
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΩΝ ΠΟΡΩΝ

ΜΗ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΙΚΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ

ΑΡΕΤΗ ΜΑΛΚΟΓΙΑΝΝΗ ΑΕΜ: 57

Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Σακελλάρης

**Α.Π.Θ. - ΤΜΗΜΑ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΩΝ ΠΟΡΩΝ**

Αριθμ. Εισαγ.: 1379
Ημερομηνία: 14/12/04

ΚΟΖΑΝΗ 2004

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ	7
2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	8
3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ	10
3.1 ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ	10
3.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ	10
3.2.1 Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών	11
3.2.2 Η μη ομογενής εξίσωση Helmholtz	12
3.2.3 Η μέθοδος Rayleigh-Ritz	15
3.2.4 Μέθοδος σταθμισμένων υπολοίπων	16
3.2.5 Η μέθοδος των οριακών στοιχείων	19
3.2.6 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων	20
4. ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	23
4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	23
4.2 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL	24
4.2.1 Οι δύο θεμελιώδεις εξισώσεις του πεδίου για να βρεθούν η μαγνητική και η ηλεκτρική ενέργεια, που είναι αποθηκευμένες στο πεδίο	24
4.2.2 Η μαγνητική ροή	28
4.2.3 Εξίσωση συνέχειας	30
4.2.4 Οριακές συνθήκες	32
4.2.5 Σύντομη ανακεφαλαίωση	38
5. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΜΗ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΔΟΚΙΜΩΝ	40
5.1 ΜΗ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕ ΔΙΝΟΡΕΥΜΑΤΑ	41
5.1.1 Το φυσικό φαινόμενο	41
5.1.2 Επιδρώσεις παράμετροι	42
5.1.3 Εφαρμογές της μεθόδου	46
5.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ	47
5.2.1 Μεταβολή της σύνθετης αντίστασης	48
5.2.2 Παράδειγμα αναλυτικού υπολογισμού του πεδίου σε ρωγμή	51
6. ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΜΙΑΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΤΟ ANSYS	55
6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	55
6.2 ΧΤΙΣΙΜΟ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	55
6.3 ΚΑΘΟΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟΝ ΤΥΠΟ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	55
6.4 ΕΦΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΤΑ ΦΟΡΤΙΑ	56
6.5 ΛΥΣΗ	57
7. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ	58
ΣΥΝΟΨΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ	59
Χωρίς ρωγμή	59
Τριγωνική Επιφανειακή Οπή	59
Ορθογωνική Διαμπερής Οπή	59
8. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΜΕ DC ΔΙΕΓΕΡΣΗ	61
8.1 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	64
8.2 ΤΜΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΤΑΣΗΣ	66
8.3 ΜΗΤΡΕΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	69
8.4 ΣΥΝΔΕΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	72
8.5 ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΙΣΧΥΟΣ	75
9. Η ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΙΚΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ ΜΕ ΤΟ FLUX	80
9.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ	80

9.2 ΤΑ 'ΒΑΣΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ'	82
9.3 ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΕΓΜΑ	82
9.4 ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΜΕΛΕΤΗΘΗΚΑΝ	83
9.5 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΟΥ ΛΑΜΒΑΝΟΥΜΕ ΜΕ ΤΟ FLUX.....	83
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	84
ΧΩΡΙΣ ΡΩΓΜΗ.....	84
Εισαγωγή γεωμετρίας.....	84
Καθορίζουμε τα υλικά.....	86
Παράγουμε το πλέγμα.....	87
ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗ ΟΠΗ	97
Εισαγωγή γεωμετρίας.....	97
Καθορίζουμε τα υλικά.....	101
Παράγουμε το πλέγμα.....	102
ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΔΙΑΜΠΕΡΗΣ ΟΠΗ.....	112
Εισαγωγή γεωμετρίας.....	112
Καθορίζουμε τα υλικά.....	116
Παράγουμε το πλέγμα.....	117
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β	127
REFERENCES	131

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ Α-1: ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΥΛΙΚΩΝ	86
ΠΙΝΑΚΑΣ Α-2: ΕΠΙΛΥΟΥΜΕ ΤΑ ΡΕΥΜΑΤΑ	90
ΠΙΝΑΚΑΣ Α-3: ΚΑΤΑΧΩΡΗΣΕΙΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥΣ.....	95
ΠΙΝΑΚΑΣ Α-4: ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ R.....	96
ΠΙΝΑΚΑΣ Α-5: ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΥΛΙΚΩΝ	101
ΠΙΝΑΚΑΣ Α-6: ΕΠΙΛΥΟΥΜΕ ΤΑ ΡΕΥΜΑΤΑ	105
ΠΙΝΑΚΑΣ Α-7: ΚΑΤΑΧΩΡΗΣΕΙΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥΣ.....	110
ΠΙΝΑΚΑΣ Α-8: ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ R.....	111
ΠΙΝΑΚΑΣ Α-9: ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΥΛΙΚΩΝ	116
ΠΙΝΑΚΑΣ Α-10: ΕΠΙΛΥΟΥΜΕ ΤΑ ΡΕΥΜΑΤΑ	120
ΠΙΝΑΚΑΣ Α-11: ΚΑΤΑΧΩΡΗΣΕΙΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥΣ.....	125
ΠΙΝΑΚΑΣ Α-12: ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ R.....	126

ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΣΧΗΜΑ 4-1: ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΟ ΙΣΟΖΥΓΙΟ.....	24
ΣΧΗΜΑ 4-2: ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΟΡΙΑΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ S	32
ΣΧΗΜΑ 5-1.....	41
ΣΧΗΜΑ 5-2.....	42
ΣΧΗΜΑ 5-3.....	43
ΣΧΗΜΑ 5-4.....	44
ΣΧΗΜΑ 5-5.....	45
ΣΧΗΜΑ 5-6.....	48
ΣΧΗΜΑ 5-7.....	49
ΣΧΗΜΑ 5-8.....	51
ΣΧΗΜΑ 5-9.....	53
ΣΧΗΜΑ 5-10.....	54
ΣΧΗΜΑ 8-1: (Α) ΕΝΤΑΦΙΑΣΜΕΝΟΙ ΣΩΛΗΝΕΣ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΓΙΑ ΝΑ ΔΙΑΒΙΒΑΣΟΥΝ ΤΑ ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΘΩΣ ΕΠΙΣΗΣ ΚΑΙ ΡΕΥΣΤΑ. (Β) ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΚΥΚΛΩΜΑ ΜΙΚΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ DX ΤΗΣ ΣΩΛΗΝΩΣΗΣ.	61
ΣΧΗΜΑ 8-2: Η ΓΡΑΜΜΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΘΕΩΡΗΘΕΙ ΩΣ ΔΙΑΔΟΧΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ ΠΕΝΤΕ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ. (Α) ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ, ΜΕ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΝΑ ΘΕΩΡΟΥΝΤΑΙ ΞΕΧΩΡΙΣΤΑ. (Β) ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΥΣΤΕΡΑ ΑΠΟ ΣΥΝΔΕΣΗ.	66
ΣΧΗΜΑ 9-1: ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8	81
ΣΧΗΜΑ 9-2: ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΕΓΜΑ.....	82
ΣΧΗΜΑ 9-3: MAILLAGE A PROXIMITE DU DEFAUT.....	83
ΣΧΗΜΑ 9-4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΕ ΜΙΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗ ΡΩΓΜΗ	83
ΣΧΗΜΑ Α-1: ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ $RAD1$ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ $RAD2$	85
ΣΧΗΜΑ Α-2: Ο ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΕΧΕΙ ΠΕΡΙΣΤΡΑΦΕΙ	85
ΣΧΗΜΑ Α-3: ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΜΕ ΤΟ ΠΛΕΓΜΑ ΣΤΟΝ ΚΥΛΙΝΔΡΟ	88
ΣΧΗΜΑ Α-4: ΕΦΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΤΙΣ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΟΝ ΚΥΛΙΝΔΡΟ	89
ΣΧΗΜΑ Α-5: ΕΦΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΤΙΣ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΟΝ ΚΥΛΙΝΔΡΟ	90
ΣΧΗΜΑ Α-6: ΕΠΙΛΥΟΥΜΕ ΤΑ ΡΕΥΜΑΤΑ	91
ΣΧΗΜΑ Α-7: ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΤΑΙ ΜΙΑ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ	93
ΣΧΗΜΑ Α-8: ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΤΑΙ ΜΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ	94
ΣΧΗΜΑ Α-9: ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΤΑΙ ΜΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ	94
ΣΧΗΜΑ Α-10: ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ $RAD1$ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ $RAD2$	98
ΣΧΗΜΑ Α-11: Ο ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΕΧΕΙ ΠΕΡΙΣΤΡΑΦΕΙ	98
ΣΧΗΜΑ Α-12: ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΜΕ ΤΟ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ	99
ΣΧΗΜΑ Α-13: ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΜΕ ΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΟΠΗ	100
ΣΧΗΜΑ Α-14: ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΜΕ ΤΟ ΠΛΕΓΜΑ ΣΤΟΝ ΚΥΛΙΝΔΡΟ	103

ΣΧΗΜΑ Α-15: ΕΦΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΤΙΣ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΟΝ ΚΥΛΙΝΔΡΟ.....	104
ΣΧΗΜΑ Α-16: ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΜΕ ΤΟ ΠΛΕΓΜΑ ΣΤΟΝ ΚΥΛΙΝΔΡΟ.....	105
ΣΧΗΜΑ Α-17: ΕΠΙΛΥΟΥΜΕ ΤΑ ΡΕΥΜΑΤΑ.....	106
ΣΧΗΜΑ Α-18: ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΤΑΙ ΜΙΑ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.....	108
ΣΧΗΜΑ Α-19: ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΤΑΙ ΜΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ.....	109
ΣΧΗΜΑ Α-20: ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ RAD1 ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ RAD2.....	113
ΣΧΗΜΑ Α-21: Ο ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΕΧΕΙ ΠΕΡΙΣΤΡΑΦΕΙ.....	113
ΣΧΗΜΑ Α-22: ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΜΕ ΤΟ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ.....	114
ΣΧΗΜΑ Α-23: ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΜΕ ΤΗΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΟΠΗ.....	115
ΣΧΗΜΑ Α-24: ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΜΕ ΤΟ ΠΛΕΓΜΑ ΣΤΟΝ ΚΥΛΙΝΔΡΟ.....	118
ΣΧΗΜΑ Α-25: ΕΦΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΤΙΣ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΟΝ ΚΥΛΙΝΔΡΟ.....	119
ΣΧΗΜΑ Α-26: ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΜΕ ΤΟ ΠΛΕΓΜΑ ΣΤΟΝ ΚΥΛΙΝΔΡΟ.....	120
ΣΧΗΜΑ Α-27: ΕΠΙΛΥΟΥΜΕ ΤΑ ΡΕΥΜΑΤΑ.....	121
ΣΧΗΜΑ Α-28: ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΤΑΙ ΜΙΑ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.....	123
ΣΧΗΜΑ Α-29: ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΤΑΙ ΜΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ.....	124

1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη διπλωματική αυτή θα εξεταστεί η μαθηματική μοντελοποίηση των ηλεκτρομαγνητικών τεχνικών, που χρησιμοποιούνται στις μη καταστροφικές δοκιμές. Το υπό εξέταση υλικό τοποθετείται δίπλα σε ένα πηνίο που διαρρέεται από ένα γενικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό ρεύμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, τη δημιουργία δινορευμάτων στο υλικό, εξαιτίας της επαγωγής. Το πλάτος και η φάση των δινορευμάτων, εξαρτάται από:

- Το αρχικό ή το κύριο πεδίο του ρεύματος στο πηνίο διέγερσης.
- Τις ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του υλικού.
- Το δευτερεύον πεδίο των δινορευμάτων.
- Την παρουσία ρωγμής ή την παρουσία μη ομογενών υλικών.

Η αντιστροφή των μετρήσεων των δινορευμάτων της ελεγκτήριας σύνθετης αντίστασης, ευρέως αναγνωρίστηκε ως ένα πολύπλοκο θεωρητικό πρόβλημα, του οποίου η λύση είναι πιθανό να ασκήσει σημαντική επίδραση στο χαρακτηρισμό των υλικών. Η εκτίμηση της αγωγιμότητας μιας επίπεδης στρωματοποιημένης δομής πραγματοποιείται ύστερα από αντιστροφή της σύνθετης αντίστασης ενός κυκλικού ελεγκτήριου πηνίου με πυρήνα χωρίς αέρα, ορθογωνικής διατομής, χρησιμοποιώντας πολυστρωματικά αισθητήρια νευρωνικά δίκτυα, που εκπαιδεύονται μέσω ενός αλγορίθμου που μαθαίνει από το παρελθόν.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (*Finite Element Method*) είναι μία από τις ευρύτερα χρησιμοποιούμενες σήμερα, αριθμητικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων της εφαρμοσμένης φυσικής και ειδικότερα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η *FEM* που πρωτοεμφανίστηκε στις αρχές της δεκαετίας του '40, σημείωσε στη συνέχεια μία εντυπωσιακή άνοδο που οφείλεται, κυρίως, στην αλματώδη ανάπτυξη της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των συστημάτων *CAD*.

Η θεμελιώδης αρχή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι ότι οποιαδήποτε συνεχής ποσότητα μπορεί να προσεγγιστεί από ένα διακριτό μοντέλο που αποτελείται από τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται σ' έναν αριθμό 'πεπερασμένων στοιχείων'. Έτσι η διακριτοποίηση της οποιαδήποτε πολύπλοκης γεωμετρίας της περιοχής του φυσικού προβλήματος σε μικρά γεωμετρικά σχήματα που ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία, αποτελεί το κύριο γνώρισμα της *FEM*. Ήδη, από πολύ παλιά, οι μαθηματικοί πέτυχαν να προσεγγίσουν την τιμή του π με ακρίβεια 40 σημαντικών ψηφίων, βασιζόμενοι στην απλή παρατήρηση ότι η περίμετρος ενός κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σ' έναν κύκλο, τείνει στο μήκος της περιφέρειάς του, καθώς ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου τείνει στο άπειρο.

Σε σπαργανώδη μορφή η *FEM* πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον *Hrenikoff* σε προβλήματα της αεροναυπηγικής το 1941, ενώ λίγο αργότερα (1943) ο *Courant* χρησιμοποίησε τριγωνικά στοιχεία για την προσεγγιστική επίλυση προβλημάτων μηχανικής στρέψης. Η τυπική καθιέρωση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, οφείλεται στους *Turner, Clough, Martin, Topp* (1956) και *Argyris, Kesley* (1960). Πάντως, ο όρος 'πεπερασμένο στοιχείο' πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον *Clough* το 1960. Στη δεκαετία του '60 η *FEM* χρησιμοποιήθηκε, κυρίως, για την προσεγγιστική επίλυση προβλημάτων αντοχής υλικών, μηχανικής ρευστών και μετάδοσης θερμότητας.

Εκείνος που επέβαλε την ουσιαστική καθιέρωση και την ευρύτερη αναγνώριση της *FEM* είναι ο *Zienkiewicz*, που (μαζί με τον *Chung*) δημοσίευσε και το πρώτο βιβλίο πεπερασμένων στοιχείων το 1967.

Στον κόσμο των ηλεκτρολόγων, η *FEM* έγινε γνωστή από τον *Sylvester* το 1969. Δεν υπάρχει η αμφιβολία ότι ο *Sylvester* (μαζί με πολλούς επιφανείς συνεργάτες του: *Chari*, *Cendes*, *Lowther*, *Konrad* κ.α) είναι εκείνος που συνέβαλε στην ευρύτατη αποδοχή της *FEM*, κυρίως στη δεκαετία του '80, από πολλούς ερευνητές της ηλεκτροεπιστήμης.

Στη συνέχεια –και μέχρι σήμερα– η *FEM* δέχτηκε διάφορες τροποποιητικές βελτιώσεις για την καλύτερη και αποτελεσματικότερη προσαρμογή σε διάφορα προβλήματα του πεδίου (στατικά, δυνωρευσμάτων, υψηλών συχνοτήτων). Συναφής προς τη *FEM*, είναι και μια μέθοδος που επικράτησε να ονομάζεται μέθοδος στοιχείων ακμής (*Edge Element Method*), που προτάθηκε από τον *Bossavit* (1982) και βασίζεται στα στοιχεία ακμής του *Whitney*. Επίσης, μια άλλη μέθοδος, πολύ συγγενής προς τη *FEM*, είναι και η μέθοδος των οριακών στοιχείων (*Boundary Element Method*), που διακριτοποιεί μόνο το σύνορο της περιοχής του μέσου. Τέλος, έχουν προταθεί, και διάφορες υβριδικές μέθοδοι (*FEM-BEM*, *FEM*-αναλυτικές μέθοδοι κτλ.) που συνδυάζουν τα πλεονεκτήματα της μιας, αποφεύγοντας τυχόν μειονεκτήματα της άλλης.

3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

3.1 Αναλυτικές Μέθοδοι

Η πρώτη προσπάθεια επίλυσης προβλημάτων των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων χαρακτηρίστηκε από την αναλυτική επεξεργασία των εξισώσεων *Maxwell*. Με τη χρησιμοποίηση της διαφορικής διατύπωσης αυτών των εξισώσεων, προκύπτουν γενικές λύσεις, στις οποίες η δυσκολία έγκειται στον προσδιορισμό των σταθερών. Για τα προβλήματα που έχουν απλή γεωμετρία, είναι γραμμικά, είναι δυνατός ο καθορισμός αυτών των σταθερών, έτσι ώστε οι αναλυτικές λύσεις να μπορούν να γραφούν σε κλειστή μορφή. Για τη λύση κλειστής μορφής, υποθέτονται ημιτονοειδή ρεύματα διέγερσης και γραμμικά, ιστροπικά και ομογενή μέσα.

Υπάρχει μία ποικιλία αναλυτικών μεθόδων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν γι' αυτόν τον σκοπό. Για τα πιο περίπλοκα προβλήματα, πρέπει να εφαρμοστούν ειδικές αναλυτικές τεχνικές κατάλληλες για κάθε μεμονωμένη περίπτωση, αλλά αυτές οι μέθοδοι δεν μπορούν να θεωρηθούν γενικές.

3.2 Αριθμητικές Μέθοδοι

Τις τρεις τελευταίες δεκαετίες, στον υπολογισμό των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, έχουν επέλθει επαναστατικές αλλαγές, εξαιτίας της ραγδαίας ανάπτυξης του ψηφιακού υπολογιστή, με σταδιακά μεγαλύτερη χωρητικότητα και ταχύτητα και ένα μειωμένο κόστος αριθμητικών λειτουργιών. Προβλήματα, που μερικά έτη πριν, ήταν πολύ δύσκολα, μπορούν τώρα να λυθούν εύκολα και οικονομικά.

Το κυριότερο μειονέκτημα των αναλυτικών μεθόδων, είναι η έλλειψη γενικότητας. Πράγματι, οι αναλυτικές μέθοδοι, είναι δυνατόν να επιλύσουν μόνο μία περιορισμένη κατηγορία προβλημάτων που περιλαμβάνουν βασικά ομοιογενή και γραμμικά μέσα, απλών γεωμετριών. Κατά συνέπεια, εκτός από έναν αριθμό απλών προβλημάτων, τα ανομοιογενή και μη γραμμικά προβλήματα, καθώς και τα προβλήματα που περιλαμβάνουν περίπλοκες γεωμετρίες, δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά.

Όποτε οι ακριβείς λύσεις δεν είναι διαθέσιμες, ψάχνουμε κατά προσέγγιση μεθόδους. Υπάρχουν πολλές αριθμητικές τεχνικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπερνικήσουν τα μειονεκτήματα των αναλυτικών μεθόδων.

Οποιοσδήποτε αριθμητικός υπολογισμός πεδίων περιλαμβάνει, μεταξύ των άλλων, τα ακόλουθα βήματα:

- Καθορισμός της περιοχής στην οποία η εξίσωση πρόκειται να επιλυθεί. Αυτό είναι το πεδίο του κατά προσέγγιση προβλήματος (διακριτοποίηση της περιοχής του πεδίου).
- Διατύπωση του προβλήματος
- Σχηματισμός ενός συστήματος εξισώσεων των οποίων η λύση δίνει το αριθμητικά υπολογισμένο κατά προσέγγιση πεδίο.

3.2.1 Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών

Μία από τις παλαιότερες και πιο συχνά χρησιμοποιούμενες αριθμητικές μεθόδους, είναι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (*Finite Difference Method*).

Τα κυριότερα μειονεκτήματα της *FDM* είναι η έλλειψη γεωμετρικής προσαρμοστικότητας στην προσαρμογή των ανώμαλων μορφών και στον μεγάλο αριθμό σημείων που απαιτούνται στις περιοχές όπου οι ποσότητες του πεδίου μεταβάλλονται πολύ γρήγορα.

Μία άλλη δυσκολία στη χρήση της *FDM* είναι η επεξεργασία των ιδιζόντων σημείων και των ορίων ή των οριακών διεπαφών που δεν συμπίπτουν με τις σταθερές ισότιμες επιφάνειες.

Η *FDM* δεν χρησιμοποιείται ευρέως σήμερα όσο στο παρελθόν, αλλά μερικά αποτελεσματικά προγράμματα υπάρχουν και είναι ακόμη σε χρήση.

3.2.2 Η μη ομογενής εξίσωση Helmholtz

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε λίγα για την εξίσωση *Helmholtz*, διότι η εξίσωση διάχυσης που δέπει την κατανομή των δινορευμάτων, που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό τους σε μη καταστροφικές δοκιμές, έχει την ίδια μορφή.

Έστω η μη ομογενής εξίσωση *Helmholtz*:

$$\nabla \cdot (p \nabla u) + k^2 u = g \quad (3.1)$$

όπου u , μία βαθμωτή συνάρτηση δυναμικού, p η γνωστή συνάρτηση $p(x, y, z)$ που περιγράφει τις ιδιότητες του μέσου, k μία σταθερά (ανεξάρτητη της θέσης) και $g(x, y, z)$ γνωστή διέγερση.

Αν S είναι η επιφάνεια που περικλείει το σύστημα, ας θεωρήσουμε ότι οι οριακές συνθήκες *Dirichlet* σ' ένα της τμήμα S_1 και ομογενείς *Neumann* ($\partial u / \partial n = 0$) στο υπόλοιπο τμήμα S_2 .

Από την (3.1) εύκολα προκύπτουν οι ακόλουθες ειδικές περιπτώσεις:

- a. Εξίσωση *Laplace* (για $k=g=0$, p σταθερά)

$$\nabla^2 u = 0$$

- b. Εξίσωση *Poisson*

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla u) = -\rho \quad (\epsilon = p, \rho = -g, k = 0)$$

- c. Διδιάστατη εξίσωση *Helmholtz* ($g=0$, $p=1$)

$$\nabla_T^2 H_z + k_C^2 H_z = 0 \quad \left(\nabla_T^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

που περιγράφει τη διάδοση κύματος *TE* σε κυματοδηγό, κλπ.

Μπορεί να αποδειχθεί με βάση τις αρχές του λογισμού των μεταβολών ότι η λύση της (3.1) ισοδυναμεί με τη στασιμοποίηση της:

$$F(u) = \frac{1}{2} \iint_S \{ p(\nabla u)^2 dS - k^2 u^2 + 2gu \} \quad (3.2)$$

δηλαδή η (3.1) είναι η εξίσωση *Euler* που αντιστοιχεί στη στασιμοποίηση της.

Πράγματι, έστω ότι η u επαληθεύει την (3.1), και ότι $\bar{u} = u + \varepsilon\eta$ είναι μία οποιαδήποτε συνάρτηση, όπου κατά τα γνωστά η η μηδενίζεται στην S_1 . Τότε:

$$\begin{aligned} F(\bar{u}) &= F(u + \varepsilon\eta) = \frac{1}{2} \iiint_V \{ p(\nabla u + \varepsilon\nabla\eta)^2 - k^2(u + \varepsilon\eta)^2 + 2g(u + \varepsilon\eta) \} dV \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \iiint_V \{ p(\nabla u)^2 - k^2 u^2 + 2gu \} dV \right\} + \iiint_V \{ 2\varepsilon p \nabla u \cdot \nabla \eta - 2\varepsilon k^2 u \eta + 2\varepsilon g \eta \} dV \\ &\quad + \iiint_V \{ \varepsilon^2 p(\nabla \eta)^2 - \varepsilon^2 k^2 \eta^2 \} dV \end{aligned}$$

ή

$$F(u + \varepsilon\eta) = F(u) + \varepsilon \iiint_V \{ p \nabla u \cdot \nabla \eta - k^2 u \eta + g \eta \} dV + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \iiint_V \{ p(\nabla \eta)^2 - k^2 \eta^2 \} dV \quad (3.3)$$

Η $F(u)$ στασιμοποιείται για $\bar{u} = u$, όταν η πρώτη μεταβολή:

$$\delta F = \varepsilon \iiint_V \{ p \nabla u \cdot \nabla \eta - k^2 u \eta + g \eta \} dV \quad (3.4)$$

είναι μηδενική.

