.τ.λ.. και δεν έχουν αποδειχθεί ή αληθευτεί. *(λέξη που έπλασε ο μαθητής)*

Απαντήσεις που υποδεικνύουν μη κατανόηση της σημασίας

…είναι ένας κανόνας που δεχόμαστε. Συνήθως όχι με τη λογική

…είναι μια πρόταση που δεν ορίζεται ή που δεν είναι κανόνας

…είναι μια απόδειξη η οποία δεν μπορούμε να αποδείξουμε αν ισχύει

…είναι όταν κάτι είναι αποδεδειγμένο και δεν μπορούμε να το αμφισβητήσουμε ή να διαφωνήσουμε

Μεταβολές στις αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του αξιώματος

Συγκρίνοντας τις περιγραφές των μαθητών για το τι είναι αξίωμα, πριν και μετά από την παρέμβαση, παρατηρούνται σημαντικές μεταβολές ανάμεσα στις κατηγορίες των απαντήσεων. Αυξάνονται κατά 22 οι απαντήσεις που εντάσσονται στην κατηγορία «σωστές και σχεδόν σωστές απαντήσεις». Η αύξηση προήλθε από τη μετακίνηση των 9 μαθητών από τη κατηγορία «μερικώς σωστές απαντήσεις» και 13 μαθητών από τις κατηγορίες «μη κατανόηση της σημασίας» και «δεν ξέρω /κενό». Αν και ο αριθμός των απαντήσεων στην κατηγορία «μερικώς σωστές» δε φαίνεται να τροποποιείται αφού από 10 αλλάζει σε 9˙ παρ'όλα αυτά, οι 8 από τις 9 προέρχονται από μετακίνηση μαθητών από τις κατηγορίες «μη κατανόηση της σημασίας» και «δεν ξέρω /κενό». Επιπλέον, μετά τη παρέμβαση κανείς μαθητής δεν απαντά με τη βοήθεια μόνο κάποιου παραδείγματος.

Ο πίνακας 2 που ακολουθεί συνοψίζει τις 43 απαντήσεις στο τι είναι αξίωμα πριν και μετά την παρέμβαση και κάνει ορατές κάποιες από τις μεταβολές που αναφέρθηκαν:

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΑΞΙΩΜΑ	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Σωστές και σχεδόν σωστές απαντήσεις	5	27
Μερικώς σωστές απαντήσεις	10	9
Απαντήσεις με παράδειγμα	2	
Μη κατανόηση της σημασίας	9	3
Δεν ξέρω/κενό	17	4

Πίνακας 2: Αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του αξιώματος

Αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του αξιώματος πριν από την παρέμβαση

Οι απαντήσεις των μαθητών σχετικά με το ρόλο των αξιωμάτων κατανέμονται σε κατηγορίες με βάση την αναφορά τους στο «θεωρητικό» ή στο «λειτουργικό ρόλο» αυτών. Σε σύνολο 43 μαθητών μόνο ένας αναγνώρισε το θεωρητικό ρόλο των αξιωμάτων ως θεμέλια. Το λειτουργικό ρόλο διακρίνουν 10 από τους 43. Από αυτούς, οι 7 εστιάζουν στη χρήση τους στη λύση των ασκήσεων («σύνδεση με ασκήσεις») και οι 3 αναφέρονται στη γενική χρήση τους μέσα σε οποιαδήποτε αποδεικτική διαδικασία ή πρόβλημα («γενίκευση»). Δυσκολίες να αντιληφθούν κάποιο ρόλο («μη κατανόηση του ρόλου») παρουσιάζουν 10 μαθητές στους 43, ενώ 22 στους 43 αδυνατούν να δώσουν περιγραφή σχετικά με το πώς λειτουργεί το αξίωμα. Ακολουθούν ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών ανά κατηγορία.

Απάντηση με αναφορά στο θεωρητικό ρόλο:

...λειτουργεί ως κάτι το σίγουρο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να προβούμε σε νέα αποτελέσματα και συμπεράσματα,

Απαντήσεις που γενικεύουν τον λειτουργικό ρόλο:

…μας βοηθάνε να προχωρήσουμε τα προβλήματά μας

…είναι να μας βοηθάει στην επίλυση προβλημάτων

…είναι η διευκόλυνση

Απαντήσεις που συνδέουν τον λειτουργικού ρόλο με τις ασκήσεις:

…μας διευκολύνει στη λύση μιας άσκησης

…βοηθάει να υπολογίζονται πιο γρήγορα οι ασκήσεις

…να μας βοηθήσει να λύσουμε με πιο γρήγορο τρόπο τις ασκήσεις

Μη κατανόηση του ρόλου:

…να βοηθήσει τον μαθητή να κατανοήσει την άσκηση χρησιμοποιώντας όρους και αρκετά παραδείγματα

...να δίνει λίγες παραπάνω λεπτομέρειες για το οποιοδήποτε σχήμα έχουμε μπροστά μας

…είναι να δείξουμε στον άλλον με βήματα ότι κάτι δεν μπορεί να αποδειχθεί

… είναι να μας δείχνουν ένα συγκεκριμένο και αποδεδειγμένο όρο στην γεωμετρία πχ. οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι κάθετες

Αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του αξιώματος μετά από την παρέμβαση

Μετά την παρέμβαση σημειώθηκαν σημαντικές μεταβολές. Σωστές απαντήσεις έδωσαν 31 μαθητές στους 43, με 3 να αναφέρονται στο θεωρητικό ρόλο του αξιώματος, ως θεμέλιο και 28 στο λειτουργικό ρόλο. Από τις 28 περιγραφές οι 17 συνδέουν το λειτουργικό ρόλο μόνο με τις ασκήσεις και 11 διακρίνουν τη γενικότερη χρήση του. 5 μαθητές φαίνεται να μη κατανοούν το ρόλο, ενώ 7 μαθητές δεν έδωσαν καμία περιγραφή. Ακολουθούν ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών ανά κατηγορία:

Απαντήσεις με αναφορά στο θεωρητικό ρόλο:

...αποτελούν τα θεμέλια, πάνω στα οποία χτίζεται και αναπτύσσεται η Γεωμετρία,

...τα αξιώματα είναι η βάση πολλών θεωρημάτων,

…από τα αξιώματα βγαίνουν τα θεωρήματα

Απαντήσεις που γενικεύουν τον λειτουργικό ρόλο:

…μας βοηθάει να φτάσουμε στην απόδειξη με τη βοήθεια των ορισμών και των θεωρημάτων

…το χρησιμοποιούμε για να μας βοηθήσει να αποδείξουμε κάτι άλλο που θέλουμε

…να μας βοηθήσει σε μια απόδειξη

…βοηθούν να προχωρήσουμε την διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος ώστε να καταλήξουμε σε ένα αποτέλεσμα σε μία απόδειξη

…χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις και τις λύσεις των ασκήσεων και μας βοηθούν να φτάσουμε σε ένα τελικό αποτέλεσμα

Απαντήσεις που συνδέουν τον λειτουργικού ρόλο με τις ασκήσεις:

….μας βοηθούν γιατί είναι οι βάσεις ή σημαντικά στοιχεία για τη λύση μιας άσκησης

…μας βοηθάει διότι σε κάποια άσκηση μπορούμε να δεχτούμε ότι κάτι ισχύει

…καλύπτει κάποια κενά έτσι ώστε να λυθεί μια άσκηση

Μη κατανόηση του ρόλου:

…μας βοηθάει να λύσουμε κάποια ζητήματα για τα οποία δεν υπάρχει απόδειξη των στοιχείων τους

…μας βοηθάει στο να μη χρειάζεται να αποδείξουμε κάτι και έτσι ξέρουμε πως είναι σωστό και ισχύει αυτό που μας δείχνει

…μας βοηθάει να χρησιμοποιήσουμε έννοιες που δεν μπορούμε να αποδείξουμε

…να βοηθήσει τον μαθητή να κατανοήσει εύκολα και γρήγορα αυτήν την έννοια συνήθως μέσα σε μία απόδειξη

Μεταβολές στις αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του αξιώματος

Μελετώντας κανείς τις περιγραφές των μαθητών για το ρόλο του αξιώματος πριν και μετά την παρέμβαση διακρίνει αρκετές μεταβολές. Αρχικά, σχεδόν τα 2/3 των μαθητών αδυνατούν να περιγράψουν οποιοδήποτε λειτουργία των αξιωμάτων. Περίπου ίδιο ποσοστό μαθητών μετά την παρέμβαση, αποδίδουν ικανοποιητικές περιγραφές ιδιαιτέρως για τον λειτουργικό ρόλο, με σημαντική αύξηση του αριθμού των μαθητών (κατά 18) που αντιλαμβάνονται αυτό το ρόλο. Παράλληλα, αυξάνει κατά 7 ο αριθμός των μαθητών που αναπτύσσουν πιο διευρυμένη αντίληψη για τη λειτουργία των αξιωμάτων («γενίκευση»).

Ακολουθεί ο πίνακας 3 που παρουσιάζει την κατανομή των απαντήσεων στο ποιος είναι ο ρόλος του αξιώματος, 43 μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση:

ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΑΞΙΩΜΑΤΟΣ	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Απαντήσεις με αναφορά στο θεωρητικό ρόλο (θεμέλιο-βάση- εκκίνηση)	1	3
Απαντήσεις με αναφορά στο λειτουργικό ρόλο	10	28
Μη κατανόηση του ρόλου	10	5
Δεν ξέρω/κενό	22	7

Πίνακας 3: Αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του αξιώματος.

4.2.2 Αντιλήψεις των μαθητών για τον ορισμό

Αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του ορισμού πριν την παρέμβαση

Για την επεξεργασία των δεδομένων σχετικά με τη φύση του ορισμού διαμορφώθηκαν τέσσερις βασικές κατηγορίες: «απαντήσεις ότι περιγράφει», «απαντήσεις μόνο με παράδειγμα», «μη κατανόηση της σημασίας» και «δεν ξέρω/κενό».

Στην πρώτη κατηγορία εντάσσονται οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι ο ορισμός περιγράφει, ερμηνεύει, εκφράζει τη σημασία και εξηγεί ένα αντικείμενο, (όπως προκύπτει από τα συμφραζόμενα η λέξη «εξηγεί» χρησιμοποιείται από τα παιδιά με την έννοια ότι διευκρινίζει τη σημασία, την έννοια). Κάποιοι μαθητές εκτός από τις λεκτικές περιγραφές κάνουν ταυτόχρονα και χρήση παραδείγματος, οπότε οι απαντήσεις τους εντάχθηκαν σε αυτήν την κατηγορία. Στη δεύτερη κατηγορία υπάγονται όσοι απαντούν με χρήση μόνο παραδείγματος.

Στην κατηγορία «μη κατανόηση της σημασίας» εντάσσονται οι λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών Οι περισσότερες από αυτές ομαδοποιούνται σε 3 βασικές υποκατηγορίες. Πολλοί μαθητές αναφέρουν ότι ο ορισμός είναι μια θεωρία, ένας κανόνας που πρέπει να μάθουν («θεωρία-κανόνας για εκμάθηση»). Αρκετοί δυσκολεύονται να ξεχωρίσουν τους ορισμούς από τα θεωρήματα, τις αποδείξεις και τις τρίτες προτάσεις («δυσκολία στη διάκριση προτάσεων») Τέλος κάποιοι επισημαίνουν τη μόνιμη ισχύ ενός ορισμού («αναφορά στην ισχύ του ορισμού»).

Οι απαντήσεις των μαθητών κατανέμονται στις παραπάνω τέσσερις βασικές κατηγορίες ως εξής: 18 σε σύνολο 43 στην πρώτη, 1 στη δεύτερη, 21 στην τρίτη και 3 στην κατηγορία «δεν ξέρω/κενό». Ακολουθεί η παράθεση ανά κατηγορία κάποιων απαντήσεων:

Απαντήσεις ότι περιγράφει ένα αντικείμενο:

…ερμηνεύει κάτι με σαφήνεια και χωρίς περιθώριο αμφισβήτησης, όταν δείχνω την πραγματική του «φύση»

…είναι η ακριβής διαφορετική τοποθέτηση για κάθε όρο που χρησιμοποιείται στην γεωμετρία

…είναι η έκφραση ενός αντικειμένου, με το οποίο ασχολείται η Γεωμετρία που είναι επιστημονικά δεκτή και εκφράζεται με πληρότητα

…είναι οι πληροφορίες για κάποιο σχήμα και για κάποιο θεώρημα που δεν αλλάζουν ποτέ

…μας δείχνει το τι είναι το σχήμα, από τι αποτελείται κτλ.

…είναι η ερμηνεία ενός αντικειμένου. Στην Γεωμετρία προσπαθούμε με τους ορισμούς να δώσουμε μια ερμηνεία ή να διευκρινίσουμε ένα σχήμα, μια ευθεία κτλ

…ορισμός είναι η έννοια ενός πράγματος που αφορά την Γεωμετρία με λόγια

…είναι η περιγραφή των όρων στην γεωμετρία

...είναι η περιγραφή και η οριοθέτηση κάποιων πραγμάτων

…είναι η εξήγηση ενός γεωμετρικού όρου

Απαντήσεις που συμπληρώνονται με παράδειγμα:

…είναι μια πρόταση ή κείμενο που μας εξηγεί ένα θέμα. Ο ορισμός του ισοπλεύρου τριγώνου είναι Ισόπλευρο τρίγωνο είναι το τρίγωνο που έχει 3 πλευρές ίσες και γωνίες του ίσες

…είναι η σημασία των όρων π.χ. ισοσκελές τρίγωνο είναι το τρίγωνο που έχει δύο σκέλη ίσα

Απαντήσεις που υποδεικνύουν μη κατανόηση της σημασίας:

Σε αυτή την κατηγορία, όπως αναφέρθηκε, οι απαντήσεις ομαδοποιούνται σε υποκατηγορίες:

Απαντήσεις που δηλώνουν τον ορισμό ως μια «θεωρία- κανόνα για εκμάθηση»:

…είναι μια στάνταρ θεωρία που πρέπει να μάθουμε όπως είναι

…η θεωρία που πρέπει να ξέρει κάποιος ώστε να λύσει μια άσκηση

…η θεωρία της Γεωμετρίας δηλαδή τα στοιχεία της

…είναι ένας κανόνας

Απαντήσεις που δηλώνουν «δυσκολία στη διάκριση προτάσεων»:

…είναι σαν το θεώρημα νομίζω πχ οι ευθείες $ε_1$,$ε_2$ είναι κάθετες

…είναι η ακριβής σημασία οποιουδήποτε θεωρήματος

…ορισμός δικαιολογεί, εξηγεί ένα θεώρημα

…είναι όταν προσπαθούμε να εξηγήσουμε διάφορα πράγματα στα μαθηματικά

…είναι η σύνοψη μιας απόδειξης που ισχύει πάνα και βοηθάει τον μαθητή να κατανοήσει καλύτερα το θέμα του

…είναι η επεξήγηση κάποιου κανόνα συνήθως με βάση τη λογική

Απαντήσεις που εμφανίζουν «αναφορά στην ισχύ του ορισμού»:

…είναι κάποιες προτάσεις που ορίζουν κάτι μόνιμο

…είναι κάτι που ισχύει πάντα

Αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του ορισμού μετά την παρέμβαση

Στην ερώτηση τι είναι ορισμός, 20 από τις 43 απαντήσεις συνδέονται με την κατηγορία «απαντήσεις ότι περιγράφει». Ένας μαθητής κάνει χρήση μόνο παραδείγματος, ενώ 20 μαθητές φαίνεται να μη κατανοούν τη σημασία του ορισμού. Παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποιες απαντήσεις μαθητών:

Απαντήσεις ότι περιγράφει ένα αντικείμενο:

...το σύνολο των βασικών αρχικών ιδιοτήτων που ερμηνεύουν ένα φαινόμενο, ένα μέρος ή έναν κλάδο της

…μια πρόταση που σου εξηγεί με λόγια τι είναι μια έννοια

…είναι ο πλήρης χαρακτηρισμός ενός αντικειμένου της Γεωμετρίας

…η επεξήγηση ενός φαινομένου. Η σημασία του

…ο ορισμός πλαισιώνει, οριοθετεί τα «αντικείμενα» της Γεωμετρίας

…με τον ορισμό ξεχωρίζουμε τα πράγματα. Δίνουμε δηλαδή στο καθένα μια ιδιότητα έτσι ώστε να διαφέρει το ένα από το άλλο

…εξηγεί με λόγια τι είναι το σχήμα

…είναι μια έκφραση που απαντάει στο τι είναι κάτι

Απαντήσεις που συμπληρώνονται με παράδειγμα:

..είναι δύο οι περισσότερες προτάσεις οι οποίες λένε τι είναι το αντικείμενο με το οποίο ασχολούμαστε π.χ. ο ορισμός του κύκλου μας λέει τι είναι ο κύκλος

…ο ορισμός του τριγώνου μας δίνει να κατανοήσουμε τι είναι το τρίγωνο και από τι αποτελείται

Απαντήσεις που υποδεικνύουν μη κατανόησης της σημασίας:

Στις απαντήσεις που συγκεντρώθηκαν σε αυτή την κατηγορία εμφανίστηκαν σε μεγαλύτερη συχνότητα δύο κυρίως υποκατηγορίες:

Απαντήσεις που δηλώνουν τον ορισμό ως μια «θεωρία- κανόνα για εκμάθηση»:

…είναι ένα κομμάτι του βιβλίου το οποίο δεν μπορούμε να το αλλάξουμε

…είναι κανόνας

…είναι αφηρημένες έννοιες που αναγκαστικά λειτουργούμε

Απαντήσεις που δηλώνουν «δυσκολία στη διάκριση προτάσεων»:

…είναι μία πρόταση για την οποία έχουμε συμφωνήσει όλοι μαζί ότι ισχύει και την μαθαίνουμε αυτούσια

…είναι ένας κανόνας τον οποίο δεν μπορούμε να τον αλλάξουμε και είναι κάτι που μας βοηθάει στην κατανόηση του θεωρήματος

…είναι μια πρόταση, μια έννοια που είμαστε σίγουροι ότι ισχύει και έχουμε τη δυνατότητα να την αποδείξουμε

…είναι μικροθεωρήματα, πορίσματα*(λέξη που έπλασε ο μαθητής)*

...είναι ένα ορθό συμπέρασμα το οποίο μας δείχνει τι είναι αυτό που μελετάμε

…μπορεί να αποδειχθεί

Μεταβολές στις αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του ορισμού

Στην ερώτηση που αφορά τη φύση του ορισμού, τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση, λιγότεροι από τους μισούς προσεγγίζουν την απάντηση. Σημειώθηκαν ελάχιστες μεταβολές στην κατανόηση του τι είναι ο ορισμός. Συγκεκριμένα, αυξήθηκαν κατά 2 οι απαντήσεις στην κατηγορία «απαντήσεις ότι περιγράφει». Τόσο πριν, όσο και μετά, 1 μαθητής (όχι ο ίδιος) αποδίδει απάντηση με χρήση μόνο παραδείγματος. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι ασυμπλήρωτες παραμένουν ελάχιστες απαντήσεις. Ο επόμενος πίνακας 4 παρουσιάζει τις απαντήσεις στο τι είναι ορισμός:

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΟΡΙΣΜΟΣ	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Απαντήσεις ότι περιγράφει…	18	20
Απαντήσεις μόνο με παράδειγμα	1	1
Μη κατανόηση της σημασίας	21	20
Δεν ξέρω/κενό	3	2

Πίνακας 4: Αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του ορισμού

Αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του ορισμού πριν την παρέμβαση

Η διαλογή και κατανομή των απαντήσεων των μαθητών σχετικά με το ρόλο του ορισμού έγινε σε 5 κατηγορίες. Δύο από τις κατηγορίες, «ταξινομεί- διακρίνει-θεμέλια» και «περιγράφει-εισάγει» αντιστοιχούν στις διαστάσεις του θεωρητικό ρόλου. Η τρίτη κατηγορία «εργαλείο», όπως δηλώνει και η ονομασία της, σχετίζεται με το λειτουργικό ρόλο αυτού μέσα σε οποιαδήποτε πρόταση.

Στην κατηγορία «μη κατανόηση του ρόλου» εντάσσονται οι εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του ορισμού. Σε αυτήν κυριαρχούν και ξεχωρίζουν δύο αντιλήψεις. Η μία αναγνωρίζει ως ρόλο του ορισμού την κατανόηση και εμβάθυνση («εμβάθυνση -βελτίωση της κατανόησης»). Η άλλη παρουσιάζει και αναδεικνύει τη δυσκολία των μαθητών να ξεχωρίσουν τους ρόλους της απόδειξης, των ορισμών, θεωρημάτων και αξιωμάτων («δυσκολία διάκρισης των προτάσεων και των ρόλων τους»).

Οι περιγραφές των μαθητών για το ρόλο τοποθετούνται ανά κατηγορία ως εξής: 4 στην «ταξινομεί- διακρίνει- θεμέλια», 9 στην «περιγράφει-εισάγει», 9 στην «εργαλείο», 16 στην «μη κατανόηση του ρόλου» και οι υπόλοιπες 5 στην κατηγορία «δεν ξέρω /δεν απαντώ». Ακολουθεί ενδεικτική παρουσίαση απαντήσεων ανά κατηγορία:

Απαντήσεις για το θεωρητικό ρόλο ταξινομεί-διακρίνει-θεμέλια:

…με τους ορισμούς επικρατεί τάξη και λογική, η Γεωμετρία μετατρέπεται σε επιστήμη,

…βοηθάει να κατανοήσουμε αυτούς τους όρους ευκολότερα, να τους ξεχωρίσουμε μεταξύ τους και να καταλάβουμε τις διαφορές ορισμένων απ' αυτούς

…μας βοηθάει στην κατανόηση κάποιων πραγμάτων και την οριοθέτηση των χαρακτηριστικών και της ύπαρξης τους

…βοηθάει να βασιζόμαστε σε στοιχεία που είναι ήδη αποδεκτά ώστε να συνεχίσουμε με βάση αυτά να προχωρήσουμε στη λύση μιας άσκησης

Απαντήσεις για το θεωρητικό ρόλο περιγράφει-εισάγει:

…μας βοηθάει να μαθαίνουμε καινούρια πράγματα (τι είναι μεσοκάθετος, ύψος κτλ)

…μέσα από τον ορισμό μαθαίνουμε για ότι αφορά τα σχήματα ή οτιδήποτε άλλο

…μας βοηθάει να αντιληφθούμε τι είναι αυτό με το οποίο θα ασχοληθούμε, μας εξηγεί τα χαρακτηριστικά του αντικειμένου.

…βοηθάει να κατανοήσουμε τις πληροφορίες που μας δίνονται για κάποια συγκεκριμένα πράγματα

…η καλύτερη αντίληψη ενός όρου

Απαντήσεις για το λειτουργικό ρόλο εργαλείο:

…είναι πολύ σημαντικό να τον ξέρουμε γιατί θα μας βοηθήσει στις ασκήσεις

…μας βοηθάει να αποδείξουμε και να λύσουμε ασκήσεις

…βοηθάει να λύσουμε προβλήματα

...βοηθάει στο να λύσουμε ασκήσεις

Απαντήσεις που υποδεικνύουν μη κατανόηση του ρόλου:

Στις απαντήσεις που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία εμφανίστηκαν σε μεγαλύτερη συχνότητα δύο κυρίως υποκατηγορίες:

Απαντήσεις που αναφέρονται στην εμβάθυνση -βελτίωση της κατανόησης:

…να βοηθήσει τον μαθητή να καταλάβει με λίγα λόγια και συνήθως χρησιμοποιώντας λέξεις κλειδιά, ώστε να μπορεί να το συγκρατήσει*(η υπογράμμιση έγινε από τον μαθητή)*

…να μας βοηθάει να κατανοήσουμε καλύτερα τις ασκήσεις εφαρμόζοντας τους ορισμούς

…η διευκόλυνση στην κατανόηση της Γεωμετρίας

Απαντήσεις που φανερώνουν δυσκολία στη διάκριση των προτάσεων και των ρόλων τους:

…ο ρόλος του ορισμού είναι να δείχνουμε με βήματα ότι ισχύει για πάντα

…να εξηγήσει με λεπτομέρεια το θεώρημα

Αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του ορισμού μετά την παρέμβαση

Οι απαντήσεις σχετικά με το ρόλο του ορισμού μετά την παρέμβαση τροποποιούνται και ανακατανέμονται στις πέντε κατηγορίες Συγκεκριμένα, 7 στην «ταξινομεί- διακρίνει- θεμέλια», 9 στην «περιγράφει-εισάγει», 21 στην «εργαλείο», 9 στην «μη κατανόηση του ρόλου» και 3 στην κατηγορία «δεν ξέρω /δεν απαντώ».

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι πολυδιάστατες απαντήσεις 4 μαθητών. Όλοι αναφέρονται τόσο στο λειτουργικό ρόλο όσο και στο θεωρητικό ρόλο. Δύο αναγνωρίζουν τα θεμέλια ως διάσταση, ένας τη διάσταση της περιγραφής. Τέλος, ένας μαθητής διακρίνει την περιγραφή και την ταξινόμηση. Στη συνέχεια διατάσσονται στις κατηγορίες ενδεικτικές απαντήσεις:

Απαντήσεις για το θεωρητικό ρόλο ταξινομεί-διακρίνει-θεμέλια:

…καθορίζει τα βήματα μας, μας διευκρινίζει ποια στοιχεία έχουμε στην διάθεση μας και ποια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, μας κατατοπίζει

…έχοντας υπόψη τον ορισμό των πραγμάτων, μπορούμε να διακρίνουμε ανάμεσα σε όμοια πράγματα πιο είναι αυτό που ψάχνουμε.

…διασαφηνίζει κάποια πράγματα για τη σωστή χρήση τους

…μας βοηθάει να ξεχωρίσουμε παρόμοια πράγματα

…με τους ορισμούς καταλήγουμε σε διάφορα θεωρήματα ή και αξιώματα, τα οποία χρειαζόμαστε για την επίλυση ενός προβλήματος

…μας δίνει τις βάσεις, μας διευκολύνει στο να κατανοήσουμε και στη συνέχεια να αποδείξουμε

…έχει το σημαντικότερο ρόλο, σε αυτόν βασίζονται όλα

Απαντήσεις για το θεωρητικό ρόλο περιγράφει-εισάγει:

…προτάσεις που μας βοηθούν να καταλάβουμε τις ιδιότητες των σχημάτων

…μας δίνει πληροφορίες αλλά και στάνταρ βασικά στοιχεία που πρέπει να ξέρουμε για να κάνουμε συγκεκριμένα βήματα για την επίλυση μιας άσκησης

…στο να καταλάβουμε και να γνωρίσουμε καλύτερα τι ακριβώς είναι αυτά τα στοιχεία

…μαθαίνουμε τι ακριβώς είναι ένα σχήμα ή οτιδήποτε άλλο

…να δίνει στους μαθητές ή αυτούς που ασχολούνται με τη Γεωμετρία να καταλάβουν τι είναι το πράγμα με το οποίο ασχολούνται, αλλά και ποια είναι τα χαρακτηριστικά του

…είναι η θεωρία ενός πράγματος που μέσα από αυτόν μας καθοδηγεί

Απαντήσεις για το λειτουργικό ρόλο εργαλείο:

…να μας διευκολύνει την ώρα που κάνουμε ότι έχει σχέση με τη Γεωμετρία

…χωρίς να γνωρίζουμε τον ορισμό δεν μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση του προβλήματος

…είναι βοήθημα στη λύση μιας άσκησης αφού μας παρέχει τα χαρακτηριστικά ενός στοιχείου που μπορούν να συμβάλλουν στη συνέχεια της άσκησης και στην ανάπτυξη αυτών των χαρακτηριστικών

…μας κατευθύνει στο να βρούμε τη λύση

…να λύνουμε ασκήσεις

Απαντήσεις που υποδεικνύουν μη κατανόηση του ρόλου

Στην κατηγορία αυτή εμφανίστηκαν με μεγαλύτερη συχνότητα κάποιες απαντήσεις που κατατάσσονται ακολούθως σε κατηγορίες:

Απαντήσεις που αναφέρονται στην εμβάθυνση -βελτίωση της κατανόησης:

…βοηθάει στο να κατανοήσουμε ένα κομμάτι της θεωρίας

…είναι να βοηθήσει τον μαθητή να κατανοήσει μια ορολογία

…να μας βοηθάει να κατανοήσουμε τους όρους της Γεωμετρίας

…να καταλάβουμε μια έννοια

Απαντήσεις που φανερώνουν δυσκολία στη διάκριση των προτάσεων και των ρόλων τους:

…για να μη ξανακάνουμε τις αποδείξεις χρησιμοποιούμε τους ορισμούς

…στο να χρησιμοποιούμε μια επιβεβαιωμένη έννοια

…βοηθάει στην κατανόηση του θεωρήματος

Μεταβολές στις αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του ορισμού

Σημαντικές μεταβολές σημειώθηκαν στην κατανόηση για το ρόλο του ορισμού. Έτσι, αυξάνονται κατά 9 (από 22 μαθητές σε 31) οι μαθητές που είναι σε θέση να περιγράψουν κάποιο ρόλο. Επιπλέον, 4 μαθητές αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τον πολυδιάστατο ρόλο του ορισμού, ενώ πριν την παρέμβαση δεν έγινε καμία αναφορά στην πολλαπλή διάστασή του. Παράλληλα, μειώνονται κατά 7 οι απαντήσεις στην κατηγορία «μη κατανόηση του ρόλου». Στον πίνακα 5 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με το ρόλο του ορισμού:

ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Απαντήσεις για θεωρητικό ρόλο. (ταξινομεί- διακρίνει- θεμέλια)	4	7*
Απαντήσεις για θεωρητικό ρόλο. (περιγράφει-εισάγει)	9	9*
Απαντήσεις για λειτουργικό ρόλο (εργαλείο)	9	21
Μη κατανόηση του ρόλου	16	9
Δεν ξέρω/κενό	5	3

*στις κατηγορίες με την ειδική σήμανση εμφανίζονται οι πολλαπλές απαντήσεις 4 μαθητών

Πίνακας 5: Αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του ορισμού

4.2.3 Αντιλήψεις των μαθητών για το θεώρημα

Αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του θεωρήματος πριν την παρέμβαση

Η επεξεργασία των δεδομένων σχετικά με τη φύση του θεωρήματος οδήγησε στη δημιουργία 5 κατηγοριών. Υπήρχαν περιγραφές στις οποίες η αποδεικτική διαδικασία δηλωνόταν με σαφήνεια (κατηγορία «σωστές απαντήσεις»). Σε άλλες, ήταν λανθάνουσα. Εκφράσεις, όπως «το συμπέρασμα που προκύπτει», «μια σειρά αποτελεσμάτων που ισχύουν», «λογική διαδικασία» και άλλες παρόμοιου περιεχομένου, θεωρήθηκαν ότι υπονοούν κάποια μορφή αποδεικτικής διαδικασίας και εντάχθηκαν στην κατηγορία «μερικώς σωστές». Μερικές απαντήσεις κάνουν χρήση συγκεκριμένου παραδείγματος (κατηγορία «απαντήσεις με παράδειγμα»).

Κάποιες περιγραφές φέρνουν στην επιφάνεια τις λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με το θεώρημα. Αυτές εντάσσονται στην κατηγορία («μη κατανόηση της σημασίας»). Πολλές από αυτές αναφέρονται σε μια θεωρία που καλούνται να γνωρίζουν οι μαθητές (υποκατηγορία «θεωρία-κανόνας για εκμάθηση»). Άλλες αναδεικνύουν τη δυσκολία των μαθητών να ξεχωρίσουν τους ρόλους των θεωρημάτων, των ορισμών των αξιωμάτων και της απόδειξης, (υποκατηγορία «δυσκολία διάκρισης των προτάσεων και των ρόλων τους».

Οι περιγραφές σχετικά με τη φύση του θεωρήματος τοποθετήθηκαν ανά κατηγορία ως εξής: 9 στην «σωστές απαντήσεις», 6 στην «μερικώς σωστές»,4 στην «απαντήσεις με παράδειγμα»), 21 στην «μη κατανόηση της σημασίας» και 3 στην «δεν ξέρω/κενό». Παρατίθενται ενδεικτικές απαντήσεις:

Απαντήσεις που χαρακτηρίστηκαν σωστές:

…είναι ένα δεδομένο (πχ. τύπος) που αποδεικνύεται μια φορά και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην λύση ασκήσεων και προβλημάτων ως προϋπάρχουσα αλήθεια

…είναι μια θέση η οποία έχει αποδειχτεί ότι ισχύει

…είναι η θεωρία που έχει αποδειχθεί από τους επιστήμονες

…είναι το αποτέλεσμα, το συμπέρασμα μιας υπόθεσης το οποίο αποδεικνύεται

…είναι μια θεωρία η οποία βασίζεται σε ρεαλιστικά στοιχεία και μπορεί να αποδειχθεί

Απαντήσεις που χαρακτηρίστηκαν μερικώς σωστές:

…σημαίνει το συμπέρασμα στο οποίο προκύπτουμε μετά από μια σειρά πράξεων (εννοείτε να έχουμε βγάλει σωστό πόρισμα)

…είναι κάποια σίγουρα αποτελέσματα που έχουν βγει και είμαστε σίγουροι ότι ισχύουν

…είναι οι αποδεδειγμένοι νόμοι για ορισμούς της Γεωμετρίας

…είναι ένας κανόνας που είναι βασισμένος στη λογική

…είναι ένα σύνολο που περιέχει ορισμούς και συνεχίζεται με θεωρίες που συνεχίζονται με βάση τους ορισμούς αλλά στη συνέχεια το θεώρημα χρειάζεται απόδειξη

…είναι το συμπέρασμα μιας απόδειξη

Απαντήσεις που υποδεικνύουν μη κατανόηση της σημασίας

…λέγεται κάτι που ισχύει σε όλα τα προβλήματα τέτοιου είδους

Στις απαντήσεις που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία εμφανίστηκαν σε μεγαλύτερη συχνότητα οι υποκατηγορίες:

Απαντήσεις που δηλώνουν το θεώρημα ως μια «θεωρία- κανόνα για εκμάθηση»:

…είναι ένα μικρό ή μεγάλο κουτάκι με την θεωρία

…η θεωρία του μαθήματος που μας δίνει κάποιες βάσεις που σύμφωνα με αυτές μπορούμε να λύσουμε ασκήσεις

…είναι το θεωρητικό κομμάτι που λέει το ίδιο πράγμα με τις ασκήσεις αλλά με λόγια

…είναι να προσπαθεί να κάνει την απομνημόνευση λίγο πιο εύκολη

…είναι το κομμάτι της θεωρίας.

Απαντήσεις που δηλώνουν «δυσκολία στη διάκριση προτάσεων»:

…είναι μικροί κανόνες που πρέπει να τους μάθεις και άμα τους ξέρεις μπορείς να αναγνωρίσεις σημεία. Γωνίες ενός τριγώνου

…είναι με λίγα λόγια ο ορισμός όπου μας τον αναφέρει σε ποιο απλά λόγια για να τον μάθουμε

…είναι παρόμοιο με τον ορισμό και με την άσκηση. Ταυτίζονται μαζί αυτά τα δύο

...είναι ο δρόμος ουσιαστικά που μας οδηγεί σε κάποια συμπεράσματα και επίσης μας δίνει πληροφορίες για κάποιο σχήμα που πρέπει να ξέρει κάποιος ώστε να λύσει μια άσκηση

Αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του θεωρήματος μετά την παρέμβαση

Στην ερώτηση που αφορά στο τι είναι το θεώρημα δόθηκαν 22 σωστές απαντήσεις και 2 χαρακτηρίστηκαν ως «μερικώς σωστές». Καμία απάντηση δεν δόθηκε μόνο μέσω παραδείγματος. 14 απαντήσεις καταγράφηκαν στην κατηγορία « μη κατανόηση της σημασίας» ενώ 5 στην «δεν ξέρω/κενό». Παρουσιάζονται κάποιες από τις απαντήσεις ανά κατηγορία:

Απαντήσεις που χαρακτηρίστηκαν σωστές:

…ονομάζεται μια επιπλέον ιδιότητα ενός μέρους ή ενός κλάδου στην Γεωμετρία που αφού έχει αποδειχθεί μια φορά μπορεί να χρησιμοποιείται πλέον ως δεδομένο, χωρίς να χρειαστεί να αποδεικνύεται κάθε φορά

…είναι μια πρόταση αποδεδειγμένη με άλλα θεωρήματα και αξιώματα

…είναι η παραδοχή που έχει αποδειχθεί

…είναι η «αξία» η οποία μας βοηθάει στη λύση της άσκησης και μπορούμε να το αποδείξουμε

…είναι κάποιος κανόνας που ισχύει πάντα και υποστηρίζεται με απόδειξη

…είναι μικρές, σύντομες συνήθως προτάσεις οι οποίες δείχνουν ορισμένα χαρακτηριστικά που έχουν τα σχήματα και αληθεύουν με αποδείξεις

Απαντήσεις που χαρακτηρίστηκαν μερικώς σωστές:

…είναι ένα αποτέλεσμα βασισμένο συνήθως σε αξιώματα

…είναι η θεωρία μιας απόδειξης

Απαντήσεις που υποδεικνύουν μη κατανόηση της σημασίας:

…μια πρόταση που μας βοηθάει να κατανοήσουμε κάτι

…είναι μια έννοια που μας καθοδηγεί μέσα στην άσκηση

Στις απαντήσεις που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία εμφανίστηκαν σε μεγαλύτερη συχνότητα οι υποκατηγορίες:

Απαντήσεις που δηλώνουν το θεώρημα ως μια «θεωρία- κανόνα για εκμάθηση»:

…είναι ένας κανόνας μπορούμε ακολουθώντας τον να βρεθούμε στη λύση. Είναι αλλιώς μια σειρά συλλογισμών

…είναι σαν μια μεθοδολογία στην οποία λύνεις και αποδεικνύεις ασκήσεις

…είναι η θεωρία

Απαντήσεις που δηλώνουν «δυσκολία στη διάκριση προτάσεων»:

… είναι κάτι το οποίο βρίσκουμε αλλά δεν είναι σίγουρο ότι ισχύει

…το θεώρημα είναι παραδοχή

…είναι ουσιαστικά η θεωρία με την οποία μπορούμε στην πορεία να καταλήξουμε σε έναν ορισμό

…είναι όταν ερμηνεύω με λόγια διάφορα σχήματα

…η απλούστερη και πιο εύκολη διατύπωση ενός ορισμού για την καλύτερη κατανόηση.

Μεταβολές στις αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του θεωρήματος

Σε πρώτη ανάγνωση των αποτελεσμάτων κάποιος θα χαρακτήριζε πολύ μικρές τις μεταβολές, αφού προσεγγίζουν σωστά ή σχεδόν σωστά τη φύση και σημασία του θεωρήματος 20 μαθητές στους 43 πριν την παρέμβαση ενώ μετά οι 24. Προσεκτικότερη μελέτη όμως των αποτελεσμάτων δείχνει ότι οι μεταβολές δεν είναι ασήμαντες. Γιατί μετά την παρέμβαση, κανείς μαθητής δεν έδωσε απάντηση στο τι είναι θεώρημα με χρήση μόνο παραδείγματος. Επιπλέον, οι 5 μαθητές από τους 6, που πριν τη παρέμβαση έδιναν «μερικώς σωστές απαντήσεις» βελτιώνουν ολοκληρώνουν τις περιγραφές τους και εντάσσονται μετά την παρέμβαση στην κατηγορία «σωστές απαντήσεις». Στον πίνακα 6 συγκεντρώνονται οι απαντήσεις στο τι είναι θεώρημα:

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Σωστές απαντήσεις	9	22
Μερικώς σωστές απαντήσεις	6	2
Απαντήσεις με παράδειγμα	4	0
Μη κατανόηση της σημασίας	21	14
Δεν ξέρω/κενό	3	5

Πίνακας 6: Αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του θεωρήματος.

Αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του θεωρήματος πριν την παρέμβαση

Οι περιγραφές των μαθητών σχετικά με το ρόλο του θεωρήματος οργανώθηκαν σε κατηγορίες με άξονες τις δύο διαστάσεις του ρόλου του. Έτσι, η κατηγορία «οργάνωση- σύνδεση- διάταξη» συνδέεται με το θεωρητικό ρόλο, ενώ η κατηγορία «εργαλείο» αφορά στον λειτουργικό. Επίσης, ελλιπείς ή λανθασμένες αντιλήψεις για το ρόλο του θεωρήματος τοποθετούνται στην κατηγορία «μη κατανόηση του ρόλου».

Κανείς μαθητής δεν κάνει αναφορά στο θεωρητικό ρόλο. Αντιθέτως, 18 μαθητές προσεγγίζουν τον λειτουργικό. Από αυτούς 14 επισημαίνουν ότι το θεώρημα είναι σημαντικό εργαλείο για την επίλυση των ασκήσεων (υποκατηγορία «σύνδεση με ασκήσεις»). Μόνο 2 αναφέρουν ότι το θεώρημα αποτελεί εργαλείο σε οποιαδήποτε αποδεικτική διαδικασία (υποκατηγορία «εργαλείο σε οποιαδήποτε πρόταση»).Τέλος, 3 υπογραμμίσουν ότι στην προσπάθεια απόδειξης μιας νέας πρότασης ή στη λύση μιας άσκησης, τα ήδη αποδεδειγμένα θεωρήματα συνεισφέρουν στη γρήγορη επίλυση, αφού δεν απαιτείται η εκ νέου η απόδειξη κάποιων ιδιοτήτων (υποκατηγορία «οικονομία χρόνου»).

Στην κατηγορία «μη κατανόηση του ρόλου» οι 18 απαντήσεις ποικίλουν με κάποιες περιγραφές να παρουσιάζουν παρόμοιο περιεχόμενο. Για παράδειγμα, η αντίληψη ότι η κατανόηση είναι ο κεντρικός ρόλος του θεωρήματος διαχέεται σε αρκετές απαντήσεις (υποκατηγορία «εμβάθυνση-βελτίωση της κατανόησης»). Αλλά και η αδυναμία διάκρισης των ρόλων των θεωρημάτων, των ορισμών, των αξιωμάτων και της απόδειξης είναι εμφανής σε αρκετές από τις περιγραφές (υποκατηγορία «δυσκολία διάκρισης των προτάσεων και των ρόλων τους». Παρουσιάζονται ενδεικτικές περιγραφές:

Απαντήσεις με αναφορά στον λειτουργικό ρόλο:

…βοηθάει να αποδείξουμε κάτι που ζητείται

…βοηθούν να τεκμηριώσουμε αυτό που μας δίνει να αποδείξουμε

Απαντήσεις για το λειτουργικό ρόλο εργαλείο με έμφαση στην οικονομία χρόνου:

…διευκολύνει πολύ την επίλυση ενός προβλήματος καθώς αλλιώς θα χρειαζόταν να αιτιολογούμε την παραμικρή μας σκέψη, πράγμα πολύ χρονοβόρο

…μας βοηθάνε μαθαίνοντας και χρησιμοποιώντας τα να βρούμε λύσεις και αποτελέσματα σχετικά με άλλες ασκήσεις και έρευνες «σύντομα»

…βοηθάνε στη πιο εύκολη και γρήγορη λύση των ασκήσεων

Απαντήσεις για το λειτουργικό ρόλο εργαλείο σύνδεση με ασκήσεις:

…αν μάθεις ένα θεώρημα μπορείς να το χρησιμοποιήσεις σε πολλές ασκήσεις και να βρεθεί λύση

…είναι σημαντικός γιατί χωρίς το θεώρημα δεν θα μπορούμε να λύσουμε ασκήσεις

…βοηθάει στην επίλυση ασκήσεων

Απαντήσεις που υποδεικνύουν μη κατανόηση του ρόλου:

….μας περιγράφει τρόπους για να λύνουμε μια άσκηση

…μας βοηθάει να κατασκευάσουμε το σχήμα μιας άσκησης και να τη λύσουμε

…είναι να βάλει στην σκέψη του μαθητή και να βρει την απόδειξη. Αλλά συνήθως το λέει ο καθηγητής αλλά μαζί με την τάξη.

Στις απαντήσεις που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία εμφανίστηκαν σε μεγαλύτερη συχνότητα οι υποκατηγορίες:

Απαντήσεις που αναφέρονται στην εμβάθυνση -βελτίωση της κατανόησης:

…να βοηθάει τους μαθητές να καταλάβουν το νόημα

…να μπορέσουμε σύμφωνα με αυτό να κατανοήσουμε την θεωρία όλου του κεφαλαίου

…να σου εμπεδώσει τις λίγες γνώσεις που έχεις για να μάθεις γεωμετρία και με αυτήν θα φτιάξεις τον τρόπο σκέψης σου στα μαθηματικά

Απαντήσεις που φανερώνουν δυσκολία στη διάκριση των προτάσεων και των ρόλων τους:

…είναι σαν την απόδειξη αλλά με λίγα λόγια

…να καταλάβουμε καλύτερα τον ορισμό

Αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του θεωρήματος μετά την παρέμβαση

Στο λειτουργικό ρόλο του θεωρήματος αναφέρονται27 στους 43 με 13 να τονίζουν αυτόν τον ρόλο στις ασκήσεις, «σύνδεση με ασκήσεις», 12 να διαβλέπουν το ρόλο αυτό σε οποιαδήποτε πρόταση, «εργαλείο σε οποιαδήποτε πρόταση» και 2 να κάνουν αναφορά στην «οικονομία του χρόνου» που προσφέρει η χρήση των θεωρημάτων. Στο θεωρητικό ρόλο δεν αναφέρεται κανείς, ενώ 11 μαθητές φαίνεται να μην κατανοούν το ρόλο του θεωρήματος. Όλα αυτά διαφαίνονται καλύτερα μέσα από κάποιες απαντήσεις που ακολουθούν:

Απαντήσεις με αναφορά στον λειτουργικό ρόλο ως εργαλείο σε οποιαδήποτε πρόταση:

…να το χρησιμοποιούμε και σε συνδυασμό με άλλες γνώσεις μας να εμβαθύνουμε σε νέες αποδείξεις και έννοιες της Γεωμετρίας

…λειτουργούν ως τα θεμέλια πάνω στα οποία στηριζόμαστε, ώστε να αποδείξουμε αν ένα γεωμετρικό πρόβλημα ισχύει ή όχι

…χρησιμοποιείται για απόδειξη νέων στοιχείων στη γεωμετρία

…το θεώρημα είναι μια βάση που αν τη συνδέσουμε με ένα αξίωμα ή με έναν ορισμό φτάνουμε στην απόδειξη

…αποτελεί συνδετικό κρίκο για την επίλυση κάποιων προβλημάτων ή για την επίτευξη κάποιας απόδειξης

Απαντήσεις για το λειτουργικό ρόλο εργαλείο με έμφαση στην οικονομία χρόνο:

…χάρη στα θεωρήματα μια άσκηση ή ένα πρόβλημα λύνεται σε πολύ λιγότερο χρόνο και με λιγότερο κόπο, καθώς είναι μια επιπλέον, ήδη αποδεδειγμένη και γεωμετρικά –λογικά ορθή πληροφορία

…μας βοηθάει ώστε να προχωρήσουμε στην λύση της άσκησης αφού μας παρέχει πληροφορίες που έχουν ήδη αποδειχτεί και δεν χρειάζεται να ξοδέψουμε χρόνο να τις αποδείξουμε σε μία άσκηση

Απαντήσεις για το λειτουργικό ρόλο εργαλείο σύνδεση με ασκήσεις:

…μπορούμε να στηριχτούμε σε αυτό όταν θέλουμε να λύσουμε μια άσκηση

…είναι ο δρόμος που μας καθοδηγεί για να λύσουμε σωστά τις ασκήσεις

Απαντήσεις που υποδεικνύουν «μη κατανόηση του ρόλου»:

…είναι να έχουμε κάποια βάση σε κάτι δηλαδή να προχωράμε με κάποια βήματα

Στις απαντήσεις που εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία εμφανίστηκαν σε μεγαλύτερη συχνότητα οι υποκατηγορίες:

Απαντήσεις που αναφέρονται στην εμβάθυνση -βελτίωση της κατανόησης:

…να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα κάποιους όρους στη Γεωμετρία

…βοηθάει τον μαθητή να κατανοήσει καλύτερα ένα αποτέλεσμα το οποίο προκύπτει από μια διαδικασία αξιωμάτων

…κατανοούμε ευκολότερα τις αποδείξεις

Απαντήσεις που φανερώνουν δυσκολία στη διάκριση των προτάσεων και των ρόλων τους:

…είναι να βοηθάει να λύσουμε τον ορισμό

…είναι να ενημερώσει για τα χαρακτηριστικά του σχήματος έτσι ώστε να αναγνωρίζεται το σχήμα πιο εύκολα

Μεταβολές στις αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του θεωρήματος

Παραπάνω από τους μισούς αντιλαμβάνονται το λειτουργικό ρόλο του θεωρήματος μετά την παρέμβαση. Παρατηρείται αύξηση κατά 9 του αριθμού των μαθητών που αναγνωρίζουν αυτό το ρόλο. Σημαντικό εύρημα αποτελεί η αύξηση κατά 10 του αριθμού των απαντήσεων που αναγνωρίζουν τη λειτουργία του θεωρήματος ως εργαλείου σε κάθε αποδεικτική διαδικασία. Κανείς μαθητής, ούτε πριν, ούτε μετά, δεν αναφέρεται στη θεωρητική διάσταση. Συγκεντρωτικά, όλες οι απαντήσεις σχετικά με το ρόλο του θεωρήματος παρουσιάζονται στον πίνακα 7 που ακολουθεί:

ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Απαντήσεις με αναφορά στο θεωρητικό ρόλο (οργάνωση- σύνδεση- διάταξη)	0	0
Απαντήσεις με αναφορά στο λειτουργικό ρόλο (εργαλείο)	18	27
Μη κατανόηση του ρόλου	18	11
Δεν ξέρω/Κενό	7	5

Πίνακας 7: Αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο του θεωρήματος

4.2.4 Αντιλήψεις των μαθητών για την απόδειξη

Αντιλήψεις των μαθητών για την απόδειξη πριν την παρέμβαση

Οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση που αφορά τι θεωρούν οι μαθητές ότι είναι απόδειξη, οργανώθηκαν σε 3 κατηγορίες. Η πρώτη «σωστές και σχεδόν σωστές» περιλαμβάνει: τις περιγραφές που χαρακτηρίστηκαν σωστές (πχ. «μια σειρά από λογικά βήματα», «μια διαδικασία βασισμένη στη λογική» ή σχεδόν σωστές (πχ. «μια σειρά πράξεων για να δείξουμε ότι κάτι ισχύει», «ο τρόπος/διαδικασία για να δείξουμε ότι κάτι ισχύει»).

Στην δεύτερη κατηγορία «μη κατανόηση της έννοιας» εντάσσονται οι απαντήσεις των μαθητών που δηλώνουν μια όχι και τόσο ξεκάθαρη αντίληψη για το τι είναι απόδειξη ή μια μη ολοκληρωμένη εικόνα για την έννοια. Ειδικά, για μερικούς μαθητές η απόδειξη φαίνεται να είναι ένα παράδειγμα που τους βοηθάει στη λύση των ασκήσεων, για άλλους ο τρόπος λύσης μιας άσκησης (υποκατηγορία «σύνδεση με λύση ασκήσεων»). Άλλοι αναγνωρίζουν τη λειτουργία της απόδειξης ως μέσο επιβεβαίωσης και εστιάζουν στο αποτέλεσμα της διαδικασίας με καμία αναφορά στο πώς, στη διαδικασία (υποκατηγορία «σύνδεση μόνο με το αποτέλεσμα»).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι απαντήσεις των 43 μαθητών πριν την παρέμβαση ανά κατηγορία είναι: 18 στην κατηγορία «σωστές και σχεδόν σωστές», 24 στην «μη κατανόηση της έννοιας» και 1 μαθητής στην «δεν ξέρω/κενό». Στη συνέχεια παρουσιάζονται ενδεικτικές περιγραφές των μαθητών ανά κατηγορία:

Σωστές και σχεδόν σωστές απαντήσεις:

…είναι μια σειρά λογικών βημάτων προϋπάρχουσας γνώσης με σκοπό λογική και ουσιαστική αποδοχή και αιτιολόγηση ενός φαινομένου

…είναι μια σειρά λογικών βημάτων που ακολουθούμε για να δείξουμε αν κάτι ισχύει ή όχι

…είναι ο τρόπος με τον οποίο αποδεικνύουμε, καταλήγουμε ότι κάτι υπάρχει, γίνεται ή όχι

…είναι μια σειρά σκέψεων ή πράξεων ή και των δύο, η οποία αποδεικνύει ότι κάτι ισχύει χωρίς αμφισβήτηση

…είναι όταν έχουμε λύσει μια υπόθεση και είναι δεκτή, δηλαδή είναι τα βήματα με τα οποία την λύσαμε

…είναι η σειρά πράξεων που κάνουμε για να δείξουμε ότι κάτι ισχύει

… όταν τεκμηριώνω με θεωρήματα ότι αυτό που μου δίνει είναι σωστό

...είναι ο τρόπος με τον οποίο καταλαβαίνουμε γιατί τα θεωρήματα είναι σωστά

…είναι ο τρόπος με τον οποίο δείχνουμε ότι το θεώρημα είναι σωστό

…είναι η αιτιολόγηση ενός θεωρήματος με βάση τα «αμετάβλητα» μαθηματικά

Απαντήσεις που υποδεικνύουν «μη κατανόηση της σημασίας»:

…είναι ένα λεπτομερές θεώρημα

…είναι η σίγουρη εφαρμογή της θεωρίας στην πράξη

Απαντήσεις που υποδεικνύουν «μη κατανόηση της σημασίας» και «σύνδεση με λύση ασκήσεων»:

…είναι ένα παράδειγμα για το πώς θα λύσουμε μια παρόμοια άσκηση σύμφωνα με το σχετικό θεώρημα που έχουμε διδαχθεί

…είναι μια βοήθεια για να γνωρίζουμε αν η άσκηση μπορεί να λυθεί

…είναι ο τρόπος με τον οποίο διαπιστώνεται ο τρόπος επίλυσης ενός προβλήματος

…είναι η λύση ενός προβλήματος

…ο τρόπος λύσης μιας άσκησης

Απαντήσεις που υποδεικνύουν «μη κατανόηση της σημασίας» και «σύνδεση μόνο με το αποτέλεσμα»:

…όταν μας δίνουν μια πράξη με το αποτέλεσμα και αποδεικνύουμε ότι ισχύει

…είναι όταν μια άσκηση την λύνουμε δείχνουμε αυτό που βρήκαμε ότι είναι σωστό

…είναι το σχήμα που μας δείχνει ότι το θεώρημα όντως υπάρχει, ισχύει δηλαδή

Αντιλήψεις των μαθητών για την απόδειξη μετά την παρέμβαση

Μετά την παρέμβαση 21 μαθητές προσεγγίζουν την έννοια της απόδειξης και δίνουν περιγραφές «σωστές» ή «σχεδόν» σωστές. Μη ολοκληρωμένη εικόνα ή θολή εικόνα για το τι είναι απόδειξη παρουσιάζουν 20 μαθητές («μη κατανόηση της σημασίας»). Παρατίθενται κάποιες από τις απαντήσεις των μαθητών:

Σωστές και σχεδόν σωστές απαντήσεις:

…είναι μια σειρά λογικών βημάτων που βασίζονται σε προϋπάρχουσες γνώσεις και μας επιτρέπει να επικυρώσουμε αν μια ιδέα στην Γεωμετρία είναι σωστή ή όχι, αν μπορεί να χρησιμοποιείται

…κάθε νέο αποτέλεσμα προκύπτει με τη χρήση προηγούμενων γνώσεων μέσα από μια διαδικασία που λέγεται απόδειξη και είναι βασισμένη στη λογική

…είναι ένας τύπος που προκύπτει από τα προηγούμενα και στηρίζεται σε κανόνες της λογικής

…είναι ο συνδυασμός ορισμών και θεωρημάτων που μας βοηθάει να αποδείξουμε ότι κάτι ισχύει

..είναι η διαδικασία με την οποία κάτι που έχουμε ως υπόθεση, μέσω κάποιων διαδικασιών χρησιμοποιώντας αξιώματα, ορισμούς και θεωρήματα το μετατρέπουμε σε δεδομένο (που μπορεί να χρησιμοποιηθεί)

…είναι το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε, χρησιμοποιώντας ορισμούς, θεωρήματα και αξιώματα

…είναι μια σειρά διαδικασιών που αποδεικνύει ένα πόρισμα συνήθως με τη βοήθεια αξιωμάτων και ορισμών

…είναι μια σειρά από ορισμούς, αξιώματα , θεωρήματα ή και τα τρία

…είναι ο τρόπος που χρησιμοποιούμε για να δείξουμε αν ένα θεώρημα ισχύει ή όχι

Απαντήσεις που υποδεικνύουν «μη κατανόηση της σημασίας»:

…ο τρόπος με τον οποίο δείχνουμε πως λύσαμε ένα θεώρημα ή έναν ορισμό

…είναι η λύση μιας θεωρίας που μέσα από αυτό βγαίνει ένα αναλυτικό συμπέρασμα

…μπορεί να είναι ένα σχήμα το οποίο αφορά το θεώρημα

Απαντήσεις που υποδεικνύουν «μη κατανόηση της σημασίας» και «σύνδεση με λύση ασκήσεων»:

…είναι η λύση ενός προβλήματος

…η απόδειξη στην Γεωμετρία είναι ένα παράδειγμα με μια σειρά βασικών βημάτων και οργάνωσης για την επίλυση ενός προβλήματος

…είναι στοιχεία που χρησιμοποιούνται για να λύσουμε μια άσκηση

Απαντήσεις που υποδεικνύουν «μη κατανόηση της σημασίας» και «σύνδεση μόνο με το αποτέλεσμα»):

…είναι όταν μπορούμε και σιγουρεύουμε κάτι 100% με τα κατάλληλα μέσα

…είναι όταν μπορούμε και σιγουρευόμαστε 100% για ένα πράγμα, με σίγουρες πράξεις και αριθμούς

…είναι το σχήμα που μας δείχνει ότι το θεώρημα αληθεύει

Μεταβολές στις αντιλήψεις των μαθητών για την απόδειξη

Οι ποσοτικές μεταβολές που σημειώνονται είναι μικρές, αφού μετά την παρέμβαση αυξάνει κατά 3 ο αριθμός των απαντήσεων στην κατηγορία «σωστές και σχεδόν σωστές». Ωστόσο, παρατηρούνται αξιοσημείωτες ποσοτικές και ποιοτικές μεταβολές εντός αυτής κατηγορίας. Ποσοτικές, αφού οι «σωστές» απαντήσεις αυξάνονται κατά 4 (από 2 πριν σε 6 μετά). Ποιοτικές, αφού πολλοί μαθητές αναφέρονται στην απόδειξη ως μια σύνθεση, μια σειρά βημάτων από αξιώματα, ορισμούς και θεωρήματα. Στον πίνακα 8 συγκεντρώνονται οι απαντήσεις στο τι είναι απόδειξη

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Σωστές και σχεδόν σωστές απαντήσεις	18	21
Μη κατανόηση της σημασίας	24	20
Δεν ξέρω/κενό	1	2

Πίνακας 8: Αντιλήψεις των μαθητών για την απόδειξη.

Αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο της απόδειξης πριν την παρέμβαση

Η έρευνα εστιάζει στο ρόλο της απόδειξης στο αξιωματικό σύστημα όπου η «επιβεβαίωση» και η «συστηματοποίηση» συνιστούν τις κύριες λειτουργίες της απόδειξης (διαστάσεις της απόδειξης που έχουν ήδη αναλυθεί). Εντούτοις, ο πολλαπλός ρόλος της αποτυπώθηκε στις περιγραφές των μαθητών και οδήγησε στη δημιουργία ακόμα δύο κατηγοριών, «της επεξήγησης» και της «ανακάλυψης-δημιουργίας νέων θεωρημάτων» με στόχο την ένταξη όλων των παρατηρήσεων σε κάποια κατηγορία.

Σημειώνεται ότι στην κατηγορία «επιβεβαίωση» εντάσσονται απαντήσεις που χρησιμοποιούν εκφράσεις: «ισχύει», «ορθό», «αληθής» «σωστή», «έγκυρη». Οι απαντήσεις που αναφέρουν ότι η απόδειξη εξηγεί «το γιατί ισχύει μια πρόταση» ή ότι βοηθάει «στην κατανόηση του θεωρήματος» τοποθετούνται στην κατηγορία «επεξήγηση». Τέλος, κάποιοι μαθητές φαίνεται να έχουν λανθασμένη αντίληψη ή αποδίδουν παραδειγματικό ή βοηθητικό ρόλο στην απόδειξη, με στόχο τη λύση ασκήσεων-προβλημάτων (κατηγορία «μη κατανόηση του ρόλου»). Υπάρχουν μαθητές που δυσκολεύονται στο να προσδιορίσουν ή να ονομάσουν κάποια λειτουργία της απόδειξης (κατηγορία «δεν ξέρω/κενό»).

Η κατανομή των απαντήσεων ανά κατηγορία είναι: 22 «στην επιβεβαίωση», 7 στην «επεξήγηση», 1 στην «ανακάλυψη- δημιουργία νέων θεωρημάτων, 11 στη «μη κατανόηση του ρόλου και 4 στην «δεν ξέρω/κενό. Κανείς δεν αναφέρθηκε στη λειτουργία της συστηματοποίησης. Επίσης, 2 μαθητές διακρίνουν ως λειτουργία εκτός από την «επιβεβαίωση» και το «να πείσει για την ορθότητα μιας πρότασης». Τέλος, 2 μαθητές διακρίνουν πάνω από έναν ρόλο. Ακολουθούν ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών.

Μέσο ανακάλυψης-δημιουργίας:

…βοηθάει έτσι ώστε να αποδειχθεί κάτι παραπάνω με την ύπαρξη ήδη των υπαρχόντων αποδείξεων και ίσως να βγει νέο θεώρημα

Μέσο επιβεβαίωσης:

…δείχνουμε ότι κάτι είναι έγκυρο και μπορεί να εφαρμοστεί σε μία άσκηση

…μας βοηθάνε στον ισχυρισμό μιας υπόθεσης και τη στήριξη αυτής της θέσης

…να αποδεικνύουμε ένα θεώρημα που έχουμε υποθέσει και να δείξουμε πως ισχύει

…να δείχνει ότι το πόρισμα-θεώρημα που αποδείχτηκε είναι σωστό, ισχύει

…να δώσουμε στον άλλο να καταλάβει με συγκεκριμένα βήματα ότι κάτι ισχύει

…επιβεβαιώνει πολλά θεωρήματα που μας διευκολύνουν

…να επαληθεύσουμε ότι κάτι είναι σωστό

…είναι να πείσουμε κάποιον ότι η λύση ισχύει

… επαληθεύει ότι κάτι είναι σωστό πρακτικά

Μέσο επεξήγησης:

…μας βοηθάει να κατανοήσουμε το γιατί « ισχύει κάτι» και το πώς καταλήξαμε σε αυτό το θεώρημα το Θεώρημα (πόρισμα)

…μας βοηθάει να καταλάβουμε γιατί κάποια θεωρήματα όντως ισχύουν και πως ισχύουν

…είναι να κατανοήσει ο μαθητής τον τρόπο με τον οποίο αποδεικνύεται η άσκηση αλλά και το γιατί λύνεται έτσι, συνήθως με τη βοήθεια κάποιων χρήσιμων ορισμών

…είναι να μας βοηθήσει να καταλάβουμε ένα θεώρημα

Μη κατανόηση του ρόλου:

…αν πάμε να λύσουμε μια άσκηση και κολλήσουμε κάπου να δούμε την απόδειξη για να διευκολυνθούμε

…μας βοηθάει να καταλάβουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα

…είναι να μας δείχνει τον τρόπο λύσης ενός παραδείγματος με βάση το θεώρημα

…είναι για να λύνουμε παρόμοιες ασκήσεις ευκολότερα

…να λύνουμε ασκήσεις και προβλήματα δίνοντας μια ολοκληρωμένη απάντηση

Αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο της απόδειξης μετά την παρέμβαση

Η λειτουργία της απόδειξης ως μέσο «επιβεβαίωσης» αναγνωρίζεται από 23 μαθητές. Ταυτόχρονα, 1 από τους 23 επισημαίνει την κοινωνική λειτουργία της με τον όρο «γνωστοποίηση των ορθών προτάσεων». Ενώ 8 εντοπίζουν το ρόλο της ως μέσο «επεξήγησης». Τη «δημιουργία νέων θεωρημάτων» εντοπίζουν ως ρόλο 2 μαθητές. Παραπάνω από ένα ρόλο διαπιστώνουν 4, ενώ κανείς δεν αναφέρεται στη «συστηματοποίηση». Τέλος, 11 φαίνεται να μη κατανοούν κάποιο ρόλο και 3 δίνουν λάθος απάντηση. Έπονται μερικές από τις απαντήσεις:

Μέσο ανακάλυψης-δημιουργίας:

…χωρίς τις αποδείξεις δεν μπορεί να υπάρξει Γεωμετρία, καθώς η τελευταία είναι επιστήμη και οι επιστήμες βασίζονται σε μια σειρά λογικών βημάτων και ιδεών που έχουν επικυρωθεί και είναι κατάλληλες για αξιοποίηση

…μας βοηθούν να δούμε πότε κάτι ισχύει και πότε όχι βγάζοντας καινούρια πράγματα

Μέσο επιβεβαίωσης:

…βοηθάει στη χρησιμοποίηση περισσότερων γνωστών αντικειμένων. Δηλαδή είναι η γνωστοποίηση κάποιων πραγμάτων που είναι ορθά

…μας δίνει να καταλάβουμε αν ένα θεώρημα όντως αληθεύει ή όχι για να είμαστε σίγουροι

…είναι πολύ σημαντικός αφού έχει ήδη χρησιμοποιηθεί (πχ σε ένα θεώρημα) και πλέον αυτό ισχύει αφού έχει αποδειχτεί

…βοηθάει να δούμε πότε κάτι είναι σωστό ώστε να οδηγηθούμε στην λύση

…να τεκμηριώσουμε και να επιβεβαιώσουμε τις απαντήσεις μας

…συμπεραίνουμε εάν ένα γεωμετρικό πρόβλημα ισχύει ή όχι

…δείχνουμε πω κάτι είναι αληθές δηλαδή κάτι ισχύει

…μας βοηθούν να δείχνουμε ότι κάτι ισχύει ή όχι

…για να επιβεβαιώνει την λύση ενός προβλήματος

Μέσο επεξήγησης

…είναι να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα το γιατί ισχύει κάτι και πως φτάσαμε στο σημείο να δείξουμε ότι ισχύει

…να κατανοούμε τον τρόπο με τον οποίο αποδεικνύεται κάτι και για ποιόν λόγο ισχύει

…είναι απαραίτητη για την αιτιολόγηση των θεωρημάτων

…μας βοηθάει να καταλάβουμε τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος

…είναι να μας βοηθάει στην κατανόηση του θεωρήματος

…είναι να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε το θεώρημα καλύτερα

…στο να κατανοήσουμε κάπως καλύτερα το θεώρημα

Μη κατανόηση του ρόλου

…1ον να βοηθάει το άτομα το οποίο δεν θυμούνται το θεώρημα να θυμούνται το σχήμα που αληθεύει το θεώρημα. 2ον εκτός από το θεώρημα που είναι λόγια έχουμε και ένα σχήμα στο μυαλό μας

… μας βοηθάει να αναλύσουμε τελειωτικά έναν συλλογισμό

…είναι να κάνει τον μαθητή να καταλάβει πως χρησιμοποιεί ένα θεώρημα κάνοντας μια άσκηση με λεπτομερές τρόπο

…να μας βοηθήσει να λύσουμε με βάση αυτόν συγκεκριμένες ασκήσεις

…μας βοηθάει γιατί μας δίνει να καταλάβουμε πως λύνουμε μια άσκηση με μια σειρά βημάτων και λύσεων

…είναι τα βήματα που ακολουθούμε για να λύσουμε μια άσκηση

Μεταβολές στις αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο της απόδειξης

Φαίνεται πως η «επιβεβαίωση» αποτελεί την πιο αναγνωρίσιμη λειτουργία της απόδειξης, αφού οι μισοί σχεδόν μαθητές από τους 43, τόσο πριν, όσο και μετά, την περιγράφουν στις απαντήσεις τους. Ανεπαίσθητες αυξήσεις της τάξεως της μίας μονάδας, παρατηρούνται στις 4 από τις 6 κατηγορίες. Αυξάνονται κατά 2 (από 2 σε 4) οι μαθητές που διαπιστώνουν παραπάνω από έναν ρόλο. Ο πίνακας 9 που ακολουθεί συγκεντρώνει τις απαντήσεις σχετικά με το ρόλο της απόδειξης:

ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Επιβεβαίωση (ορθό- σωστό-ισχύει-αληθεύει)	22	23
Επεξήγηση (κατανόηση του θεωρήματος- γιατί ισχύει)	7	8
Ανακάλυψη-δημιουργία νέων θεωρημάτων	1	2
Συστηματοποίηση	0	0
Μη κατανόηση του ρόλου	11	11
Δεν ξέρω/κενό	4	3

Πίνακας 9: Αντιλήψεις των μαθητών για το ρόλο της απόδειξης στη Γεωμετρία.

4.2.5. Αναγνώριση των δομικών στοιχείων της Γεωμετρίας από τους μαθητές

Στο $2^{ο}$ μέρος και στα δύο δοκίμια ζητήθηκε από τους μαθητές να χαρακτηριστούν 16 προτάσεις: 5 αξιώματα, 4 ορισμοί, 3 θεωρήματα και 4 «τρίτες προτάσεις». Ο αριθμός των προτάσεων για κάθε είδος δεν ήταν ίδιος, όπως συχνά υποθέτουν μερικοί μαθητές. Πράγματι, υπήρξαν μαθητές που ρώτησαν αν σε κάθε είδος αντιστοιχούν 4 προτάσεις Για κάθε σωστό χαρακτηρισμό, ο μαθητής λαμβάνει

1 μονάδα. Επομένως η δυνατή βαθμολογία κάθε μαθητή σε αυτό το $2^{ο}$ μέρος του ερωτηματολογίου είναι από 0 -16 μονάδες.

Μελετώντας τις απαντήσεις των μαθητών διαπιστώνει κανείς σχετικά μικρές μεταβολές στον αριθμό των σωστών απαντήσεων πριν και μετά τη παρέμβαση. Οι μισοί σχεδόν μαθητές 20 πριν, 22 μετά, χαρακτηρίζουν σωστά μέχρι 6 προτάσεις σε σύνολο 16. Από 7 έως 12 σωστούς χαρακτηρισμούς δίνουν 23 μαθητές πριν και 21 μετά. Ο μέγιστος αριθμός σωστών απαντήσεων ήταν 12 και σημειώθηκε μόνο από 1 μαθητή μετά τη παρέμβαση. Ο πίνακας 10 που ακολουθεί παρουσιάζει συγκεντρωτικά τον αριθμό των σωστών απαντήσεων:

Αριθμός σωστών απαντήσεων ανά μαθητή	Πριν (αριθμός μαθητών)	Μετά (αριθμός μαθητών)
1-3 σωστές	4	2
3-6 σωστές	16	20
7-9 σωστές	19	15
10-12 σωστές	4	6
13-16 σωστές	0	0

Πίνακας 10: Αριθμός σωστών χαρακτηρισμών ανά μαθητή

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατανομή των σωστών απαντήσεων σε σχέση με το είδος της πρότασης. Τα θεωρήματα μαζί με τις «τρίτες προτάσεις» είναι τα πιο αναγνωρίσιμα. Ενδεικτικά, οι περισσότεροι μαθητές, 31 στους 43, τόσο πριν όσο και μετά αναγνωρίζουν ως θεώρημα την ιδιότητα της μεσοκαθέτου. Τις «τρίτες» προτάσεις όπως *«οι ευθείες* $ε_1$, $ε_2$ *είναι κάθετες», «η ευθεία ε διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ»*, διακρίνουν σωστά πριν και μετά την παρέμβαση παραπάνω από τους μισούς.

Τα αξιώματα σε σχέση με τα προηγούμενα είναι λιγότερο διακριτά. Η μοναδικότητα της διχοτόμου μιας γωνίας είναι το πιο αναγνωρίσιμο αξίωμα από τα 5 που χρησιμοποιήθηκαν στο ερωτηματολόγιο. Ωστόσο, ο αριθμός των μαθητών που το χαρακτηρίζουν σωστά, δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλος (ενδεικτικά: 18 πριν, 22 μετά). Οι ορισμοί φαίνεται να είναι το πιο δυσδιάκριτο είδος από όλες τις προτάσεις. Για παράδειγμα η πρόταση *«αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ τότε ΑΒ=ΑΓ»* σημειώνεται ως ορισμός από ελάχιστους (5 πριν, 15 μετά).

Οι προτάσεις ομαδοποιήθηκαν με βάση το είδος τους. Κάθε ομάδα αποτελείται από διαφορετικό πλήθος προτάσεων. Αν κάθε πρόταση μιας ομάδας μπορεί να χαρακτηριστεί σωστά και από τους 43μαθητές τότε η μέγιστη δυνατή βαθμολογία για μια ομάδα, για παράδειγμα την ομάδα των θεωρημάτων, είναι 129 αφού η ομάδα αποτελείται από 3 προτάσεις, (3x43). Φαίνεται ότι ο αριθμός σωστών χαρακτηρισμών για την ομάδα των αξιωμάτων, όπως και των τρίτων προτάσεων, αυξάνει μετά την παρέμβαση. Για την ομάδα των ορισμών δεν μεταβάλλεται, ενώ για των θεωρημάτων μειώνεται. Η μείωση αυτή οφείλεται στη δυσκολία να αναγνωρίσουν το θεώρημα *«έστω ε είναι μία ευθεία του επιπέδου και Ζ σημείο της ε. Αν η ευθεία ΑΖ είναι κάθετη στην ευθεία ε στη σημείο, τότε η ΑΖ είναι μοναδική»*. Αυτό αναγνωρίζεται σωστά ως θεώρημα από 21 μαθητές πριν την παρέμβαση και από 10 μετά. Στον πίνακα 11 παρουσιάζονται αναλυτικά οι διαβαθμίσεις των σωστών επιλογών των 43 μαθητών.

Ομάδα προτάσεων	Πλήθος προτάσεων προς χαρακτηρισμό ανά ομάδα	Μέγιστη δυνατή βαθμολογία για κάθε ομάδα προτάσεων από το σύνολο των 43 μαθητών	Αριθμός σωστών χαρακτηρισμών για τη κάθε ομάδα προτάσεων από το σύνολο των 43 μαθητών	
			Πριν	Μετά
Αξιωμάτων	5	215	79	89
Ορισμών	4	172	42	42
Θεωρημάτων	3	129	78	62
Τρίτων προτάσεων	4	172	84	87

Πίνακας 11: Αριθμός σωστών χαρακτηρισμών για κάθε ομάδα προτάσεων από το σύνολο των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση

4.2.6 Αποφάνσεις των μαθητών για την πληρότητα μιας απόδειξης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί κατά την περιγραφή των ερευνητικών εργαλείων, σε κάθε ερωτηματολόγιο, παρουσιάζονταν σε δύο θέματα οι αποδείξεις δύο προτάσεων με τη βοήθεια αριθμημένων βημάτων. Ζητήθηκε από τους μαθητές να μελετήσουν τα δύο θέματα και να αποφασίζουν για την πληρότητα των αποδείξεων.

Αποφάνσεις των μαθητών για την πλήρη απόδειξη πριν την παρέμβαση

Στο 1ο θέμα παρουσιάζονταν σε επτά βήματα η πλήρη απόδειξη της πρότασης: «Αν δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$, $ε_2$. του επιπέδου τέμνονται, να αποδείξετε ότι οι ευθείες έχουν μόνο ένα κοινό σημείο» Περισσότεροι από τους μισούς μαθητές, 24 στους 43, έδωσαν σωστή απάντηση, αναγνωρίζοντας την παραπάνω απόδειξη ως «πλήρη». «Ελλιπή» χαρακτήρισαν την απόδειξη οι 18 από τους 43. Κάποιοι από αυτούς, δήλωσαν μόνο ότι η απόδειξη είναι «ελλιπής». Άλλοι, εντόπισαν τη θέση από την οποία θεωρούσαν ότι έλειπε κάτι. Από αυτούς, 6 εντόπισαν κενό ανάμεσα στην 4η πρόταση «αλλά η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α, Β είναι μοναδική» με την 5η πρόταση «άρα οι $ε_1$, $ε_2$ ταυτίζονται». Κενό ανάμεσα στην 5ηπρόταση «άρα οι $ε_1$, $ε_2$ ταυτίζονται» με την 6η πρόταση «άτοπο γιατί οι $ε_1$, $ε_2$ είναι διαφορετικές» διέκριναν 3 μαθητές. Επιπλέον, κάποιοι από τους μαθητές εντόπισαν κενά σε περισσότερες από μία θέσεις, με 2 να σημειώνουν την ύπαρξη δύο κενών και 2 την ύπαρξη 3 κενών.

Αποφάνσεις των μαθητών για την πλήρη απόδειξη μετά την παρέμβαση

Στο ερωτηματολόγιο μετά την παρέμβαση, στο 1ο θέμα δίνονταν η πλήρη απόδειξη σε επτά βήματα της πρότασης «το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό». Χαρακτήρισαν σωστά την πρόταση ως «πλήρη» οι 28 από τους 43 μαθητές. «Ελλιπή» θεώρησαν την πρόταση 13 μαθητές. Με 9 από τους 13 να εντοπίζουν τη θέση από την οποία θεωρούν ότι κάτι λείπει. Αρκετοί από αυτούς, 4, θεώρησαν ότι υπάρχει κενό ανάμεσα στην 6η πρόταση «αν υποθέσουμε ότι το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει και δεύτερο μέσο Μ΄ τότε ομοίως η ΟΜ΄ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$» και στην 7η «άτοπο αφού η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική. Τέλος, 4 μαθητές επισήμαναν κενό ανάμεσα στην 5η πρόταση «επομένως η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}B$» και στην 6η πρόταση που διατυπώθηκε παραπάνω.

Υπήρχαν 4 μαθητές που απάντησαν ότι η απόδειξη δεν είναι πλήρης, αλλά οι απαντήσεις τους παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον· γιατί οι προτάσεις που θεωρούσαν ότι έλειπαν ορισμοί, αξιώματα και θεωρήματα δεν ήταν παρά λεπτομερείς αναλύσεις και διευκρινήσεις των προτάσεων που είχαν ήδη δοθεί. Ακολουθούν αυτές οι απαντήσεις των 4 μαθητών:

Υποδείξεις μαθητών σχετικά με ορισμούς που θεωρούν ότι λείπουν

…ανάμεσα στην 1 και τη 2 δεν αναφέρει ότι το ΟΑ είναι ίσο με το ΟΒ ως ακτίνες.

…ανάμεσα στο 5 και στο 6 γιατί αφού λέει ότι η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}B$ πρέπει να διευκρινίσει ότι $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$

(Στο σχήμα σημειώνει σωστά τις γωνίες $\widehat{O_1}=A\hat{O}M$ και $\widehat{O_2}=M\hat{O}B$)

…δεν είναι πλήρης. Νομίζω ότι λείπει από το 6 και 7 και πιστεύω πως είναι αξίωμα .η πρόταση που λείπει είναι: αφού Μ΄ το δεύτερο μέσο του $\overset{\frown}{AB}$ τότε $\overset{\frown}{AM'}$ και $\overset{\frown}{M'B}$ είναι ίσα. Επομένως $A\hat{O}M'=M'\hat{O}B$

(Εδώ φαίνεται να αναλύει την έκφραση «έχει και δεύτερο μέσο Μ΄ τότε ομοίως η ΟΜ΄ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$» και την χαρακτηρίζει λανθασμένα ως αξίωμα)

Υποδείξεις *μαθητή που θεωρεί ότι λείπουν 1 θεώρημα και 2 ορισμοί*

…λείπει στο 2) ότι η ΟΜ κοινή (θεώρημα)

στο 5) $A\hat{O}M = M\hat{O}B$ (ορισμός)

στο 6) $A\hat{O}M' = M'\hat{O}B$ (ορισμός)

Στις προτάσεις 5 και 6 ο μαθητής αναλύει και χαρακτηρίζει σωστά τις αρχικές προτάσεις. Στην πρόταση 2 αναφέρεται στη κοινή πλευρά των επίκεντρων γωνιών κάτι που δεν σχετίζεται με το ζητούμενο.

Σύγκριση των αποφάνσεων των μαθητών για τις πλήρεις αποδείξεις μετά την παρέμβαση

Λίγοι παραπάνω από τους μισούς μαθητές, τόσο πριν, όσο και μετά την παρέμβαση, αναγνώρισαν την απόδειξη ως πλήρη. Παράλληλα, αρκετοί μαθητές θεώρησαν ότι υπήρχαν κενά στην αποδεικτική διαδικασία. Οι χαρακτηρισμοί των 43 μαθητών σχετικά με την πληρότητα των δύο αποδείξεων που ήταν πλήρεις παρουσιάζονται στον πίνακα 12 που έπεται:

Χαρακτηρισμός της πλήρης απόδειξης	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Πλήρης	24	28
Ελλιπής	18	13
Δεν ξέρω/κενό	1	2

Πίνακας 12: Αποφάνσεις των 43 μαθητών για τις πλήρεις αποδείξεις, πριν και μετά την παρέμβαση.

Αποφάνσεις των μαθητών για την ελλιπή απόδειξη πριν την παρέμβαση

Στο 2ο θέμα, στο ερωτηματολόγιο πριν την παρέμβαση, δίνονταν η πρόταση «αν δύο εφεξής γωνίες $\chi\widehat{O}\zeta$, $\zeta\widehat{O}\psi$ η πρώτη οξεία και η δεύτερη αμβλεία με άθροισμα μικρότερο των 180^{o} και Α, Β είναι σημεία των ημιευθειών Οχ, Οψ αντίστοιχα, τότε η Οζ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ». Η απόδειξη παρουσιάστηκε σε 7 βήματα και απουσίαζε μια πρόταση (ορισμός) ανάμεσα στο 6ο και 7ο βήμα.

Την αποδεικτική διαδικασία αναγνώρισαν σωστά ως ελλιπή 14 μαθητές από τους 43 αλλά μόνο 2 μαθητές από αυτούς προσδιόρισαν τη θέση από την οποία έλειπε η πρόταση. Κανείς δεν βρήκε και δεν χαρακτήρισε την πρόταση που έλειπε. Μόνο στη πιλοτική εφαρμογή του ερωτηματολογίου, 1 μαθητής από τους 15 που συμμετείχαν ανέφερε ότι στο 6ο βήμα χρειάζεται να δοθεί αιτιολόγηση, γιατί τα σημεία Α και Β είναι εκατέρωθεν της ευθείας Οζ. Όμως, δεν διατύπωσε ούτε χαρακτήρισε την πρόταση που έλειπε (τον ορισμό των εφεξής γωνιών που εξασφαλίζει ότι τα σημεία είναι εκατέρωθεν της Οζ).

Αποφάνσεις των μαθητών για την ελλιπή απόδειξη μετά την παρέμβαση

Στο 2ο θέμα στο ερωτηματολόγιο μετά την παρέμβαση, σε αντιστοιχία με το αυτό πριν την παρέμβαση, δίνονταν επίσης σε 7 βήματα η απόδειξη της πρότασης «τα σημεία Ζ, Η που ορίζονται από τις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήματα ΔΗ, ΕΖ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΔΗ=ΒΔ και ΖΕ=ΓΕ και το σημείο Α είναι συνευθειακά». Όμοια και σε αυτή την απόδειξη απουσίαζε μία πρόταση (θεώρημα). Την παραπάνω έλλειψη φάνηκε να αντιλαμβάνονται 16 μαθητές από τους 43. Οι μισοί από αυτούς εντόπισαν τη θέση από την οποία απουσίαζε το θεώρημα. Παρ'όλα αυτά, μόνο 5 μαθητές στους 43 διατύπωσαν την πρόταση που έλειπε (εκ των οποίων οι 4 εντόπισαν τη θέση) και 4 την χαρακτήρισαν σωστά.