Από τη διανυσματική όμως ταυτότητα:

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla f \cdot \mathbf{A}$$

Για $f = \eta$ και $\mathbf{A} = p \nabla u$, έχουμε:

$$p \nabla u \cdot \nabla \eta = \nabla \cdot (\eta p \nabla u) - \eta \nabla \cdot (p \nabla u) \quad (3.5)$$

Αντικατάσταση της (3.5) στην (3.4) δίνει:

$$\delta F = \varepsilon \iiint_V \nabla \cdot (\eta p \nabla u) dV - \varepsilon \iiint_V \eta \{ \nabla \cdot (p \nabla u) + k^2 u - g \} dV$$

ή με το θεώρημα του *Gauss*:

$$\delta F = \varepsilon \iint_{S_1+S_2} \eta p \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_V \nabla \cdot (\eta p \nabla u) dV - \varepsilon \iiint_V \eta \{ \nabla \cdot (p \nabla u) + k^2 u - g \} dV \quad (3.6)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα στην (3.6), λόγω της (3.1), είναι μηδέν. Αλλά και το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, αφού στη μεν S_1 έχουμε $\eta=0$, στη δε S_2 έχουμε $\partial u / \partial n = 0$. Άρα:

$$\delta F = 0 \quad (3.7)$$

Επίσης:

$$\nabla^2 u + k^2 u = g \quad (3.8)$$

Θεωρούμε ότι η u ικανοποιεί τις συνθήκες *Dirichlet* και / ή τις ομογενείς *Neumann*.

Σύμφωνα με την (3.2), η ισοδύναμη συναρτησιακή είναι η:

$$F(u) = \frac{1}{2} \iint_S (\nabla u)^2 dS - \frac{1}{2} k^2 \iint_S u^2 dS + \iint_S g u dS \quad (3.9)$$

Έτσι, το πρόβλημα της επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης (3.8), ανάγεται στο πρόβλημα της στασιμοποίησης της ενεργειακής συνάρτησης (3.9). Αξίζει, ίσως, να θυμίσουμε στο σημείο αυτό το θεώρημα του λογισμού των μεταβολών που αναφέρεται στην ελαχιστοποίηση της ενεργειακής συνάρτησης. Σύμφωνα, λοιπόν, με το θεώρημα αυτό αν L είναι κάποιος γραμμικός, αυτοσυζυγής, θετικά ορισμένος τελεστής και u η ζητούμενη απόκριση στη δοσμένη διέγερση f , η λύση της:

$$L \cdot u = f \quad (3.10)$$

ελαχιστοποιεί την:

$$F(u) = \langle Lu, u \rangle - \langle u, f \rangle - \langle f, u \rangle \quad (3.11)$$

και αντίστροφα, η ελαχιστοποιητική συνάρτηση της (3.11) είναι λύση της (3.10), όπου ο συμβολισμός $\langle u, v \rangle$ αναφέρεται στο εσωτερικό γινόμενο $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \cdot v^* d\Omega$.

Επειδή η εύρεση της ακριβούς λύσης των (3.10), (3.11) στα πραγματικά φυσικά προβλήματα είναι δυσχερέστατη, συνηθέστατα δε αδύνατη, αναζητούνται προσεγγιστικές λύσεις. Ανάλογα, λοιπόν, με το αν η προσεγγιστική επίλυση επιχειρείται από την ενεργειακή συναρτησιακή (3.11) ή τη διαφορική εξίσωση (3.10), χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι *Rayleigh-Ritz* και σταθμισμένων υπολοίπων αντίστοιχα.

3.2.3 Η μέθοδος Rayleigh-Ritz

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου *Rayleigh-Ritz*, η άγνωστη συνάρτηση u προσεγγίζεται από ένα γραμμικό συνδυασμό n κατάλληλων βασικών συναρτήσεων $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, με σταθερούς συντελεστές c_1, c_2, \dots, c_n :

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \quad (3.12)$$

Στη συνέχεια η δοκιμαστική λύση (3.12) εισάγεται στην ενεργειακή συνάρτηση (3.11), μετατρέποντάς την σε μια συνάρτηση $\Phi(c_1, c_2, \dots, c_n)$ των άγνωστων σταθερών συντελεστών c_1, c_2, \dots, c_n . Από την απαίτηση, όμως, ελαχιστοποίησης της (3.11), έχουμε τις αναγκαίες συνθήκες:

$$\frac{\partial \Phi(c_1, c_2, \dots, c_n)}{\partial c_i} = 0 \quad (3.13)$$

Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (3.13), δίνει τις τιμές των σταθερών c_1, c_2, \dots, c_n που προσδιορίζουν την προσεγγιστική λύση (3.12).

Αν, ειδικότερα, πρόκειται για πραγματική συναρτησιακή της μορφής (3.11), η συνάρτηση Φ που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι η:

$$\Phi(c_1, c_2, \dots, c_n) = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i L \phi_i, \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \right\rangle - 2 \left\langle \sum_{i=1}^n c_i \phi_i, f \right\rangle \quad (3.14)$$

και το σύστημα των εξισώσεων (3.13) είναι της μορφής:

$$\{S\}\{c\} = \{b\} \quad (3.15)$$

όπου τα στοιχεία του πίνακα-στήλης $\{c\}$, είναι οι άγνωστοι συντελεστές c_i ($i=1, 2, \dots, n$), του πίνακα στήλη $\{b\}$ οι:

$$b_i = \langle \phi_i, f \rangle \quad (3.16)$$

και του τετραγωνικού πίνακα $[S]$, οι:

$$s_{ij} = \langle \phi_i, L\phi_j \rangle \quad (3.17)$$

Η μέθοδος *Rayleigh-Ritz* είναι η κύρια μέθοδος για την κατασκευή μιας προσέγγισης στην ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης. Άλλες άμεσες μέθοδοι, είναι οι πεπερασμένες διαφορές *Euler*, οι μέθοδοι *Cantorovich*, και χρησιμοποιούνται λιγότερο συχνά. Αυτές οι μέθοδοι έχουν εφαρμοστεί για τον υπολογισμό των απωλειών των δινορευμάτων σε διάφορες δομές με σχετικά απλή γεωμετρία.

Οι προαναφερθείσες μέθοδοι, έχουν το μειονέκτημα ότι για τα προβλήματα με περίπλοκη γεωμετρία, οι προσεγγιστικές συναρτήσεις είναι δύσκολο να κατασκευαστούν. Εντούτοις, η μέθοδος *Rayleigh-Ritz* έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για τη διατύπωση των διακεκριμένων εξισώσεων, επειδή παρέχει μια συστηματική διαδικασία για την παραγωγή των προσεγγιστικών συναρτήσεων.

3.2.4 Μέθοδος σταθμισμένων υπολοίπων

Όπως στη μέθοδο *Rayleigh-Ritz* έτσι και στη μέθοδο των σταθμισμένων υπολοίπων (*Weighted Residual Method*), η άγνωστη συνάρτηση u προσεγγίζεται από την (3.12). Προκειμένου να υπολογιστούν οι συντελεστές c_1, c_2, \dots, c_n , έτσι ώστε η \bar{u} να αποτελεί μια 'καλή' προσέγγιση της λύσης (3.10), το υπόλοιπο:

$$R = Lu - f \quad (3.18)$$

'εξαναγκάζεται' σε μηδενισμό, κατά μέση έννοια, με επιβολή μηδενισμού στα διαδοχικά 'σταθμισμένα' ολοκληρώματα:

$$\langle w_j, R \rangle = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.19)$$

όπου w_j ($j=1, 2, \dots, n$), είναι ένα σύνολο συναρτήσεων βάρους. Με αντικατάσταση των (3.12), (3.18) στις (3.19) προκύπτει, για γραμμικό τελεστή L , το σύστημα:

$$\left\langle w_j, \sum_{i=1}^n c_i L\phi_i - f \right\rangle = 0, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.20)$$

δηλαδή το:

$$\sum_{i=1}^n \langle w_j, L\phi_i \rangle c_i = \langle w_j, f \rangle \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.21)$$

που γράφεται αναλυτικά ως:

$$\left. \begin{aligned} \langle w_1, L\phi_1 \rangle c_1 + \langle w_1, L\phi_2 \rangle c_2 + \dots + \langle w_1, L\phi_n \rangle c_n &= \langle w_1, f \rangle \\ \langle w_2, L\phi_1 \rangle c_1 + \langle w_2, L\phi_2 \rangle c_2 + \dots + \langle w_2, L\phi_n \rangle c_n &= \langle w_2, f \rangle \\ \dots & \dots \\ \langle w_n, L\phi_1 \rangle c_1 + \langle w_n, L\phi_2 \rangle c_2 + \dots + \langle w_n, L\phi_n \rangle c_n &= \langle w_n, f \rangle \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Αν το σύστημα των εξισώσεων (3.22) γραφεί με την μορφή της μητρικής εξίσωσης (3.15), έχουμε:

$$b_i = \langle w_i, f \rangle \quad (3.23)$$

και:

$$s_{ij} = \langle w_i, L\phi_j \rangle \quad (3.24)$$

Ανάλογα με τη μορφή των συναρτήσεων βάρους w_j ($j=1, 2, \dots, n$), διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

a. $w_j = \phi_j$ (Μέθοδος Galerkin)

Οι (3.23), (3.24) για τις συναρτήσεις βάρους $w_j = \phi_j$ καταλήγουν στις:

$$s_{ij} = \langle \phi_i, L\phi_j \rangle, \quad b_i = \langle \phi_i, f \rangle \quad (3.25)$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε τη μέθοδο *Galerkin*, που όπως φαίνεται από τις (3.16), (3.17), (3.23), (3.24), για L αυτοσυζυγή και θετικά ορισμένο, είναι ισοδύναμη με τη μέθοδο *Rayleigh-Ritz*. Η μέθοδος *Galerkin* δίνει, συνήθως, τις καλύτερες προσεγγίσεις σε σύγκριση με τις άλλες δυνατές εκλογές των συναρτήσεων βάρους, χρησιμοποιείται δε ευρύτατα στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

b. $w_j = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ (Μέθοδος Point Matching)

Στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις βάρους επιλέγονται να είναι οι συναρτήσεις δ του *Dirac*, που ορίζονται από την ιδιότητά τους $\langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), f \rangle = f_j$, όπου f_j είναι η τιμή της f στο σημείο \mathbf{r}_j . Στη μέθοδο αυτή, είναι φανερό ότι η (3.10) ικανοποιείται στα διακριτά σημεία στα οποία αντιστοιχίζονται οι συναρτήσεις $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$, αφού στις θέσεις αυτές το υπόλοιπο R μηδενίζεται. Η μέθοδος αυτή αναφέρεται και ως *Collocation method*. Τα στοιχεία των πινάκων $[S]$ και $\{b\}$ δίνονται από τις:

$$s_{ij} = (L\phi_j)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}, \quad b_i = f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (3.26)$$

c. $w_j = L\phi_j$ (Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων. Least Squares)

Στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού σφάλματος.

$$F_R = \langle Lu - f, Lu - f \rangle \quad (3.27)$$

δηλαδή ο μηδενισμός των παραγώγων $\partial F_R / \partial c_j$ ($j=1, 2, \dots, n$).

Έχουμε συνεπώς:

$$\frac{\partial F_R}{\partial c_j} = 2 \left\langle Lu - f, \frac{\partial}{\partial c_j} (Lu - f) \right\rangle = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.28)$$

ή

$$\langle Lu - f, L\phi_j \rangle = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.29)$$

δηλαδή, το υπόλοιπο $R = Lu - f$, είναι ορθογωνικό προς τις συναρτήσεις βάρους $w_j = L\phi_j$. Τα στοιχεία των πινάκων $[S]$ και $\{b\}$ είναι:

$$s_{ij} = \langle L\phi_i, L\phi_j \rangle \quad \text{και} \quad b_i = \langle L\phi_i, f \rangle \quad (3.30)$$

d. $w_j = 1$ στην υποπεριοχή Ω_j και 0 εκτός Ω_j (**Subdomain Collocation**)

Δηλαδή στη μέθοδο αυτή, ουσιαστικά, επιβάλλεται ο μηδενισμός του ολοκληρώματος του υπολοίπου $R = Lu - f$, στην υποπεριοχή Ω_j .

Ας αναφέρουμε, τέλος, ότι μερικές φορές η μέθοδος των σταθμισμένων υπολοίπων αναφέρεται και ως μέθοδος των ροπών, ιδιαίτερα όταν οι συναρτήσεις βάρους εκλέγονται να είναι $1, x, x^2, \dots$.

Η μέθοδος των σταθμισμένων υπολοίπων (*WRM*) χρησιμοποιείται ευρέως στην ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων και, γενικά, στα προβλήματα όπου οι διαφορικές εξισώσεις και οι οριακές συνθήκες μπορούν να καθοριστούν. Πράγματι, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων και η μέθοδος των οριακών στοιχείων, μπορούν να θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις της μεθόδου των σταθμισμένων υπολοίπων. Ακόμη και η διαδικασία των πεπερασμένων διαφορών είναι από μόνη της μια μέθοδος σταθμισμένων υπολοίπων.

3.2.5 Η μέθοδος των οριακών στοιχείων

Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου των οριακών στοιχείων (*Boundary Element Method*), είναι ότι μειώνεται η διαστατικότητα του προβλήματος. Η *BEM* είναι χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές ειδικά στα προβλήματα ανοικτών ορίων.

Το μειονέκτημα της *BEM* είναι ότι οι προκύπτουσες μήτρες που προκύπτουν συνήθως δεν είναι συμμετρικές, σε σύγκριση με τις μήτρες που προκύπτουν με χρήση των μεθόδων *FDM* και *FEM* που είναι συνήθως συμμετρικές και θετικές.

Τα τελευταία χρόνια, έχουν αναπτυχθεί υβριδικές μέθοδοι, που συνδυάζουν την *BEM* και την *FEM*. Ο συνδυασμός των *BEM* και *FEM* στο ίδιο πρόβλημα, μειώνει σημαντικά την

υπολογιστική προσπάθεια. Κατά την χρησιμοποίηση της υβριδικής μεθόδου, ολόκληρη η περιοχή διαιρείται σε υποπεριφέρειες, όπου η εφαρμογή της *FEM* είναι προτιμότερη (μη γραμμικές περιοχές και περιοχές με περίπλοκα όρια, κ.λ.π.) και στις υποπεριφέρειες όπου η *BEM* είναι προτιμότερη (γραμμικές περιοχές που επεκτείνονται στο άπειρο, το διάστημα μεταξύ των απόμακρων αντικειμένων, κ.λ.π.).

Η υβριδική μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα προβλήματα ανοικτών ορίων με ανομοιογενείς περιοχές χωρίς πηγή ή τις περιοχές χωρίς δινορεύματα, όπου άλλες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται από κοινού με την *FEM*, όπως τα άπειρα στοιχεία, δεν εφαρμόζονται.

3.2.6 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Η κανονική διαδικασία στον υπολογισμό πεδίων από την *FEM* περιλαμβάνει, τα ακόλουθα βήματα:

Διακριτοποίηση της περιοχής λύσης: Κατασκευάζεται ένα πλέγμα (grid) το οποίο περιγράφει τη γεωμετρία του προβλήματος χρησιμοποιώντας πεπερασμένο αριθμό στοιχείων. Κάθε στοιχείο, καθώς και οι κόμβοι του αριθμούνται με μοναδικό τρόπο. Σε κάθε στοιχείο αντιστοιχίζεται επίσης και ένας αριθμός περιοχής, βάσει του οποίου θα αποδοθούν στη συνέχεια στο στοιχείο συγκεκριμένες ηλεκτρικές ιδιότητες, όπως αγωγιμότητα κλπ. Περισσότερα του ενός στοιχεία μπορούν να έχουν τον ίδιο αριθμό περιοχής. Η αρχική αρίθμηση, καθώς και ο αρχικός αριθμός στοιχείων δεν παραμένει σταθερός κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος. Αφενός μεν, γίνεται επαναρίθμηση προκειμένου να μειωθεί ο απαιτούμενος χώρος στη μνήμη του Η/Υ και αφετέρου ο αριθμός των στοιχείων αυξάνεται με διαδοχικές επαναλήψεις, χρήσει κριτηρίων σύγκλισης, για να επιτευχθεί μεγαλύτερη ακρίβεια στη λύση του προβλήματος.

Η ισχυρότερη αριθμητική μέθοδος, εμφανίζεται να είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (*Finite Element Method*), η όποια, από μαθηματική άποψη, μπορεί να θεωρηθεί επέκταση της τεχνικής *Rayleigh-Ritz / Galerkin* στη συγκρότηση των ισότιμων συναρτήσεων, των οποίων οι γραμμικοί συνδυασμοί προσεγγίζουν τις άγνωστες λύσεις.

1. **Εκλογή συνάρτησης μορφής:** Επιλέγεται η συνάρτηση που θα προσεγγίζει τη μεταβολή της άγνωστης μεταβλητής μέσα σε κάθε στοιχείο. Προτιμούνται συνήθως πολυώνυμα, γιατί είναι απλούστερος ο μαθηματικός χειρισμός τους.

2. **Προσδιορισμός στοιχειακών εξισώσεων:** Γράφονται οι εξισώσεις, που με τη βοήθεια των συναρτήσεων μορφής εκφράζουν τις ιδιότητες του κάθε στοιχείου.

3. **Συνάθροιση των στοιχειακών εξισώσεων:** Οι στοιχειακές εξισώσεις συναθροίζονται κατάλληλα προκειμένου να σχηματιστεί ένα σύστημα εξισώσεων το οποίο περιγράφει το πρόβλημα συνολικά. Επίσης, εισάγονται οι οριακές συνθήκες του προβλήματος.

4. **Λύση του συστήματος εξισώσεων:** Επιλύεται το σύστημα, το οποίο προέκυψε από το βήμα 4, προκειμένου να βρεθούν οι τιμές της άγνωστης μεταβλητής στους κόμβους των στοιχείων.

5. **Πρόσθετοι υπολογισμοί:** Γνωρίζοντας πλέον την τιμή της μεταβλητής του προβλήματος σε κάθε σημείο της περιοχής λύσης, είναι δυνατόν να υπολογιστούν από αυτήν τιμές και για άλλα μεγέθη που ενδιαφέρουν.

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα της *FEM* είναι ότι η δημιουργία πλέγματος, μπορεί να εφαρμοστεί σ' ένα μεγάλο φάσμα προβλημάτων. Γενικά, αυξάνοντας τον αριθμό των στοιχείων, βελτιώνουμε τα αποτελέσματα που θέλουμε να λάβουμε. Καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των στοιχείων που χρησιμοποιούμε, αυξάνεται και ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση του προγράμματος. Ο χρόνος που απαιτείται για να ετοιμαστούν τα δεδομένα εισόδου και για να ερμηνευθούν τα αποτελέσματα είναι επίσης σημαντικός. Περισσότεροι περιορισμοί, είναι ο χρόνος που απαιτείται από τον υπολογιστή καθώς και ο χώρος που απαιτείται για την αποθήκευση, οι οποίοι μπορεί να εμποδίσουν τη χρήση μεγαλύτερου αριθμού πεπερασμένων στοιχείων για να προσομοιώσουν τα συνεχή μέσα.

Προκειμένου να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος και το κόστος της ανθρώπινης εργασίας, έχουν αναπτυχθεί πεπερασμένα στοιχεία που προσαρμόζονται από μόνα τους στη δημιουργία του πλέγματος και τα οποία χρησιμοποιούνται ευρέως στις μέρες μας. Τα στοιχεία αυτά παράγουν δομές πλέγματος, από την περιγραφή του προβλήματος με τις λιγότερες δυνατές πληροφορίες που καθορίζονται από τον χρήστη και οδηγούν σε μια αποδεκτή ακρίβεια της προκύπτουσας λύσης στον ελάχιστο χρόνο. Η προσαρμοστική ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων, βασίζεται στη μοντελοποίηση του πλέγματος και



4. ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

4.1 Εισαγωγή

Στα περισσότερα προβλήματα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι δυνατόν να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις, καθώς και οι αρχικές οριακές συνθήκες που τα περιγράφουν. Συνήθως όμως, το πρόβλημα είναι δυνατόν να λυθεί με αναλυτικές μεθόδους μόνον όταν πρόκειται για πολύ απλές γεωμετρίες. Σε σύνθετα προβλήματα είναι αναγκασμένος κανείς, είτε να καταφύγει σε παραδοχές προκειμένου να απλοποιήσει το πρόβλημα, είτε να ανατρέξει σε μεθόδους της αριθμητικής ανάλυσης οι οποίες όμως δεν δίνουν αναλυτική λύση για το πρόβλημα.

Μία από τις μεθόδους της αριθμητικής ανάλυσης είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων *FEM*, η οποία βασίζεται στο λογισμό των μεταβολών. Στη μέθοδο αυτή, η περιοχή μέσα στην οποία αναζητείται λύση για το πρόβλημα (περιοχή λύσης, *solution region*) προσεγγίζεται από μία συνάθροιση (*assemblage*) στοιχείων. Κατασκευάζεται δηλαδή, μια διαμέριση της περιοχής λύσης, που αποτελείται από διακριτά στοιχεία τα οποία μπορούν να έχουν διάφορα σχήματα. Έτσι, για παράδειγμα, σε δισδιάστατα προβλήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως στοιχεία τρίγωνα ή τετράπλευρα, ενώ σε τρισδιάστατα προβλήματα τετράεδρα ή παραλληλεπίπεδα.

Στη συνέχεια υπολογίζεται η άγνωστη μεταβλητή του προβλήματος για τους κόμβους των στοιχείων. Κατόπιν χρησιμοποιούνται κατάλληλες συναρτήσεις, που ονομάζονται συναρτήσεις μορφής ή παρεμβολής (*shape or interpolation functions*), προκειμένου να βρεθεί η τιμή της μεταβλητής στους του κάθε στοιχείου.



$$dW_e + dW_m + dW_t + dW_r = 0 \quad (4.1)$$

Η ενέργεια W_e του ηλεκτρικού πεδίου που είναι ενταμιευμένη στον όγκο V , λόγω της

$w_e = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E^2$, δίνεται από τη σχέση:

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon E^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV \quad (4.2)$$

Έτσι η αύξηση dW_e της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$dW_e = \frac{\partial W_e}{\partial t} dt = \left(\frac{1}{2} \iiint_V \epsilon \cdot \frac{\partial(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})}{\partial t} dV \right) dt = \left(\iiint_V \epsilon \cdot \mathbf{E} \cdot \frac{\partial(\mathbf{E})}{\partial t} dV \right) dt \quad (4.3)$$

Ανάλογα, για την ενέργεια W_m του μαγνητικού πεδίου και τη μεταβολή της dW_m , λόγω της

$w_m = \frac{1}{2} \mu \cdot H^2$, προκύπτει:

$$W_m = \iiint_V w_m \cdot dV = \frac{1}{2} \iiint_V \mu \cdot H^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_V \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dV \quad (4.4)$$

και

$$dW_m = \frac{\partial W_m}{\partial t} dt = \left(\frac{1}{2} \iiint_V \mu \frac{\partial(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})}{\partial t} dV \right) dt = \left(\iiint_V \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dV \right) dt \quad (4.5)$$

Οι απώλειες *Joule* dW_t , λόγω της $p_t = \sigma \cdot E^2$, δίνονται από την:

$$dW_t = \left(\iiint_V p_t dV \right) dt = \left(\iiint_V \sigma \cdot E^2 dV \right) dt = \left(\iiint_V \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV \right) dt \quad (4.6)$$

Για τον τέταρτο όρο, από την $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, έχουμε:

$$dW_r = \left(\iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \right) dt = \left(\iint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \right) dt \quad (4.7)$$

ή, με εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss στο δεξιό μέλος της (4.7):

$$dW_r = \left(\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \right) dt \quad (4.8)$$

Αντικατάσταση των (4.3), (4.5), (4.6) και (4.8) στην (4.1) δίνει:

$$\left\{ \iiint_V \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dV + \iiint_V \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dV + \iiint_V \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV + \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \right\} dt = 0 \quad (4.9)$$

$$\iiint_V \left\{ \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right\} dV = 0 \quad (4.10)$$

Αφού η σχέση (4.10) ισχύει για οποιονδήποτε όγκο V του πεδίου, είναι προφανές ότι, η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι σε κάθε σημείο ίση με μηδέν, ισχύει δηλαδή:

$$\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0 \quad (4.11)$$

Η (4.11), αν ο τελευταίος όρος στο αριστερό μέλος της αντικατασταθεί από τη διανυσματική ταυτότητα:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \quad (4.12)$$

γράφεται:

$$\left(\epsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} \right) \cdot \mathbf{E} + \left(\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4.13)$$

Από την (4.13) μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι οι παραστάσεις μέσα στις παρενθέσεις είναι ίσες με μηδέν. Πράγματι, αφού η (4.13) ισχύει για κάθε κατάσταση του ηλεκτρομαγνητικού συστήματος, αν θεωρήσουμε μια νέα κατάσταση όπου τα διανύσματα \mathbf{E}' και \mathbf{H}' δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \quad (4.14)$$

και

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \mathbf{H}_0 \quad (4.15)$$

όπου \mathbf{H}_0 σταθερό διάνυσμα (ανεξάρτητο της θέσης και του χρόνου), τότε, σύμφωνα με την (4.13) έχουμε:

$$\left(\epsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}' - \nabla \times \mathbf{H}' \right) \cdot \mathbf{E}' + \left(\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}' \right) \cdot \mathbf{H}' = 0 \quad (4.16)$$

Η (4.16), αν λάβουμε υπόψη τις (4.14), (4.15) και ότι $\nabla \times \mathbf{H}_o = (\partial \mathbf{H}_o / \partial t) = 0$, γράφεται:

$$\left(\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} \right) \cdot \mathbf{E} + \left(\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right) \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{H}_o) = 0 \quad (4.17)$$

Από την κατά μέλη αφαίρεση των (4.17) και (4.13) προκύπτει η:

$$\mathbf{H}_o \cdot \left(\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right) = 0 \quad (4.18)$$

ή, επειδή $\mathbf{H}_o \neq 0$, η:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4.19)$$

Τέλος, από την αντικατάσταση της (4.19) στην (4.13), έχουμε:

$$\left(\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} \right) \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4.20)$$

Και επειδή εν γένει είναι $\mathbf{E} \neq 0$,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.21)$$

Με την εισαγωγή των μεγεθών της διηλεκτρικής μετατόπισης (ή πυκνότητας ηλεκτρικής ροής) \mathbf{D} , της πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος \mathbf{J} και της μαγνητικής επαγωγής (ή πυκνότητας μαγνητικής ροής) \mathbf{B} , που ορίζονται από τις -καταστατικές- σχέσεις:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} \quad (4.24)$$

οι (4.19) και (4.21) γράφονται:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.25)$$

και

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.26)$$



Η μονάδα της μαγνητικής επαγωγής \mathbf{B} στο MKSA είναι το *tesla* (T), ή *weber x meter*⁻² ($1\text{Wb m}^{-2} = 1\text{ V s m}^{-2} = 10^4\text{ Gauss}$).