Σύγκριση των αποφάνσεων των μαθητών για τις ελλιπείς αποδείξεις

Ο αριθμός των ατόμων που αντιλαμβάνονται ότι η αποδεικτική διαδικασία παρουσιάζει κενό δεν μεταβάλλεται πολύ μετά την παρέμβαση· από 14 πριν, στους 16 μετά. Ωστόσο, παρατηρούνται μεταβολές που αφορούν τον εντοπισμό, τη διατύπωση και το χαρακτηρισμό της πρότασης στις απαντήσεις 6 μαθητών, που πριν την παρέμβαση δεν έδωσαν σωστή απάντηση στο αντίστοιχο θέμα με την ελλιπή απόδειξη. Συγκεκριμένα, μετά την παρέμβαση, 3 από αυτούς βρήκαν την πρόταση που λείπει και τη χαρακτήρισαν σωστά. Επίσης, άλλοι 2, εντόπιζαν τη θέση και 1 εντόπισε τη θέση και διατύπωσε την πρόταση. Επιπλέον,1 άτομο που είχε απαντήσει σωστά πριν την παρέμβαση (ελλιπής) απαντά και μετά σωστά χαρακτηρίζοντας και διατυπώνοντας την πρόταση. Ο πίνακας 13 συγκεντρώνει τους χαρακτηρισμούς των μαθητών σχετικά με την πληρότητα των δύο αποδείξεων που ήταν ελλιπείς:

Χαρακτηρισμός της απόδειξης που ήταν ελλιπής	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Ελλιπής (σωστή απάντηση)	14	16
Χαρακτηρισμός της πρότασης που λείπει (αξίωμα-θεώρημα-ορισμός) (σωστή απάντηση)	0	4
Εύρεση της θέσης από την οποία λείπει η πρόταση (σωστή απάντηση)	2	8
Αναφορά της πρότασης που λείπει (σωστή απάντηση)	0	5
Πλήρης (μη σωστή απάντηση)	26	26
Δεν ξέρω/κενό	3	1

Πίνακας 13: Αποφάνσεις των 43 μαθητών για τις ελλιπείς αποδείξεις πριν και μετά την παρέμβαση.

4.2.7 Οργάνωση απόδειξης από τους μαθητές

Σε κάθε ερωτηματολόγιο δόθηκαν όλες οι αναγκαίες προτάσεις που συνιστούν την απόδειξη μιας πρότασης και οι μαθητές έπρεπε να τις τοποθετήσουν στη σωστή σειρά, να οργανώσουν την απόδειξη.

Οργάνωση απόδειξης από τους μαθητές πριν την παρέμβαση

Οι προτάσεις που δόθηκαν αφορούσαν την απόδειξη της πρότασης «από κάθε σημείο ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή». Η απόδειξη αποτελείται από δύο μέρη. Το ένα μέρος αφορά την ύπαρξη της καθέτου και το άλλο μέρος την μοναδικότητα. Από τους 43 μαθητές 3 τοποθέτησαν στη σωστή σειρά όλες τις προτάσεις, ενώ άλλοι 3 οργάνωσαν μόνο το ένα μέρος της απόδειξης αυτό, της ύπαρξης της καθέτου.

Οργάνωση απόδειξης από τους μαθητές μετά την παρέμβαση

Η απόδειξη που ζητήθηκε να οργανωθεί μετά την παρέμβαση αφορούσε την πρόταση «ανε είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ και Γ ένα σημείο του επιπέδου τέτοιο, ώστε τα Β,Γ να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ε τότε ΒΓ<ΑΓ». Σε αντιστοιχία με το ερωτηματολόγιο πριν την παρέμβαση και αυτή η απόδειξη αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος αποδεικνύεται ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ τέμνει την ευθεία ε σε ένα σημείο Κ και στο δεύτερο ότι ΒΓ < ΑΓ. Όλη την απόδειξη οργάνωσαν 2 μαθητές από τους 43, ενώ 3 μόνο το πρώτο μέρος.

Σύγκριση της οργάνωσης απόδειξης από τους μαθητές πριν και μετά την παρέμβαση

Η οργάνωση της απόδειξης φάνηκε να δυσκολεύει τους περισσότερους μαθητές. Αξιοσημείωτο ότι αυτοί που οργάνωσαν μια απόδειξη ή ένα μέρος της παρέμβαση δεν είναι οι ίδιοι πριν και μετά την παρέμβαση. Ειδικότερα, 2 από τους 3μαθητές που οργάνωσαν την απόδειξη πριν την παρέμβαση, δεν κατάφεραν να οργανώσουν την απόδειξη μετά. Ενώ ο 1 από αυτούς, τοποθέτησε σωστά μόνο το πρώτο μέρος της απόδειξης.

Στον πίνακα 14 που ακολουθεί παρουσιάζονται συνολικά τα αποτελέσματα των 43 μαθητών που αφορούν την οργάνωση της απόδειξης:

Τοποθέτηση Προτάσεων στη σωστή σειρά	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Σωστή τοποθέτηση	3	2
Σωστή τοποθέτηση μόνο του 1ου μέρους	3	3
Μη σωστή τοποθέτηση	36	38
Δεν ξέρω/κενό	1	0

Πίνακας 14: Οργάνωση απόδειξης από τους 43 μαθητές πριν και μετά την παρέμβαση.

4.3. Δυσκολίες των μαθητών στη συμπλήρωση μιας απόδειξης

Στην ενότητα που ακολουθεί παρουσιάζονται και περιγράφονται οι δυσκολίες που συνάντησαν οι μαθητές στη προσπάθειά τους να συνεχίσουν και να ολοκληρώσουν τις αποδείξεις τεσσάρων προτάσεων της ενότητας «παραλλήλων ευθειών». Η μελέτη και η επεξεργασία των φύλλων εργασίας με τίτλο «συμπληρώνοντας το συλλογισμό», όπως και των παρατηρήσεων που σημειώθηκαν κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, οδήγησαν στην καταγραφή των δυσκολιών. Ακολουθεί η παρουσίαση αυτών ανά πρόταση.

Προσπάθειες- Δυσκολίες των μαθητών να αποδείξουν το θεώρημα «αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες».

Στο αντίστοιχο φύλλο εργασίας υπήρχε όμοιο σχήμα με αυτό του σχολικού βιβλίου που αφορά το παραπάνω θεώρημα, δηλαδή, δύο ευθείες παράλληλεςε_1, ε_2 που τέμνονται από μία τρίτη την ε, στα Α, Β αντίστοιχα. Δίνονταν όλα τα βήματα-προτάσεις μέχρι την κατασκευή της βοηθητικής ημιευθείας Αχ ώστε οι γωνίες $\chi\hat{A}\beta$, $\hat{\varphi}$ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ε και $\chi\hat{A}B = \hat{\varphi}$.

Ζητήθηκε από τους μαθητές να συνεχίσουν την απόδειξη. Οι μαθητές σε όλες τις δραστηριότητες, κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, εργάζονταν σε 12 ομάδες των τριών ή τεσσάρων ατόμων, 6 ομάδες σε κάθε τμήμα. Επιπλέον, είχαν στη διάθεση τους τα θεωρήματα, τους ορισμούς και τα αξιώματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αυτές τις αποδείξεις (στο τέλος του φύλλου εργασίας γραμμένα και τοποθετημένα μέσα σε πλαίσια).

Την απόδειξη στην παραπάνω πρόταση κατάφεραν να ολοκληρώσουν με επιτυχία οι 6 ομάδες από τις 12 στο χρονικό διάστημα μιας διδακτικής ώρας. Όμως, όλες οι ομάδες πέρασαν σχεδόν από τα ίδια στάδια και αντιμετώπισαν, λίγο πολύ, παρόμοια εμπόδια με 6 από αυτές να καταφέρνουν να τα προσπερνούν.

Αρχικά οι περισσότερες ομάδες είπαν ότι εφόσον $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ άρα $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$ ως εντός εναλλάξ και χρησιμοποίησαν το ζητούμενο ως δεδομένο. Σχετικά γρήγορα, αρκετές ομάδες έφτασαν στο συμπέρασμα ότι $A\chi // \varepsilon_2$ με χρήση του αντίστοιχου θεωρήματος. Όμως δεν μπορούσαν να συνεχίσουν. Χαρακτηριστική η φράση των περισσοτέρων «αυτό δεν γίνεται, δεν μπορεί να είναι $A\chi //\ \varepsilon_2$». Κάποιες από αυτές τις ομάδες αδυνατούν να εξηγήσουν, γιατί δεν γίνεται να είναι $A\chi //\ \varepsilon_2$, και δεν καταφέρνουν να προχωρήσουν. Τελικά, 6 από τις ομάδες, ύστερα από αρκετό χρόνο παραμονής σε αυτό το σημείο και πολλές απόπειρες, κάνουν το άλμα και περνούν στο επόμενο βήμα και τελικά ολοκληρώνουν την απόδειξη.

Παρουσιάζει ενδιαφέρον η κάπως διαφορετική διαδικασία που ακολούθησε 1 από τις 6 ομάδες που ολοκλήρωσε την απόδειξη:

..από σημείο εκτός ευθείας άγεται μόνο μία παράλληλη προς αυτή. Άρα η Αχ τέμνει την ε_2 στο σημείο Γ. Σχηματίζεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με $\chi\hat{A}B \neq \widehat{\varphi}$ γιατί κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες ενός τριγώνου…

Μία ακόμη ομάδα συνέχισε και αυτή με την υπόθεση ότι η Αχ τέμνει την ευθεία ε_2 σε σημείο Γ και σχεδίασε τρίγωνο ΑΒΓ αλλά δεν μπόρεσε να καταλήξει κάπου, οπότε άλλαξε πορεία και τελικά απέδειξε το θεώρημα με χρήση του Ευκλείδειου αιτήματος.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο τρόπος έκφρασης μιας ομάδας που επίσης κατάφεραν να προχωρήσουν στην απόδειξη του θεωρήματος με τη βοήθεια του παραπάνω αιτήματος:

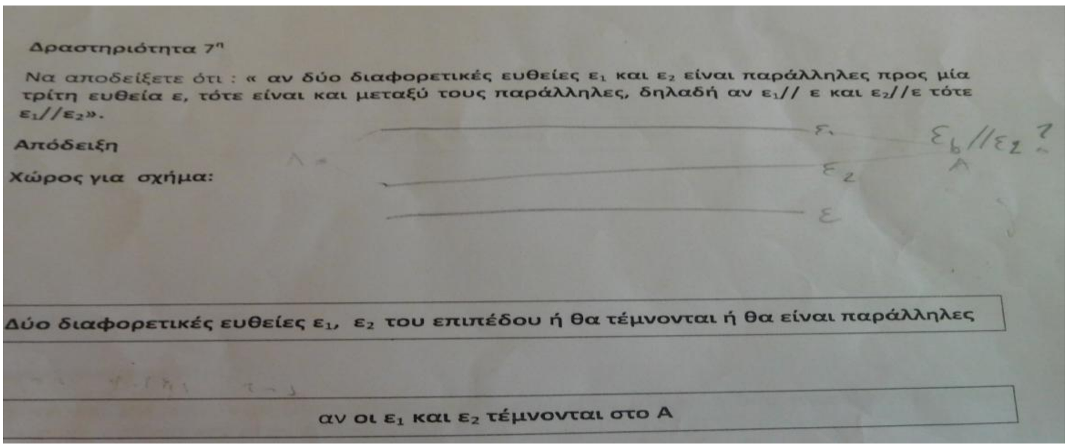
...αν οι δύο εντός εναλλάξ γωνίες $\chi\hat{A}B$ και $\widehat{\varphi}$ είναι ίσες, τότε οι ευθείες Αχ και ε_2 θα είναι και καλά παράλληλες. Αλλά από σημείο εκτός ευθείας άγεται μοναδική παράλληλη. Στη προκειμένη περίπτωση είναι η ε_1.

Προσπάθειες-Δυσκολίες των μαθητών να αποδείξουν την πρόταση «αν δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $ε_1$// ε και $ε_2$//ε τότε $ε_1$//$ε_2$».

Στο φύλλο εργασίας υπήρχε χώρος ώστε οι μαθητές να σχεδιάσουν κάποιο σχήμα αν θεωρούσαν ότι είναι αναγκαίο. Για να κατασκευάσουν την απόδειξη αυτής της πρότασης, οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους λιγότερη βοήθεια σε σχέση με την προηγούμενη απόδειξη (φθίνουσα καθοδήγηση), αφού δίνονταν μόνο 2 βήματα-προτάσεις. Σε αυτές αναφέρονταν η σχετική θέση των διαφορετικών ευθειών $ε_1$, $ε_2$ και διατυπωνόταν η υπόθεση ότι οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται σε ένα σημείο στο Α, ώστε να οδηγηθούν στη χρήση της απαγωγής σε άτοπο.

Αρχικά, πολλές ομάδες στη προσπάθειά τους να σχεδιάσουν κάποιο σχήμα, εξέφρασαν αντίρρηση σχετικά με τη δεύτερη πρόταση που δίνονταν, λέγοντας ότι οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ δεν μπορεί να τέμνονται, «φαίνεται» ότι είναι παράλληλες. Οι εξηγήσεις και οι διευκρινίσεις για τη μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής» και το ρόλο της υποθετικής πρότασης «οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται στο σημείο Α» οδηγεί κάποιες ομάδες στη χρήση διακεκομμένων γραμμών, στρέβλωση των ευθειών και σχεδιασμό του σημείου τομής Α.

Ενδεικτικά στη φωτογραφία 1 παρουσιάζεται το σχήμα μιας ομάδας. Η συγκεκριμένη ομάδα παρόλο που είχε αποδείξει την πρόταση της προηγούμενης δραστηριότητας σε αυτήν συναντά εμπόδια, δεν καταφέρνει να προχωρήσει περισσότερο την αποδεικτική διαδικασία και τοποθετεί ένα ερωτηματικό στο σχήμα ακριβώς δίπλα στη σχέση $ε_1$//$ε_2$ (φωτογραφία 1).

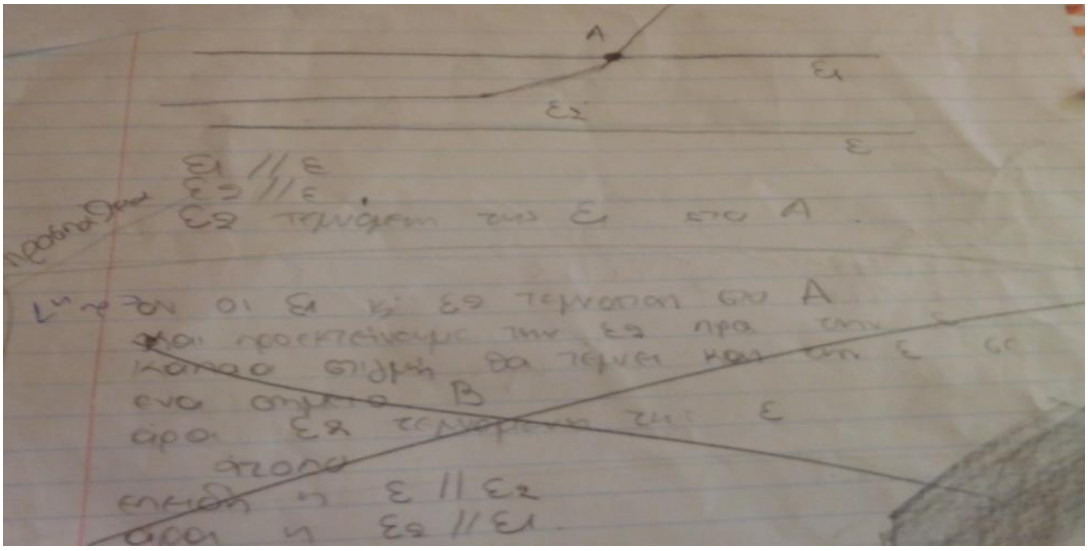


Φωτογραφία 1: η προσπάθεια μιας ομάδας να αποδείξει την πρόταση «αν δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $ε_1$// ε και $ε_2$//ε τότε $ε_1$//$ε_2$».

Δύο ακόμα ομάδες έκαναν παρόμοιο σχήμα με αυτό που παρουσιάζεται στη φωτογραφία 1, διαισθάνθηκαν ότι η πρόταση-αίτημα παραλληλίας θα μπορούσε να τους οδηγήσει ίσως σε λύση και γι' αυτό τη συμπληρώνουν στο φύλλο εργασίας τους, αλλά αδυνατούν να εξηγήσουν το πώς. Δυσκολία αντιμετώπισαν και μερικές από τις ομάδες που σχεδίασαν την ευθεία ε στο κοινό χώρο που ορίζουν οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ και την ευθεία ε να διέρχεται από το κοινό σημείο Α.

Άλλες ομάδες σχεδίασαν τις $ε_1$, $ε_2$ με τέτοιο τρόπο, ώστε να τέμνονται σε ένα σημείο Α και έκαναν χρήση βοηθητικής ευθείας, την οποία σχεδίασαν έτσι ώστε να τέμνει και τις τρεις ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και ε. Σημείωσαν τις γωνίες που σχηματίζονταν και προσπαθούσαν να φτάσουν σε κάποιο συμπέρασμα με χρήση των θεωρημάτων για τις εντός εναλλάξ γωνίες ή εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες. Στην ερώτηση, πώς γνωρίζουν ότι αυτή η βοηθητική ευθεία τέμνει τις ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και ε η απάντηση ήταν «αφού τέμνει τις μία από αυτές θα τέμνει και τις παράλληλες προς αυτήν». Συμπέρασμα που προκύπτει ως συνέπεια του επόμενου θεωρήματος (του οποίου την απόδειξη θα διαπραγματευόταν στην επόμενη δραστηριότητα), αλλά και του θεωρήματος που προσπαθούσαν να αποδείξουν (φαύλος κύκλος- κυκλικός συλλογισμός μεταξύ των θεωρημάτων).

Στη φωτογραφία 2 που ακολουθεί, παρουσιάζεται η $1^η$ προσπάθεια μιας ομάδας μαθητών που μπορεί να μην έκαναν χρήση βοηθητικής τρίτης ευθείας αλλά δεν απέφυγαν τον κυκλικό συλλογισμό (φαύλο κύκλο).

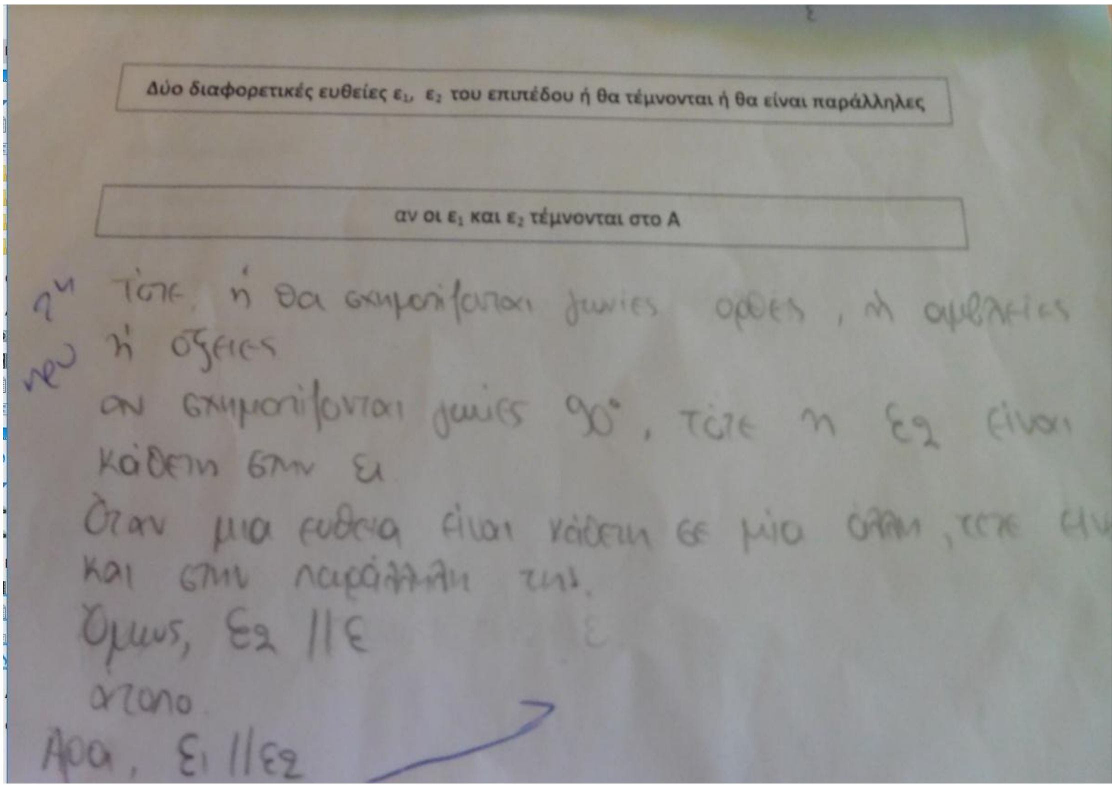


Φωτογραφία 2: η $1^η$ προσπάθεια μίας ομάδας να αποδείξουν την πρόταση «αν δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $ε_1$// ε και $ε_2$//ε τότε $ε_1$//$ε_2$».

Οι μαθητές της ομάδας αυτής μετά από συζήτηση «φάνηκε» να αντιλαμβάνονται ότι χρησιμοποίησαν το επόμενο θεώρημα και έτσι μόνοι τους διέγραψαν τη λύση και συνέχισαν με πολύ επιμονή την προσπάθειά τους (ήταν μία από τις ομάδες που είχαν καταφέρει να ολοκληρώσουν την προηγούμενη δραστηριότητα).

Αλλά και η επόμενη προσπάθεια της ομάδας ήταν άκαρπη. Σε συνέχεια των δύο προτάσεων που δινόταν, σκέφτηκαν ότι εφόσον οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται σε ένα σημείο Α, να διερευνήσουν το είδος των γωνιών που σχηματίζονται. Διακρίνοντας τρεις περιπτώσεις και ξεκινώντας από αυτή της ορθής γωνίας έφθασαν στο συμπέρασμα που ήθελαν, αλλά και πάλι χρησιμοποιώντας τα δύο επόμενα θεωρήματα των οποίων την απόδειξη θα αναζητούσαν στις επόμενες δραστηριότητες του ίδιου φύλλου εργασίας. Έτσι, η ίδια ομάδα για δεύτερη φορά χρησιμοποίησε κυκλικό συλλογισμό (φαύλος κύκλος μεταξύ των θεωρημάτων).

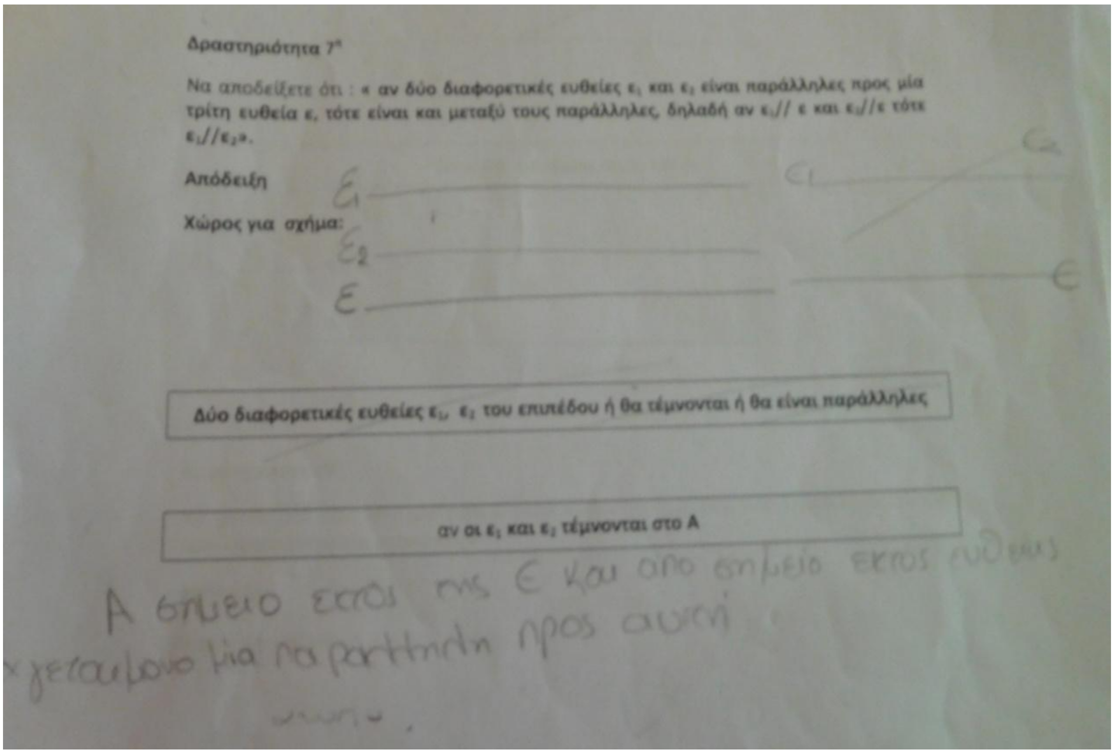
Η φωτογραφία 3 παρουσιάζει την 2η λανθασμένη προσπάθεια της ίδιας ομάδας



Φωτογραφία 3: η 2η προσπάθεια της ίδιας ομάδας να αποδείξουν την πρόταση « αν δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $ε_1$// ε και $ε_2$//ε τότε $ε_1$//$ε_2$».

Ύστερα από τις δύο αυτές προσπάθειες οι μαθητές της ομάδας ήθελαν να συνεχίσουν, αλλά το κουδούνι τους πρόλαβε. Τα παιδιά πρότειναν να συνεχίσουν τη προσπάθεια στο επόμενο μάθημα, κάτι που δεν έγινε εξαιτίας περιορισμών της έρευνας που θα αναλυθούν στην αντίστοιχη παράγραφο στο κεφάλαιο 6.

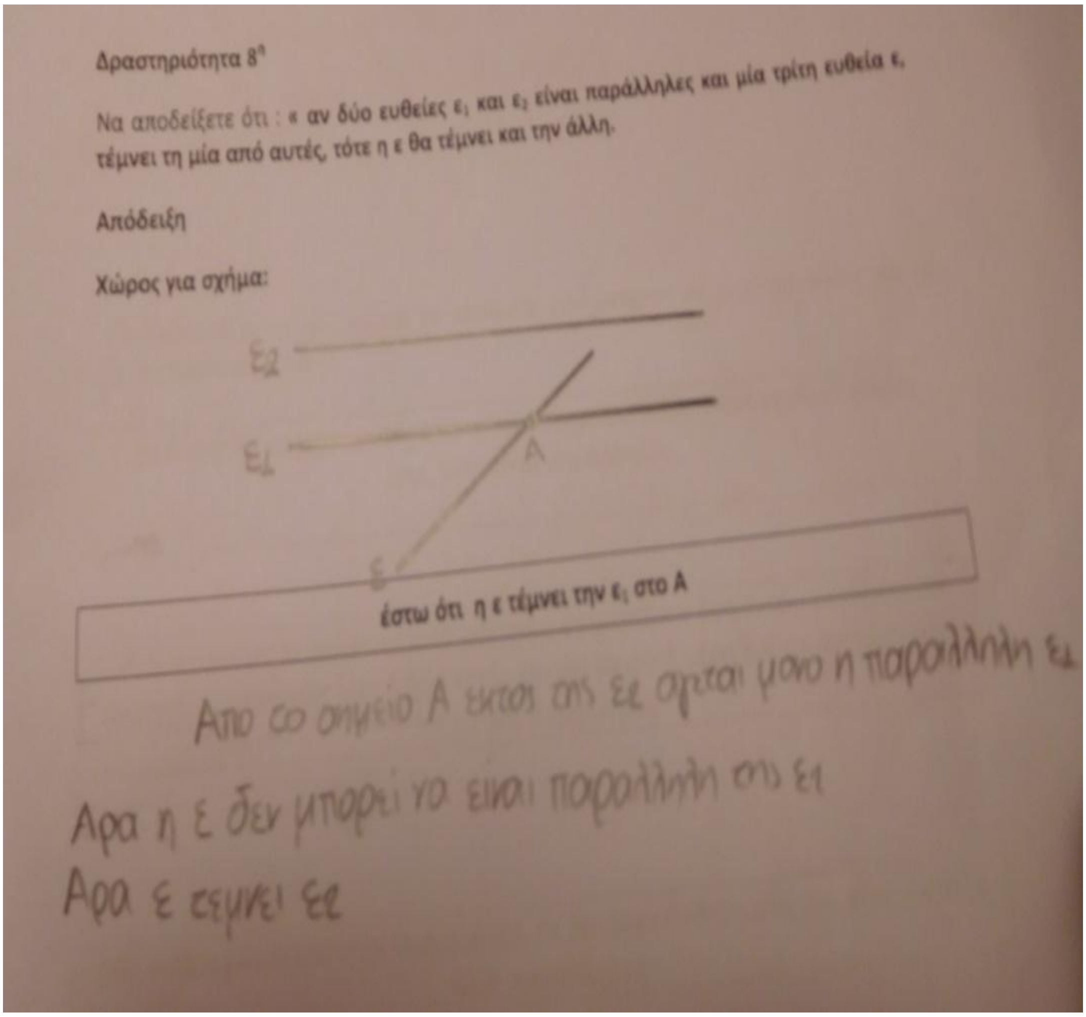
Τελικά, μόνο 4 από τις 12 ομάδες κατάφεραν να ολοκληρώσουν με επιτυχία αυτή την απόδειξη. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι 1 από αυτές τις 4 ομάδες δεν είχε φέρει εις πέρας την απόδειξη της προηγούμενης δραστηριότητας. Από τις 4 ομάδες, οι 3 σχεδιάζουν το σχήμα περίπου όπως παρουσιάζεται στο σχολικό βιβλίο. Χρησιμοποιούν διακεκομμένες γραμμές, στρεβλώνουν τις ευθείες και σχεδιάζουν το κοινό σημείο Α, με δύο από τις ομάδες να τοποθετούν την ε στη ζώνη των ευθειών $ε_1$, $ε_2$ χωρίς αυτό να τους δημιουργεί πρόβλημα στην αποδεικτική διαδικασία. Η τέταρτη ομάδα διαφοροποιείται από τις υπόλοιπες. Ουσιαστικά κάνει δύο σχήματα. Στο πρώτο σχεδιάζει τις ευθείες παράλληλες (αυτό που θέλουν να αποδείξουν) και στο δεύτερο σχεδιάζει τις ευθείες $ε_1$, $ε_2$ τεμνόμενες. Δεν κάνει χρήση διακεκομμένων γραμμών και ολοκληρώνει την απόδειξη όπως παρουσιάζεται στην φωτογραφία 4 που ακολουθεί.