Οι εξισώσεις (4.25) και (4.26), που είναι οι **δύο πρώτες εξισώσεις** του *Maxwell*, δεν περιλαμβάνουν στις εκφράσεις τους τα χαρακτηριστικά μεγέθη μ , ϵ , και σ που περιγράφουν τις ηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες του μέσου.

Οι πιο πάνω εξισώσεις εξακολουθούν να ισχύουν και σε πεδία που εκτείνονται σε ανομοιογενή, ανισότροπα ή και μη γραμμικά μέσα. Στην περίπτωση αυτή οι αξιωματικές προτάσεις $w_e = \frac{1}{2}\epsilon \cdot E^2$, $w_m = \frac{1}{2}\mu \cdot H^2$, $p_t = \sigma \cdot E^2$ (η τέταρτη πρόταση παραμένει αμετάβλητη) πρέπει να αντικατασταθούν από τις γενικότερες:

$$w_e = \int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \quad (4.27)$$

$$w_m = \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (4.28)$$

και:

$$p_t = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (4.29)$$

4.2.2 Η μαγνητική ροή

Από την (4.25), αν πάρουμε την απόκλιση στα δύο μέλη της, έχουμε:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.30)$$

Με εναλλαγή της θέσης των διαφορικών τελεστών $\nabla \cdot$ και $\frac{\partial}{\partial t}$ στο δεύτερο μέλος, επειδή το πρώτο μέλος είναι προφανώς ίσο με μηδέν, προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.31)$$

ή

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \text{const} \quad (4.32)$$



$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \quad (4.36)$$

Αν, τώρα, το χωρικό ολοκλήρωμα της (4.36) μετασχηματιστεί σύμφωνα με το θεώρημα του Gauss σε επιφανειακό ολοκλήρωμα, προκύπτει η εξίσωση

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4.37)$$

Η (4.37), (ή ισοδύναμα η (4.33) και σε συνδυασμό προς την (4.26) που εκφράζει ότι το μαγνητικό πεδίο είναι, εν γένει, στροβιλό) δηλώνει ότι το μαγνητικό πεδίο είναι σωληνοειδές και ότι οι γραμμές της μαγνητικής επαγωγής - αντίθετα προς τις ροϊκές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που είναι πάντα ανοιχτές με τα άκρα σε θέσεις φορτίων - είναι κλειστές χωρίς αρχή και τέλος.

Επίσης, από την (4.37) εύκολα συμπεραίνουμε ότι η μαγνητική ροή που διέρχεται από οποιαδήποτε διατομή ενός σωλήνα ροής είναι σταθερή. Συνεπώς, εκεί όπου ο σωλήνας είναι στενός (πύκνωση δυναμικών γραμμών) έχουμε μεγάλες τιμές της μαγνητικής επαγωγής, ενώ εκεί όπου ο σωλήνας είναι φαρδύς (αραίωση δυναμικών γραμμών) έχουμε μικρές τιμές της μαγνητικής επαγωγής.

4.2.3 Εξίσωση συνέχειας

Αν πάρουμε την απόκλιση στα δύο μέλη της (4.26) προκύπτει η:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.38)$$

Η (4.38), με εναλλαγή της θέσης των δύο διαφορικών τελεστών $\nabla \cdot$ και $\frac{\partial}{\partial t}$ στο δεξιό όρο και αφού λάβουμε υπόψη τη διανυσματική ταυτότητα σύμφωνα με την οποία η απόκλιση της στροφής οποιουδήποτε διανύσματος είναι ίση με μηδέν, γράφεται:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.39)$$

Από την ολοκλήρωση της (4.39) σ' ένα τμήμα όγκου V που περιορίζεται από την επιφάνεια S παίρνουμε:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4.47)$$

Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, η (4.45) δεν είναι ανεξάρτητη αλλά σχετίζεται με την εξίσωση του Maxwell (4.26) μέσω της εξίσωσης συνέχειας (4.46).

Ας σημειώσουμε, ακόμη, ότι στην προηγούμενη ανάλυση όπου θεωρήσαμε γνωστή την έννοια του ηλεκτρικού φορτίου, θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε και αντίστροφα ορίζοντας το φορτίο από την (4.43).

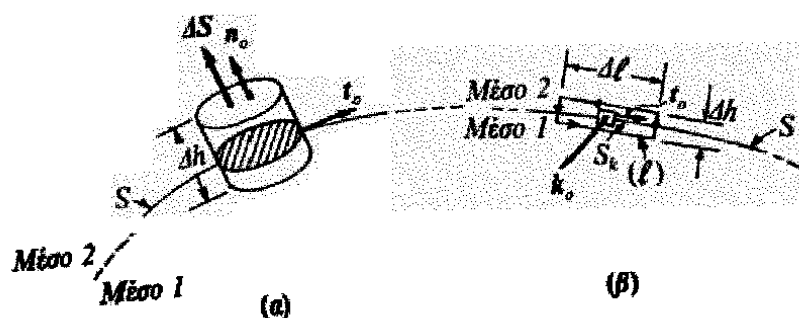
Τέλος, από τη μετατροπή του χωρικού ολοκληρώματος της (4.43) σε επιφανειακό, προκύπτει ο γενικός νόμος του Gauss:

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (4.48)$$

που ισχύει σε κάθε ηλεκτρικό πεδίο. Στην περίπτωση όπου εκτός από χωρικά έχουμε και επιφανειακά φορτία (στις διαχωριστικές επιφάνειες), ισχύει πάλι η (4.48) με τη διευκρίνιση ότι στο συνολικό φορτίο Q συμπεριλαμβάνονται τόσο τα χωρικά όσο και τα επιφανειακά φορτία.

4.2.4 Οριακές συνθήκες

Ας ζητήσουμε, στη συνέχεια, να προσδιορίσουμε τις συνθήκες που ικανοποιούν τα διάφορα μεγέθη του χρονικά μεταβαλλόμενου πεδίου πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια S δύο μέσων 1 και 2.



Σχήμα 4-2: Σχέσεις στην οριακή επιφάνεια S

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-2α, σε κάποια θέση της διαχωριστικής επιφάνειας θεωρούμε ένα μικρό κύλινδρο που οι δύο βάσεις του είναι παράλληλες προς τη διαχωριστική

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (4.51)$$

που εκφράζει την ισότητα των καθέτων συνιστωσών της μαγνητικής επαγωγής πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια (συνέχεια της κάθετης συνιστώσας της μαγνητικής επαγωγής).

Αν τώρα εφαρμόσουμε την (4.48) στον όγκο του κυλίνδρου του Σχήματος 4-2α, έχουμε:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_3} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (4.52)$$

όπου Q το φορτίο που περιέχεται στον όγκο V του κυλίνδρου. Όταν το ύψος του κυλίνδρου Δh τείνει στο μηδέν ($\Delta h \rightarrow 0$), ο όρος που αναφέρεται στην παράπλευρη επιφάνεια καθίσταται και πάλιν αμελητέος, οπότε, για πολύ μικρή διατομή ΔS , η (4.52) γράφεται:

$$D_{n2} \Delta S - D_{n1} \Delta S = Q \quad (4.53)$$

όπου D_{n2} , D_{n1} , οι κάθετες συνιστώσες της διηλεκτρικής μετατόπισης \mathbf{D} στα δύο μέσα.

Αλλά, στην περίπτωση όπου $\Delta h \rightarrow 0$, αν ρ_s είναι η πυκνότητα των επιφανειακών φορτίων, το φορτίο Q του κυλίνδρου είναι:

$$Q = \rho_s \Delta S \quad (4.54)$$

Έτσι, από την αντικατάσταση της (4.54) στην (4.53) παίρνουμε τη δεύτερη οριακή συνθήκη:

$$D_{n2} - D_{n1} = \rho_s \quad (4.55)$$

ή

$$\mathbf{n}_o (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \quad (4.56)$$

που καθορίζει ότι η διαφορά των καθέτων συνιστωσών της διηλεκτρικής μετατόπισης πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια είναι ίση με την πυκνότητα των επιφανειακών φορτίων (ασυνέχεια της κάθετης συνιστώσας της διηλεκτρικής μετατόπισης).

Αν τώρα ολοκληρώσουμε την (4.25) πάνω στην επιφάνεια S_k του μικρού ορθογωνίου του Σχήματος 4-2β προκύπτει η:

$$\iint_{S_k} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_k} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.57)$$







Η **τέταρτη εξίσωση** αποτελεί τη διαφορική μορφή του νόμου του *Gauss* στο ηλεκτρικό πεδίο.

Τέλος, η **πέμπτη εξίσωση** αναφέρεται στις δυνάμεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Σχετικά με τη σπουδαιότητα των εξισώσεων του *Maxwell* αρκεί να αναφέρουμε ότι αυτές δεν επαλήθευσαν απλώς όλα τα πειραματικά αποτελέσματα που ήταν γνωστά την εποχή της διατύπωσής τους, αλλά και οδήγησαν στη διαπίστωση και άλλων φαινομένων (π.χ. την ύπαρξη και διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων) που επιβεβαιώθηκαν μερικές δεκαετίες αργότερα.

Από τη μέχρι σήμερα εμπειρία πάνω στη μελέτη του πεδίου διαπιστώθηκε ότι οι εξισώσεις του *Maxwell* δεν μπορούν να αναχθούν σε άλλες απλούστερες, που να περιγράφουν πλήρως όλα τα φαινόμενα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

5. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΜΗ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΔΟΚΙΜΩΝ

Εξ ορισμού, μη καταστροφική δοκιμή ή έλεγχος είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της φυσικής κατάστασης εξαρτήματος ή υλικού χωρίς να απαιτείται εν όλο ή εν μέρει καταστροφή ή επιμερισμός αυτού και μετά τον έλεγχο το υλικό ή εξάρτημα δεν έχει απολέσει την ευχρηστότητά του, εφόσον δεν έχει διαπιστωθεί ελάττωμα. Η σπουδαιότητα των μη καταστροφικών ελέγχων δεν έγκειται μόνο στο προαναφερθέν γεγονός (της μη καταστροφής ή επιμερισμού του εξαρτήματος κατά τον έλεγχο) αλλά εξίσου ανάγεται στη δυνατότητα ανεύρεσης ελαττώματος εν τη γενέσει του και παράλληλα στη δυνατότητα εφαρμογής των μεθόδων αυτών σε μία σύγχρονη γραμμή παραγωγής. Αυτά τα πλεονεκτήματα οδηγούν στη συνεχή ανάπτυξη των μεθόδων μη καταστροφικού ελέγχου και η εφηρμοσμένη έρευνα επ' αυτών βρίσκεται σε συνεχή ανάπτυξη και εξέλιξη. Στην πράξη χρησιμοποιούνται πολλές μέθοδοι που εκμεταλλεύονται πολλές μέθοδοι που εκμεταλλεύονται οποιοδήποτε φυσικό φαινόμενο μπορεί να δώσει πληροφορία σχετικά με την κατάσταση του εξεταζόμενου υλικού. Οι σπουδαιότερες από αυτές αναφέρονται παρακάτω:

- Ακτινογραφία
- Υπέρηχοι
- Ηλεκτρομαγνητικές
- Διεισδυτικά υγρά
- Οπτική μέθοδος
- Ακουστικές μέθοδοι
- Θερμογραφία
- Ολογραφία

Οι ηλεκτρομαγνητικές μέθοδοι χωρίζονται παρακάτω σε:

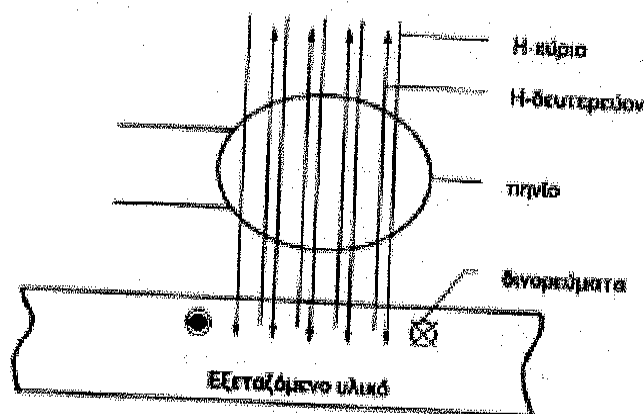
- Μαγνητικές
- Μαγνητικά σωματίδια
- Ηλεκτρικές
- Δινορεύματα

Κάθε μέθοδος έχει τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα καθώς και το δικό της πεδίο εφαρμογών.

5.1 Μη καταστροφική μέθοδος με δινορεύματα

5.1.1 Το φυσικό φαινόμενο

Το υπό εξέταση τοποθετείται κοντά σε κάποιο πηνίο το οποίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ή γενικά μεταβαλλόμενο ρεύμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5-1:



Σχήμα 5-1

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία δινορευμάτων στο υλικό λόγω επαγωγής (Νόμος Faraday). Το πλάτος και η φάση των δινορευμάτων εξαρτώνται από:

- Το αρχικό ή κύριο πεδίο του ρεύματος στο πηνίο διέγερσης
- Από τις ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του υλικού
- Από το δευτερογενές πεδίο των δινορευμάτων
- Από την παρουσία ρωγμών ή ανομοιογενειών στο υλικό

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στην περιοχή που περιβάλλει το δείγμα εξαρτάται από το ρεύμα διέγερσης του πηνίου καθώς και από τα δινορεύματα στο δείγμα, δηλαδή εξαρτάται μερικώς από τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά του υλικού.

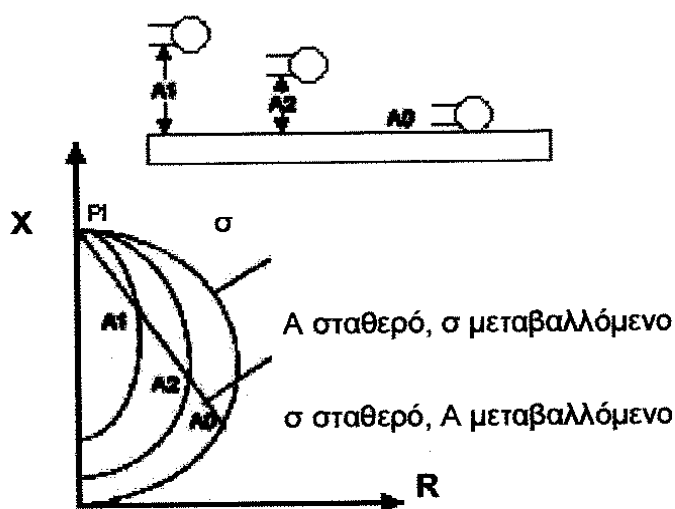
Έτσι η κατάσταση του υλικού μπορεί να ελεγχθεί μη καταστροφικά παρατηρώντας τα αποτελέσματα του πεδίου στα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά του πηνίου, που μπορεί να είναι



ωμικές απώλειες θα τείνουν και πάλι στο μηδέν. Τα δινορεύματα στο υλικό θα είναι πολύ υψηλά και θα μειώσουν ακόμη περισσότερο την αντίδραση του πηνίου στο σημείο P_3 . Γίνεται έτσι φανερή η μεγάλη επίδραση της αγωγιμότητας του υλικού στη σύνθετη αντίσταση του πηνίου.

β. Παράγοντας ανύψωσης

Άλλος ένας σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει τη σύνθετη αντίσταση του πηνίου είναι η απόσταση ή παράγοντας ανύψωσης (*lift-off factor*) ανάμεσα στο πηνίο και το αγώγιμο υλικό. Όπως είναι φυσικό για μεγάλες αποστάσεις το πεδίο δε φτάνει στην επιφάνεια του υπό εξέταση υλικού και δεν επάγει δινορεύματα. Σ' αυτήν την περίπτωση η σύνθετη αντίσταση του πηνίου παραμένει αμετάβλητη. Ωστόσο, εάν το πηνίο πλησιάζει στην επιφάνεια, επάγονται ολοένα και ισχυρότερα δινορεύματα, παράγοντας την οικογένεια καμπυλών που φαίνονται στο Σχήμα 5-3.



Σχήμα 5-3

Εάν το A είναι σταθερό και η αγωγιμότητα μεταβάλλεται παράγεται ένα ημικύκλιο. Εάν το A μειώνεται, η διάμετρος του ημικυκλίου αυτού αυξάνεται. Εάν η αγωγιμότητα είναι σταθερή και το A μεταβάλλεται παράγεται η καμπύλη από το σημείο P_1 στο A_0 . Όταν μετράμε μεταβολές στην αγωγιμότητα, οι μεταβολές του παράγοντα ανύψωσης είναι πολύ ανεπιθύμητες. Από την άλλη μεριά όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μεταβολή της σύνθετης αντίστασης του πηνίου με τον παράγοντα ανύψωσης σε μετρήσεις του πάχους μη αγώγιμων επιστρώσεων επί αγώγιμων υλικών.









$$\int \mathbf{E}_r dr = -ZI, \quad \int \mathbf{E}'_r dr = -Z'I \quad (5.4)$$

όπου το σύμβολο Z δηλώνει τη σύνθετη αντίσταση σε εκείνο το σημείο της γραμμής τροφοδοσίας. Από τα παραπάνω καταλήγουμε για τη συμβολή από την επιφάνεια S_C :

$$\int_{S_C} (\mathbf{E}'_r H'_\phi - \mathbf{E}_r H'_\phi) r dr d\phi = I^2 (Z' - Z) \quad (5.5)$$

Αντικατάσταση αυτού του αποτελέσματος στην εξίσωση (5.2) δίνει:

$$\Delta Z = \frac{1}{I^2} \oint_{S_F} (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}' - \bar{\mathbf{E}}' \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} \cdot dS \quad (5.6)$$

όπου ΔZ είναι η ζητούμενη μεταβολή της σύνθετης αντίστασης. Αυτό στο οποίο πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία είναι το ότι η επιφάνεια S_F μπορεί να είναι οποιαδήποτε επιφάνεια που εμπεριέχει τη ρωγμή, η δε εκλογή της θα καθορίζεται κάθε φορά από τις ανάγκες του προβλήματος.

Η εξίσωση (5.6) μπορεί να αναχθεί στο παρακάτω ολοκλήρωμα όγκου σύμφωνα πάλι με το διανυσματικό θεώρημα του *Gauss*:

$$\Delta Z = \frac{1}{I^2} \int_{V_F} \nabla \cdot [(\bar{\mathbf{E}}' \times \bar{\mathbf{H}}) - (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}')] \cdot dV \quad (5.7)$$

που σε συνδυασμό με τη διανυσματική ταυτότητα:

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{B}}) = \bar{\mathbf{B}} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{B}} \quad (5.8)$$

και με τη βοήθεια των εξισώσεων *Maxwell* μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή:

$$\Delta Z = \frac{j\omega}{I^2} \int_{V_F} [(\delta\mu \cdot \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{H}}') - (\delta\epsilon \cdot \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{E}}')] \cdot dV \quad (5.9)$$

όπου $\delta\epsilon = \delta\epsilon + \delta\sigma / j\omega$.

Συνήθως η εξίσωση (5.6) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της μεταβολής της σύνθετης αντίστασης που προκαλείται από επιφανειακές ρωγμές, ενώ η εξίσωση (5.9) χρησιμοποιείται για εσωτερικές ρωγμές ή ανομοιογένειες. Μέχρι στιγμής δεν έχουμε κάνει καμιά παραδοχή για τη γεωμετρία της ρωγμής. Προκειμένου να χειριστούμε αναλυτικά την εξίσωση (5.9) έχουμε δύο δυνατότητες:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \quad (5.11)$$

που θα είναι παράλληλο προς τα δινορεύματα, ισχύει:

$$\nabla^2 \vec{E} = k^2 \vec{E} \quad (5.12)$$

και

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.13)$$

όπου $k^2 = j\omega\sigma$.

Επειδή δεν υφίσταται μεταβολή ως προς τη μεταβλητή z θα είναι:

$$\vec{E} = (E_x, E_y)$$

Από την εξίσωση (5.13) έπεται ότι το πεδίο μπορεί να γραφεί ως η κλίση ενός δυναμικού ψ έτσι ώστε:

$$E_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (5.14)$$

και

$$E_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.15)$$

Από την εξίσωση (5.12) προκύπτει ότι το δυναμικό αυτό ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\nabla^2 \psi = k^2 \psi \quad (5.16)$$

Μιας και τα δινορεύματα έχουν μόνο μία συνιστώσα και σταθερή τιμή καθώς απομακρύνονται από τη ρωγμή, δηλαδή για $y_{\text{απολυτο}} \rightarrow \infty$, έπεται ότι στην περιοχή αυτή το δυναμικό θα δίνεται από την έκφραση:

$$\psi = \exp(-kx) \quad (5.17)$$

όπου βέβαια έχει γίνει κλιμακοποίηση έτσι ώστε να είναι $\psi = 1$ στην επιφάνεια του αγωγίμου μέσου.

Λόγω της προφανούς συμμετρίας ως προς το πεδίο $y=0$ το δυναμικό θα πρέπει να είναι

άρτια συνάρτηση ως προς y και επομένως $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ για $y=0$ και $x>d$.



6. ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΜΙΑΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΤΟ ANSYS

6.1 Εισαγωγή

Το ANSYS έχει πολλές ικανότητες ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων, που κυμαίνονται από μια απλή, γραμμική, στατική ανάλυση ως μια σύνθετη, μη γραμμική, παροδική δυναμική ανάλυση. Τα εγχειρίδια του ANSYS περιγράφουν τις συγκεκριμένες διαδικασίες για την πραγματοποίηση αναλύσεων για διάφορους κλάδους της εφαρμοσμένης μηχανικής. Τα επόμενα τμήματα αυτού του κεφαλαίου καλύπτουν τα γενικά βήματα τα οποία είναι κοινά για τις περισσότερες αναλύσεις.

Μια χαρακτηριστική ανάλυση του ANSYS έχει τρία σαφή βήματα:

1. Χτίσιμο του μοντέλου.
2. Εφαρμογή των φορτίων και απόκτηση λύσης.
3. Ανασκόπηση των αποτελεσμάτων.

6.2 Χτίσιμο του μοντέλου

Το χτίσιμο του μοντέλου ενός πεπερασμένου στοιχείου απαιτεί περισσότερο χρόνο από οποιοδήποτε άλλο κομμάτι της ανάλυσης. Χρησιμοποιούμε τον προεπεξεργαστή *PREP7* για να καθορίσουμε τον τύπο των στοιχείων, τις πραγματικές σταθερές στοιχείων, τις ιδιότητες του υλικού και τη γεωμετρία του μοντέλου.