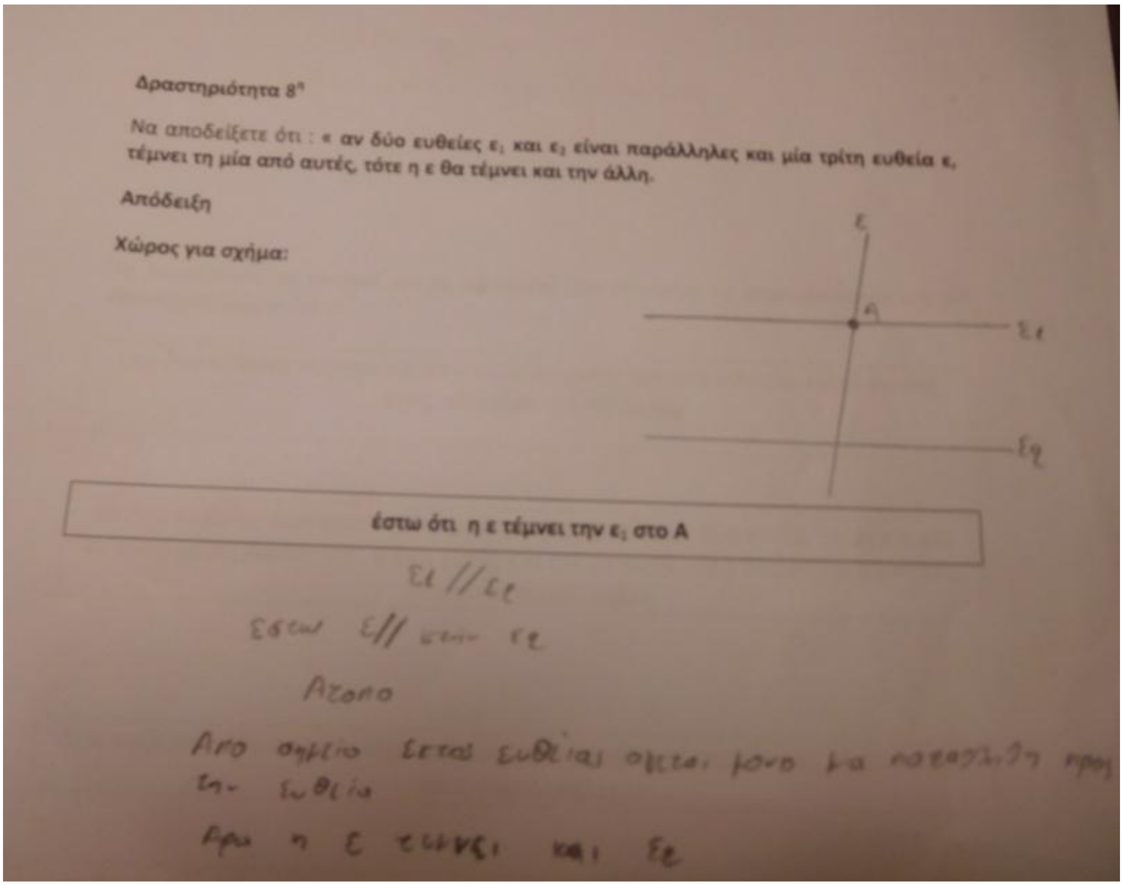
Φωτογραφία 4: τα σχήματα και η διαδικασία που ακολούθησε με επιτυχία μια ομάδα για την απόδειξη της πρότασης «αν δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $ε_1$// ε και $ε_2$//ε τότε $ε_1//ε_2$».

Προσπάθειες-Δυσκολίες των μαθητών να αποδείξουν την πρόταση«αν δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε, τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη».

Κάθε ομάδα είχε στη διάθεσή της μόνο την πρόταση- υπόθεση «αν η ε τέμνει την $ε_1$. στο Α» για να ξεκινήσει τη κατασκευή της απόδειξης. Μόνο 3 ομάδες από τις 12 καταφέρνουν να ολοκληρώσουν σωστά την απόδειξη. Οι υπόλοιπες ομάδες ισχυρίστηκαν ότι δεν μπορεί να μην τέμνει την άλλη, αν προεκταθεί και δεν μπορούσαν να προχωρήσουν. Ακολουθούν ενδεικτικά δύο φωτογραφίες, οι 5 και 6, που παρουσιάζουν τις αποδείξεις μόνο των ομάδων που εμφανίζουν μικρή διαφοροποίηση ως προς τον τρόπο έκφρασης:



Φωτογραφία 5: Απόδειξη της πρότασης «αν δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε, τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη» από κάποια ομάδα μαθητών.

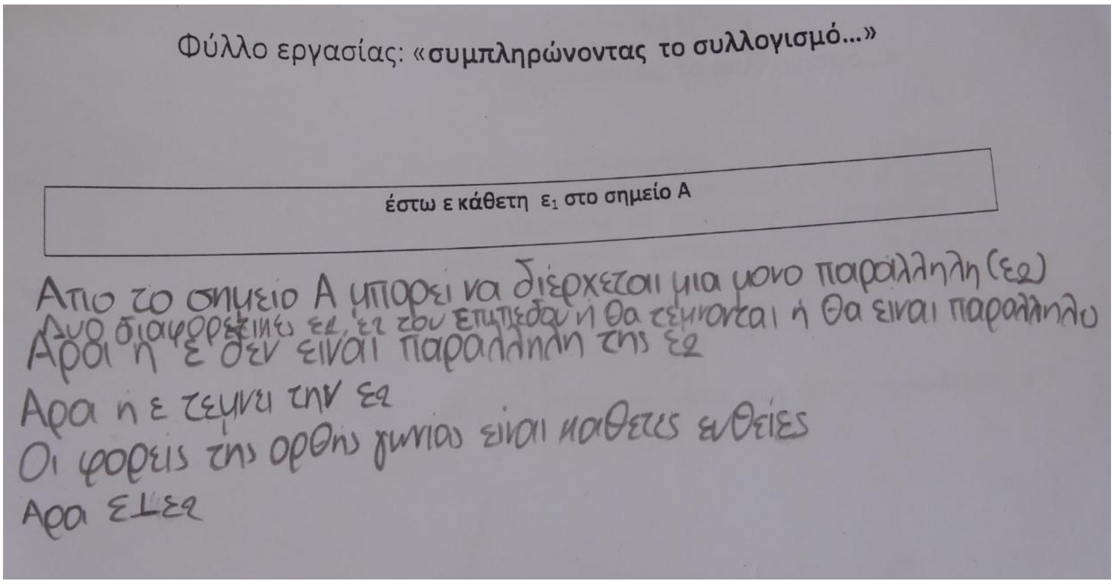


Φωτογραφία 6: Απόδειξη της πρότασης «αν δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε, τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη» από μία ακόμα ομάδα μαθητών.

Προσπάθειες-Δυσκολίες των μαθητών να αποδείξουν την πρόταση «αν μία ευθεία είναι κάθετη σε μία από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη»

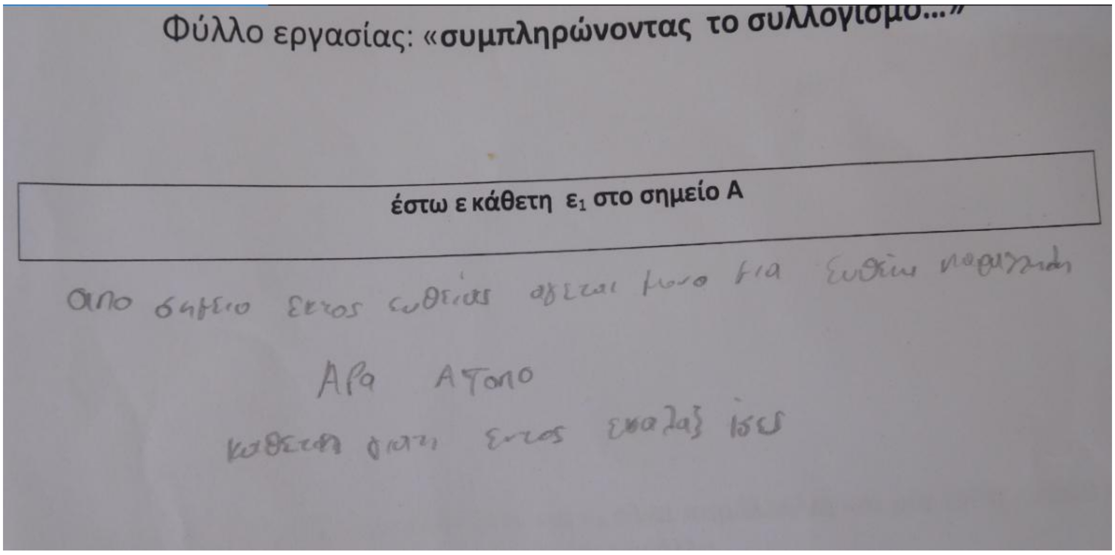
Για την τελευταία απόδειξη κάθε ομάδα είχε στη διάθεσή της δύο βήματα. Σε αυτά δε δίνονταν κάποια σημαντική βοήθεια, αλλά τα σύμβολα για την ονομασία των ευθειών «έστω $ε_1//ε_2$ και ε κάθετη στην $ε_1$στο σημείο Α».

Από το σημείο αυτό οι μαθητές έπρεπε να συνεχίσουν την απόδειξη. Στο ένα τμήμα οι μαθητές ασχολήθηκαν στο μεγαλύτερο μέρος της ώρας με την προηγούμενη δραστηριότητα και ο χρόνος που έμενε δεν ήταν ικανός για να οδηγηθούν στην απόδειξη· οπότε με αυτή τη δραστηριότητα ασχολήθηκαν τελικά μόνο οι μαθητές του ενός τμήματος, δηλαδή 6 ομάδες από τις 12. Στο σχετικά λίγο χρόνο που είχαν στη διάθεσή τους και αυτές οι ομάδες, 2 από αυτές προχωρούν στην απόδειξη, εμφανίζουν κάποια κενά, τα οποία καλύπτουν και απαντούν προφορικά μετά από σχετικές ερωτήσεις-νύξεις, ολοκληρώνοντας τελικά την απόδειξη. Στη φωτογραφία 7 φαίνονται η προσπάθεια της μίας ομάδας με τα κενά που αναφέρθηκαν.



Φωτογραφία 7: η προσπάθεια μιας ομάδας για την απόδειξη της πρότασης «αν μία ευθεία είναι κάθετη σε μία από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη»

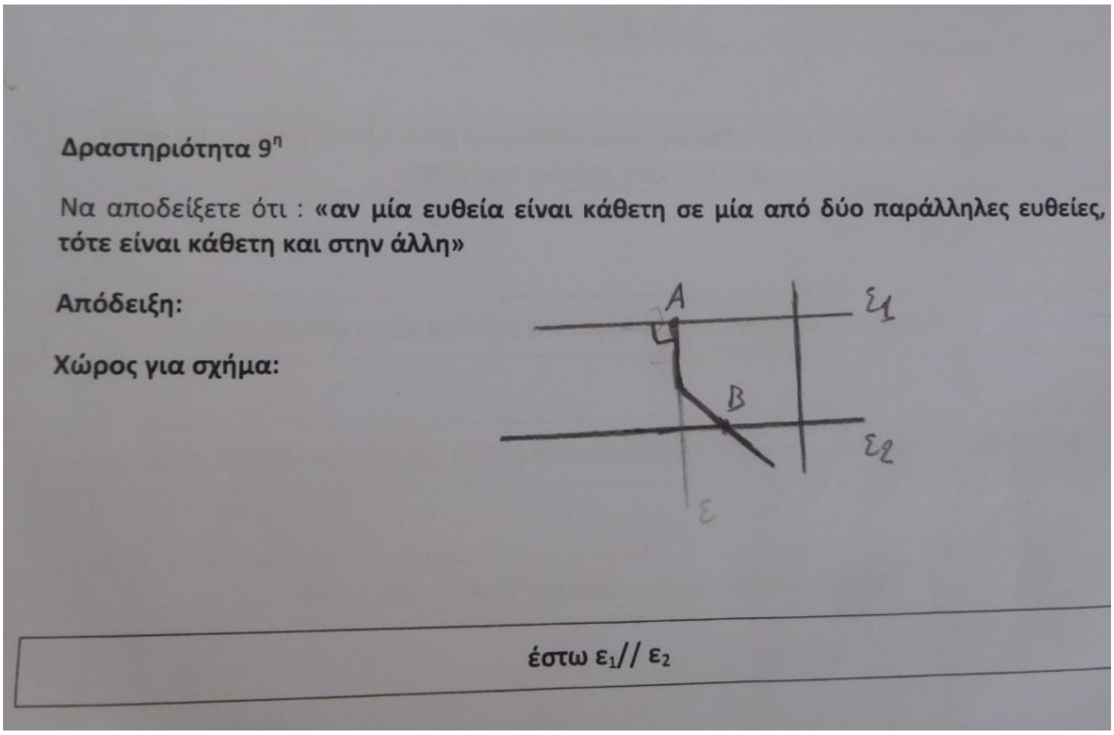
Στην ερώτηση, πώς προκύπτει ότι η γωνία που σχηματίζουν οι ε, $ε_2$ είναι ορθή, οι μαθητές της ομάδας αιτιολόγησαν σωστά το ότι η γωνία είναι ορθή με το θεώρημα για τις εντός εναλλάξ γωνίες. Στην φωτογραφία 8 παρουσιάζεται η δουλειά της άλλης ομάδας με εμφανή κενά και ασάφειες.



Φωτογραφία 8: η προσπάθεια μιας δεύτερης ομάδας για την απόδειξη της πρότασης «αν μία ευθεία είναι κάθετη σε μία από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη»

Τα μέλη της παραπάνω ομάδας ρωτήθηκαν γιατί αναφέρονται στο Ευκλείδειο Αίτημα και απάντησαν ότι αφού από το σημείο Α διέρχεται μοναδική παράλληλη προς την ε_2 αυτή είναι η ε_1 άρα η ε δεν μπορεί να είναι παράλληλη προς την ε_2 άρα την τέμνει σε ένα σημείο. Στη συνέχεια, ζητήθηκε να αποσαφηνίσουν την πρόταση που έγραψαν «κάθετες γιατί εντός εναλλάξ ίσες» και συμπλήρωσαν ότι αφού οι γωνίες είναι ίσες ως εντός εναλλάξ είναι και οι δύο ορθές άρα οι πλευρές τους κάθετες ευθείες.

Τέσσερις από τις ομάδες δεν κατάφεραν να ολοκληρώσουν την απόδειξη. Οι δύο από αυτές είχαν στη διάθεσή τους σχετικά λίγο χρόνο, γιατί αφιέρωσαν περισσότερο χρόνο στις προηγούμενες δραστηριότητες. Η τρίτη από αυτές αναφέρει ότι οι ευθείες είναι παράλληλες ως κάθετες στην ίδια ευθεία, ενώ η τέταρτη ομάδα προσπαθεί να φτάσει στην απόδειξη σχεδιάζοντας τις ευθείες όπως φαίνεται στην φωτογραφία 9 που ακολουθεί.



Φωτογραφία 9: το σχήμα μιας τρίτης ομάδας που δεν ολοκλήρωσε την απόδειξη της πρότασης «αν μία ευθεία είναι κάθετη σε μία από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη»

Ο πίνακας 15 που ακολουθεί συγκεντρώνει και παρουσιάζει τον αριθμό των ομάδων που ολοκλήρωσαν με επιτυχία τις αποδείξεις των τεσσάρων προτάσεων της $4^{ης}$ ενότητας με τίτλο «συμπληρώνοντας το συλλογισμό» ήταν η ακόλουθη:

Προτάσεις προς απόδειξη	Αριθμός των ομάδων που ολοκλήρωσαν την απόδειξη της πρότασης με επιτυχία στο σύνολο των ομάδων
«αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες».	6/12
« αν δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $ε_1$// ε και $ε_2$//ε τότε $ε_1$//$ε_2$».	4/12
«αν δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε, τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη».	3/12
«αν μία ευθεία είναι κάθετη σε μία από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη»	2/6

Πίνακας 14: Πλήθος των ομάδων των μαθητών που ολοκλήρωσαν τις αποδείξεις των προτάσεων σε σχέση με τον αριθμό των ομάδων που προσπάθησε.

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σημειώνεται ότι υπήρχε μία ομάδα που απέδειξε και τις 4 προτάσεις και δύο ομάδες που απέδειξαν 3 από τις 4 προτάσεις. Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται μια προσπάθεια ερμηνείας των παραπάνω αποτελεσμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων της έρευνας, όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο και την εξαγωγή συμπερασμάτων, κρίνεται σκόπιμο η οργάνωση αυτών σε τρεις ενότητες. Στην πρώτη ενότητα, τα ευρήματα αφορούν το πώς οι μαθητές ερμηνεύουν το ρόλο των αξιωμάτων, των ορισμών, των θεωρημάτων και των αποδείξεων στη δομή του αξιωματικού συστήματος (ερμηνεία, μία από τις διάσταση της κατανόησης που εξετάστηκε). Οι ερμηνείες αυτών των ευρημάτων, απαντούν ουσιαστικά στο πρώτο ερώτημα της έρευνας· δηλαδή, το πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές τον ρόλο των παραπάνω στοιχείων. Στην δεύτερη ενότητα τα ευρήματα αφορούν το πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν αυτά τα στοιχεία, για να δίνουν αιτιολογημένες εξηγήσεις ή να οργανώνουν μια απόδειξη (εξήγηση-εφαρμογή, δύο από τις διαστάσεις κατανόησης που εξετάστηκαν). Οπότε, οι ερμηνείες αυτών των ευρημάτων, απαντούν στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα δηλαδή, στο πώς αξιοποιούν τα παραπάνω στοιχεία στην απόδειξη.

Συνθέτοντας κανείς τις ερμηνείες των ευρημάτων, όπως παρουσιάζονται στις δύο πρώτες ενότητες, μπορεί να σχηματίσει μια εικόνα για το εύρος και το βάθος της κατανόησης των μαθητών σχετικά με το ρόλο των παραπάνω στοιχείων στο Αξιωματικό Σύστημα αφού, αυτή εξετάζεται ως προς τρεις διαστάσεις- εκφάνσεις της.

Τα ευρήματα ταξινομούνται σε κατηγορίες. Στην πρώτη ενότητα της συζήτησης, σε σχέση με το θεωρητικό και το λειτουργικό ρόλο των στοιχείων αυτών. Στη δεύτερη ενότητα, ως προς τη διάσταση της εξήγησης και της εφαρμογής του λειτουργικού ρόλου αυτών των στοιχείων στις αποδείξεις. Στην τελευταία ενότητα, ερμηνεύονται τα ευρήματα αναφορικά με τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές στην προσπάθεια τους να αποδείξουν κάποιες ιδιότητες των παραλλήλων ευθειών. Δυσκολίες που συνδέονται με τη δομή του Αξιωματικού Συστήματος, την μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής» και το χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων και απαντούν στο τρίτο ερώτημα της έρευνας που αφορά την ανίχνευση αυτών των δυσκολιών.

Συζήτηση για τις αντιλήψεις για το ρόλο των δομικών στοιχείων και της απόδειξης στο Αξιωματικό Σύστημα

Ως προς τη διάσταση της ερμηνείας, παρατηρήθηκαν αρκετές βελτιώσεις, ιδιαίτερα στις αντιλήψεις των μαθητών για τη φύση του αξιώματος και του θεωρήματος. Πολλοί μαθητές είναι σε θέση να προσεγγίσουν μια σωστή ή σχεδόν σωστή λεκτική περιγραφή για το τι είναι το αξίωμα, λιγότεροι για το τι είναι το θεώρημα. (πιν. 2 και πιν.9).Τα ευρήματα για τη φύση των αξιωμάτων συμφωνούν με αυτά από το πείραμα του USEME (DeVilliers, 1996). Σχετικά με τη φύση τόσο του ορισμού όσο και της απόδειξης, οι βελτιώσεις είναι μικρές (πιν. 4 και πιν. 8), ενώ σχεδόν οι μισοί μαθητές διατηρούν λανθασμένες αντιλήψεις. Οι δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της φύσης της απόδειξης, όπως έχει αναφερθεί στο υποκεφάλαιο 1.4, έχουν διαπιστωθεί από αρκετούς ερευνητές (Schoenfeld, 1986; Chazan, 1993; Moore, 1994; Simon, 1996;Knuth, 2002, όπως αναφ. σταRaman, 2003; Ιγγλέζου 2014).

Μια αξιόλογη διαπίστωση καταγράφεται σχετικά με την οπτική που αρχίζουν να διαμορφώνουν οι μαθητές για την έννοια της απόδειξης. Κάποιοι, φαίνεται να διευρύνουν αυτή την εικόνα και, διαβλέπουν τη σύνθεση αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων στη δομή της. Επιπλέον, από τη μελέτη των λανθασμένων περιγραφών για τη φύση των δομικών στοιχείων της Γεωμετρίας συνάγεται ότι ανάμεσα σε αρκετούς μαθητές επικρατούν οι εξής αντιλήψεις: τα θεωρήματα και οι ορισμοί είναι «θεωρίες-κανόνες για εκμάθηση», «ο ορισμός είναι κάτι που ισχύει πάντα» και «η απόδειξη είναι ένα παράδειγμα για τη λύση των ασκήσεων». Παράλληλα, αρκετοί μαθητές αδυνατούν να εντοπίσουν τη διαφορετική φύση αξιωμάτων, ορισμών, θεωρημάτων και απόδειξης ενώ συγχέουν τη μεταξύ τους σημασία.

Μεταβολές σημαντικές παρατηρούνται ιδιαίτερα στις αντιλήψεις των μαθητών για το λειτουργικό ρόλο των παραπάνω στοιχείων στη Γεωμετρία. Αυτές βελτιώνονται, με πολλούς μαθητές να είναι πλέον σε θέση να περιγράψουν αυτήν τη λειτουργία για τα αξιώματα (πιν. 3). Αν και οι περισσότεροι εντοπίζουν και περιορίζουν αυτόν το ρόλο στις ασκήσεις. Ενώ, μερικοί αρχίζουν να τον προσεγγίζουν σε οποιεσδήποτε αποδεικτικές διαδικασίες. Επίσης, βελτιώνονται (πιν. 5 και πιν. 7) οι αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με το λειτουργικό ρόλο, τόσο των ορισμών όσο και των θεωρημάτων, αλλά όχι στον ίδιο βαθμό με το ρόλο των αξιωμάτων. Τέλος, για το ρόλο της απόδειξης (πιν. 9). δεν σημειώνονται αλλαγές. Βέβαια, παρατηρείται ότι μεγάλο ποσοστό των μαθητών (περίπου 67%) περιγράφει ικανοποιητικά κάποιο ρόλο. Σχεδόν όλοι αναφέρονται στους ρόλους της απόδειξης, ως μέσο επιβεβαίωσης και επεξήγησης, με αρκετούς να την θεωρούν μέσο επαλήθευσης των θεωρημάτων ή μέσο εξήγησης αυτών. Παρόμοια ευρήματα, όπως αναφέρει η Ιγγλέζου (2014), εμφανίστηκαν και στην έρευνα των Harel και Sowder (1998).

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η δημιουργία και η παρουσίαση των αποδείξεων, ως συνθέσεις-κολάζ από καρτέλες τεσσάρων χρωμάτων (παρ. 3.3), ανέδειξε τη λειτουργία των παραπάνω στοιχείων, με συνέπεια πολλοί μαθητές να αναγνωρίζουν το ρόλο τους ως εργαλεία. Επίσης, θετική καταγραφή αποτελεί το γεγονός ότι αρκετοί μαθητές αρχίζουν να διαβλέπουν την ευρύτερη λειτουργία των θεωρημάτων σε διάφορες διαδικασίες, όπως στις αποδείξεις άλλων θεωρημάτων και όχι μόνο στο πλαίσιο της επίλυσης κάποιας άσκησης. Θεωρείται ότι η επιλογή των δραστηριοτήτων βοήθησε προς αυτήν την κατεύθυνση. Γιατί στις δραστηριότητες, εκτός από τη λύση κάποιων ασκήσεων-προβλημάτων, δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές να ασχοληθούν και να χειριστούν οι ίδιοι τις αποδείξεις αρκετών θεωρημάτων. Ευχάριστη έκπληξη ήταν η αναφορά κάποιων μαθητών στη λειτουργία της απόδειξης ως μέσο ανακάλυψης και δημιουργίας νέων θεωρημάτων. Επιπρόσθετο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των εσφαλμένων αντιλήψεων των μαθητών για το ρόλο των ορισμών και θεωρημάτων. Αρκετοί αποδίδουν ως λειτουργία αυτών την «εμβάθυνση-βόλταση της κατανόησης», ενώ κάποιοι εμπλέκουν αυτούς τους ρόλους. Τέλος, κάποιοι μαθητές αποδίδουν παραδειγματικό ή βοηθητικό ρόλο στην απόδειξη, με στόχο τη λύση ασκήσεων-προβλημάτων (κατηγορία «μη κατανόηση του ρόλου»).

Όμως, με τη διάσταση της ερμηνείας συνδέεται και η ικανότητα διάκρισης ενός αξιώματος, θεωρήματος ή ορισμού μέσα σε μία πρόταση. Από τα ευρήματα της έρευνας διαφαίνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να διακρίνουν τα παραπάνω δομικά στοιχεία του συστήματος. Παρόμοιες δυσκολίες, ειδικότερα για τη διάκριση των αξιωμάτων και των θεωρημάτων, αναδεικνύουν και τα ευρήματα της έρευνας των Human και συν. (1984, όπως αναφ. στο DeVilliers,1986). Στην παρούσα έρευνα σημειώθηκαν σχετικά μικρές μεταβολές, με τα θεωρήματα και τις «τρίτες προτάσεις» να είναι πιο ευδιάκριτα από τους ορισμούς και τα αξιώματα (πιν. 10 και πιν.11).

Είναι αξιοσημείωτο ότι οι ορισμοί που αφορούν έννοιες πολύ οικείες στους μαθητές, όπως του ισοσκελούς τριγώνου, δεν χαρακτηρίζονται σωστά. Βέβαια, για το συγκεκριμένο ορισμό, μετά την παρέμβαση, αυξήθηκε κατά 10 ο αριθμός των σωστών απαντήσεων, αλλά και πάλι, τα 2/3 των μαθητών, τον χαρακτήρισαν λάθος. Γενικά, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές διέκριναν τις προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν αρκετές φορές στις δραστηριότητες της παρέμβασης, όπως η προηγούμενη. Αντίθετα, κάποιες προτάσεις που αρχικά χαρακτηρίστηκαν σωστά και κατά τη διάρκεια της παρέμβασης χρησιμοποιήθηκαν ελάχιστα ή καθόλου, μετά την παρέμβαση δεν αναγνωρίστηκαν σωστά.

Επισημαίνεται ότι η δυσκολία διάκρισης των προτάσεων εκμαιεύεται όχι μόνο από τα δοκίμια της έρευνας, αλλά εμφανίζεται και κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Ήταν έντονες οι διαφωνίες ανάμεσα στα μέλη των ομάδων για πολύ γνωστές προτάσεις όπως: «το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι μοναδικό», «αν Θ, Ι είναι δύο σημεία του επιπέδου τότε η ευθεία ΘΙ είναι μοναδική» «η διχοτόμος Βδ της γωνίας$A\widehat{B}\Gamma$είναι μοναδική» και «αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ τότε ΑΒ=ΑΓ». Τέλος, η έκφραση «αν… τότε» φάνηκε να παραπέμπει αρκετούς μαθητές λανθασμένα στο να χαρακτηρίζουν τις προτάσεις ως θεωρήματα και ήταν ένα σημείο αντιπαράθεσης σε αρκετές ομάδες εργασίας.

Ελάχιστες ήταν οι βελτιώσεις που παρατηρήθηκαν σχετικά με το θεωρητικό ρόλο των αξιωμάτων και των ορισμών. Στην παρούσα έρευνα φάνηκε ότι οι μαθητές προσέγγισαν πιο εύκολα τη θεωρητική διάσταση της λειτουργίας των ορισμών, από αυτήν των αξιωμάτων. (πιν. 3 και πιν. 5). Τέλος, η θεωρητική διάσταση των θεωρημάτων και της απόδειξης δεν προσεγγίζεται από κανένα μαθητή. Ειδικότερα, σε σχέση με το ρόλο των αξιωμάτων ως σημεία εκκίνησης, τα ευρήματα που παρουσιάστηκαν από το πείραμα USEME (DeVilliers, 1996) και την έρευνα της Grigoriadou (2012) είναι καλύτερα. Ωστόσο στο πείραμα USEME, η διδακτική παρέμβαση ήταν πολύ μεγαλύτερης διάρκειας, με μεγάλο αριθμό δραστηριοτήτων προσανατολισμένες στο ρόλο των αξιωμάτων, όπως και το τρίτο στάδιο της παρέμβασης της Grigoriadou (2012) Αυτό πραγματοποιήθηκε σε μαθητές με αυξημένο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά και εκτός σχολικού ωραρίου.

Συζήτηση για την αξιοποίηση των δομικών στοιχείων του συστήματος στην απόδειξη

Ως προς τη διάσταση της εξήγησης, τη δεύτερη διάσταση της κατανόησης, παρατηρήθηκαν μικρές αλλαγές. Πολλοί μαθητές φαίνεται, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, να αναγνωρίζουν ότι τα αξιώματα, τα θεωρήματα και οι ορισμοί αποτελούν εργαλεία ανάπτυξης σε ένα συλλογισμό. Εντούτοις, αδυνατούν να δουν πώς ακριβώς λειτουργούν αυτά τα εργαλεία μέσα στο συλλογισμό. Οι μισοί σχεδόν δεν μπορούν να αντιληφθούν το κενό σε ένα συλλογισμό και χαρακτηρίζουν ως πλήρη, τόσο τις πλήρεις όσο τις ελλιπείς αποδείξεις (πιν. 12 και πιν. 13). Μπορεί οι βελτιώσεις να αφορούν μικρό αριθμό μαθητών(1/3 περίπου), ωστόσο αυτές είναι ποιοτικές. Οι μαθητές αυτοί μπορούν και δίνουν ως ένα βαθμό αιτιολογημένες εξηγήσεις, συνεπώς αρχίζουν να αποκτούν βαθύτερη κατανόηση. Πράγματι, αρκετοί από αυτούς μπορούν να εντοπίζουν την ακριβή θέση της πρότασης που λείπει, μερικοί την διατυπώνουν, ελάχιστοι όμως την χαρακτηρίζουν σωστά (πιν 13). Εξάλλου, όπως υποστηρίζει ο Duval (όπως αναφ. στο Boero, 2007), η κατανόηση της ύπαρξης κενών(“*gap*”) σε ένα συλλογισμό, προϋποθέτει βαθιά κατανόηση του ρόλου των προτάσεων σε κάθε βήμα ενός συλλογισμού, όπως και την αλλαγή αυτού του ρόλου από ένα επίπεδο στο άλλο (παρ. 1.2.2, διάγ. 1 και διαγ. 4).

Ως προς τη διάσταση της εφαρμογής, την τρίτη διάσταση της κατανόησης που διερευνήθηκε, δεν παρουσιάστηκαν βελτιώσεις. Διαπιστώθηκε δυσκολία των μαθητών να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους για να τοποθετήσουν στη σωστή σειρά τις προτάσεις, ώστε να συντάξουν την ζητούμενη απόδειξη. Όμως, όπως η εύρεση και η εξήγηση των κενών σε ένα συλλογισμό, έτσι και η σωστή χρήση των αξιωμάτων, των ορισμών και των θεωρημάτων μέσα σε μια απόδειξη και τελικά η οργάνωσή της, προϋποθέτουν βαθιά κατανόηση του τρόπου λειτουργίας των προτάσεων μέσα σε ένα συλλογισμό.

Συζήτηση για τις δυσκολίες στη συμπλήρωση της απόδειξης

Στη τρίτη αυτή ενότητα, οι παρατηρήσεις οργανώνονται με βάση τις δυσκολίες που συνάντησαν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να συμπληρώσουν τις αποδείξεις τεσσάρων προτάσεων-θεωρημάτων που αφορούν στις ιδιότητες των παραλλήλων ευθειών. Είναι σημαντικό ότι πάντα υπήρχαν ομάδες που ολοκλήρωναν τις αποδείξεις, με τα ποσοστά επιτυχίας να κυμαίνονται περίπου από 25% έως 33% για τις τρεις προτάσεις. Με εξαίρεση την απόδειξη της πρότασης «αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες», που συγκέντρωσε ποσοστό επιτυχίας 50% (πιν. 14). Η έρευνα εστιάζει, όπως αναλυτικά περιγράφεται στο δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, στις δυσκολίες που σχετίζονται, κυρίως, με τη δομή του αξιωματικού συστήματος, με την μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής» και με το χειρισμό του σχήματος. Βέβαια, οι τρεις αυτές «κατηγορίες» δυσκολιών πολλές φορές αλληλεπιδρούν και για κάποιους μαθητές, όπως προέκυψε, δημιούργησαν εμπόδια ανυπέρβλητα.

Ως προς τις δυσκολίες που σχετίζονται με τη δομή του Αξιωματικού Συστήματος και του ρόλου των αξιωμάτων, των ορισμών, των θεωρημάτων και της απόδειξης από τα ευρήματα, είναι εμφανές ότι οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν κυκλικούς συλλογισμούς. Δηλαδή, στην προσπάθειά τους να αποδείξουν μία πρόταση (ένα θεώρημα) κάνουν χρήση μίας πρότασης (ενός θεωρήματος) που αποδεικνύεται στη συνέχεια με τη βοήθεια της προηγούμενης πρότασης (θεωρήματος)· φαινόμενο που παρουσιάστηκε στις προσπάθειες πολλών ομάδων (περιγραφές σελ.92-93 και φωτ. 2, φωτ. 3, παρ.4.2). Προφανώς, σχετίζεται με την κατανόηση του θεωρητικού ρόλου της απόδειξης, αλλά άπτεται και του θεωρητικού ρόλου των δομικών στοιχείων του Αξιωματικού Συστήματος, και γενικότερα της λειτουργίας της συστηματοποίησης. Είναι ένα φαινόμενο, που καταγράφει σε έρευνά του και ο Θωμαΐδης το 2000, ενώ στο πείραμα του USEME το αντιμετώπισαν με επιτυχία, μέσω μιας σειράς κατάλληλων διαμορφωμένων δραστηριοτήτων (DeVilliers, 1996).

Το φαινόμενο του κυκλικού συλλογισμού ή φαύλου κύκλου δεν εμφανίζεται μόνο μεταξύ θεωρημάτων, αλλά και εντός της απόδειξης μιας πρότασης-θεωρήματος. Συχνά, κατά την αποδεικτική διαδικασία, οι μαθητές χρησιμοποιούν το ζητούμενο ως δεδομένο και έτσι «αποδεικνύουν» (κατά τη γνώμη τους) τον ζητούμενο ισχυρισμό. Η ανάμιξη της υπόθεσης με το συμπέρασμα ή η σύγχυση μιας πρότασης με την αντίστροφή της είναι συχνές παρανοήσεις των μαθητών. Σύμφωνα με τον Duval στο Boero (2007), οφείλονται στη μη κατανόηση του ρόλου των προτάσεων (αξιωμάτων-ορισμών-θεωρημάτων) σε ένα συλλογισμό (παρ. 1.2.2.).

Παρόμοια παρανόηση παρουσιάστηκε σχεδόν σε όλες τις ομάδες στην προσπάθειά τους να αποδείξουν την πρόταση: «αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες». Οι περισσότερες ομάδες χρησιμοποίησαν το ζητούμενο ως δεδομένο (το συμπέρασμα ως υπόθεση) και νόμιζαν ότι ολοκλήρωσαν με επιτυχία την απόδειξη της πρότασης. Η συζήτηση σε κάθε ομάδα για την υπόθεση και το συμπέρασμα και το φαινόμενο των κυκλικών συλλογισμών εντός μιας απόδειξης, οδήγησε κάποιους μαθητές να ξεπεράσουν προσωρινά το εμπόδιο και να προχωρήσουν στην αποδεικτική διαδικασία. Παρ'όλο που, όπως σημειώνουν στην έρευνά τους οι Miyazaki και συν. (2016), ο εκπαιδευτικός παρέχει διευκρινίσεις στους μαθητές για το τι είναι υπόθεση και τι συμπέρασμα σε μία απόδειξη, εντούτοις, παραμένει αβέβαιο τι θεωρούν οι μαθητές ότι είναι κυκλικός συλλογισμός και μπορεί να συνεχίσουν να αποδέχονται αποδείξεις με κυκλικό συλλογισμό. Πράγματι, υπήρχαν ομάδες, που μετά την πρώτη απόπειρα απόδειξης και τη σχετική συζήτηση, δεν απέφυγαν στη δεύτερη προσπάθειά τους τον κυκλικό συλλογισμό.

Παρ'όλα αυτά, οι Miyazaki και συν. (2016) θεωρούν ότι μια απόδειξη που περιέχει κυκλικούς συλλογισμούς παρέχει μια καλή ευκαιρία στους μαθητές για να κατανοήσουν, τελικά, τι είναι απόδειξη και το ρόλο των υποθέσεων σε αυτή. Επιπλέον, υπογραμμίζουν την αναγκαιότητα, οι καθηγητές να ενθαρρύνουν τους μαθητές να εστιάζουν στην λειτουργία της υπόθεσης και του συμπεράσματος, καθώς και στις δομικές σχέσεις αυτών, σε έναν «υποθετικό συλλογισμό» ("*hypothetical syllogism"*). Συνοψίζοντας τα παραπάνω, τόσο ο Duval (όπως αναφ. στο Boero, 2007) όσο και οι Miyazaki και συν. (2016) φαίνεται να αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα εστίασης της προσοχής, στις ειδικές λειτουργίες των προτάσεων ως υπόθεση ή συμπέρασμα μέσα σε ένα συλλογισμό· αναγκαιότητα που προκύπτει και από την παρούσα έρευνα.

Επιπλέον, διακρίνονται αρκετές δυσκολίες των οποίων οι αιτίες σχετίζονται με την ιδιαίτερη μορφή-δομή, που παρουσιάζει συγκεκριμένα η μέθοδος της «εις άτοπον απαγωγής». Αρχικά, οι εκφράσεις, *«αυτό δε γίνεται, δεν μπορεί να είναι Αχ// ε_2».* ή *«οι ευθείες ε_1 και ε_2 δεν μπορεί να τέμνονται, φαίνεται ότι είναι παράλληλες», «δεν μπορεί να μη τέμνει την άλλη αν προεκταθεί»*, που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να αποδείξουν τις ιδιότητες των παραλλήλων ευθειών, (παρ. 4.2), δείχνουν ότι οι μαθητές δεν μπορούν να δεχτούν την άρνηση της δήλωσης, που θέλουν να αποδείξουν. Τη συγκεκριμένη δυσκολία επισημαίνουν πολλοί ερευνητές (Antonini, 2001; Epp, 1998; Leron, 1985; Reid and Dobbin, 1998; Tall, 1979; Tall et al, 2011).

Παράλληλα, κάποιες εκφράσεις και σύμβολα των μαθητών που σημειώνονται στα φύλλα εργασίας είναι ενδείξεις για τη σύγχυση και τα παράξενα συναισθήματα εξαπάτησης ή δυσαρέσκειας που μπορεί να νιώθουν οι μαθητές, όταν εργάζονται με τη μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής»· συναισθήματα που εμφανίζονται στους μαθητές και δικαιολογούνται αφού, κατά τους Leron, Antonini και Mariotti, (Antonini, &Mariotti,2016), εργάζονται σε έναν «κόσμο αδύνατο», ("*false, impossible world"*). Ενδεικτικά, η έκφραση *«τότε οι ευθείες Αχ και ε_2 θα είναι και καλά παράλληλες»* που χρησιμοποιούν τα μέλη μιας ομάδας αναδεικνύει αισθήματα δυσπιστίας και εξαπάτησης, παρ'όλο που κατάφεραν να ολοκληρώσουν με επιτυχία την απόδειξη (περιγραφή σελ 90). Επίσης, το σύμβολο του ερωτηματικού που χρησιμοποιείται από τα μέλη της ίδιας ομάδας, (φωτ. 1, παρ. 4.2. σελ 91.), εκφράζει την σύγχυση που νιώθουν οι μαθητές της ομάδας, οι οποίοι πλέον δυσκολεύονται να αναπτύσσουν συλλογισμούς σε αυτόν «τον αδύνατο κόσμο»· εν τέλει, δεν καταφέρνουν να ολοκληρώσουν την απόδειξη της αντίστοιχης πρότασης.

Όμως, οι ίδιες εκφράσεις των μαθητών *«αυτό δε γίνεται, δεν μπορεί να είναι Αχ// ε*$_2$*».*ή *«οι ευθείες* ε_1 *και* ε_2 *δεν μπορεί να τέμνονται, φαίνεται ότι είναι παράλληλες», «δεν μπορεί να μη τέμνει την άλλη αν προεκταθεί*», επιδέχονται και άλλη ερμηνεία. Μπορεί να μην είναι απόρροια μόνο της άρνησης της δήλωσης που απαιτείται στο πρώτο βήμα της μεθόδου της ««εις άτοπον απαγωγής», αλλά μπορεί, όχι μόνο να πηγάζουν από το σχήμα, αλλά να ενισχύονται και από αυτό. Παρόμοια διαπίστωση έγινε από τον Schoenfeld, ο οποίος με την έκφραση*"seeing is believing"*, επισημαίνει ότι οι μαθητές πολλές φορές εστιάζουν στην οπτικοποίηση(Yang και Lin, 2008)· κάτι που επισημαίνουν και άλλοι ερευνητές (Mesquita, 1998; Yang και Lin, 2008;Gal & Linchevski, 2010;Sinclair et al, 2016), (παρ. 1.2.2.).

Υπήρχαν ομάδες που κατάφεραν να ξεπεράσουν τα εμπόδια που δημιουργούνται από τα σχήματα, με χρήση διακεκομμένων γραμμών ή στρέβλωση των ευθειών. (φωτ. 2, φωτ. 9, παρ. 4.2). Από αυτές τις φωτογραφίες διαφαίνεται ότι, παρά τις δυσκολίες, η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι το κατάλληλο πλαίσιο, για να κατανοήσει κάποιος ότι τα σχήματα είναι αναπαραστάσεις της πραγματικότητας, όχι η ίδια η πραγματικότητα, όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Harel (1999). Αυτή η κατανόηση φαίνεται να επιτεύχθηκε, ως ένα βαθμό, από τους μαθητές των προηγούμενων ομάδων. Αξιοσημείωτη είναι η παρουσίαση μιας ομάδας (φωτ. 4, παρ. 4.2) που χρησιμοποιεί δύο σχήματα σε παράθεση. Ένα για την υπόθεση της αρχικής δήλωσης και ένα για την υπόθεση της άρνησης της δήλωσης. Φαίνεται ότι τα μέλη της ομάδας δεν εμμένουν στην εικόνα των παραλλήλων ευθειών, δεν χρειάζεται να την τροποποιήσουν, όπως οι προηγούμενες ομάδες. Περνούν σε ένα επίπεδο ακόμα πιο αφηρημένης σκέψης. Πιθανώς, αρχίζουν να συνειδητοποιούν ότι το σχήμα δεν είναι αναπαράσταση της πραγματικότητας, αλλά μια υποθετική χωρική κατάσταση, όπως διατυπώνει και ο Harel (1999), την οποία επεξεργάζονται σε ένα δεύτερο σχήμα.

Οι παραπάνω ερμηνείες προέκυψαν από τη μελέτη των φύλλων εργασίας της κάθε ομάδας και σχετικής βιβλιογραφίας με τα υπό διαπραγμάτευση θέματα. Ίσως θα μπορούσαν να υποστηριχτούν καλύτερα, αν συνοδευόταν από συνεντεύξεις των μαθητών. Όμως τότε, η εργασία θα ξεπερνούσε σε έκταση τις προδιαγραφές μιας διπλωματικής εργασίας για την απονομή μεταπτυχιακού διπλώματος. Στην παράγραφο που ακολουθεί, παρουσιάζονται τα εμπόδια που προέκυψαν κατά την διεξαγωγή της έρευνας.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η παρούσα μελέτη επιχείρησε προσέγγιση της δομής του Αξιωματικού Συστήματος από μαθητές της Α΄ Λυκείου, σε διάστημα 8-9 διδακτικών ωρών και εντός του σχολικού ωραρίου. Στην ενότητα αυτή εκτίθενται οι αδυναμίες της έρευνας που έγιναν αντιληπτές.

Μικρό μέρος διδασκαλίας

Η προσέγγιση της δομής του Αξιωματικού Συστήματος είναι ένα θέμα με εγγενείς δυσκολίες. Η έκταση του υπό διαπραγμάτευσης θέματος, είναι μεγάλη και οι παράγοντες που υπεισέρχονται πολλοί. Σαφώς δεν μπορεί ένα θέμα τέτοιας φύσης, έκτασης και πολυπλοκότητας, να καλυφθεί σε τόσο μικρό μέρος διδασκαλίας, σε διάστημα 8-9 ωρών.

Περιορισμός των φάσεων της συζήτησης

Η εφαρμογή όλων των δραστηριοτήτων είναι καλύτερα να γίνεται σε δίωρα. Η μετατροπή του μαθήματος από μονόωρο σε δίωρο για τις μέρες διεξαγωγής της παρέμβασης δεν ήταν εφικτή. Εμπόδια στην αλλαγή του σχολικό προγράμματος ήταν η δομή του Λυκείου με τα τμήματα κατευθύνσεων και επιλογής αλλά και οι μετακινήσεις πολλών εκπαιδευτικών ειδικοτήτων και παράλληλης στήριξης σε δύο σχολεία την ίδια μέρα. Ως αποτέλεσμα, οι φάσεις της συζήτησης, η ανάδειξη των συγκρούσεων, η έκφραση των διαφωνιών περιοριζόταν αρκετά. Ενώ η εξαγωγή συμπερασμάτων και επικύρωση τους από όλη την τάξη, για κάποιες δραστηριότητες μεταφερόταν στο επόμενο μάθημα αποδυναμώνοντας την.

Έλλειψη χρόνου που αφορά στην διαπραγμάτευση των δραστηριοτήτων

Στις δραστηριότητες των δύο πρώτων ενοτήτων της παρέμβασης διατέθηκε περισσότερος χρόνος από τον προβλεπόμενο. Όμως η πίεση ολοκλήρωσης της ύλης δεν επέτρεπε τη διάθεση πάνω από 9 ωρών στην ενότητα των παραλλήλων. Αποτέλεσμα, στις τελευταίες δύο ενότητες δραστηριοτήτων να διατεθεί λιγότερος χρόνος. Έτσι, για παράδειγμα, στην ενότητα με τίτλο, *«χαρτογραφώντας τις συνδέσεις* *των προτάσεων»*,(παρ. 3.3. και 4.1.), που στόχευε στην ανίχνευση του θεωρητικού ρόλου των αξιωμάτων-ορισμών-θεωρημάτων και της απόδειξης τελικά, σε αντίθεση με τον αρχικό προγραμματισμό, αφιερώθηκε μόνο μία ώρα. Προτείνεται, σε πιθανή μελλοντική εφαρμογή, η μείωση των καρτών που χρησιμοποιήθηκαν και η αλλαγή του σχολικού προγράμματος, ώστε η δραστηριότητα να διεξαχθεί, αν είναι εφικτό, σε συνεχές δίωρο.

Περιορισμοί που σχετίζονται με το δείγμα και τα χαρακτηριστικά του

Στην έρευνα συμμετείχαν 43 μαθητές δύο τμημάτων, στα οποία υπεύθυνη για την διδασκαλία των μαθηματικών ήταν η ερευνήτρια- καθηγήτρια. Οπότε, το δείγμα της έρευνας ήταν όχι μόνο μικρό αλλά και βολικό.

Στο δείγμα ξεχώρισαν κυρίως τρεις κατηγορίες μαθητών. Στην πρώτη κατηγορία, «οι ένθερμοι υποστηρικτές της παρέμβασης» συγκαταλέγονται πολλοί μαθητές, που αγκάλιασαν και στήριξαν θερμά αυτήν την προσπάθεια. Πήγαιναν στο σπίτι χρησιμοποιούσαν το διαδίκτυο και την e-class, μελετούσαν τις φωτογραφίες των έργων τους και συνέκριναν τις απαντήσεις με τις σωστές, που ήταν επίσης αναρτημένες στην e-class. Στην δεύτερη κατηγορία, «οι χαλαροί υποστηρικτές» περιλαμβάνονται αρκετοί μαθητές που μελέτησαν ελάχιστα ή καθόλου. Τέλος στην τρίτη κατηγορία, «οι αδιάφοροι προς την παρέμβαση», τέσσερις μαθητές που δεν ασχολήθηκαν καθόλου, δεν μπήκαν καν στη διαδικασία να εγγραφούν στην e-class (σημειώνεται πως όλοι οι μαθητές είχαν υπολογιστή και πρόσβαση στο διαδίκτυο). Οι μαθητές της δεύτερης και τρίτης κατηγορίας, αποδυνάμωναν και δυσχέραιναν το έργο όλης της ομάδας στην οποία εργάζονταν. Ιδιαίτερη ήταν η περίπτωση ενός μαθητή, «αντίθετος προς την παρέμβαση», που, ενώ συμπλήρωσε το πρώτο δοκίμιο, κατά τη διάρκεια της παρέμβασης εξέφραζε τη δυσαρέσκειά του για το όλο εγχείρημα, και όσον αφορά στη συμπλήρωση του δεύτερου δοκιμίου άφησε αναπάντητες όλες τις ερωτήσεις. Θεωρήθηκε ότι οι απαντήσεις του στα δοκίμια δεν έπρεπε να συμπεριληφθούν στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Έτσι το δείγμα της έρευνας, που ολοκληρώνεται με την παρουσίαση των συμπερασμάτων στο επόμενο κεφάλαιο, από 44 μαθητές μειώθηκε σε 43.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{Ο}

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε η προσέγγιση της Αξιωματικής Θεμελίωσης από Μαθητές Α΄ Λυκείου. Η ανίχνευση του ρόλου των αξιωμάτων, ορισμών, θεωρημάτων και απόδειξης από τους μαθητές ήταν στο επίκεντρο της έρευνας. Διερευνήθηκαν οι μεταβολές που μπορεί να προκύψουν στην κατανόηση των μαθητών σχετικά με τη λειτουργία των παραπάνω στοιχείων. Η διερεύνηση αυτή έγινε υπό το πρίσμα δύο θεωριών: της ανάλυσης της γνωστικής πολυπλοκότητας της λειτουργίας ενός συλλογισμού του Duval (όπως αναφ. στο Boero, 2007) και της θεωρίας για την κατανόηση των Wiggins και Tighe (2005, όπως αναφ. στο Κολέζα, 2013). Η σύνθεση των δύο θεωριών, καινοτομία ίσως της έρευνας, οδήγησε στην εξέταση της κατανόησης που παρουσιάζουν οι μαθητές, τόσο για το λειτουργικό ρόλο, όσο και για το θεωρητικό ρόλο αυτών των στοιχείων, στο πλαίσιο του Αξιωματικού Συστήματος. Παράλληλα, έγινε καταγραφή των δυσκολιών που παρουσιάζονται στους μαθητές, όταν αποδεικνύουν προτάσεις σε αυτό το σύστημα.

Από τα αποτελέσματα και την αντίστοιχη συζήτηση διαπιστώθηκαν αρκετές βελτιώσεις μετά την παρέμβαση, κυρίως, ως προς την κατανόηση του λειτουργικού ρόλου των παραπάνω στοιχείων. Λιγότερες ήταν οι βελτιώσεις σε σχέση με το θεωρητικό τους ρόλο. Οι παραπάνω μεταβολές αφορούν τη διάσταση της περιγραφής και λιγότερο τις άλλες διαστάσεις της κατανόησης. Φαίνεται ότι η δομή, αλλά και η παιγνιώδης μορφή των δραστηριοτήτων της διδακτικής παρέμβασης, ενίσχυσαν και ανέδειξαν ιδιαίτερα τον λειτουργικό ρόλο. Οι δραστηριότητες, το πλαίσιο εργασίας των μαθητών σε ομάδες, η συζήτηση, οι διαφωνίες και οι συγκρούσεις που αναπτύχθηκαν, θεωρούνται παράγοντες που συνετέλεσαν στις παραπάνω βελτιώσεις. Επιπλέον, έγινε φανερό ότι κάποιοι μαθητές, δουλεύοντας ομαδικά, και συμμετέχοντας ενεργά, οδηγούνται στην κατασκευή των αποδείξεων προτάσεων, παρ'όλο που αυτές απαιτούν εφαρμογή της «εις άτοπον απαγωγής»· μέθοδος, αρκετά δύσκολη, όπως προκύπτει από τα ερευνητικά δεδομένα (παρ. 1.2.2).

Οι παραπάνω δραστηριότητες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν από εκπαιδευτικούς, να τροποποιηθούν, να εμπλουτιστούν και να επεκταθούν, ώστε να δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές να προσεγγίσουν τις παραπάνω λειτουργίες και να βελτιώσουν την κατανόηση που έχουν σχετικά με αυτές. Επιπλέον, η έρευνα φέρνει στο φως τις εσφαλμένες αντιλήψεις και παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με το ρόλο και τη φύση των παραπάνω στοιχείων, όπως για παράδειγμα «ο ορισμός είναι κάτι που ισχύει πάντα», «τα θεωρήματα και οι ορισμοί είναι θεωρίες-κανόνες για εκμάθηση», και «η απόδειξη είναι ένα παράδειγμα για τη λύση των ασκήσεων». Η γνωστοποίηση αυτών των αντιλήψεων και των παρανοήσεων που έχουν οι μαθητές είναι δυνατό να συνεισφέρει στο έργο του εκπαιδευτικού ο οποίος μπορεί να διερευνήσει, αν οι μαθητές στην τάξη του παρουσιάζουν παρόμοιες αντιλήψεις ή παρανοήσεις, ώστε να εστιάσει τη διδασκαλία του στα αντίστοιχα θέματα.