6.3 Καθορίζουμε τον τύπο των στοιχείων

Η βιβλιοθήκη στοιχείων του ANSYS περιέχει περισσότερους από 150 διαφορετικούς τύπους στοιχείων. Κάθε τύπος στοιχείου έχει ένα μοναδικό όνομα και ένα πρόθεμα που δηλώνει την κατηγορία του στοιχείου: *BEAM4*, *PLANE77*, *SOLID96*, κτλ. Οι παρακάτω κατηγορίες στοιχείων είναι διαθέσιμες:



7. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ

Σε στατικά πεδία όπου τα φορτία κινούνται έτσι ώστε να σχηματίσουν το ηλεκτρικό ρεύμα, και τα οποία δεν είναι χρονικά εξαρτημένα. Αυτά τα ρεύματα, λέγονται στατικά ρεύματα. Θεωρούμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$V = RI$$

$$P = VI$$

$$W = I^2 RT$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S}$$

$$G = \frac{1}{R} \quad (7.1)$$

$$J = \frac{I}{S}$$

$$J = nqv$$

$$J = \sigma E$$

όπου τα σύμβολα σημαίνουν:

V	: διαφορά δυναμικού
R	: αντίσταση
W	: ενέργεια
ℓ	: μήκος
G	: αγωγιμότητα
N	: αριθμός φορτίων στη μονάδα του όγκου
q	: φορτίο κάθε σωματιδίου
E	: ένταση ηλεκτρικού πεδίου
I	: ένταση ρεύματος
P	: ισχύς
σ	: ειδική αγωγιμότητα
S	: εμβαδόν διατομής
J	: πυκνότητα ρεύματος
u	: ταχύτητα

Σύνοψη Αποτελεσμάτων

Χωρίς ρωγμή

Ο αγωγός έχει χωριστεί σε 192 *elements* και σε 552 *nodes*. Τα αποτελέσματα της θερμότητας *JHEAT* και της αντίστασης *R* που προκύπτουν, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Q	1.279999891E+13	W
V1	10	Volt
V0	-10	Volt
R	3.125000266E-11	Ω

Τριγωνική Επιφανειακή Οπή

Ο αγωγός έχει χωριστεί σε 370 *elements* και σε 899 *nodes*. Τα αποτελέσματα της θερμότητας *JHEAT* και της αντίστασης *R* που προκύπτουν, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Q	0.246667E+14	W
V1	10	Volt
V0	-10	Volt
R	1.621621725E-11	Ω

Ορθογωνική Διαμπερής Οπή

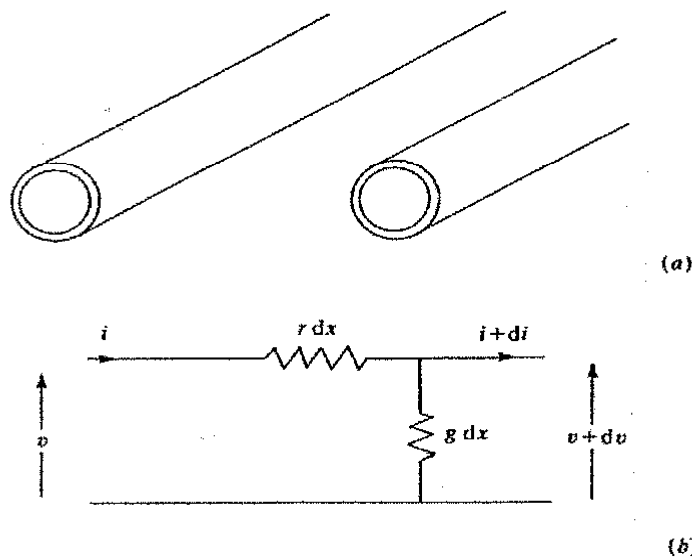
Ο αγωγός έχει χωριστεί σε 365 *elements* και σε 897 *nodes*. Τα αποτελέσματα της θερμότητας *JHEAT* και της αντίστασης *R* που προκύπτουν, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Q	0.233314E+14	W
V1	10	Volt
V0	-10	Volt
R	1.714425051E-11	Ω



8. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΜΕ DC ΔΙΕΓΕΡΣΗ

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα ζεύγος ενταφιασμένων σωλήνων που χρησιμοποιούνται για μετάδοση ηλεκτρικών σημάτων. Τέτοια περίπτωση μπορεί να προκύψει, για παράδειγμα, εάν οι σωληνώσεις αερίου χρησιμοποιούνται για να μεταφέρουν σήματα για μέτρηση της ροής, για την ανίχνευση ατέλειας, ή άλλων επικοινωνιακών δεδομένων. Θα υποθέσουμε ότι μόνο πολύ χαμηλές συχνότητες είναι άξιες ενδιαφέροντος, έτσι ώστε οι σωλήνες να είναι ανθεκτικοί, και ότι να υπάρχει μια πτώση τάσης ως προς το μήκος, καθώς υπάρχει διαρροή ρεύματος διαμέσου της γης, ανάμεσα στους σωλήνες. Η γραμμή μεταφοράς που σχηματίζεται από το ζεύγος σωληνώσεων, υποτίθεται ότι διεγείρεται από μία πηγή τάσης (π.χ από έναν ενισχυτή που είναι συνδεδεμένος στα θερμοζεύγη). Το άκρο παραλαβής έχει μικρό φορτίο, πρακτικά είναι ένα ανοιχτό κύκλωμα. Το πρόβλημα είναι να καθορίσουμε τη διανομή του σήματος της τάσης κατά μήκος της γραμμής και την τάση στο άκρο αποστολής.



Σχήμα 8-1: (α) Ενταφιασμένοι σωλήνες που χρησιμοποιούνται για να διαβιβάσουν τα σήματα καθώς επίσης και ρευστά. (β) Ισοδύναμο κύκλωμα μικρού μήκους dx της σωληνώσεως.

Για να λύσουμε το πρόβλημα των σωληνώσεων αναλυτικά, θεωρούμε ένα μικρό μήκος dx του σωλήνα, όπως στο Σχήμα 8-1(β). Η αντίσταση ανά μονάδα μήκους $r dx$, προκαλεί μία πτώση τάσης ανά μονάδα μήκους dv , ενώ το ρεύμα di , ρέει διαμέσου της γης ανάμεσα

στους σωλήνες. Οι διαφορές στις τάσεις και στα ρεύματα du και di στα δύο άκρα x και $x+dx$ είναι:

$$du = -irdx \quad (8.1)$$

$$di = -(u+du)gdx \quad (8.2)$$

Ξαναγράφοντας, κι έπειτα αμελώντας τους δεύτερης τάξης όρους, αυτές οι εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{du}{dx} = -ri \quad (8.3)$$

$$\frac{di}{dx} = -gu \quad (8.4)$$

Διαφορίζοντας ως προς x :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = r \frac{di}{dx} \quad (8.5)$$

$$\frac{d^2i}{dx^2} = g \frac{du}{dx} \quad (8.6)$$

Με χιαστί αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων προκύπτει ένα ζεύγος εξισώσεων:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = rgu \quad (8.7)$$

και

$$\frac{d^2i}{dx^2} = rgi \quad (8.8)$$

Είναι ξεκάθαρο ότι και η τάση και το ρεύμα περιγράφονται από τις δεύτερης τάξης αυτές διαφορικές εξισώσεις. Είναι παραδεκτό ότι δύο οριακές συνθήκες εφαρμόζονται εδώ: πρώτα ότι η τάση έχει μία τιμή, ας πούμε V_0 , και στο τέλος αποστολής $x=L$:

$$u|_{x=L} = V_0 \quad (8.9)$$

και δεύτερον ότι το ρεύμα πρέπει να έχει τιμή μηδέν στο άλλο, $i=0$. Αλλά η εξίσωση (8.3) υπονοεί ότι το ρεύμα που μηδενίζεται, είναι ισοδύναμο με την παράγωγο της τάσης μηδέν. Έτσι:



8.1 Προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων

Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη γραμμή μεταφοράς δεν αντιμετωπίζονται απευθείας. Αντιθέτως, η μέθοδος αυτή επωφελείται της φυσικής ισοδύναμης αρχής ότι η κατανομή της τάσης κατά μήκος της γραμμής θα είναι πάντα τόσο προσαρμοσμένη από μόνη της ώστε να ελαχιστοποιείται η απώλεια ισχύος. Καθώς τέτοια κατανομή είναι μερικές φορές δύσκολο να εκφραστεί μαθηματικά με όρους προσέγγισης συναρτήσεων. Τα βήματα σ' αυτή τη διαδικασία είναι τα ακόλουθα:

1. Εκφράζουμε την ισχύ W που χάνεται στη γραμμή σύμφωνα με την κατανομή της τάσης $u(x)$:

$$W=W[u(x)] \quad (8.18)$$

2. Υποδιαιρούμε ολόκληρη τη γραμμή μεταφοράς σε K πεπερασμένους τομείς ή στοιχεία.
3. Προσεγγίζουμε την τάση $u(x)$ κατά μήκος της γραμμής χρησιμοποιώντας ξεχωριστή έκφραση προσέγγισης σε κάθε στοιχείο της μορφής:

$$u(x) = \sum_{i=1}^M u_i f_i(x) \quad (8.19)$$

όπου το $f_i(x)$ είναι ένα βολικό σύστημα των γνωστών συναρτήσεων. Τέτοιες εκφράσεις απαραίτητα συμπεριλαμβάνουν M σταθερούς αλλά άγνωστους συντελεστές u_i σε κάθε στοιχείο, για την τάση κατά μήκος της γραμμής που δεν είναι ακόμη γνωστή.

4. Εκφράζουμε την ισχύ σε κάθε στοιχείο σύμφωνα με τις προσεγγιστικές συναρτήσεις $f_i(x)$ και τους M ακαθόριστους συντελεστές u_i . Επειδή οι συναρτήσεις $f_i(x)$ είναι επιλεγμένες και γνωστές, η ισχύς γίνεται μία συνάρτηση μόνο των συντελεστών:

$$W=W[u_1, u_2, \dots, u_M] \quad (8.20)$$

5. Εισάγουμε περιορισμούς στους συντελεστές MK έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε ότι η τάση είναι συνεχής από στοιχείο σε στοιχείο. Έτσι εξασφαλίζουμε, ότι το σύνολο όλων των στοιχείων θα έχει N βαθμούς ελευθερίας, $N \leq MK$.



στην εξίσωση (8.24). Η ισχύς ανά μονάδα μήκους παίρνει τη μορφή:

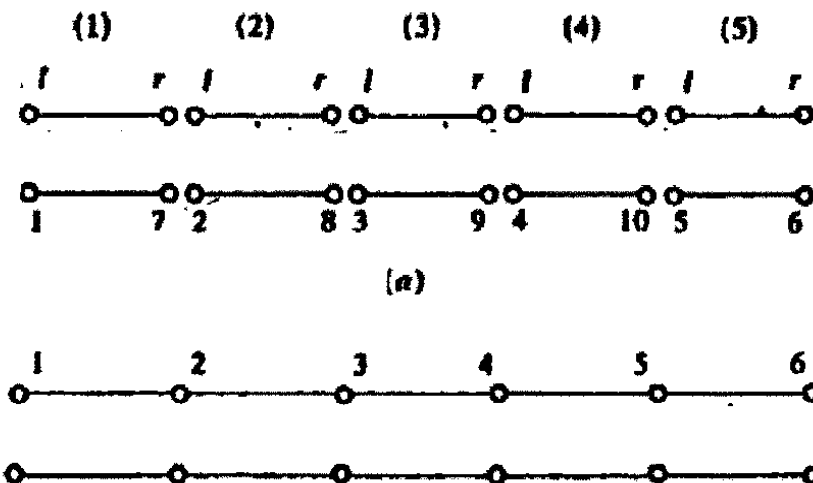
$$\frac{dW}{dx} = -gv^2 - \frac{1}{r} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (8.27)$$

και η συνολική ισχύς για ολόκληρη την γραμμή είναι:

$$W = -\int_0^L \left[gv^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \cdot dx \quad (8.28)$$

8.2 Τμηματική προσέγγιση της τάσης

Για να περιγράψουμε την τάση $u(x)$ κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς, θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλό αλλά πολύ κοινό τέχνασμα για την κατασκευή μιας ευθείας προσέγγισης. Ολόκληρη η γραμμή, που αναπτύσσεται μεταξύ $0 \leq x \leq L$ υποδιαιρείται σε K τμήματα ή πεπερασμένα στοιχεία και η τάση υποτίθεται ότι ποικίλει γραμμικά μεταξύ των τιμών των δύο άκρων του κάθε στοιχείου. Στα σημεία όπου τα τμήματα ενώνονται, η τάση πρέπει να είναι συνεχής αλλά επειδή η μεταβολή της υποτίθεται ότι γίνεται τμηματικά-ευθεία, συνεπάγεται ότι και η κλίση σ' αυτά τα σημεία δεν μπορεί να είναι συνεχής. Η συνέχεια του u είναι απαραίτητη για να εξασφαλιστεί η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (8.28), ενώ δεν είναι για τη συνέχεια της κλίσης της.



Σχήμα 8-2: Η γραμμή μεταφοράς μπορεί να θεωρηθεί ως διαδοχική γραμμή πέντε στοιχείων. (α) Αρίθμηση στοιχείων και ταυτοποίηση των κόμβων, με τα στοιχεία να θεωρούνται ξεχωριστά. (β) Αρίθμηση των κόμβων ύστερα από σύνδεση.





$$\alpha_r(\xi) = \xi \quad (8.44)$$

έτσι ώστε η κατά προσέγγιση έκφραση για την τάση, δηλαδή η εξίσωση (8.30), να γράφεται τώρα:

$$v = v_l \alpha_l(\xi) + v_r \alpha_r(\xi) \quad (8.45)$$

Όλες οι ολοκληρώσεις και οι διαφορίσεις που είναι απαραίτητες για την εύρεση της ισχύος σε ένα στοιχείο, καθώς επίσης και άλλοι υπολογισμοί που απαιτούνται, είναι εύκολο να πραγματοποιηθούν εισάγοντας το ξ . Παραδείγματος χάριν, η πρώτη παράγωγος της τάσης βρίσκεται εύκολα ότι είναι:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L_k} (v_r - v_l) \quad (8.46)$$

μια άμεση συνέπεια της τμηματικά-ευθείας προσέγγισης που υποτίθεται για την τάση, είναι ότι η τιμή της είναι σταθερή κατά μήκος του κάθε στοιχείου.

Η παράγωγος της τάσης, εξίσωση (8.46), εκφράζεται με μια μορφή εφαρμόσιμη σε οποιοδήποτε στοιχείο, οποιοδήποτε μήκους. Οι ολοκληρώσεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό της ισχύος σε κάθε στοιχείο, δίνονται από την εξίσωση:

$$W_k = -[v_l \quad v_r] \cdot \left[\frac{1}{r_k} S + g_k T \right] \begin{bmatrix} v_l \\ v_r \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

μπορούν να γραφούν σε μια μορφή ανεξάρτητη του μήκους. Στην εξίσωση (8.36), οι μήτρες S και T αναφέρονται σε ένα στοιχείο, μήκους L_k . Συμβολίζοντας τις αντίστοιχες (κανονικοποιημένες) μήτρες με το S και T , έτσι ώστε:

$$S = \frac{1}{L_k} \mathbf{S} \quad (8.47)$$

$$T = L_k \mathbf{T} \quad (8.48)$$

Επειδή η κανονικοποιημένη μεταβλητή ξ κυμαίνεται από $0 \leq \xi \leq 1$ για κάθε ένα πεπερασμένο στοιχείο, η κανονικοποίηση μήκους κάνει τον υπολογισμό των μητρών S και T ιδιαίτερα εύκολο. Τα S και T δίνονται από εκφράσεις που δεν περιλαμβάνουν καθόλου το μήκος, για την κανονικοποιημένη μεταβλητή ξ εισάγουμε μόνο μία φανταστική μεταβλητή ολοκλήρωσης:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \int_0^l \frac{d\alpha_l}{d\xi} \frac{d\alpha_l}{d\xi} d\xi & \int_0^l \frac{d\alpha_l}{d\xi} \frac{d\alpha_r}{d\xi} d\xi \\ \int_0^l \frac{d\alpha_r}{d\xi} \frac{d\alpha_l}{d\xi} d\xi & \int_0^l \frac{d\alpha_r}{d\xi} \frac{d\alpha_r}{d\xi} d\xi \end{bmatrix} \quad (8.49)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \int_0^l \alpha_l \alpha_l d\xi & \int_0^l \alpha_l \alpha_r d\xi \\ \int_0^l \alpha_r \alpha_l d\xi & \int_0^l \alpha_r \alpha_r d\xi \end{bmatrix} \quad (8.50)$$

Τα δεδομένα εισόδου μητρών μπορούν να φανούν πολύ σύνθετα, αλλά οι τιμές τους επιλύονται γρήγορα επειδή τα ολοκληρώματα περιλαμβάνουν μόνο απλά πολυώνυμα:

$$\int_0^l \alpha_l \alpha_r d\xi = \int_0^l (1-\xi) \cdot \xi \cdot d\xi = \frac{1}{6} \quad (8.51)$$

$$\int_0^l \alpha_l^2 d\xi = \int_0^l \xi^2 \cdot d\xi = \frac{1}{3} \quad (8.52)$$

$$\int_0^l \frac{d\alpha_l}{d\xi} \frac{d\alpha_r}{d\xi} d\xi = \int_0^l (-1) \cdot (1) d\xi = -1 \quad (8.53)$$

$$\int_0^l \left[\frac{d\alpha_l}{d\xi} \right]^2 d\xi = \int_0^l (1)^2 d\xi = +1 \quad (8.54)$$

Όλα τα δεδομένα εισόδου μητρών είναι σταθεροί αριθμοί. Στην πραγματικότητα, τα \mathbf{S} και \mathbf{T} απλοποιούνται:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (8.55)$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.56)$$

Ως εκ τούτου, η έκφραση (ή ισχύς σε ένα στοιχείο) δηλώνεται εύκολα ως:

$$W_k = -[v_l \quad v_r] \cdot \left[\frac{1}{r_k \cdot L_k} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} + \frac{g_k \cdot L_k}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} v_l \\ v_r \end{bmatrix} \quad (8.57)$$

Βρίσκοντας κατά προσέγγιση την απώλεια ισχύος σε ένα στοιχείο, παραμένει να βρεθεί η συνολική ισχύς, τοποθετώντας μαζί τις μεμονωμένες τιμές ισχύος για όλα τα στοιχεία,





Αποτελείται από μηδενικά παντού, εκτός από τις 2×2 υπομήτρες που τοποθετούνται κατά μήκος της κύριας διαγωνίου της. Μία τέτοια υπομήτρα αντιστοιχεί σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο. Εάν το M_{dis} αντιπροσωπεύει αυτόν τον συντελεστή μήτρας (μήτρα 10×10 στο παράδειγμα με τα πέντε στοιχεία), τότε η ισχύς W μπορεί να γραφτεί εν συντομία ως:

$$W = -\mathbf{V}_{dis}^T M_{dis} \mathbf{V}_{dis} \quad (8.62)$$

Οι αποσυνδεδεμένες τάσεις, εντούτοις, μπορούν να αντικατασταθούν από το συνδεδεμένο σύνολο, σύμφωνα με την εξίσωση (8.60):

$$W = -\mathbf{V}_{con}^T \mathbf{C}^T M_{dis} \mathbf{C} \mathbf{V}_{dis} \quad (8.63)$$

Υποθέτουμε ότι η μήτρα M είναι:

$$M = \mathbf{C}^T M_{dis} \mathbf{C} \quad (8.64)$$

Εάν τα στοιχεία επιλέγονται να είναι όλα ίσου μήκους L_e , και η γραμμή μεταφοράς είναι ομοιόμορφη, έτσι ώστε η αντίσταση r και η αγωγιμότητα g ανά μονάδα μήκους να είναι ίσες σε όλα τα στοιχεία, τότε οι τελικές (*connected*) μήτρες του μοντέλου των πέντε στοιχείων είναι:

$$\frac{1}{r} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} = \frac{1}{L_e \cdot r} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & & & -1 & 1 & & & \end{bmatrix} \quad (8.65)$$

$$g \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} = \frac{L_e \cdot g}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & 2 & & & & \end{bmatrix} \quad (8.66)$$

Η συνολική απώλεια ισχύος είναι:

$$W = -\mathbf{V}_{con}^T \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} + g \cdot \mathbf{C}^T \right) \cdot \mathbf{V}_{con} \quad (8.67)$$



Αυτή η εξίσωση είναι σε μια μάλλον μη συμβατική μορφή. Όπως γράφεται, υποθέτει ότι και οι έξι τάσεις είναι άγνωστες. Αυτό, ωστόσο, δεν ισχύει. Το v_6 είναι η τάση στο άκρο αποστολής και επομένως είναι γνωστό. Μεταθέτοντας αυτή τη γνωστή τιμή της τάσης στη δεξιά πλευρά οδηγεί στη σχέση:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_{14} \cdot v_4 \\ -M_{24} \cdot v_4 \\ -M_{34} \cdot v_4 \end{bmatrix} \quad (8.71)$$

η οποία αντιπροσωπεύει τόσες εξισώσεις όσοι είναι και οι ελεύθεροι κόμβοι.

Γνωρίζοντας όμως, ότι τα M_{13} , M_{31} , M_{14} , M_{24} είναι μηδέν, η εξίσωση (8.71), γράφεται:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ 0 & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{34} \cdot v_4 \end{bmatrix} \quad (8.72)$$

Ως λύση αυτής της εξίσωσης λαμβάνονται οι άγνωστες κομβικές τάσεις, κάτι που προγραμματίζεται εύκολα για έναν ψηφιακό υπολογιστή.

Η λύση του συστήματος (8.72), δίνει τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} M_{11} \cdot v_1 + M_{12} \cdot v_2 &= 0 \\ M_{21} \cdot v_1 + M_{22} \cdot v_2 + M_{23} \cdot v_3 &= 0 \\ M_{32} \cdot v_2 + M_{33} \cdot v_3 &= -M_{34} \cdot v_4 \end{aligned} \quad (8.73)$$

$$M_{11} = \frac{S_{11}}{r_1 L_1} + g_1 L_1 T_{11} \quad (8.74)$$

$$M_{12} = \frac{S_{12}}{r_1 L_1} + g_1 L_1 T_{12} + \frac{S_{21}}{r_2 L_2} + g_2 L_2 T_{21} \quad (8.75)$$

$$M_{21} = \frac{S_{21}}{r_2 L_2} + g_2 L_2 T_{21} + \frac{S_{12}}{r_1 L_1} + g_1 L_1 T_{12} \quad (8.76)$$

$$M_{22} = \frac{S_{22}}{r_2 L_2} + g_2 L_2 T_{22} + \frac{S_{11}}{r_1 L_1} + g_1 L_1 T_{11} \quad (8.77)$$

$$M_{23} = \frac{S_{23}}{r_2 L_2} + g_2 L_2 T_{23} + \frac{S_{32}}{r_3 L_3} + g_3 L_3 T_{32} \quad (2.78)$$

$$M_{32} = \frac{S_{32}}{r_3 L_3} + g_3 L_3 T_{32} + \frac{S_{23}}{r_2 L_2} + g_2 L_2 T_{23} \quad (8.79)$$

$$M_{33} = \frac{S_{33}}{r_3 L_3} + g_3 L_3 T_{33} + \frac{S_{22}}{r_2 L_2} + g_2 L_2 T_{22} \quad (8.80)$$

$$M_{34} = \frac{S_{34}}{r_3 L_3} + g_3 L_3 T_{34} + \frac{S_{43}}{r_4 L_4} + g_4 L_4 T_{43} \quad (8.81)$$

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.82)$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.83)$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.84)$$

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.85)$$

$$S_{23} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.86)$$

$$S_{33} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.87)$$

$$S_{32} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.88)$$

$$S_{34} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.89)$$

$$S_{44} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{44} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8.90)$$

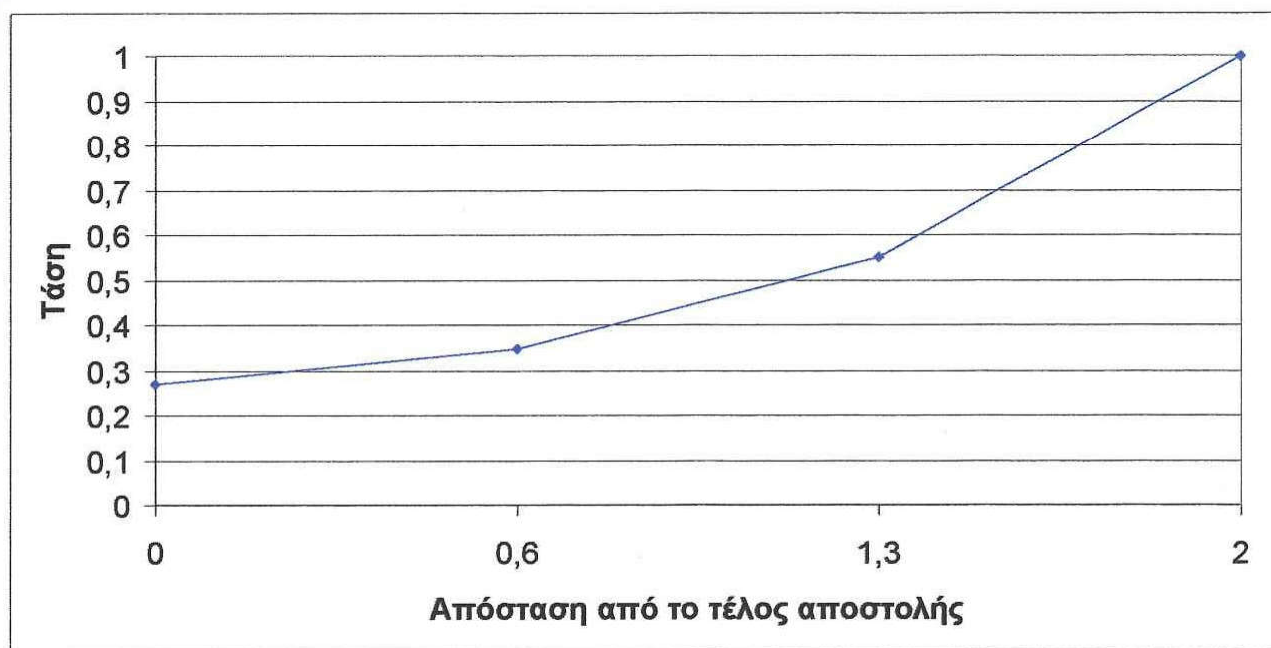
$$S_{43} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.91)$$

Κάνοντας τις εξής υποθέσεις, ότι:

- Η σχετική αντίσταση r , είναι σταθερή σε όλο το μήκος της γραμμής, δηλαδή $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$.
- Η αγωγιμότητα του εδάφους g , είναι σταθερή σε όλο το μήκος της γραμμής, δηλαδή $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 1$.
- Το συνολικό μήκος της γραμμής μεταφοράς, είναι $L = 2 \text{ m}$

Με τη μέθοδο *Cramer* και με αντικατάσταση των εξισώσεων (8.74) έως (8.91), στην (8.73), προκύπτουν οι παρακάτω λύσεις:

X	Y	Z
0.2689202	0.3460987	0.5516785



Οι λύσεις που πήραμε χρησιμοποιώντας τη FORTRAN, έχει συγκριτικά υψηλή ακρίβεια. Μία άμεση σύγκριση της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς λύσης, καθώς επίσης και το επί της % σφάλμα, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	Approximate	Exact	% error
0.00	0,2689202	0,265802	1,159441
0.02	0,2710940	0,265855	1,932390
0.04	0,2732678	0,266015	2,654126
0,06	0,2754416	0,266281	3,325837
0,08	0,2776153	0,266653	3,948661
0,1	0,2797891	0,267132	4,523684
0,12	0,2819629	0,267718	5,051943
0,14	0,2841367	0,268411	5,534430
0,16	0,2863105	0,269212	5,972089
0,18	0,2884843	0,270120	6,365824
0,2	0,2906580	0,271136	6,716494
⋮	⋮	⋮	⋮
1,82	0,8655036	0,841780	2,818227
1,84	0,8804476	0,857924	2,625365
1,86	0,8953917	0,874411	2,399422
1,88	0,9103357	0,891247	2,141740
1,9	0,9252798	0,908441	1,853626
1,92	0,9402238	0,925997	1,536353
1,94	0,9551679	0,943924	1,191163
1,96	0,9701119	0,962229	0,819263
1,98	0,9850560	0,980918	0,421827
2	1,0000000	1,000000	0,000000

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα, το σφάλμα κυμαίνεται από 1-2%. Στο άκρο αποστολής, οι δύο λύσεις συμπίπτουν ακριβώς, επειδή η τάση στο άκρο αποστολής επιβάλλεται και στις δύο λύσεις.