Παράλληλα, τα αποτελέσματα της έρευνας συνηγορούν και αναδεικνύουν στοιχεία που θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε περαιτέρω επέκτασή της, αλλά και στην διεξαγωγή άλλων ερευνών, όπως είναι ο σχεδιασμός κατάλληλων παρεμβάσεων, οι οποίες θα εστιάζουν στη βελτίωση περισσότερων πτυχών της κατανόησης, που έχουν οι μαθητές για το ρόλο των αξιωμάτων, ορισμών, των θεωρημάτων και απόδειξης ιδιαίτερα στις πτυχές της εξήγησης και της εφαρμογής. Αυτές οι παρεμβάσεις θα εστιάζουν στον τρόπο που λειτουργούν αυτά τα στοιχεία μέσα σε ένα συλλογισμό ή στο φαινόμενο του κυκλικού συλλογισμού.

Από την παρούσα έρευνα, ελπιδοφόρο και σημαντικότερο ίσως συμπέρασμα, όπως προκύπτει από τα παραπάνω, είναι ότι οι μαθητές μέσα από κατάλληλες διαμορφωμένες δραστηριότητες μπορούν να προσεγγίσουν, ως ένα βαθμό, θέματα που εμπεριέχουν εγγενείς δυσκολίες, όπως η δομή του Αξιωματικού Συστήματος, η λειτουργία των προτάσεων σε ένα συλλογισμό, αλλά και στο ευρύτερο σύστημα. Επομένως, αποτελεί πρόκληση για τους ερευνητές, ο σχεδιασμός κατάλληλων δραστηριοτήτων, μαθηματικών έργων για την τάξη που θα επιτρέπουν στους μαθητές, όπως αναφέρει η Τζεκάκη (2011), να προσεγγίζουν το μαθηματικό νόημα, να ασκούνται στις μαθηματικές λειτουργίες, αλλά και θα ενθαρρύνουν την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Βιβλιογραφία

Antonini, S., &Mariotti, M. A. (2006, July). Reasoning in an absurd world: difficulties with proof by contradiction. In *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 65-72).

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., &Σίδερης, Π. (2016). *Ευκλείδεια Γεωμετρία Τεύχος Α΄*.Αθήνα. Διόφαντος

Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 115-135). Springer.

Boero, P. (2007). *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. SensePublishers

Βοσνιάδου, Σ. (2001). *Πώς μαθαίνουν οι μαθητές*.Προσπελάστηκε 24 Νοεμβρίου 2016http://users.uoa.gr/~nektar/science/cognitive/stella_vosniadou_how_children_learn_greek.htm προσπελαστηκε 24/11/2016

Clark, D. M. (2016). *The Teaching of Geometry*. Προσπελάστηκε 29 Σεπτεμβρίου 2016https://www.researchgate.net/profile/David_Clark

Clements, D. H. (1998). *Geometric and Spatial Thinking in Young Children*. Προσπελάστηκε 28 Σεπτεμβρίου 2016https://eric.ed.gov/?id=ED436232

Dawkins, P. C. (2014). When proofs reflect more on assumptions than conclusions. *For the Learning of Mathematics*, *34*(2), 17-23.

De Villiers, M. D. (1986). *The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching*. Stellenbosch: University of Stellenbosch.

De Villiers, M. (1996, October). The future of secondary school geometry. In Slightly adapted version of Plenary presented at the *SOSI Geometry Imperfect Conference* (pp. 2-4).

De Villiers, M.D. (1998). To teach definitions or teach to define? In Olivier, A. &Newstead, K. (Eds),*Proceedings of PME 22* (Vol 2, 248-255). (Available from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/define.htm)

Grigoriadou, O. (2012). *Reasoning in geometry. How first learning to appreciate the generality of arguments helps students come to grips with the notion of proof*. (Doctoral dissertation, University of Amsterdam).

Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of mathematical knowledge. In *Explanation and proof in mathematics* (pp. 85-100). Springer US.

Harel, G. (1999). Students' understanding of proofs: a historical analysis and implications for the teaching of geometry and linear algebra. *Linear Algebra and its applications*, *302*, 601-613.

Herbst, P., González, G., Hsu, H. Y., Chen, C., Weiss, M., & Hamlin, M. (2010).*Instructional situations and students' opportunities to reason in the high school geometry class. Manuscript*.Deep Blue at the University of Michigan, http://hdl.handle.net/2027.42/78372.

Θωμαΐδης,Γ.(2000).ΗκατανόησητηςαξιωματικήςθεμελίωσηςκαιηαποδεικτικήικανότητατωνμαθητώνστομάθηματηςΕυκλείδειαςΓεωμετρίας. Στο Μ. Κούρκουλος κ.ά. (Επιμ.), *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών, (σ.σ.127-136)*. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης (Ρέθυμνο).

Ιγγλέζου, Α. (2014). *Επιστημολογική και Διδακτική Ανάλυση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα*. (Διπλωματική Εργασία, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών)

Izard, V., Pica, P., Spelke, E. S., &Dehaene, S. Izard, (2011). Flexible intuitions of Euclidean geometry in an Amazonian indigene group. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *108*(24), 9782-9787.

Jahnke, H. N., &Wambach, R. (2013). Understanding what a proof is: a classroom-based approach. *ZDM, 45(3),* 469-482.

Κολέζα, Ε. (2013).*Φιλοσοφία ενός Π. Σ. για τα Μαθηματικά. Εργαστήριο Έρευνας στη Διδασκαλία των Μαθηματικών Παιδαγωγικό τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστήμιο Πάτρας*. Προσπελάστηκε 27 Νοεμβρίου 2016,http://www.mathlab.upatras.gr/

Mariotti, M. A., &Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34(3),* 219-248.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational studies in mathematics, 44*(1), 25-53.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 183-195.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2016). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, 1-17.

Nikoloudakis, E. (2010).A proposed model to teach Geometry to first-year senior High School students. *International J. Mathematics Education, 2, 17-45.* Athens.

Raman, M. (2003). Key ideas: what are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational studies in mathematics*, *52*(3), 319-325.

Sardar, Z., &Ravetz, J. (2015). *Introducing Mathematics: A Graphic Guide*. Icon Books Ltd.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, *48*(5), 691-719.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. (2011). Cognitive development of proof. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 13-49). Springer, Netherlands**.**

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα, κεντρική ομιλία στο 4^{0} Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, *Πρακτικά 4^{o} Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματική, (σ.σ. 51-66)* Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.(Ιωάννινα)

Yang, K. L., &Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 59-76.

Υπουργείο Παιδείας Δια Βίου Μάθησης & Θρησκευμάτων: *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ Τάξης Γενικού Λυκείου.* Φ.Ε.Κ. Β΄ 11688, σ.16674, 8 Ιουνίου 2011.

Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων: «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών» *ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ - Γ΄*

ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ. Προσπελάστηκε 13 Νοεμβρίου 2016 https://repository.edulll.gr/edulll/.../1935_Μαθηματικά_Γυμνάσιου

Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων: «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών» ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ». Προσπελάστηκε 13 Νοεμβρίου 2016, https://repository.edulll.gr/.../2/1798_ΠΣ_ΓΕΛ_ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ_ΕΞΩΦΥΛΛΟ.pdf

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Springer, Dordrecht.

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 317-346.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2011). The need for proof and proving: mathematical and pedagogical perspectives. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 215-229). Springer Nether

Παράρτημα

Ερωτηματολόγιο που εφαρμόστηκε πριν την παρέμβαση (pretest)

ΚΩΔΙΚΟΣΜΑΘΗΤΗ

Π			

Ερωτηματολόγιο

Οδηγίες

Το ερωτηματολόγιο αυτό αποτελείται από τέσσερα μέρη. Παρακαλούμε προσπαθήστε να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις κάθε μέρους. Οι απαντήσεις σας δεν θα επηρεάσουν τη βαθμολογία σας.

1) Συμπληρώστε τον κωδικό σας στον ειδικό χώρο πάνω δεξιά σε αυτή τη σελίδα.
2) Διαβάστε κάθε ερώτηση προσεκτικά πριν να απαντήσετε
3) Μπορείτε να χρησιμοποιείστε τα κενά φύλλα του ερωτηματολογίου ως πρόχειρο.
4) Μη σημειώσετε το όνομα σας πουθενά στο ερωτηματολόγιο.
5) Χρησιμοποιήστε στυλό για να γράψετε τις απαντήσεις σας.
6) Αν θελήσετε να αλλάξετε μια απάντηση σβήστε τελείως την προηγούμενη απάντηση.

Α΄ μέρος: Προσπαθήστε να περιγράψετε με δικά σας λόγια.

1) α) Τι νομίζετε ότι είναι το αξίωμα (παραδοχή)στην Γεωμετρία;

____

____

____

β) ποιος νομίζετε ότι είναι ο ρόλος του αξιώματος (πως λειτουργεί) στη Γεωμετρία

____

____

____

2) α) Τι νομίζετε ότι είναι το θεώρημα (πόρισμα)στην Γεωμετρία;

____

____

____

β) ποιος νομίζετε ότι είναι ο ρόλος του θεωρήματος (πως λειτουργεί) στη Γεωμετρία;

____

____

____

3) α) Τι νομίζετε είναι ότι είναι ο ορισμός στην Γεωμετρία;

____

____

____

β) ποιος νομίζετε ότι είναι ο ρόλος του ορισμού (πως λειτουργεί) στη Γεωμετρία

____

____

____

4) α) Τι νομίζετε ότι είναι η απόδειξη στην Γεωμετρία;

____

____

____

β)ποιος νομίζετε ότι είναι ο ρόλος της απόδειξης (πως λειτουργεί) στη Γεωμετρία;

____

____

____

Β΄ μέρος: Χαρακτηρίστε τις προτάσεις που δίνονται στον πίνακα τοποθετώντας στα κενά ορθογώνια κάθε γραμμής, **ένα μόνο από τα κεφαλαία γράμματα Α,Θ,Ο,Τ**. Συμπληρώνετε με:

Α: αν νομίζετε ότι η πρόταση που δίνεται είναι **αξίωμα**

Θ: αν νομίζετε ότι η πρόταση που δίνεται είναι **θεώρημα**

Ο: αν νομίζετε ότι η πρόταση που δίνεται είναι **ορισμός**

Τ: αν νομίζετε ότι η πρόταση που δίνεται δεν είναι **τίποτα από τα παραπάνω**

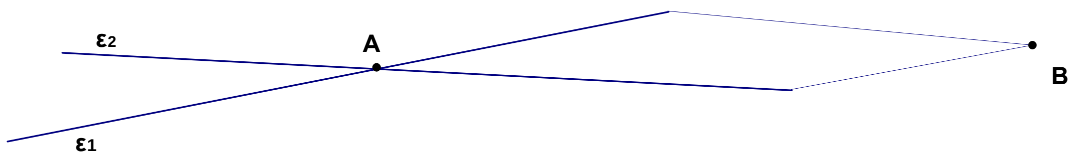
ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	
Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ τότε ΑΒ=ΑΓ	
Αν ε είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ και Α σημείο της ε τότε ΑΚ=ΑΛ	
Αν ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο με βάση την πλευρά ΒΓ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$	
Οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι κάθετες	
Αν τα σημεία Α,Β είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ε τότε η ευθεία ε είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ	
Αν η γωνία $\chi\hat{A}\chi'$ είναι ορθή τότε οι φορείς των πλευρών Αχ και Αχ΄ είναι ευθείες κάθετες	
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma}$=90^{O}	
Το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι μοναδικό.	
Αν τα σημεία Β,Γ του επιπέδου βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ε τότε η ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ	
Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Τότε για κάθε ημιευθεία Γχ υπάρχει μοναδικό σημείο της Δ, ώστε ΑΒ=ΓΔ	
Έστω ε ευθεία που τέμνει τον κύκλο (Κ, R) στα σημεία Α,Β.	
Αν η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο, ρ) στο σημείο Α, τότε η ακτίνα ΟΑ είναι κάθετος στην ευθεία ε στο σημείο Α.	
Αν Θ, Ι είναι δύο σημεία του επιπέδου τότε η ευθεία ΘΙ είναι μοναδική	
Η διχοτόμος Βδ της γωνίας$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$είναι μοναδική	
Έστω ε είναι μία ευθεία του επιπέδου και Ζ σημείο της ε. Αν η ευθεία ΑΖ είναι κάθετη στην ευθεία ε στη σημείο Ζ, τότε η ΑΖ είναι μοναδική.	
Η ευθεία ε διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ	

Γ΄ μέρος: Σε αυτό το μέρος παρουσιάζονται δύο Θέματα Γεωμετρίας που έθεσε ένας καθηγητής σε ένα επαναληπτικό διαγώνισμα τετράμηνου και οι απαντήσεις μιας μαθήτριας σε αυτό. Διαβάστε προσεκτικά κάθε θέμα και τις απαντήσεις που προτείνει η μαθήτρια. Εξετάστε αν η απάντηση σε κάθε θέμα είναι πλήρης **Αν νομίζετε ότι είναι πλήρης γράφετε ότι η απάντηση είναι πλήρης. Αν νομίζετε ότι δεν είναι πλήρης (δηλαδή ότι κάτι λείπει) γράφετε ότι η απάντηση δεν είναι πλήρης και σημειώνετε την πρόταση που νομίζετε ότι λείπει (σημειώνοντας σε ποια θέση νομίζετε ότι λείπει πχ ανάμεσα στην 10^{η} και στην 11^{η} πρόταση και χαρακτηρίζοντας την ως θεώρημα- αξίωμα- ορισμό).**

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Έστω $ε_1$, $ε_2$ δύο διαφορετικές ευθείες του επιπέδου. Αν οι ευθείες τέμνονται, να αποδείξετε ότι έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.

Η απάντηση της μαθήτριας είναι η εξής:



1) Έστω Α κοινό σημείο των τεμνόμενων ευθειών $ε_1$, $ε_2$
2) Υποθέτουμε ότι οι $ε_1$, $ε_2$ έχουν και άλλο κοινό σημείο το Β, διαφορετικό από το Α.
3) Τότε και οι δύο ευθείες $ε_1$, $ε_2$ διέρχονται από τα σημεία Α,Β.
4) Αλλά η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α,Β είναι μοναδική.
5) Άρα οι $ε_1$, $ε_2$ ταυτίζονται.
6) Άτοπο γιατί οι $ε_1$, $ε_2$ είναι διαφορετικές
7) Άρα ότι οι $ε_1$, $ε_2$ δεν μπορεί να έχουν άλλο κοινό σημείο.

Νομίζω ότι η απάντηση της μαθήτριας:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

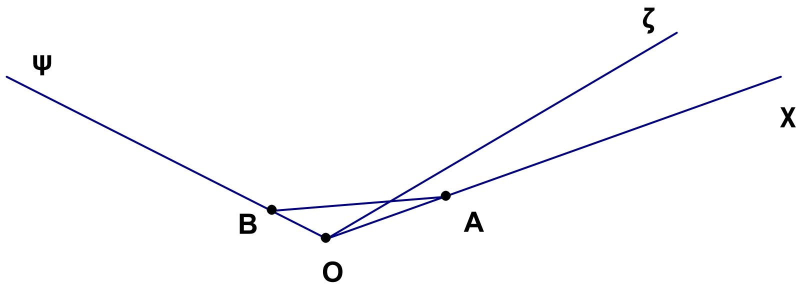
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Έστω $\chi\hat{O}\zeta$, $\zeta\hat{O}\psi$ δύο εφεξής γωνίες. Έστω ότι η $\chi\hat{O}\zeta$ είναι οξεία, η $\zeta\hat{O}\psi$ είναι αμβλεία και ισχύει $\chi\hat{O}\zeta+\zeta\hat{O}\psi< 180°$. Έστω Α σημείο της Οχ και Β σημείο της Οψ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία Οζ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Η απάντηση της μαθήτριας είναι η εξής:



1. Έστω $\chi\hat{O}\zeta$ οξεία και $\zeta\hat{O}\psi$ αμβλεία με $\chi\hat{O}\zeta+\zeta\hat{O}\psi< 180°$.
2. Οπότε οι Οχ, Οψ δεν είναι αντικείμενες, γιατί αν ήταν αντικείμενες, επειδή οι $\chi\hat{O}\zeta$, $\zeta\hat{O}\psi$ είναι εφεξής τότε θα ήταν και $\chi\hat{O}\zeta+\zeta\hat{O}\psi= 180°$.
3. Άτοπο αφού $\chi\hat{O}\zeta+\zeta\hat{O}\psi< 180°$.
4. Έστω Α σημείο της ημιευθείας Οχ και Β σημείο της ημιευθείας Οψ
5. Φέρνω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που ορίζουν τα σημεία Α,Β
6. Τα Α,Β είναι εκατέρωθεν της ευθείας Οζ
7. Άρα η ευθεία Οζ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα σημεία Α, Β δηλαδή το ΑΒ.

Νομίζω ότι η απάντηση της μαθήτριας:

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

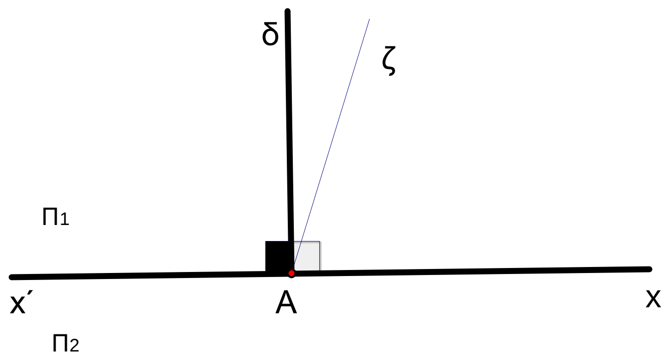
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Δ΄ μέρος Στο μέρος αυτό δίνεται η απόδειξη μιας γεωμετρικής πρότασης. Μόνο που οι **προτάσεις που αποτελούν την απόδειξη δεν είναι στη σωστή σειρά.** Μπορείτε να τις τοποθετήσετε στη σωστή σειρά; Τοποθετήστε στο ορθογώνιο που βρίσκεται δίπλα σε κάθε πρόταση, το νούμερο που νομίζετε ότι δείχνει τη σωστή σειρά της πρότασης στην απόδειξη.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Από κάθε σημείο ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή.



Απόδειξη:

$x\widehat{A}\zeta = \zeta\widehat{A}x' = 1L$	
Αδ διχοτόμος της ευθείας γωνίας $x'\widehat{A}x$	
Ας υποθέσουμε ότι και μια άλλη ευθεία Αζ, διαφορετική της Αδ, είναι κάθετη στην x΄x	
$x\widehat{A}\delta$ ορθή γωνία	
Α σημείο της ευθείας x΄x	
Άτοπο	
Η διχοτόμος γωνίας είναι μοναδική	
Αζ διχοτόμος της $x'\widehat{A}x$	
Αδ□ x΄x	

Ερωτηματολόγιο που εφαρμόστηκε μετά την παρέμβαση (postest)

ΚΩΔΙΚΟΣΜΑΘΗΤΗ:

M			

Ερωτηματολόγιο

Οδηγίες

Το ερωτηματολόγιο αυτό αποτελείται από τέσσερα μέρη. Παρακαλούμε προσπαθήστε να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις κάθε μέρους. Οι απαντήσεις σας δεν θα επηρεάσουν τη βαθμολογία σας.

1) Συμπληρώστε τον κωδικό σας στον ειδικό χώρο πάνω δεξιά σε αυτή τη σελίδα.
2) Διαβάστε κάθε ερώτηση προσεκτικά πριν να απαντήσετε.
3) Μπορείτε να χρησιμοποιείστε τα κενά φύλλα του ερωτηματολογίου ως πρόχειρο.
4) Μη σημειώσετε το όνομα σας πουθενά στο ερωτηματολόγιο.
5) Χρησιμοποιήστε στυλό για να γράψετε τις απαντήσεις σας.
6) Αν θελήσετε να αλλάξετε μια απάντηση σβήστε τελείως την προηγούμενη απάντηση.

Α΄ μέρος: Προσπαθήστε να περιγράψετε με δικά σας λόγια

1) **α) Τι νομίζετε ότι είναι το αξίωμα (παραδοχή)στην Γεωμετρία;**

β) ποιος νομίζετε ότι είναι ο ρόλος του αξιώματος (πως λειτουργεί) στη Γεωμετρία;

2) **α) Τι νομίζετε ότι είναι το θεώρημα (πόρισμα)στην Γεωμετρία;**

β) ποιος νομίζετε ότι είναι ο ρόλος του θεωρήματος (πως λειτουργεί) στη Γεωμετρία;

3) **α) Τι νομίζετε είναι ότι είναι ο ορισμός στην Γεωμετρία;**

β) ποιος νομίζετε ότι είναι ο ρόλος του ορισμού (πως λειτουργεί) στη Γεωμετρία;

4) **α) Τι νομίζετε ότι είναι η απόδειξη στην Γεωμετρία;**

β)ποιος νομίζετε ότι είναι ο ρόλος της απόδειξης (πως λειτουργεί) στη Γεωμετρία;

Β΄ μέρος: Χαρακτηρίστε τις προτάσεις που δίνονται στον πίνακα τοποθετώντας στα κενά ορθογώνια κάθε γραμμής, **ένα μόνο από τα κεφαλαία γράμματα Α,Θ,Ο,Τ**. Συμπληρώνετε με:

Α: αν νομίζετε ότι η πρόταση που δίνεται είναι **αξίωμα**

Θ: αν νομίζετε ότι η πρόταση που δίνεται είναι **θεώρημα**

Ο: αν νομίζετε ότι η πρόταση που δίνεται είναι **ορισμός**

Τ: αν νομίζετε ότι η πρόταση που δίνεται δεν είναι **τίποτα από τα παραπάνω**

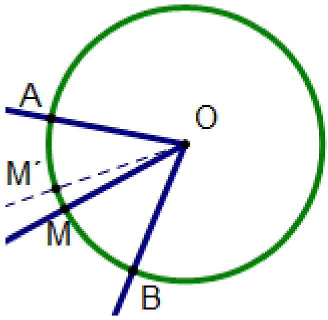
ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	
Το τρίγωνο ΠΡΣ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Sigma}$=90^{O}	
Αν τα σημεία Μ,Ν είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία δ τότε η ευθεία δ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ	
Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ. Τότε για κάθε ημιευθεία Μψ υπάρχει μοναδικό σημείο της Ν, ώστε ΚΛ=ΜΝ	
Η διχοτόμος $\Lambda\delta$ της γωνίας $K\hat{\Lambda}M$είναι μοναδική	
Αν δ είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΠΡ και Σ σημείο της δ τότε ΣΠ=ΣΡ	
Έστω δ είναι μία ευθεία του επιπέδου και Κ σημείο της ε. Αν η ευθεία ΒΚ είναι κάθετη στην ευθεία δ στη σημείο Κ, τότε η ΒΚ είναι μοναδική.	
Αν το τρίγωνο ΖΗΘ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΗΘ τότε ΖΗ=ΖΘ	
Η ευθεία δ διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΘΙ	
Έστω δ ευθεία που τέμνει τον κύκλο (Ο, ρ) στα σημεία Μ, Ν.	
Αν ΚΛΜ είναι ισοσκελές τρίγωνο με βάση την πλευρά ΚΜ τότε $\hat{K} = \hat{M}$	
Αν η ευθεία δ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Κ, R) στο σημείο Γ, τότε η ακτίνα ΚΓ είναι κάθετος στην ευθεία δ στο σημείο Γ.	
Το μέσο Ν του ευθύγραμμου τμήματος ΙΘ είναι μοναδικό.	
Αν τα σημεία Κ, Ζ του επιπέδου βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας δ τότε η δ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΚΖ	
Οι ευθείες δ_1, δ_2 είναι κάθετες	
Αν η γωνία $\zeta\hat{O}\zeta'$ είναι ορθή τότε οι φορείς των πλευρών $O\zeta$ και $O\zeta'$ είναι ευθείες κάθετες	
Αν Ζ,Η είναι δύο σημεία του επιπέδου τότε η ευθεία ΖΗ είναι μοναδική	

Γ΄ μέρος: Σε αυτό το μέρος παρουσιάζονται δύο Θέματα Γεωμετρίας που έθεσε ένας καθηγητής σε ένα επαναληπτικό διαγώνισμα τετράμηνου και οι απαντήσεις μιας μαθήτριας σε αυτό. Διαβάστε προσεκτικά κάθε θέμα και τις απαντήσεις που προτείνει η μαθήτρια. Εξετάστε αν η απάντηση σε κάθε θέμα είναι πλήρης **Αν νομίζετε ότι είναι πλήρης γράφετε ότι η απάντηση είναι πλήρης. Αν νομίζετε ότι δεν είναι πλήρης (δηλαδή ότι κάτι λείπει) γράφετε ότι η απάντηση δεν είναι πλήρης και σημειώνετε την πρόταση που νομίζετε ότι λείπει (σημειώνοντας σε ποια θέση νομίζετε ότι λείπει πχ ανάμεσα στην $10^{η}$ και στην $11^{η}$ πρόταση και χαρακτηρίζοντας την ως θεώρημα- αξίωμα- ορισμό).**

ΘΕΜΑ $1^{Ο}$

Να αποδείξετε ότι το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό

Η απάντηση της μαθήτριας είναι η εξής:



1)Έστω $\overset{\frown}{AB}$ τόξο κύκλου με κέντρο Ο και Μ μέσο του.

2) Άρα $\overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{MB}$

3) Οι $A\hat{O}M$, $M\hat{O}B$είναι οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες των ίσων τόξων $\overset{\frown}{MA}$,$\overset{\frown}{MB}$

4) Άρα $A\hat{O}M = M\hat{O}B$

5) Επομένως η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}B$

6) Αν υποθέσουμε ότι το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει και δεύτερο μέσο Μ΄ τότε ομοίως η ΟΜ΄ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$

7) Άτοπο αφού η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική.

Νομίζω ότι η απάντηση της μαθήτριας:

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

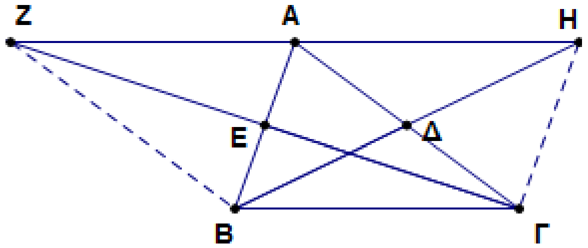
…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΔΗ=ΒΔ και ΖΕ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά.

Η απάντηση της μαθήτριας είναι η εξής:



1. ΒΔ=ΔΗ (από κατασκευή) άρα Δ μέσο της ΒΗ. Όμοια ΖΕ=ΕΓ (από κατασκευή) άρα Ε μέσο της ΖΓ.
2. Το Δ είναι μέσο της ΑΓ και το Ε είναι μέσο της ΑΒ αφού ΒΔ και ΓΕ είναι διάμεσοι.
3. Άρα τα τμήματα ΑΓ, ΒΗ καθώς και τα τμήματα ΖΓ, ΑΒ διχοτομούνται.
4. Άρα τα τετράπλευρα ΑΗΓΒ και ΖΑΓΒ είναι παραλληλόγραμμα.
5. Επομένως ΑΗ//ΒΓ και ΑΖ//ΒΓ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΗΓΒ και ΖΑΓΒ αντίστοιχα.
6. Αλλά σύμφωνα με το αίτημα της παραλληλίας από το σημείο Α εκτός της ΒΓ διέρχεται μόνο μία ευθεία παράλληλη προς την ευθεία ΒΓ.
7. Άρα τα Ζ, Α, Η βρίσκονται σε αυτήν την μοναδική παράλληλη δηλαδή είναι συνευθειακά.

Νομίζω ότι η απάντηση της μαθήτριας:

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

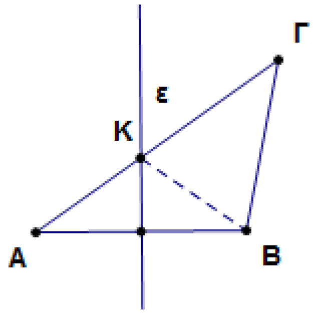
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Δ΄ μέρος Στο μέρος αυτό δίνεται η απόδειξη μιας γεωμετρικής πρότασης. Μόνο που οι **προτάσεις που αποτελούν την απόδειξη δεν είναι στη σωστή σειρά.** Μπορείτε να τις τοποθετήσετε στη σωστή σειρά; Τοποθετήστε στο ορθογώνιο που βρίσκεται δίπλα σε κάθε πρόταση, το νούμερο που νομίζετε ότι δείχνει τη σωστή σειρά της πρότασης στην απόδειξη.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, ε η μεσοκάθετος του ΑΒ και Γ ένα σημείο του επιπέδου τέτοιο ώστε τα Β,Γ να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ε. Να αποδείξετε ότι ΒΓ<ΑΓ.