9. Η ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΙΚΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ ΜΕ ΤΟ FLUX

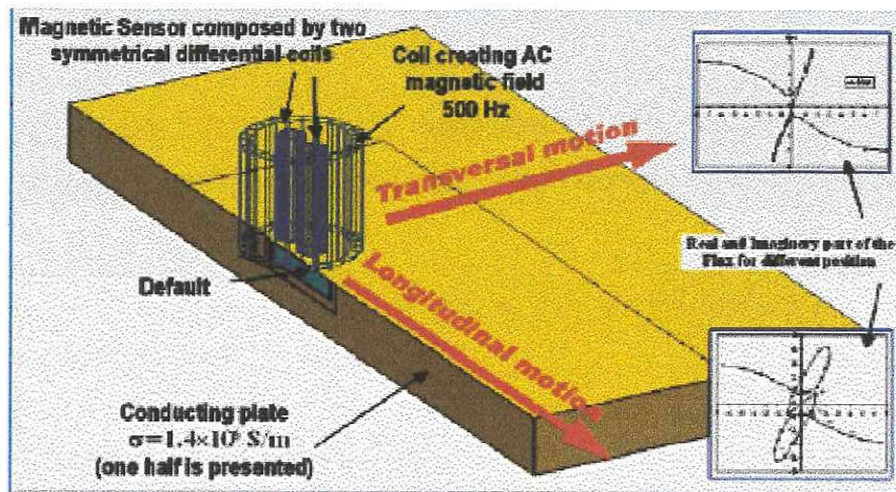
Για το μέλλον σκοπεύουμε, να κάνουμε κάτι σαν αυτό, που ακολουθεί. Πρόσφατα, έχει πραγματοποιηθεί στο *CEDRAT* μια μελέτη, σχετικά με τη μοντελοποίηση των μη καταστροφικών δοκιμών με δινορεύματα με την τρισδιάστατη εφαρμογή *FLUX 8.10*. Το *FLUX* έχει καταδείξει την ικανότητά του να επιτύχει καλά αποτελέσματα για αυτό το είδος εφαρμογής με λογικό χρόνο υπολογισμού. Για να επιτύχει αυτά τα αποτελέσματα, η προσομοίωση τέτοιων προβλημάτων πρέπει να δώσει ιδιαίτερη προσοχή στη μοντελοποίηση: Σχεδιασμός πλέγματος, εξισώσεις, περιγραφή της κίνησης του ελεγχτήρα.

Αυτή η μελέτη είναι βασισμένη στο πρόβλημα *Benchmark No. 8* του εργαστηρίου της ομάδας: Ένα πηνίο πάνω από μια ρωγμή πραγματοποιημένη από τον *Jean-Claude VERITE (EdF, Direction Etudes et Recherches)*. Αυτό το πρόβλημα έχει παρουσιαστεί στο *COMPEL*.

Ένα τεχνικό έγγραφο "Μη Καταστροφική Δοκιμή με την τρισδιάστατη εφαρμογή *FLUX*" έχει πραγματοποιηθεί και επιτρέπει στο χρήστη να αναπαραγάγει εύκολα αυτόν τον υπολογισμό και να κατανοήσει τα βασικά σημεία της *NDT* μοντελοποίησης με το *FLUX*.

9.1 Το πρόβλημα 8

Μία ράβδος, από ωστενιτικό ανοξείδωτο χάλυβα (ειδική αντίσταση: $7.4e-7 \Omega \cdot m^{-1}$), περιέχει μια ορθογώνια αυλάκωση, που αντιπροσωπεύει μια ρωγμή. Ένας διαφορικός ελεγχτήρας κινείται κατά μήκος της επιφάνειας της ράβδου. Ο ελεγχτήρας αποτελείται από ένα επαγωγικό πηνίο (που τροφοδοτείται με ένα ημιτονοειδές σήμα 500 Hz) και από δύο ευαίσθητα πηνία (Σχήμα 9-1).



Σχήμα 9-1: Το πρόβλημα 8

Κάθε ένα από τα δύο μικρότερα πηνία είναι σε έναν κλάδο της γέφυρας *Wheatstone*. Ένας ενισχυτής και ένας διαχωριστής φάσης, παράγουν σήματα ανάλογα προς τη διαφορά της μαγνητικής ροής στους δύο δέκτες.

Εάν οι δύο δέκτες βρίσκονται πάνω από μια ζώνη χωρίς ρωγμή, η ροή που επάγεται στα πηνία, από τα δινορεύματα, είναι η ίδια. Εάν ένα από τα πηνία, βρίσκεται πάνω από τη ρωγμή, η ροή είναι διαφορετική. Με τον υπολογισμό της διαφοράς της ροής στα δύο πηνία για διαφορετικές θέσεις του ελεγχτήρα, μπορούμε να ερευνήσουμε τη δομή.

Ελήφθη ένα σήμα στο σύνθετο επίπεδο που παραμετροποιείται από τη θέση του ελεγχτήρα. Η προσομοίωση στόχευσε στην εφαρμογή των μετρήσεων για δύο διαφορετικές κινήσεις του ελεγχτήρα:

- *Διαμήκης κίνηση*: κίνηση παράλληλη στο επίπεδο της ρωγμής (οι άξονες των δύο πηνίων που είναι στο επίπεδο της ρωγμής).
- *Εγκάρσια κίνηση*: κίνηση κάθετη στο επίπεδο της ρωγμής (οι άξονες των δύο πηνίων που είναι στο κάθετο επίπεδο με αυτό της ρωγμής).

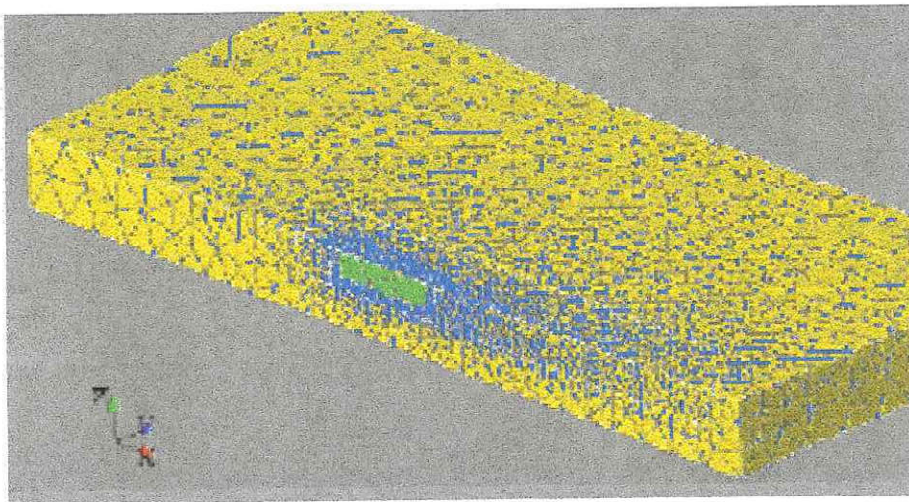
9.2 Τα 'βασικά σημεία'

Μελέτη της ευαισθησίας επέτρεψε στον καθορισμό των σημαντικότερων παραμέτρων για το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων. Μια καλή μοντελοποίηση των συσκευών NDT με το FLUX ακολουθεί παρακάτω:

- Περιορισμός στο ελάχιστο, του θορύβου του πλέγματος που ενυπάρχει στον υπολογισμό της ροής.
- Περιορισμός στο ελάχιστο, του θορύβου του πλέγματος που ενυπάρχει στην περιγραφή της κίνησης του ελεγκτήρα.
- Ακριβές πλέγμα στη θέση όπου τα δινορεύματα θα εμφανιστούν.
- Χρήση μιας προσαρμοσμένης μοντελοποίησης στον υπολογισμό των δινορευμάτων σε μια ραγισμένη γεωμετρία.

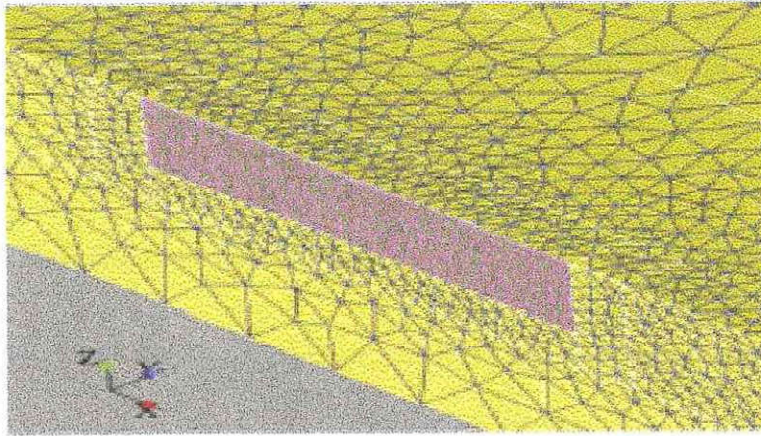
9.3 Επίπεδο πλέγμα

Ένα σωστό πλέγμα είναι απαραίτητο στο επίπεδο, το οποίο είναι η ζώνη όπου εμφανίζονται τα δινορεύματα. Κατόπιν, είναι δυνατό να βελτιωθεί το πλέγμα σε αυτές τις ζώνες χωρίς την παραγωγή πάρα πολλών κόμβων στο υπόλοιπο του επιπέδου (Σχήματα 9-2 και 9-3).



Σχήμα 9-2: Επίπεδο πλέγμα

Το συνολικό πλέγμα της συσκευής αντιπροσωπεύει μεταξύ 120.000 και 145.000 κόμβων (με τα στοιχεία δεύτερης τάξης) ανάλογα με την επιλεγμένη διαμόρφωση.



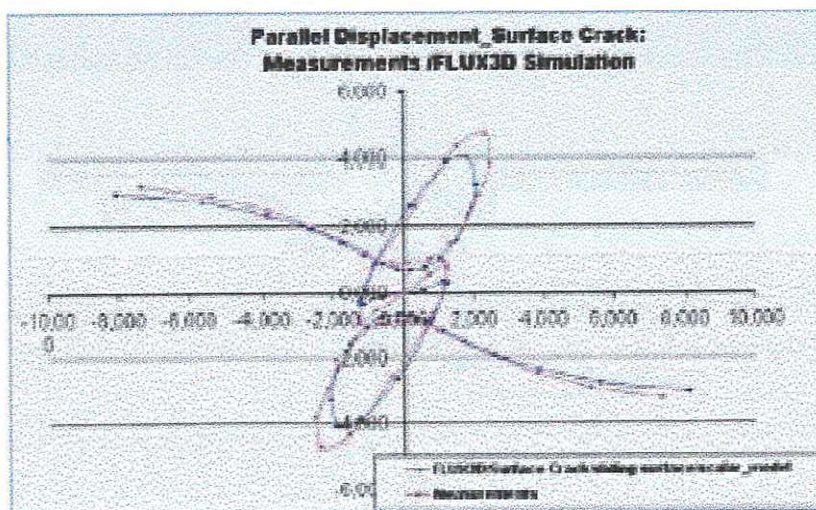
Σχήμα 9-3: Maillage à proximité du défaut.

9.4 Περιπτώσεις που μελετήθηκαν

Πέρα από τη μελέτη ευαισθησίας, έχουν εκτελεσθεί διάφορες προσομοιώσεις. Τέλος, η ρωγμή που είναι πολύ λεπτή, έχουμε την επιλογή να την αντιπροσωπεύσουμε από έναν όγκο που συντίθεται από αέρα ή από μια επιφάνεια στην οποία ορίζεται ένας συγκεκριμένος περιορισμός επιφάνειας.

9.5 Αποτελέσματα που λαμβάνουμε με το FLUX

Τέλος, στα αποτελέσματα που λαμβάνουμε με το *FLUX*, ο περιορισμός της επιφάνειας που επιβάλλεται από τη ρωγμή, καθορίζει ότι η τοπική κατεύθυνση των δινορευμάτων είναι παράλληλη στις άκρες της ρωγμής ($T \times N = 0$). Βέβαια, δεν είναι απαραίτητο να αναπαραστήσουμε τη ρωγμή από μόνη της, αλλά μπορούμε να αναπαραστήσουμε μόνο τη συνέπεια της παρουσίας της στη διανομή των δινορευμάτων. (Σχήμα 9-4).



Σχήμα 9-4: Αποτελέσματα με μια επιφανειακή ρωγμή

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Χωρίς ρωγμή

Εισαγωγή γεωμετρίας

Βήμα 1: Καθορίζουμε τις προτιμήσεις

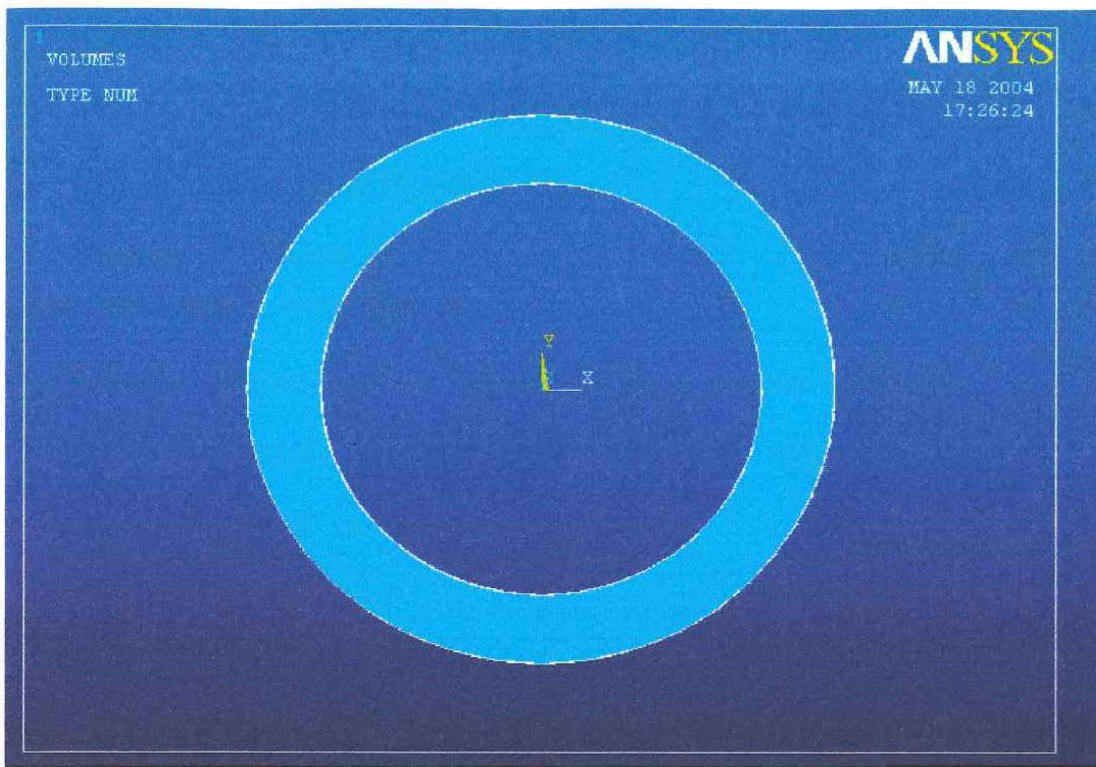
Θα θέσουμε τις προτιμήσεις, προκειμένου να φιλτραριστούν οι ποσότητες που αναφέρονται σ' αυτήν την εντολή μόνο:

1. Main Menu > Preferences
2. Ενεργοποιούμε το: Electric
3. OK.

Βήμα 2: Δημιουργούμε τον κύλινδρο

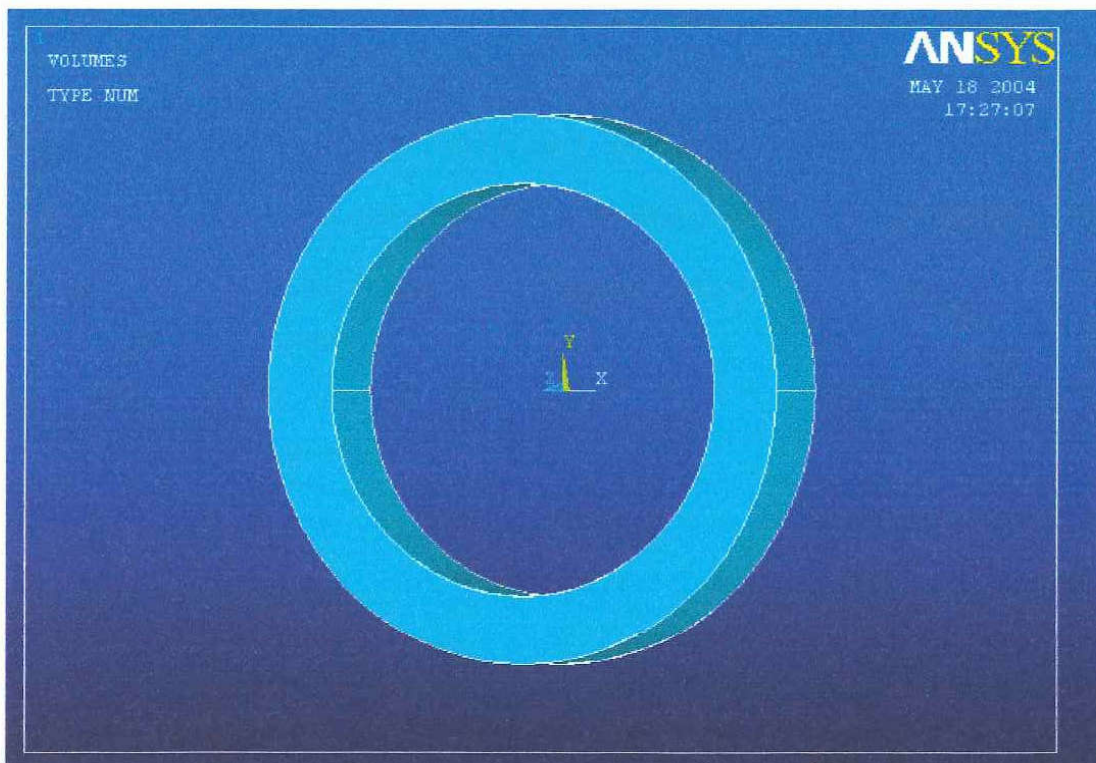
Για να δημιουργήσουμε το μοντέλο, θα εισάγουμε τις διαστάσεις του, δηλαδή την εσωτερική ακτίνα *RAD1*, την εξωτερική ακτίνα *RAD2* και το μήκος (βάθος, *DEPTH*) του αγωγού:

1. Main Menu > Preprocessor > -Modelling- Create > -Volumes- Cylinder > Hollow Cylinder
2. Εισάγουμε τα ακόλουθα:
 $RAD1 = 0.2858$
 $RAD2 = 0.381$
 $DEPTH = 0.1$
3. OK.



Σχήμα A-1: Κύλινδρος εσωτερικής διαμέτρου RAD1 και εξωτερικής διαμέτρου RAD2

4. Utility Menu > PlotCtrls > Pan, Zoom, Rotate
5. Περιστρέφουμε το μοντέλο



Σχήμα A-2: Ο κύλινδρος έχει περιστραφεί

6. Close.

Βήμα 4: Καθορίζουμε τον τύπο και τις επιλογές στοιχείων

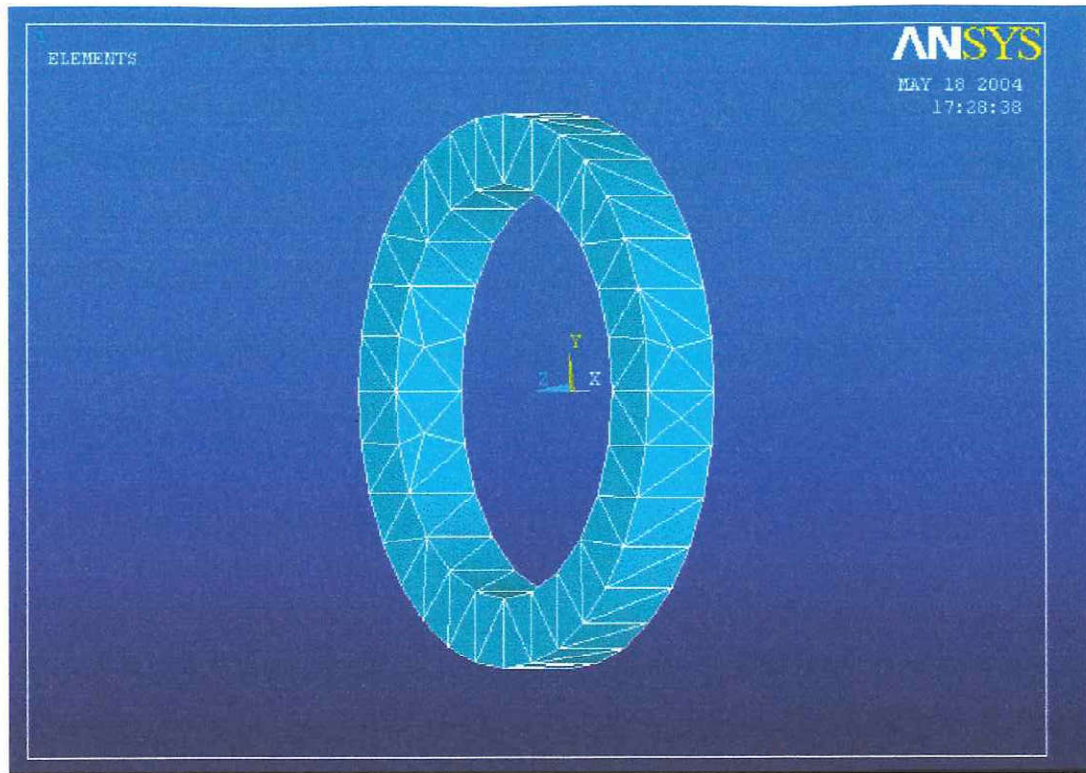
Σε αυτό το βήμα καθορίζουμε τους τύπους των στοιχείων και διευκρινίζουμε τις επιλογές που συνδέονται με αυτούς τους τύπους στοιχείων. Επιλέγουμε το στοιχείο *SOLID98*, το οποίο είναι ένα τρισδιάστατο συμπαγές στοιχείο. Το στοιχείο έχει συμπεριφορά τετραγωνικών μετατοπίσεων και είναι καλά ταιριασμένο για να διαμορφώσει τα ανώμαλα πλέγματα. Το στοιχείο καθορίζεται από δέκα κόμβους με μέχρι έξι βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο.

1. Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete
2. Επιλέγουμε: Add.
3. Επιλέγουμε: Elec Conduction
4. Επιλέγουμε: Scalar Tet 98 (*SOLID98*).
5. OK.
6. Close.

Παράγουμε το πλέγμα

Βήμα 5: Κάνουμε Mesh στο μοντέλο χρησιμοποιώντας το MeshTool

1. Main Menu > Preprocessor > MeshTool
2. Επιλέγουμε: Volumes, Set
3. Επιλέγουμε την περιοχή του αγωγού
4. Επιλέγουμε: Pick All (στο picking menu).
5. OK (στον πίνακα με το Volume Attributes).
6. Ανεβάζουμε το smartsize από το 6 στο 3
7. Επιλέγουμε: Mesh
8. Επιλέγουμε την περιοχή του αγωγού
9. Επιλέγουμε: Pick All (στο picking menu).
10. Επιλέγουμε: Close στο MeshTool.

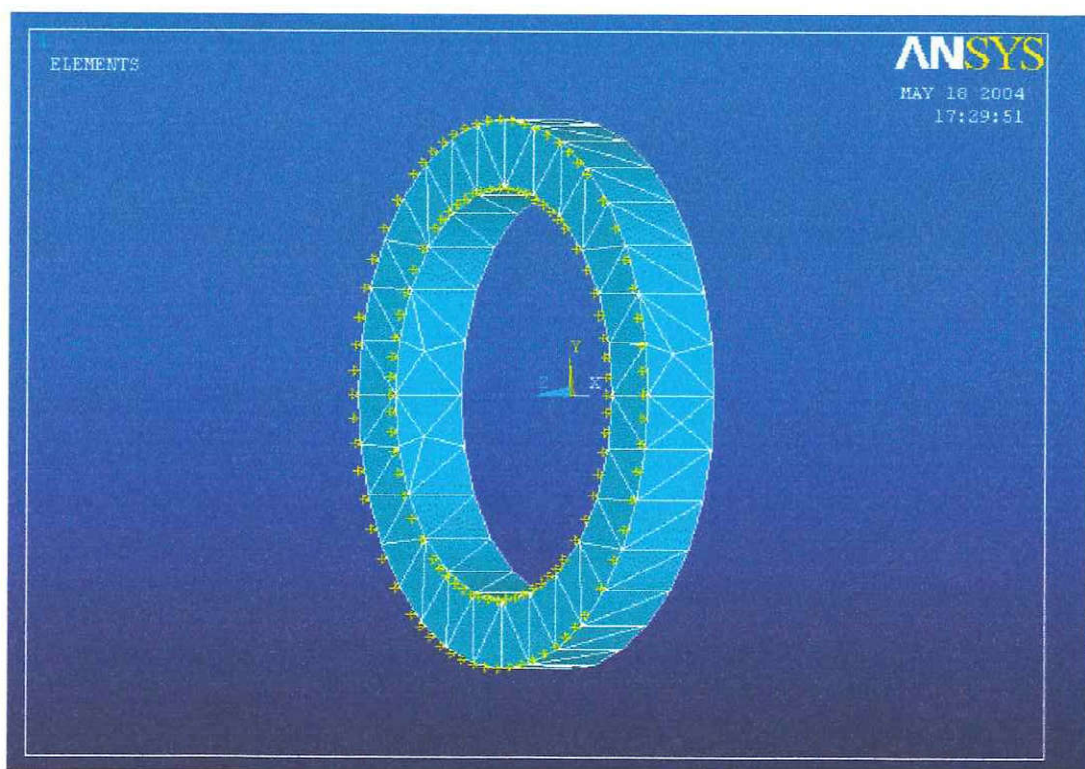


Σχήμα A-3: Δημιουργούμε το πλέγμα στον κύλινδρο

Βήμα 6: Εφαρμόζουμε οριακές συνθήκες

Για την ανάλυση αυτή, πρέπει το σύνολο των μονάδων να είναι σε συμφωνία. Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται είναι ήδη στο SI. Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες. Έτσι, ο μόνος βαθμός ελευθερίας που υπάρχει, είναι τα VOLT. Θα εφαρμόσουμε μία διαφορά δυναμικού, από -10 Volt έως 10 Volt:

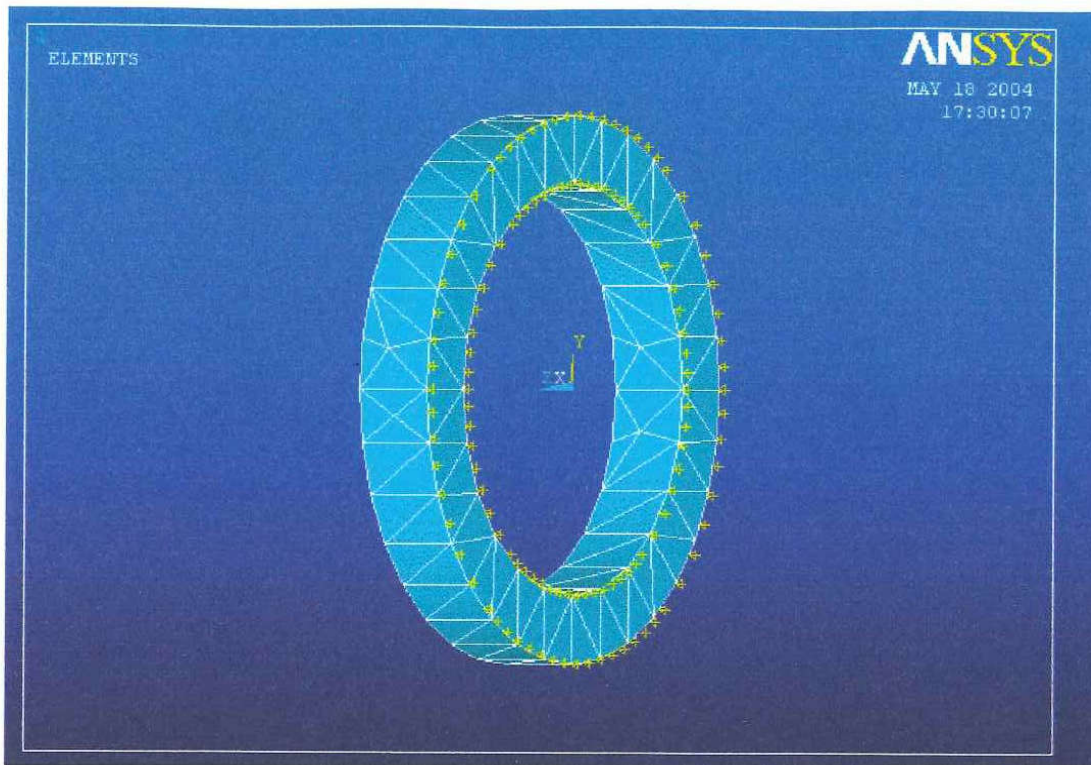
1. Main Menu > Solution > -Loads- Apply > -Electric- Boundary > -Voltage- On Areas
2. Κάνουμε κλικ με το βελάκι πάνω στην μια πλαϊνή πλευρά του κυλίνδρου
3. Επιλέγουμε: Apply



Σχήμα A-4: Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες στον κύλινδρο

4. Θέτουμε την τιμή -10, στο 'Load Volt value'
5. Πατάμε: Apply
6. Utility menu > Pan, Zoom, Rotate.
7. Περιστρέφουμε το μοντέλο μέχρι να φανεί η άλλη πλαϊνή πλευρά του κυλίνδρου
8. Κάνουμε κλικ με το βελάκι πάνω στην άλλη πλαϊνή πλευρά του κυλίνδρου
9. Επιλέγουμε: Ok
10. Θέτουμε την τιμή 10, στο 'Load Volt value'

11. Επιλέγουμε: Ok



Σχήμα A-5: Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες στον κύλινδρο

12. Εισάγουμε: Solve > Current LS.

13. Επιλέγουμε: Ok

Πίνακας A-2: Επιλύουμε τα ρεύματα

SOLUTION OPTIONS

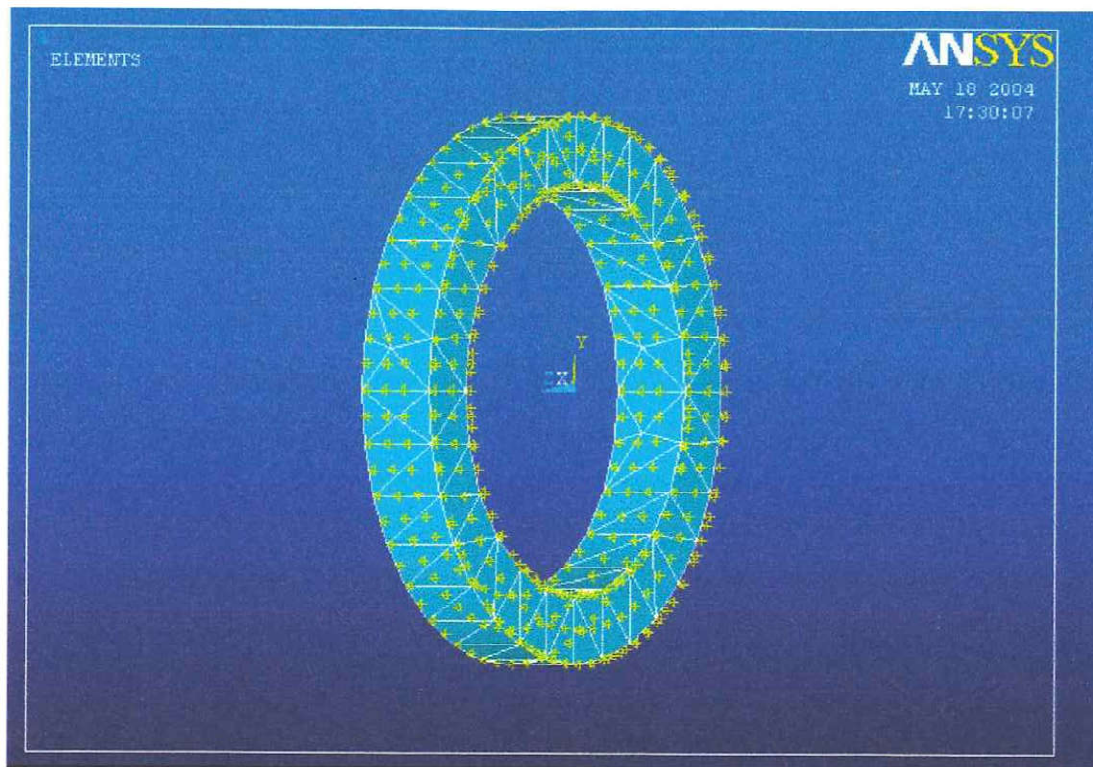
PROBLEM DIMENSIONALITY.....	3-D
DEGREES OF FREEDOM.....	VOLT
ANALYSIS TYPE.....	STATIC (STEADY-STATE)

LOAD STEP OPTIONS

LOAD STEP NUMBER.....	1
TIME AT END OF THE LOAD STEP.....	1.0000
NUMBER OF SUBSTEPS.....	1
STEP CHANGE BOUNDARY CONDITIONS.....	NO
PRINT OUTPUT CONTROLS.....	NO PRINTOUT
DATABASE OUTPUT CONTROLS.....	ALL DATA WRITTEN FOR THE LAST SUBSTEP

14. Close.

15. Toolbar: SAVE_DB



Σχήμα A-6: Επιλύουμε τα ρεύματα

Βήμα 7: Καθορίζουμε τις παραμέτρους

Για να γίνει αυτό, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Utility Menu > Parameters > Scalar Parameters.

Ένα παράθυρο διαλόγου εμφανίζεται.

2. Πληκτρολογούμε τις τιμές των παραμέτρων που φαίνονται παρακάτω, μετά από κάθε εισαγωγή πατάμε ENTER.

$$V1 = 10$$

$$V0 = -10$$

3. Κάνουμε κλικ στο: Close.

Βήμα 8: Αποτελέσματα ανάλυσης

1. Main Menu > General Postproc > Element Table > Define Table.

Το παράθυρο διαλόγου 'Element Table Data' εμφανίζεται.

2. Κάνουμε κλικ στο: Add.

Το παράθυρο διαλόγου 'Define Additional Element Table Items' εμφανίζεται.

3. Στο "User label for item" field, εισάγουμε JHEAT.

4. Στους κυλιόμενους καταλόγους "Results data item" field, επιλέγουμε το "Joule Heat" (Όταν επιλέγουμε το "Joule Heat" στον κατάλογο στα αριστερά, το "Joule Heat JHEAT" θα επιλεγθεί αυτόματα στον κατάλογο στα δεξιά)

5. Κάνουμε κλικ στο: OK.

Το παράθυρο διαλόγου 'Element Table Data' τώρα παρουσιάζει το JHEAT.

6. Κάνουμε κλικ στο: Close.

Βήμα 9: Σχεδίαση αποτελεσμάτων ανάλυσης

1. Utility Menu > PlotCtrls > Numbering.

Το παράθυρο διαλόγου 'Plot Numbering Controls' εμφανίζεται.

2. Θέτουμε το "Numbering shown with" field στο "Colours only."

3. Κάνουμε κλικ στο: OK.

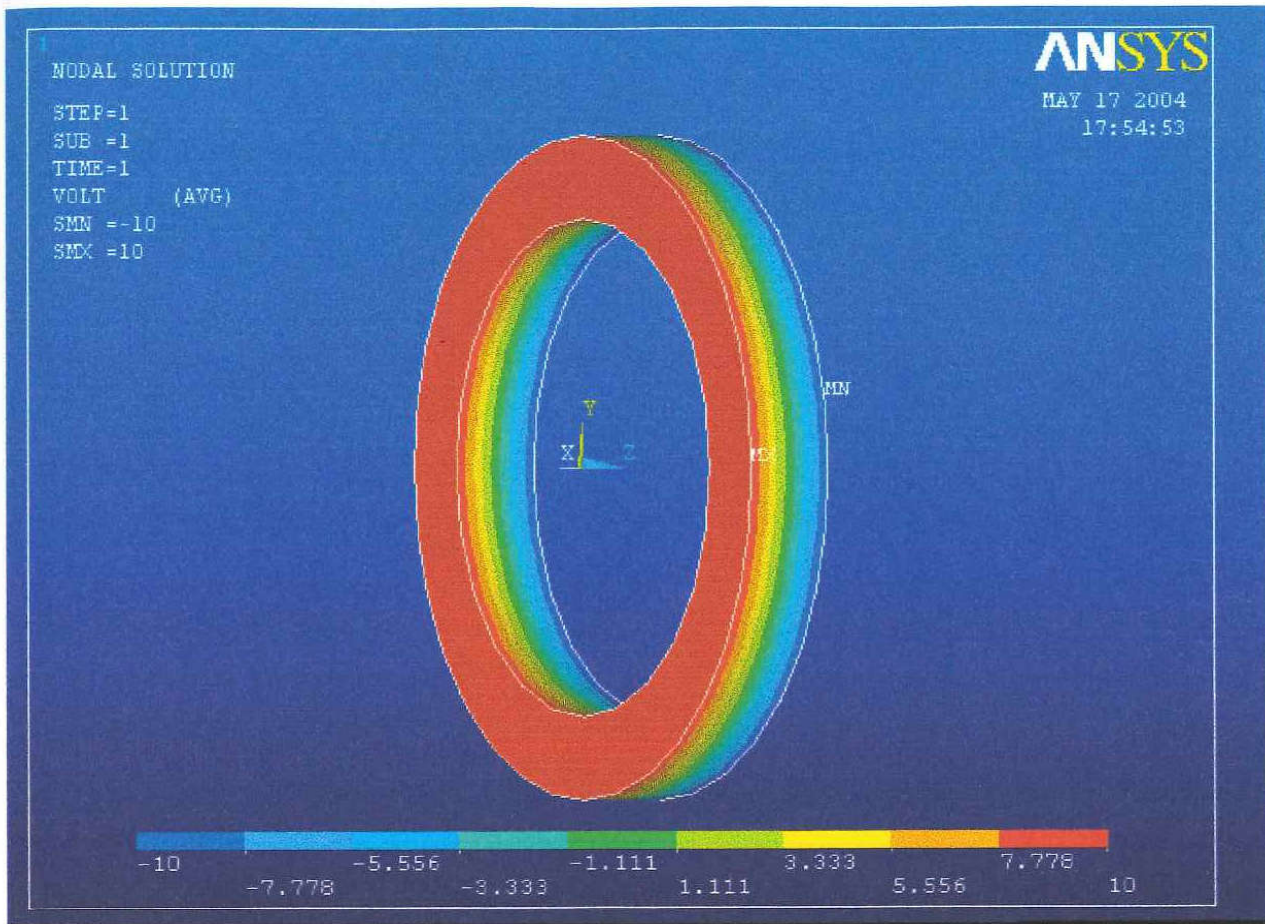
4. Main Menu > General Postproc > Plot Results > -Contour Plot- Nodal Solu.

Το παράθυρο διαλόγου 'Contour Nodal Solution Data' εμφανίζεται.

5. Στο "Item to be contoured" field, επιλέγουμε το "DOF solution" και "Elec poten VOLT"

6. Κάνουμε κλικ στο: OK.

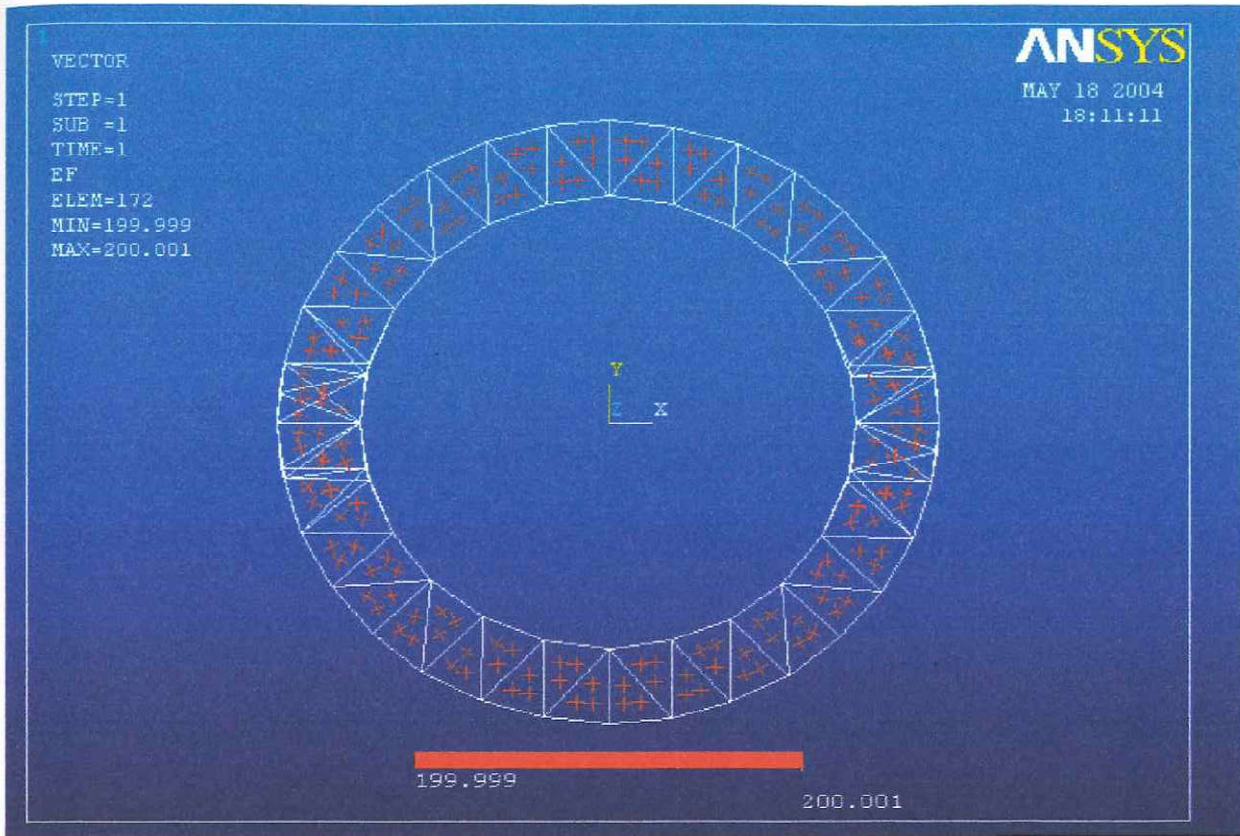
Το παράθυρο 'Graphics Window' δείχνει τη μορφή των ισοδυναμικών γραμμών.



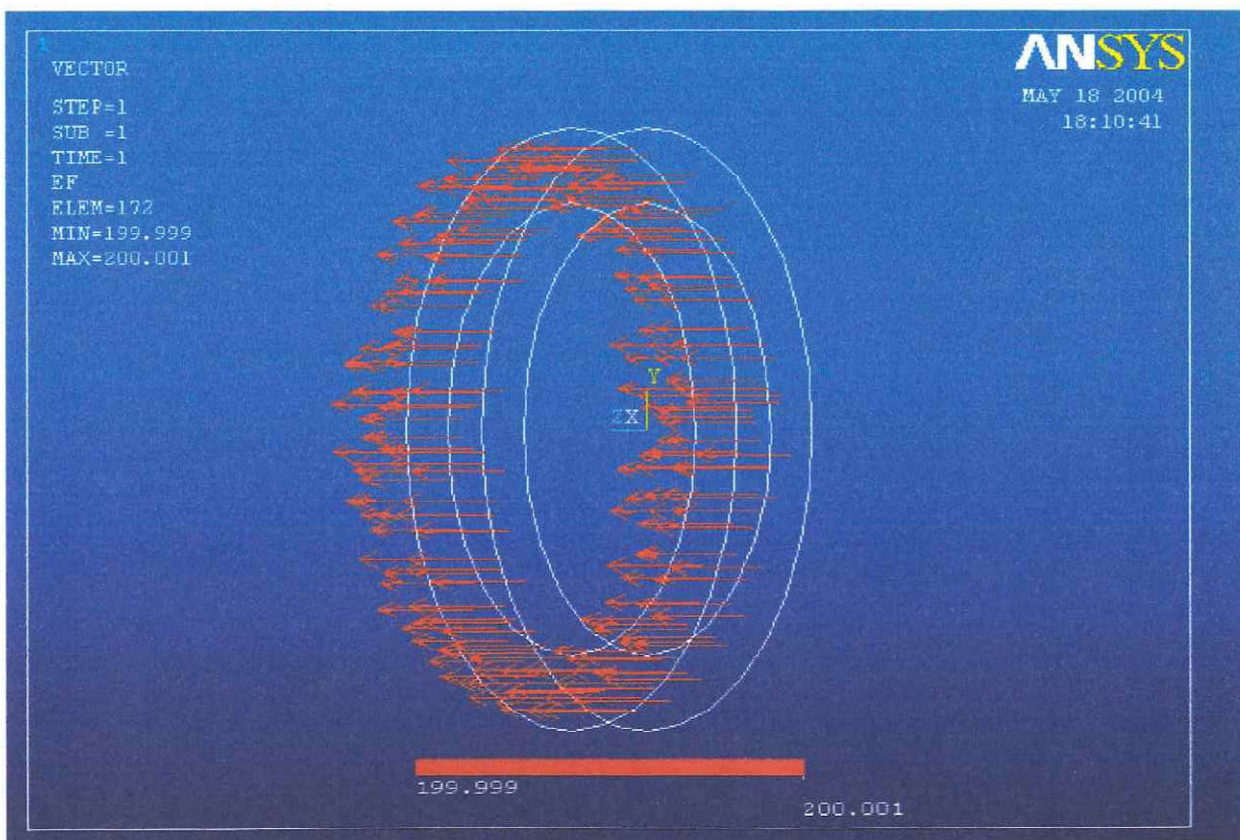
Σχήμα A-7: Παρουσιάζεται μία μορφή των ισοδυναμικών γραμμών

7. Main Menu > General Postproc > Plot Results > -Vector Plot- Predefined.
8. Το παράθυρο διαλόγου 'Vector Plot of User-defined Vectors' εμφανίζεται.
9. Στο "Vector Item to be plotted" field, επιλέγουμε το 'Flux & Gradient' και μετά επιλέγουμε το 'Elec Field EF'.
10. Κάνουμε κλικ στο: OK.

Το παράθυρο 'Graphics Window' δείχνει τη διανυσματική μορφή του ηλεκτρικού πεδίου.



Σχήμα A-8: Παρουσιάζεται μια διανυσματική μορφή του ηλεκτρικού πεδίου



Σχήμα A-9: Παρουσιάζεται μια διανυσματική μορφή του ηλεκτρικού πεδίου

Βήμα 10: Εκτελούμε τους υπολογισμούς

1. Main Menu > General Postproc > Element Table > Sum of Each Item.

Ένα ενημερωτικό παράθυρο διαλόγου εμφανίζεται.

2. Κάνουμε κλικ στο: OK.

Ένα παράθυρο μας παρουσιάζει όλες τις καταχωρήσεις των στοιχείων και τιμές τους.