Απόδειξη:

$ΒΓ < ΑΓ$	
$Α$, $Γ$ εκατέρωθεν της $ε$	
$στο\ ΚΓΒ από\ την\ τριγωνική\ ανισότητα\ είναι\ ΒΓ < ΚΓ + ΚΒ$	
$Κ$ σημείο της μεσοκαθέτου $ε$	
$τα\ Α, Β\ εκατέρωθεν\ της\ ε\ αφού\ ε\ μεσοκάθετος$	
$ΒΓ < ΚΓ + ΚΑ$	
$τα\ Β, Γ\ βρίσκονται\ προς\ το\ ίδιο\ μέρος\ της\ ε$	
$το\ ευθύγραμμο\ τμήμα\ ΑΓ\ τέμνει\ την\ ε\ σε\ ένα\ σημείο\ Κ$	
$ΑΓ = ΑΚ + ΚΓ$	
$ΚΑ = ΚΒ$	

Φύλλο εργασίας: «**χαρακτηρίζοντας προτάσεις**»

ΟΔΗΓΙΕΣ

Στις δραστηριότητες αυτές παρουσιάζονται οι αποδείξεις κάποιων προτάσεων. Όλες οι προτάσεις που συνιστούν την απόδειξη **είναι** τοποθετημένες σε πλαίσιο και **στη σωστή σειρά.** Διαβάστε προσεκτικά την πρώτη απόδειξη και προσπαθήστε να χαρακτηρίσετε αυτές τις προτάσεις. Δηλαδή να βρείτε ποιες από αυτές είναι ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα ή άλλες προτάσεις.

Σημειώστε αρχικά στο πλαίσιο τι νομίζετε ότι είναι κάθε πρόταση.

Στη συνέχεια συζητήστε με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας τις απόψεις σας και όταν συμφωνήσετε χρησιμοποιήστε τις καρτέλες με τα τέσσερα χρώματα που βρίσκονται μέσα στα σακουλάκια ως εξής:

γράψτε όσες προτάσεις νομίζετε ότι είναι **αξιώματα στις κίτρινες καρτέλες.**

γράψτε όσες προτάσεις νομίζετε ότι είναι **ορισμοί στις μωβ καρτέλες**.

γράψτε όσες προτάσεις νομίζετε ότι είναι **θεωρήματα στις θαλασσί καρτέλες**

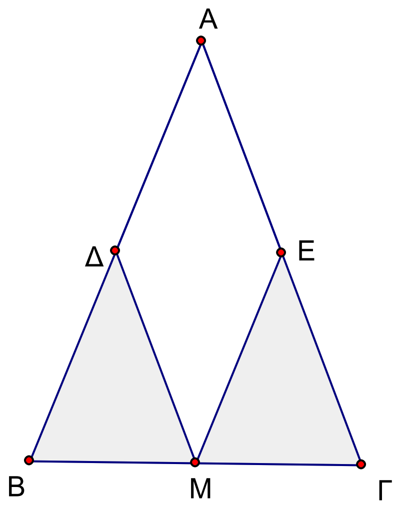
γράψτε όσες προτάσεις νομίζετε ότι **«άλλες προτάσεις» στις πράσινες καρτέλες.**

Στη συνέχεια, τοποθετήστε **στο μαύρο χαρτόνι τις καρτέλες** με τη σειρά που παρουσιάζονται οι προτάσεις στην απόδειξη στο αντίστοιχο φύλλο εργασίας. Τέλος σκεφτείτε για το ρόλο που έχουν αυτές οι προτάσεις στον αποδεικτικό συλλογισμό που παρουσιάστηκε στην $1^{η}$ δραστηριότητα και συζητήστε γι αυτό τον ρόλο με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας σας.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ $1^{η}$

Έστω ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο με βάση την πλευρά ΒΓ. Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ να αποδείξετε ότι η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ.

Απόδειξη:



Δ μέσο ΑΒ άρα $ΑΔ = ΔΒ = \frac{1}{2}ΑΒ$και $ΑΕ = ΕΓ = \frac{1}{2}ΑΓ$.	

ΑΒΓ ισοσκελές με βάση ΒΓ άρα ΑΒ=ΑΓ	
ΔΒ=ΕΓ=ΑΔ=ΑΕ=$\frac{1}{2}$ΑΒ=$\frac{1}{2}$ΑΓ	
Μ μέσο ΒΓ άρα ΜΒ=ΜΓ	
$\hat{B} = \hat{\Gamma}$προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου	
Τα τρίγωνα ΔΒΜ, ΜΕΓ είναι ίσα από το κριτήριο ΠΓΠ	
ΔΜ=ΜΕ αντίστοιχα στοιχεία ίσων τριγώνων	
Άρα το σημείο Μ ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΔΕ	
Άρα το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΔΕ	
ΑΔ=ΑΕ	
Άρα το σημείο Α ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΔΕ	
Άρα το Α ανήκει στη μεσοκάθετο του ΔΕ	
Από τα σημεία Α, Μ διέρχεται μοναδική ευθεία	
Άρα η ΑΜ είναι η μεσοκάθετος του ΔΕ	

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Δουλεύετε όπως και στην 1η δραστηριότητα. Δηλαδή αρχικά χαρακτηρίζεται τις προτάσεις που παρουσιάζονται και κατόπιν τις μεταφέρετε σε κατάλληλες καρτέλες.

Άσκηση 2

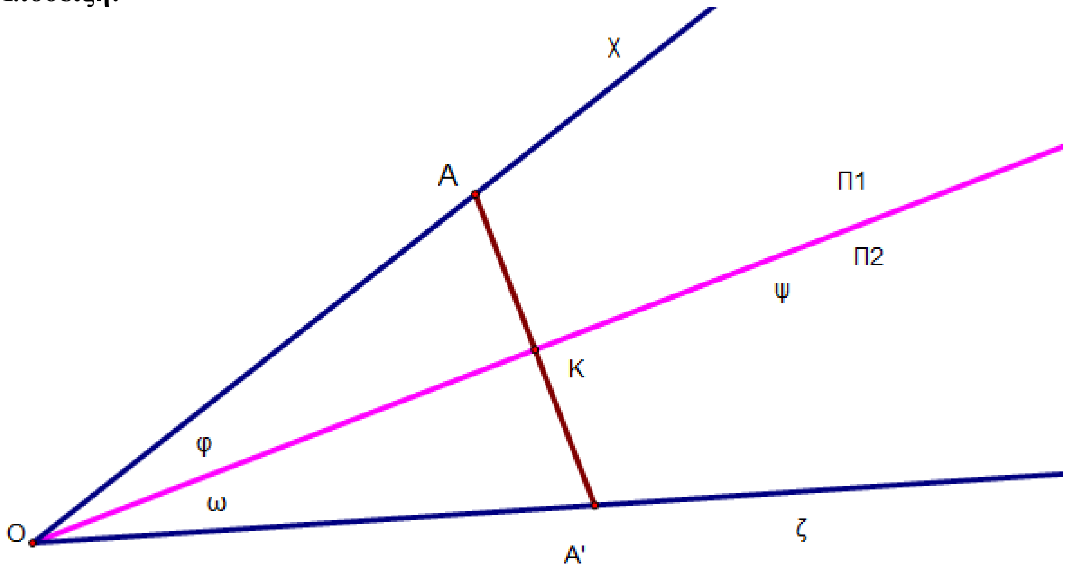
Σε ένα διαγώνισμα γεωμετρίας ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να σχεδιάσουν μία οξεία γωνία $\chi\widehat{O}\psi$ και από ένα τυχαίο σημείο Α της πλευράς Οχ να κατασκευάσουν ευθεία κάθετη στην πλευρά Οψ. Ο Γιώργος ξέχασε τα γεωμετρικά όργανα στο σπίτι!!! Έχει μόνο χάρακα και το μπλοκ ζωγραφικής του. Οπότε κάνει το εξής: αρχικά σχεδιάζει στην κόλλα του με τον χάρακα, μια οξεία γωνία $\chi\widehat{O}\psi$ και ένα σημείο Α στην Οχ. Στη συνέχεια, σχεδιάζει στο διαφανές χαρτί την γωνία $\chi\widehat{O}\psi$. Τοποθετεί το διαφανές χαρτί έτσι ώστε η κορυφή Ο της γωνίας και η πλευρά Οψ στο διαφανές χαρτί να ταυτιστούν με την κορυφή Ο της γωνίας και την πλευρά Οψ της γωνίας στην κόλλα και η άλλη πλευρά Οχ να βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η $\chi\widehat{O}\psi$. Σημειώνει με Α΄ τη νέα θέση του Α, ενώνει το Α με το Α΄. Η ΑΑ΄ είναι η ζητούμενη κάθετη.

Ο καθηγητής βλέποντας τον Γιώργο να εργάζεται με το διαφανές χαρτί, πλησιάζει, παρακολουθεί την κατασκευή του, δίνει συγχαρητήρια στον Γιώργο και του λέει:

-«μπράβο Γιώργο, είσαι πολύ δημιουργικός! Αλλά πως είσαι σίγουρος ότι η ότι η ΑΑ΄ είναι κάθετος στην ΑΧ; Μπορείς να το αποδείξεις;».

-«αυτό είναι πανεύκολο κύριε» και παρουσιάζει την απόδειξη που ακολουθεί

Απόδειξη:

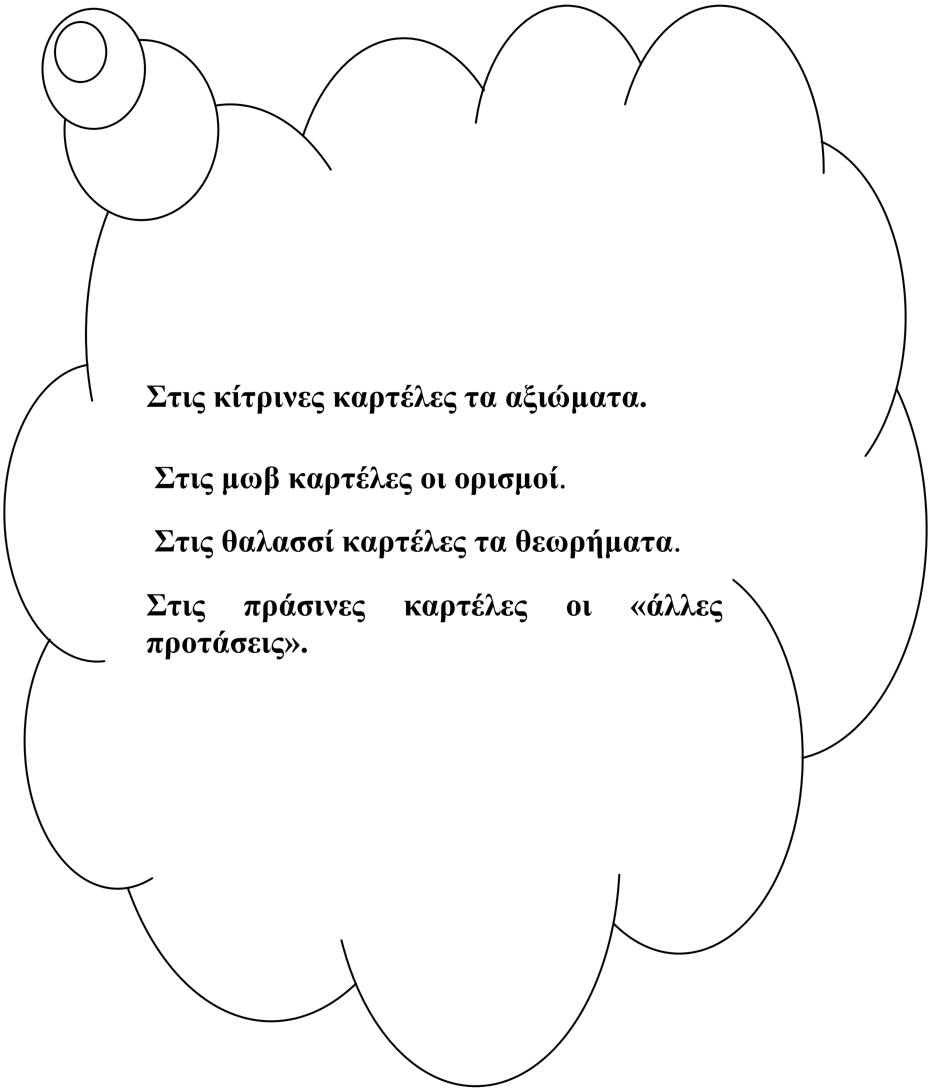


μετατοπίζω τη γωνία $\chi\widehat{O}\psi$ στη θέση $\psi\widehat{O}\zeta$ με τη βοήθεια διαφανούς χαρτιού άρα $\chi\widehat{O}\psi=\psi\widehat{O}\zeta$	
Οψ διχοτόμος της $\chi\widehat{O}\zeta$ και Οψ εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $\chi\widehat{O}\zeta$	
μετατοπίζω το ΟΑ στη θέση ΟΑ΄ με τη βοήθεια διαφανούς χαρτιού άρα ΟΑ΄=ΟΑ	
Άρα ΟΑΑ΄ ισοσκελές.	
Α, Α΄ σημεία των Οχ, Οζ αντίστοιχα, εκατέρωθεν της διχοτόμου Οψ της $\chi\widehat{O}\zeta$ άρα ΑΑ΄ τέμνει Οψ.	
Κ σημείο τομής των ΑΑ΄, Οψ	
Οκ διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΑ άρα ΟΚ ύψος του ΟΑΑ΄	
ΑΑ΄⊥ ΟΚ	

Φύλλο εργασίας: «**αναζητώντας τη σωστή σειρά»**

Κάθε ομάδα παίρνει το σακουλάκι με την ετικέτα δραστηριότητα $3^{η}$ που περιέχει καρτέλες τεσσάρων χρωμάτων στις οποίες αναγράφονται οι προτάσεις που είναι απαραίτητες για την απόδειξη της πρότασης που ακολουθεί. Προσπαθήστε να τις τοποθετήσετε στη σωστή σειρά τις καρτέλες στο χαρτόνι ώστε η απόδειξη που θα σχηματιστεί να σωστή. Όταν τελειώσετε με την $3^{η}$ δραστηριότητα, συνεχίστε δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο τις επόμενες δραστηριότητες

Θυμάμαι ότι



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Να αποδείξετε την πρόταση που ακολουθεί:

«αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες»

Οι καρτέλες για την τρίτη δραστηριότητα αναγράφουν τα εξής:

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

ε_1, ε_2 δύο ευθείες του επιπέδου που τέμνονται από μία τρίτη ευθεία ε στα Α,Β αντίστοιχα

$\widehat{\varphi}$ εξωτερική γωνία του ΑΒΓ

$\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$

Δύο διαφορετικές ευθείες ε_1, ε_2 του επιπέδου ή θα τέμνονται ή θα είναι παράλληλες

άτοπο

$\widehat{\omega}, \widehat{\varphi}$ εντός εναλλάξ των ευθειών ε_1, ε_2 που τέμνονται από την ε

έστω οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται στο Γ έστω προς το μέρος της $\widehat{\omega}$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η

«Έστω ευθεία ε και Α ένα σημείο εκτός της ευθείας. Να δείξετε ότι υπάρχει ευθεία ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την ε»

Οι καρτέλες για την τέταρτη δραστηριότητα αναγράφουν τα εξής:

μεταφέρουμε τη γωνία $\hat{\varphi}$ώστε να έχει κορυφή το Α, η μία πλευρά της να είναι η ΑΒ και η άλλη πλευρά της ΑΓ να βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η γωνία $\hat{\varphi}$ οπότε είναι $\Gamma\hat{A}B = \hat{\varphi}$

από το Α φέρνουμε ένα πλάγιο τμήμα ΑΒ προς την ε

$\Gamma\hat{A}B$, $\hat{\varphi}$ εντός εναλλάξ των ευθειών ΑΓ, ε που τέμνονται από την ΑΒ

ΑΓ, ε τέμνονται από την ΑΒ και σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες άρα ΑΓ//ε

η ευθεία ΑΒ χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα

$\hat{\varphi}$ η οξεία γωνία που σχηματίζει το ΑΒ με την ε

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5η

«Να αποδείξετε ότι δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες»

Οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες χ΄ χ, ψ΄ψ που τέμνονται από την ε είναι ίσες άρα χ΄ χ // ψ΄ψ

άρα $\widehat{\omega}=\widehat{\varphi}$

χ΄ $\hat{A}$ Β = χ $\hat{A}$ Β = $\widehat{\omega}$ =1L κάθετες ευθείες λέγονται οι πλευρές της ορθής γωνίας

$\widehat{\omega}$, $\widehat{\varphi}$ εντός εναλλάξ των ευθειών χ΄ χ, ψ΄ψ που τέμνονται από την ε

ψ΄ $\hat{B}$ Α = ψ $\hat{B}$ Α= $\widehat{\varphi}$=1L κάθετες ευθείες λέγονται οι πλευρές της ορθής γωνίας

ψ΄ψ ε στο σημείο Β της ευθείας ε

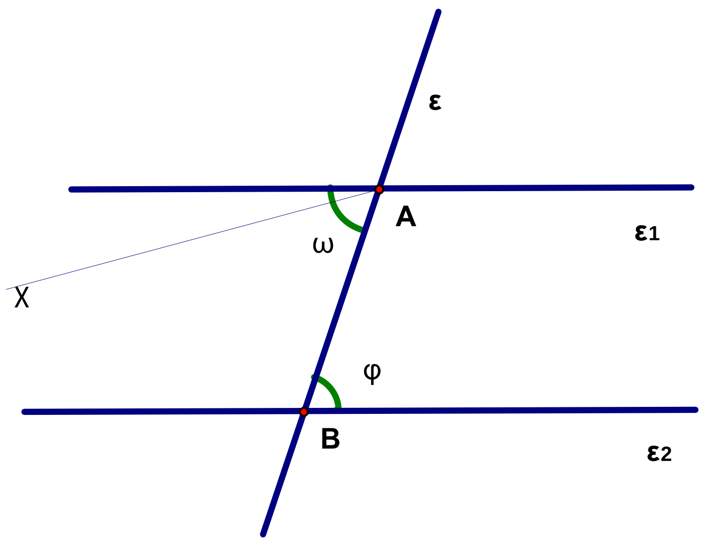
χ΄ χ ε στο σημείο Α της ευθείας ε

Φύλλο εργασίας: «**συμπληρώνοντας το συλλογισμό…**»

Στις δραστηριότητες που ακολουθούν παρουσιάζονται τα αρχικά βήματα ενός αποδεικτικού συλλογισμού. Σε σακουλάκι με τίτλο «**συμπληρώνοντας το συλλογισμό…, δραστηριότητα 6η**», βρίσκονται καρτέλες στα τέσσερα χρώματα (όπως και στις προηγούμενες δραστηριότητες). Προσπαθήστε να συνεχίσετε τις αποδείξεις. Όταν ολοκληρώνετε μια απόδειξη να μεταφέρετε όλες τις προτάσεις που χρησιμοποιήσατε, στα αντίστοιχα χρωματιστά καρτελάκια και να τα τοποθετείτε στη σωστή σειρά.

Δραστηριότητα 6η

Να αποδείξετε ότι **«αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες».**



Απόδειξη:

έστω ότι $ε_1 // ε_2$

ε τέμνει $ε_1, ε_2$ στα Α ,Β αντίστοιχα

$\widehat{\omega}, \widehat{\varphi}$ εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ε_1, ε_2$ που τέμνονται από την ε

υποθέτουμε ότι $\widehat{\omega} \neq \widehat{\varphi}$

Φέρουμε την Αχ ώστε οι γωνίες $\chi\hat{A}\beta$, $\widehat{\varphi}$ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ε και $\chi\hat{A}\beta = \widehat{\varphi}$

Δραστηριότητα 7η

Να αποδείξετε ότι: « αν δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $ε_1$// ε και $ε_2$//ε τότε $ε_1$//$ε_2$».

Απόδειξη

Αν οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται στο Α

Δραστηριότητα 8η (δουλεύετε όπως στη δραστηριότητα 7)

Να αποδείξετε ότι: « **αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε, τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.**

Απόδειξη

Αν η ε τέμνει την ε_1 στο Α

Δραστηριότητα 9η (δουλεύετε όπως στις προηγούμενες δραστηριότητες)

Να αποδείξετε ότι: «**αν μία ευθεία είναι κάθετη σε μία από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη»**

Απόδειξη:

έστω ε_1// ε_2

έστω ε □ ε_1 στο σημείο Α

Τα θεωρήματα, οι ορισμοί και τα αξιώματα που μπορείτε να χρησιμοποιήστε για τις δραστηριότητες 6-7-8 -9

αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες

αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μία τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες

δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες

κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή

Δύο διαφορετικές ευθείες ε_1, ε_2 του επιπέδου ή θα τέμνονται ή θα είναι παράλληλες

Οι φορείς της ορθής γωνίας είναι κάθετες ευθείες

Φύλλο εργασίας: «**χαρτογραφώντας τις συνδέσεις των προτάσεων** »

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 10η

Οδηγίες

- Κάθε ομάδα παίρνει από ένα σακουλάκι με την ετικέτα δραστηριότητα 10.
- Καθένα από αυτά περιέχει **όλα τα θεωρήματα, τα αξιώματα και τους ορισμούς** που χρησιμοποιήθηκαν στην ενότητα των παραλλήλων ευθειών.
- Απλώστε **όλες τις καρτέλες** στο χαρτόνι**(1x1).**
- **Χρησιμοποιήστε το μολύβι σας για να συνδέσετε με τη βοήθεια γραμμών τις προτάσεις, με τέτοιο τρόπο ώστε να φαίνεται ποιες προτάσεις χρησιμοποιήθηκαν, συμμετείχαν στην απόδειξη κάποιων προτάσεων.**

  (μπορείτε να χρησιμοποιήστε τα φύλλα εργασίας των προηγούμενων μαθημάτων ή να χρησιμοποιήσετε τις φωτογραφίες από τις κατασκευές σας που βρίσκονται στην επιφάνεια εργασίας ή τα βιβλία σας)

- Όταν αποτυπώσετε όλες τις συνδέσεις στο «χάρτη» που δημιουργήσατε παρατηρήστε αυτό το χάρτη και προσπαθήστε μέσα από τη συζήτηση με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας σας να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις;

Με βάση το χάρτη που σχεδιάσατε

- ➢ διακρίνετε κάποιον νέο ρόλο για τα θεωρήματα;

____

____

____

- ➢ διακρίνετε κάποιον νέο ρόλο για τα αξιώματα;

____

____

____

- ➢ διακρίνετε κάποιον νέο ρόλο για τους ορισμούς;

____

____

____

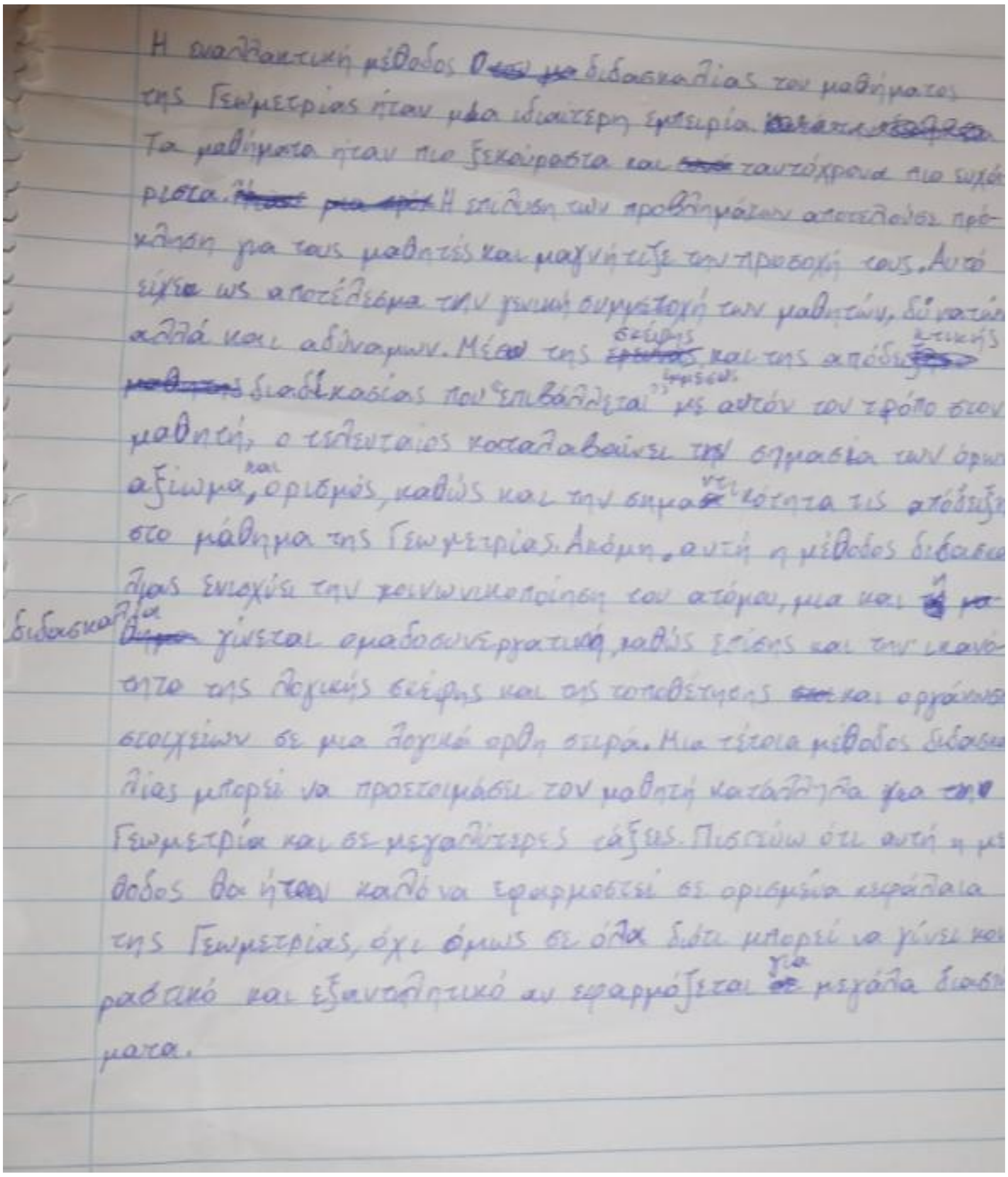
- ➢ διακρίνετε κάποιον νέο ρόλο για την απόδειξη;

____

____

____

Σχολιασμός της παρέμβασης από μαθητή:


Η εναλλακτική μέθοδος διδασκαλίας του μαθήματος της Γεωμετρίας ήταν μια ιδιαίτερη εμπειρία. Τα μαθήματα ήταν πιο ξεκούραστα και ταυτόχρονα πιο ευχάριστα. Η επίλυση των προβλημάτων αποτελούσε πρόκληση για τους μαθητές και μαγνήτιζε την προσοχή τους. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα την γενική συμμετοχή των μαθητών, δυνατών αλλά και αδύναμων. Μέσω της σκέψης και της αποδεικτικής διαδικασίας που "επιβάλλεται" με αυτόν τον τρόπο στον μαθητή, ο τελευταίος καταλαβαίνει τη σημασία των όρων αξίωμα και ορισμός, καθώς και την σημαντικότητα τις απόδειξης στο μάθημα της Γεωμετρίας. Ακόμη, αυτή η μέθοδος διδασκαλίας ενισχύει την κοινωνικοποίηση του ατόμου, μια και η διδασκαλία γίνεται ομαδοσυνεργατική, καθώς επίσης και την ικανότητα της λογικής σκέψης και της τοποθέτησης και οργάνωσης στοιχείων σε μια λογικά ορθή σειρά. Μια τέτοια μέθοδος διδασκαλίας μπορεί να προετοιμάσει τον μαθητή κατάλληλα για τη Γεωμετρία και σε μεγαλύτερες τάξεις. Πιστεύω ότι αυτή η μέθοδος θα ήταν καλό να εφαρμοστεί σε ορισμένα κεφάλαια της Γεωμετρίας, όχι όμως σε όλα διότι μπορεί να γίνει κουραστικό και εξαντλητικό αν εφαρμόζεται για μεγάλα διαστήματα.