Πίνακας A-3: Καταχωρήσεις στοιχείων και οι τιμές τους

SUM ALL THE ACTIVE ENTRIES IN THE ELEMENT TABLE	
TABLE LABEL	TOTAL
JHEAT	0.128000E+14

3. Κάνουμε κλικ στο: Close, για να κλείσει το παράθυρο.
4. Utility Menu > Parameters > Get Scalar Data.
5. Το παράθυρο διαλόγου 'Get Scalar Data' εμφανίζεται.
Στο "Type of data to be retrieved" field, επιλέγουμε το "Results data" και "Elem table sums"
6. Κάνουμε κλικ στο: OK.
7. Το παράθυρο διαλόγου 'Get Element Table Sum Results' εμφανίζεται.
Στο "Name of parameter to be defined" field, εισάγουμε Q.
8. Set the "Element table item" field στο "JHEAT."
9. Κάνουμε κλικ στο: OK.
10. Utility Menu > Parameters > Scalar Parameters.
11. Το παράθυρο διαλόγου 'Scalar Parameters' εμφανίζεται.
12. Πληκτρολογούμε τις ακόλουθες τιμές, πατώντας ENTER ύστερα από κάθε τιμή:
13. $R = ((V1-V0) **2)/Q$
14. Κάνουμε κλικ στο: Close.
15. Utility Menu > List>Status > Parameters > Named Parameter.

16. Το παράθυρο διαλόγου 'Named Parameter Status' εμφανίζεται.

Στο "Name of parameter" field, επιλέγουμε το R.

17. Κάνουμε κλικ στο: OK.

Ένα παράθυρο εμφανίζει την τιμή της παραμέτρου R (αντίσταση).

Πίνακας A-4: Τιμή της παραμέτρου R

PARAMETER STATUS- R (36 PARAMETERS DEFINED)			
(INCLUDING 31 INTERNAL PARAMETERS)			
NAME	VALUE	TYPE	DIMENSIONS
R	3.125000266E-11	SCALAR	

18. Κάνουμε κλικ στο: Close, για να κλείσει το παράθυρο.

Βήμα 11: Τελειώνουμε την ανάλυση

Για να τελειώσουμε την ανάλυση, επιλέγουμε Main Menu > Finish. Κατόπιν κάνουμε κλικ στο QUIT στη γραμμή εργαλείων του ANSYS. Επιλέγουμε μια έξοδο και κάνουμε κλικ στο OK.

Τριγωνική Επιφανειακή Οπή

Εισαγωγή γεωμετρίας

Βήμα 1: Καθορίζουμε τις προτιμήσεις

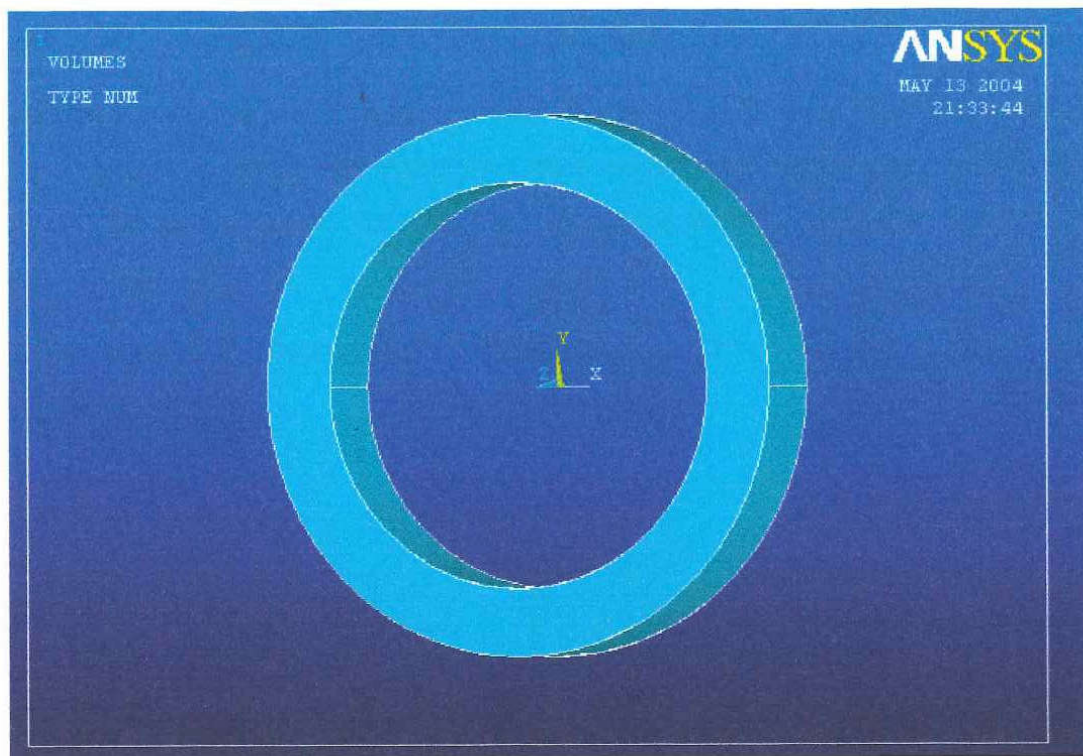
Θα θέσουμε τις προτιμήσεις, προκειμένου να φιλτραριστούν οι ποσότητες που αναφέρονται σ' αυτήν την εντολή μόνο:

1. Main Menu > Preferences
2. Ενεργοποιούμε το 'Electric'
3. OK.

Βήμα 2: Δημιουργούμε τον κύλινδρο

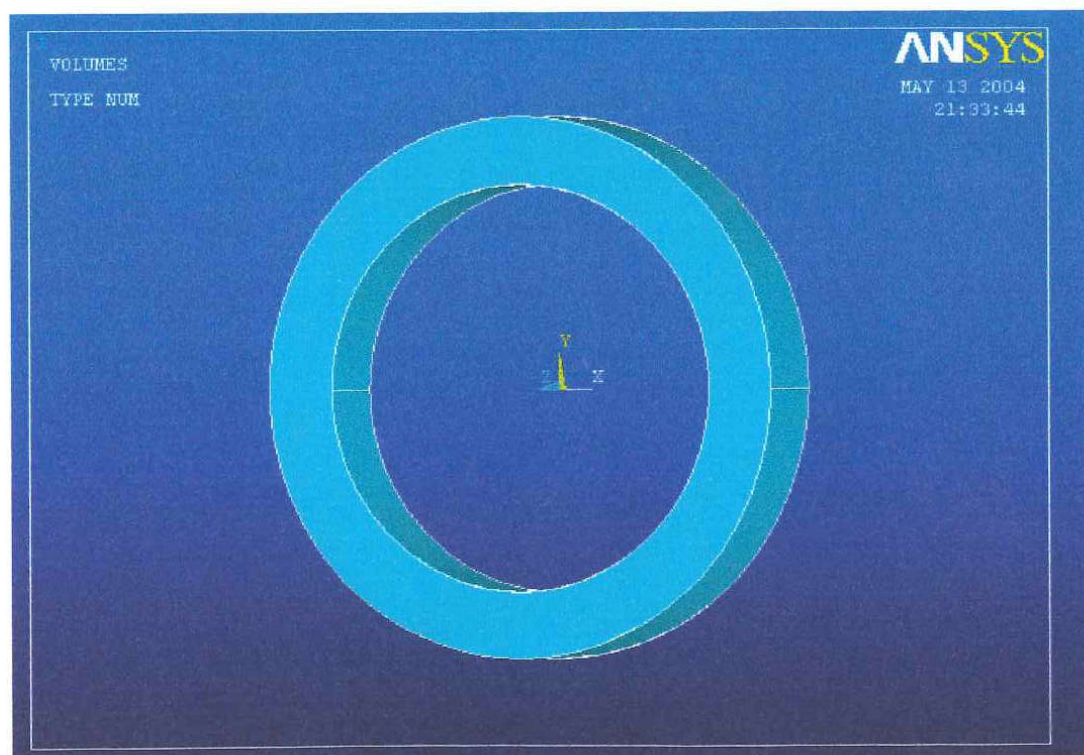
Για να δημιουργήσουμε το μοντέλο, θα εισάγουμε τις διαστάσεις του, δηλαδή την εσωτερική ακτίνα *RAD1*, την εξωτερική ακτίνα *RAD2* και το μήκος (βάθος, *DEPTH*) του αγωγού:

1. Main Menu > Preprocessor > -Modelling- Create > -Volumes- Cylinder > Hollow Cylinder
2. Εισάγουμε τα ακόλουθα:
 $RAD1 = 0.2858$
 $RAD2 = 0.381$
 $DEPTH = 0.1$
3. OK.



Σχήμα A-10: Κύλινδρος εσωτερικής διαμέτρου RAD1 και εξωτερικής διαμέτρου RAD2

- Utility Menu > PlotCtrls > Pan, Zoom, Rotate
- Περιστρέφουμε το μοντέλο



Σχήμα A-11: Ο κύλινδρος έχει περιστραφεί

- Close.

Βήμα 3: Δημιουργούμε το τρισδιάστατο τρίγωνο

Για να δημιουργήσουμε την τριγωνική οπή, θα δημιουργήσουμε πρώτα ένα τρισδιάστατο τρίγωνο, παράλληλα προς την επιφάνεια του κυλίνδρου. Εισάγουμε τις διαστάσεις του, δηλαδή την εσωτερική ακτίνα *RAD1*, την εξωτερική ακτίνα *RAD2* και το μήκος (βάθος, *DEPTH*) του αγωγού:

1. Main Menu > Preprocessor > -Modelling- Create > -Volumes- Prism > Triangular

WP X = 0.4

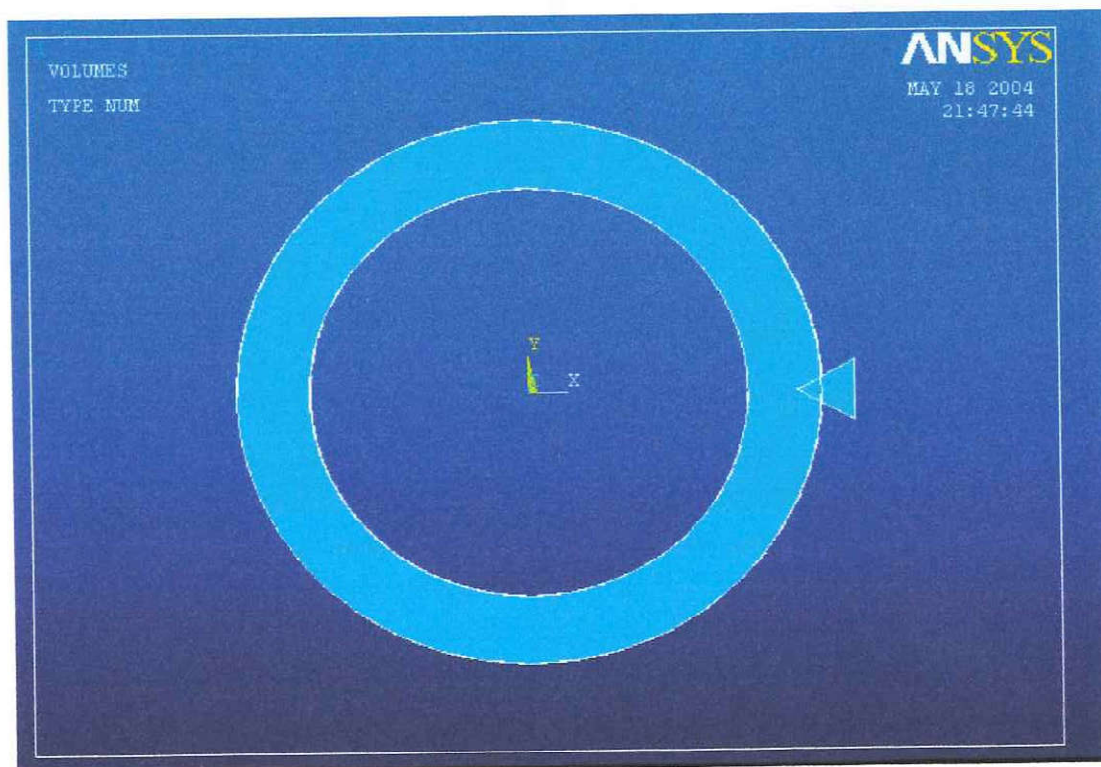
WP Y = 0

RADIUS = 0.05

THETA = 180

DEPTH = 0.1

2. Ok



Σχήμα A-12: Δημιουργούμε το τρισδιάστατο τρίγωνο

Βήμα 4: Δημιουργούμε την τριγωνική οπή

Στη συνέχεια δημιουργούμε την οπή, αφαιρώντας το τρισδιάστατο τρίγωνο:

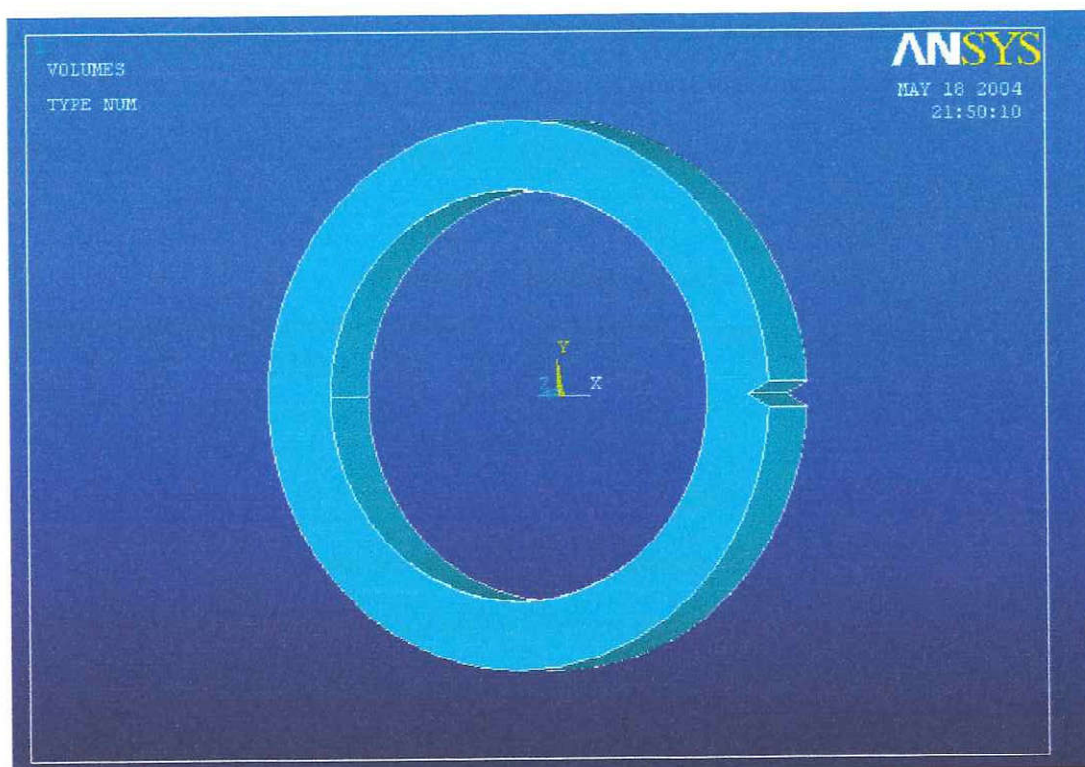
1. Main Menu > Preprocessor > -Modelling- Operate> -Booleans- Subtract > Volumes

Επιλέγουμε πρώτα και τους δύο όγκους (κύλινδρο και ορθογώνιο).

2. Apply

Επιλέγουμε μόνο το τρισδιάστατο τρίγωνο.

3. Ok



Σχήμα A-13: Δημιουργούμε την τριγωνική οπή

Καθορίζουμε τα υλικά

Βήμα 5: Καθορίζουμε τις υλικές ιδιότητες

Τώρα καθορίζουμε τις υλικές ιδιότητες για τον αγωγό. Για απλότητα, όλες οι υλικές ιδιότητες υποθέτουμε ότι είναι γραμμικές.:

1. Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models
2. Διπλό κλικ στο: Electromagnetics, Resistivity, Constant.
3. Εισάγουμε: $60 \cdot e^{-8}$ για το RSVX.
4. OK.
5. Material > Exit
6. Utility Menu > List > Properties > All Materials

Πίνακας A-5: Κατάλογος υλικών

EVALUATE MATERIAL PROPERTIES FOR MATERIALS 1 TO 1 IN INCREMENTS OF 1

MATERIAL NUMBER = 1 EVALUATED AT TEMPERATURE OF 0.0000
RSVX = 0.60000E-06

7. Αναθεωρούμε τον κατάλογο υλικών, έπειτα επιλέγουμε:

File > Close (Windows),

ή

Close (X11/Motif) για να κλείσει το παράθυρο.

Βήμα 6: Καθορίζουμε τον τύπο και τις επιλογές στοιχείων

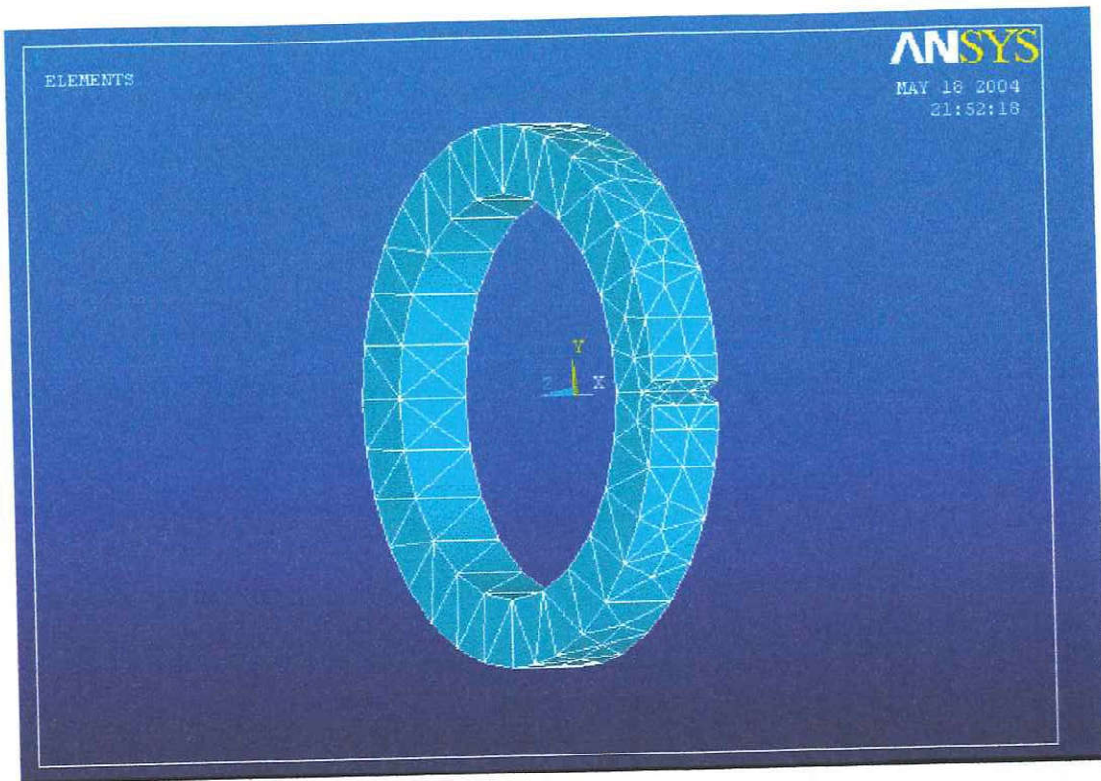
Σε αυτό το βήμα καθορίζουμε τους τύπους των στοιχείων και διευκρινίζουμε τις επιλογές που συνδέονται με αυτούς τους τύπους στοιχείων. Επιλέγουμε το στοιχείο *SOLID98*, το οποίο είναι ένα τρισδιάστατο συμπαγές στοιχείο. Το στοιχείο έχει συμπεριφορά τετραγωνικών μετατοπίσεων και είναι καλά ταιριασμένο για να διαμορφώσει τα ανώμαλα πλέγματα. Το στοιχείο καθορίζεται από δέκα κόμβους με μέχρι έξι βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο.

1. Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete
2. Επιλέγουμε: Add.
3. Επιλέγουμε: Elec Conduction
4. Επιλέγουμε: Scalar Tet 98 (*SOLID98*).
5. OK.
6. Close.

Παράγουμε το πλέγμα

Βήμα 7: Κάνουμε Mesh στο μοντέλο χρησιμοποιώντας το MeshTool

1. Main Menu > Preprocessor > MeshTool
2. Επιλέγουμε: Volumes, Set
3. Επιλέγουμε την περιοχή του αγωγού
4. Επιλέγουμε: Pick All (στο picking menu).
5. OK (στον πίνακα με το Volume Attributes).
6. Ανεβάζουμε το smartsize από το 6 στο 3
7. Επιλέγουμε: Mesh
8. Επιλέγουμε την περιοχή του αγωγού
9. Επιλέγουμε: Pick All (στο picking menu).
10. Επιλέγουμε: Close στο MeshTool.

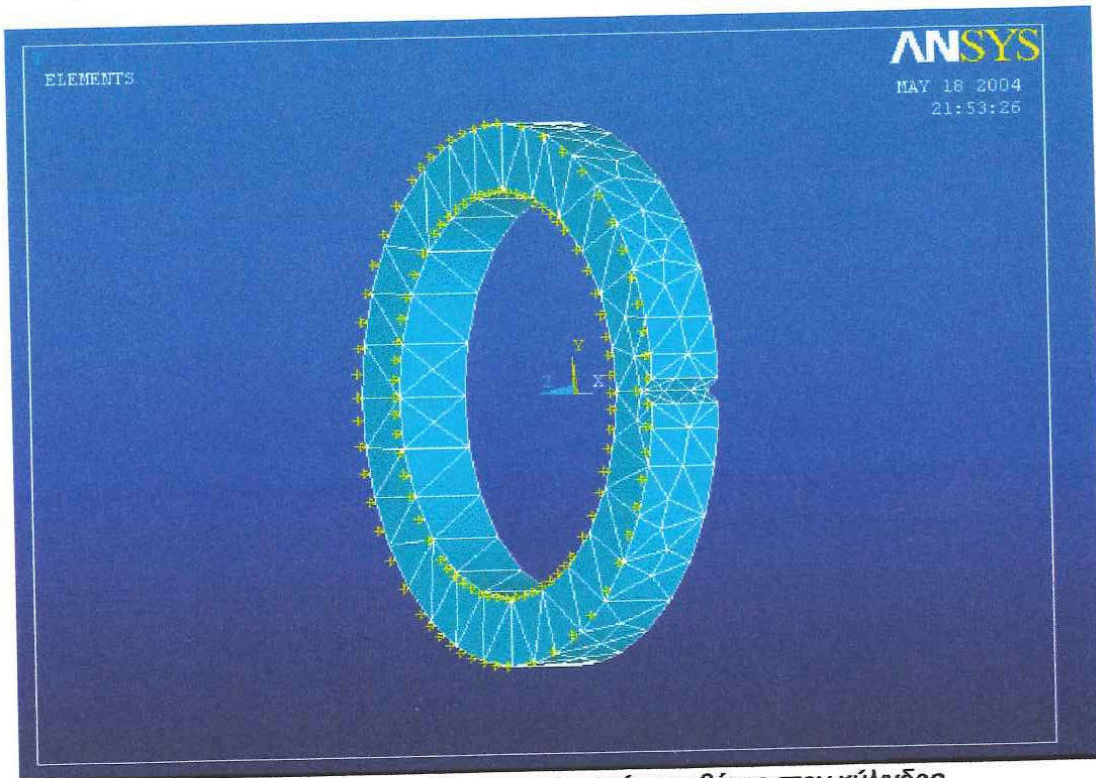


Σχήμα A-14: Δημιουργούμε το πλέγμα στον κύλινδρο

Βήμα 8: Εφαρμόζουμε οριακές συνθήκες

Για την ανάλυση αυτή, πρέπει το σύνολο των μονάδων να είναι σε συμφωνία. Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται είναι ήδη στο SI. Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες. Έτσι, ο μόνος βαθμός ελευθερίας που υπάρχει, είναι τα VOLT. Θα εφαρμόσουμε μία διαφορά δυναμικού, από -10 Volt έως 10 Volt:

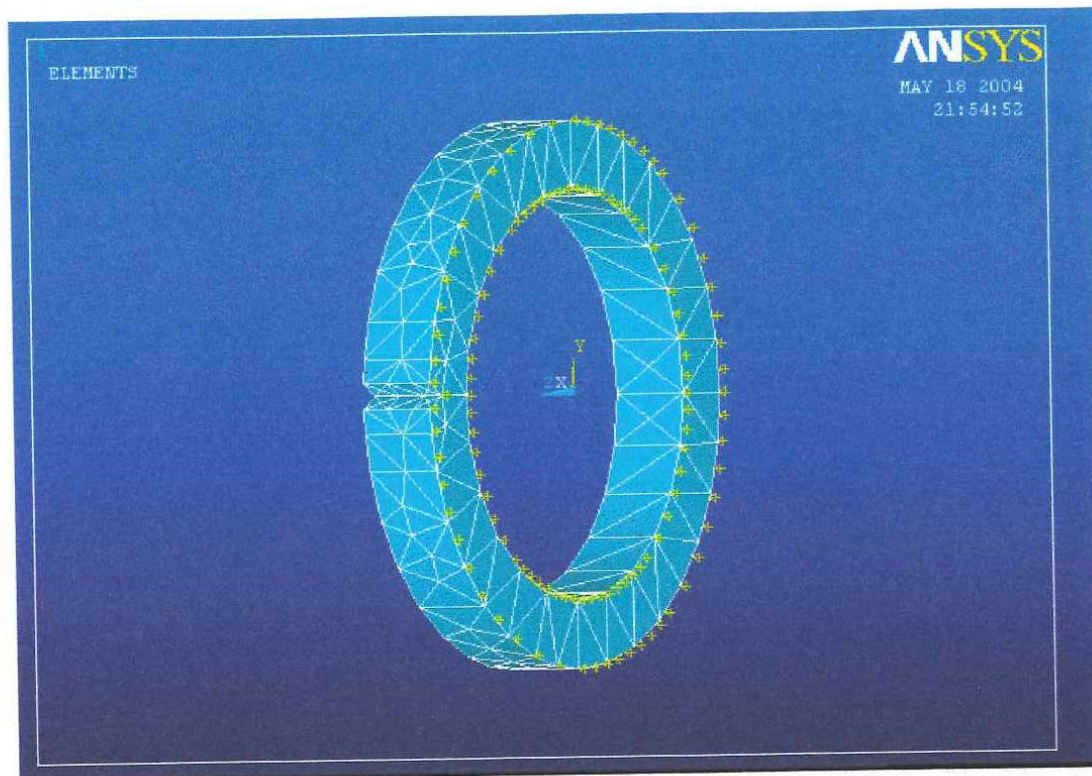
1. Main Menu > Solution > -Loads- Apply > -Electric- Boundary > -Voltage- On Areas
2. Κάνουμε κλικ με το βελάκι πάνω στην μια πλαϊνή πλευρά του κυλίνδρου
3. Επιλέγουμε: Apply
4. Θέτουμε την τιμή -10, στο 'Load Volt value'
5. Πατάμε: Apply



Σχήμα A-15: Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες στον κύλινδρο

6. Utility menu > Pan, Zoom, Rotate.
7. Περιστρέφουμε το μοντέλο μέχρι να φανεί η άλλη πλαϊνή πλευρά του κυλίνδρου
8. Κάνουμε κλικ με το βελάκι πάνω στην άλλη πλαϊνή πλευρά του κυλίνδρου
9. Επιλέγουμε: Ok
10. Θέτουμε την τιμή 10, στο 'Load Volt value'

11. Επιλέγουμε: Ok



Σχήμα A-16: Δημιουργούμε το πλέγμα στον κύλινδρο

12. Εισάγουμε: Solve > Current LS.

13. Επιλέγουμε: Ok

Πίνακας A-6: Επιλύουμε τα ρεύματα

SOLUTION OPTIONS

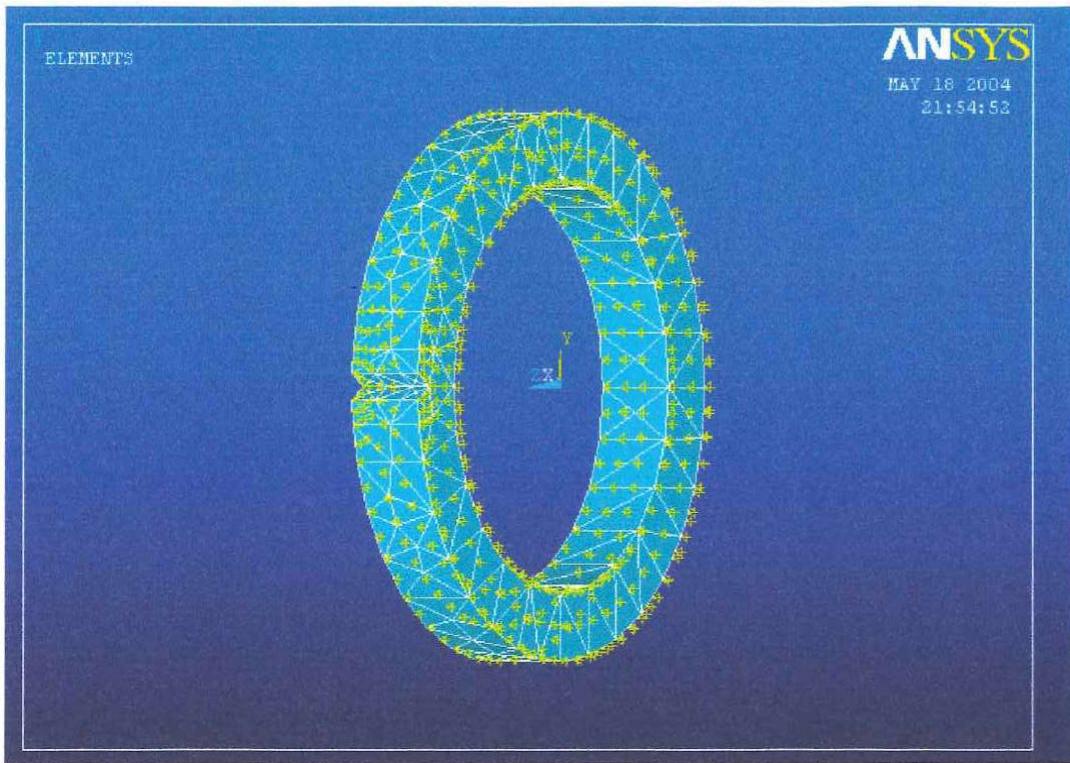
PROBLEM DIMENSIONALITY.....	3-D
DEGREES OF FREEDOM.....	VOLT
ANALYSIS TYPE.....	STATIC (STEADY-STATE)

LOAD STEP OPTIONS

LOAD STEP NUMBER.....	1
TIME AT END OF THE LOAD STEP.....	1.0000
NUMBER OF SUBSTEPS.....	1
STEP CHANGE BOUNDARY CONDITIONS.....	NO
PRINT OUTPUT CONTROLS.....	NO PRINTOUT
DATABASE OUTPUT CONTROLS.....	ALL DATA WRITTEN FOR THE LAST SUBSTEP

14. Close.

15. Toolbar: SAVE_DB



Σχήμα A-17: Επιλύουμε τα ρεύματα

Βήμα 9: Καθορίζουμε τις παραμέτρους

Για να γίνει αυτό, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Utility Menu > Parameters > Scalar Parameters.
2. Πληκτρολογούμε τις τιμές των παραμέτρων που φαίνονται παρακάτω, μετά από κάθε εισαγωγή πατάμε ENTER.

$$V1 = 10$$

$$V0 = -10$$

3. Κάνουμε κλικ στο: Close.

Βήμα 10: Αποτελέσματα ανάλυσης

1. Main Menu > General Postproc > Element Table > Define Table.

Το παράθυρο διαλόγου '*Element Table Data*' εμφανίζεται.

2. Κάνουμε κλικ στο: Add.

Το παράθυρο διαλόγου '*Define Additional Element Table Items*' εμφανίζεται.

3. Στο "*User label for item*" field, εισάγουμε JHEAT.

4. Στους κυλιόμενους καταλόγους "*Results data item*" field, επιλέγουμε το "*Joule Heat*" (Όταν επιλέγουμε το "*Joule Heat*" στον κατάλογο στα αριστερά, το "*Joule Heat JHEAT*" θα επιλεγθεί αυτόματα στον κατάλογο στα δεξιά)

5. Κάνουμε κλικ στο: OK.

Το παράθυρο διαλόγου '*Element Table Data*' τώρα παρουσιάζει το JHEAT.

6. Κάνουμε κλικ στο: Close.

Βήμα 11: Σχεδίαση αποτελεσμάτων ανάλυσης

1. Utility Menu > PlotCtrls > Numbering.

Το παράθυρο διαλόγου '*Plot Numbering Controls*' εμφανίζεται.

2. Θέτουμε το "*Numbering shown with*" field στο "*Colours only*"

3. Κάνουμε κλικ στο: OK.

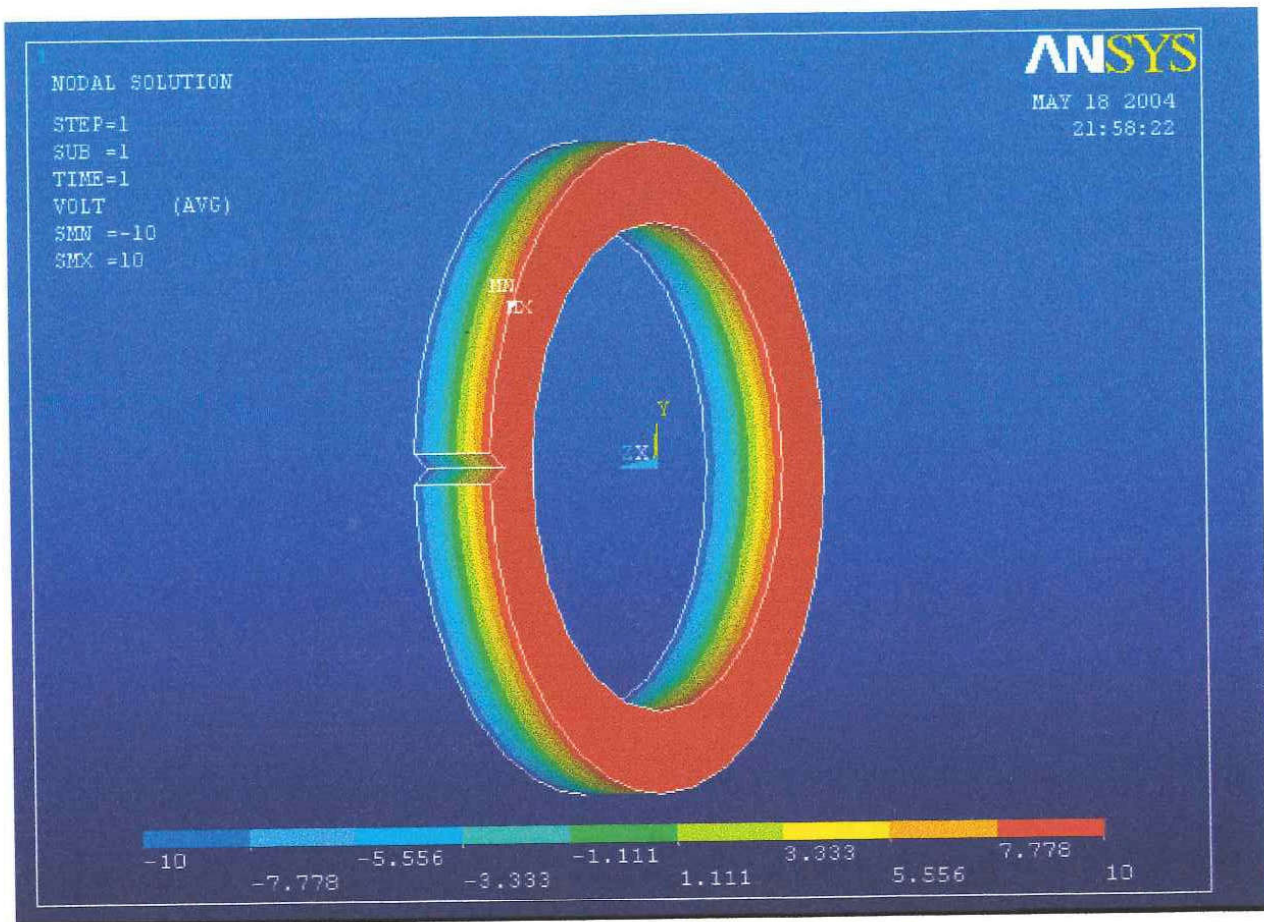
4. Main Menu > General Postproc > Plot Results > - Contour Plot - Nodal Solu.

Το παράθυρο διαλόγου '*Contour Nodal Solution Data*' εμφανίζεται.

5. Στο "*Item to be contoured*" field, επιλέγουμε το "*DOF solution*" και "*Elec poten VOLT*"

6. Κάνουμε κλικ στο: OK.

Το παράθυρο 'Graphics Window' δείχνει τη μορφή των ισοδυναμικών γραμμών.



Σχήμα A-18: Παρουσιάζεται μία μορφή των ισοδυναμικών γραμμών

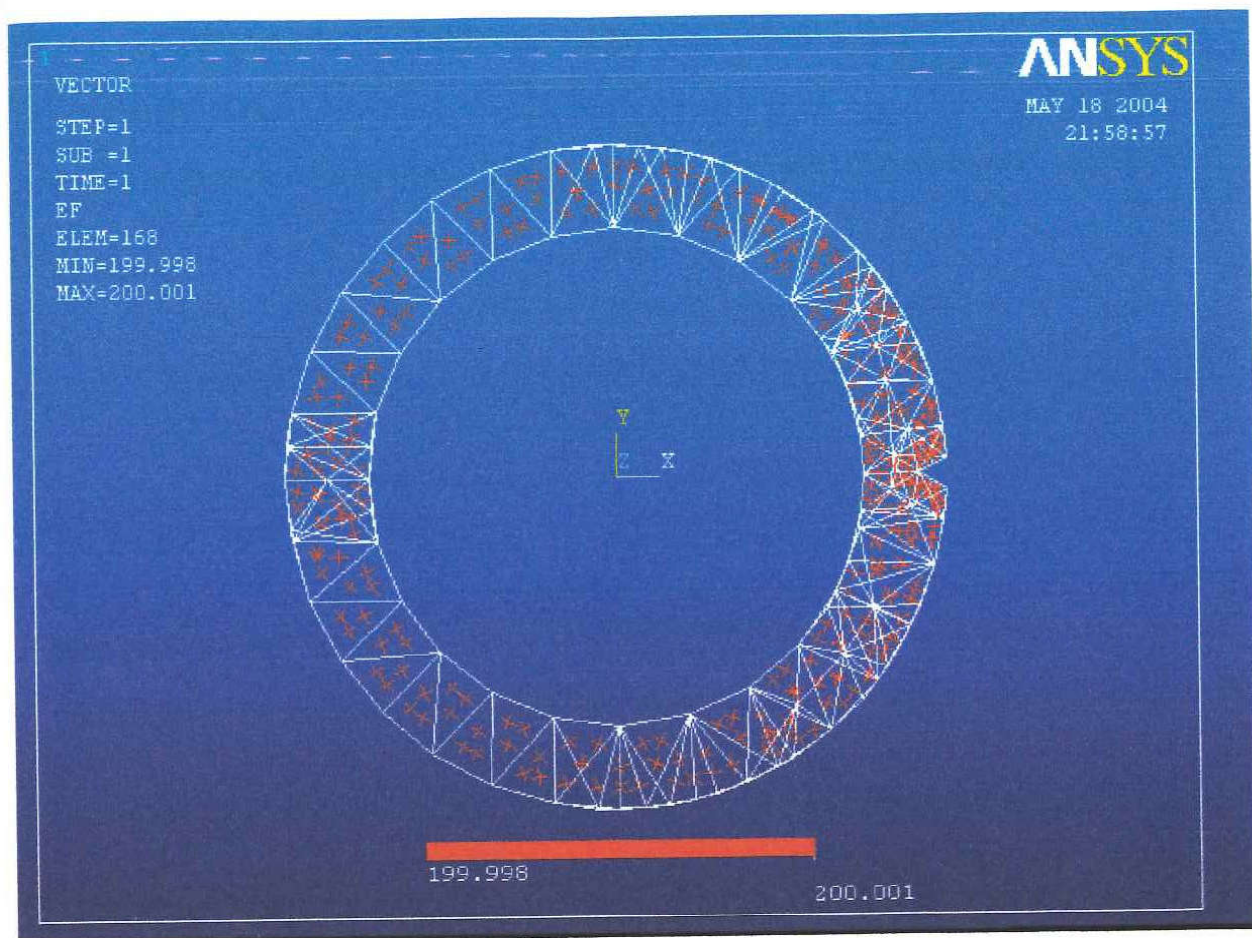
7. Main Menu > General Postproc > Plot Results > -Vector Plot- Predefined.

Το παράθυρο διαλόγου 'Vector Plot of User-defined Vectors' εμφανίζεται.

8. Στο "Vector Item to be plotted" field, επιλέγουμε το 'Flux & Gradient' και μετά επιλέγουμε το 'Elec Field EF'.

9. Κάνουμε κλικ στο: OK.

Το παράθυρο 'Graphics Window' δείχνει τη διανυσματική μορφή του ηλεκτρικού πεδίου.



Σχήμα A-19: Παρουσιάζεται μια διανυσματική μορφή του ηλεκτρικού πεδίου

Βήμα 12: Εκτελούμε τους υπολογισμούς

1. Main Menu > General Postproc > Element Table > Sum of Each Item.
2. Κάνουμε κλικ στο: OK.

Ένα παράθυρο, παρουσιάζει όλες τις καταχωρήσεις των στοιχείων και τιμές τους.

Πίνακας A-7: Καταχωρήσεις στοιχείων και οι τιμές τους

SUM ALL THE ACTIVE ENTRIES IN THE ELEMENT TABLE	
TABLE LABEL	TOTAL
JHEAT	0.246667E+14

3. Κάνουμε κλικ στο: Close, για να κλείσει το παράθυρο.
4. Utility Menu > Parameters > Get Scalar Data.
Το παράθυρο διαλόγου 'Get Scalar Data' εμφανίζεται.
5. Στο "Type of data to be retrieved" field, επιλέγουμε το "Results data" και "Element table sums"
6. Κάνουμε κλικ στο: OK.
Το παράθυρο διαλόγου 'Get Element Table Sum Results' εμφανίζεται.
7. Στο "Name of parameter to be defined" field, εισάγουμε Q.
8. Θέτουμε στο "Element table item" field το "JHEAT."
9. Κάνουμε κλικ στο: OK.
10. Utility Menu > Parameters > Scalar Parameters.

Το παράθυρο διαλόγου 'Scalar Parameters' εμφανίζεται.

Πληκτρολογούμε τις ακόλουθες τιμές, πατώντας ENTER ύστερα από κάθε τιμή:

$$R = ((V1-V0)**2)/Q$$

11. Κάνουμε κλικ στο: Close.
12. Utility Menu > List > Status > Parameters > Named Parameter.

Το παράθυρο διαλόγου 'Named Parameter Status' εμφανίζεται.

13. Στο "Name of parameter" field, επιλέγουμε το R.

14. Κάνουμε κλικ στο: OK.

Ένα παράθυρο εμφανίζει την τιμή της παραμέτρου R (αντίσταση).

Πίνακας A-8: Τιμή της παραμέτρου R

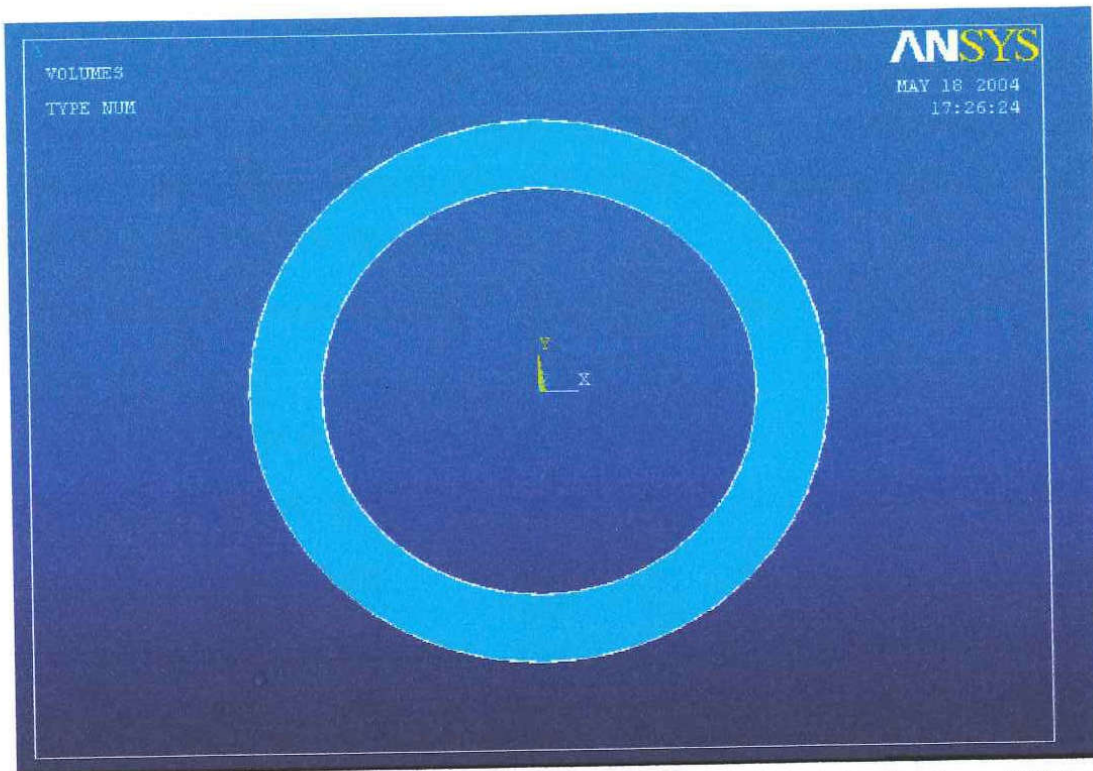
PARAMETER STATUS- R (36 PARAMETERS DEFINED) (INCLUDING 31 INTERNAL PARAMETERS)			
NAME	VALUE	TYPE	DIMENSIONS
R	1.621621725E-11	SCALAR	

15. Κάνουμε κλικ στο: Close, για να κλείσει το παράθυρο.

Βήμα 13: Τελειώνουμε την ανάλυση

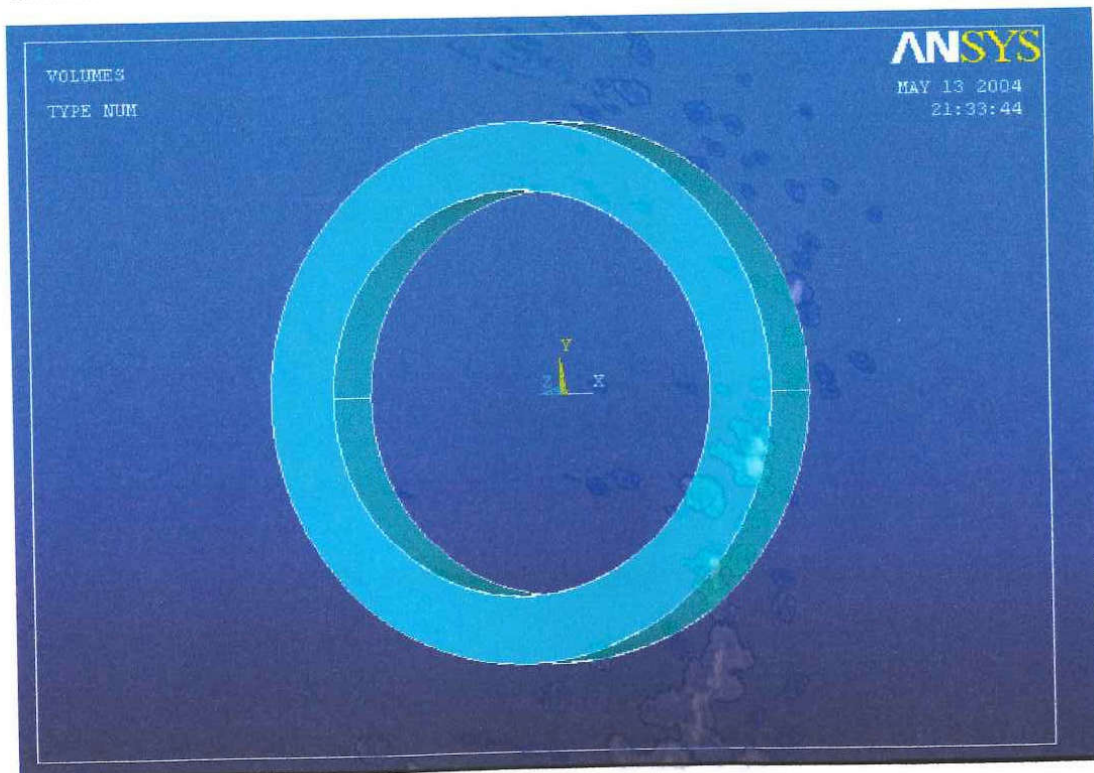
Για να τελειώσουμε την ανάλυση, επιλέγουμε Main Menu > Finish. Κατόπιν κάνουμε κλικ στο QUIT στη γραμμή εργαλείων του ANSYS. Επιλέγουμε μια έξοδο και κάνουμε κλικ στο OK.





Σχήμα A-20: Κύλινδρος εσωτερικής διαμέτρου $RAD1$ και εξωτερικής διαμέτρου $RAD2$

5. Περιστρέφουμε το μοντέλο
6. Close.



Σχήμα A-21: Ο κύλινδρος έχει περιστραφεί

Βήμα 3: Δημιουργούμε το τρισδιάστατο ορθογώνιο

Για να δημιουργήσουμε την ορθογωνική οπή, θα δημιουργήσουμε πρώτα ένα τρισδιάστατο ορθογώνιο, παράλληλα προς την επιφάνεια του κυλίνδρου. Εισάγουμε τις διαστάσεις του, δηλαδή την εσωτερική ακτίνα $RAD1$, την εξωτερική ακτίνα $RAD2$ και το μήκος (βάθος, $DEPTH$) του αγωγού:

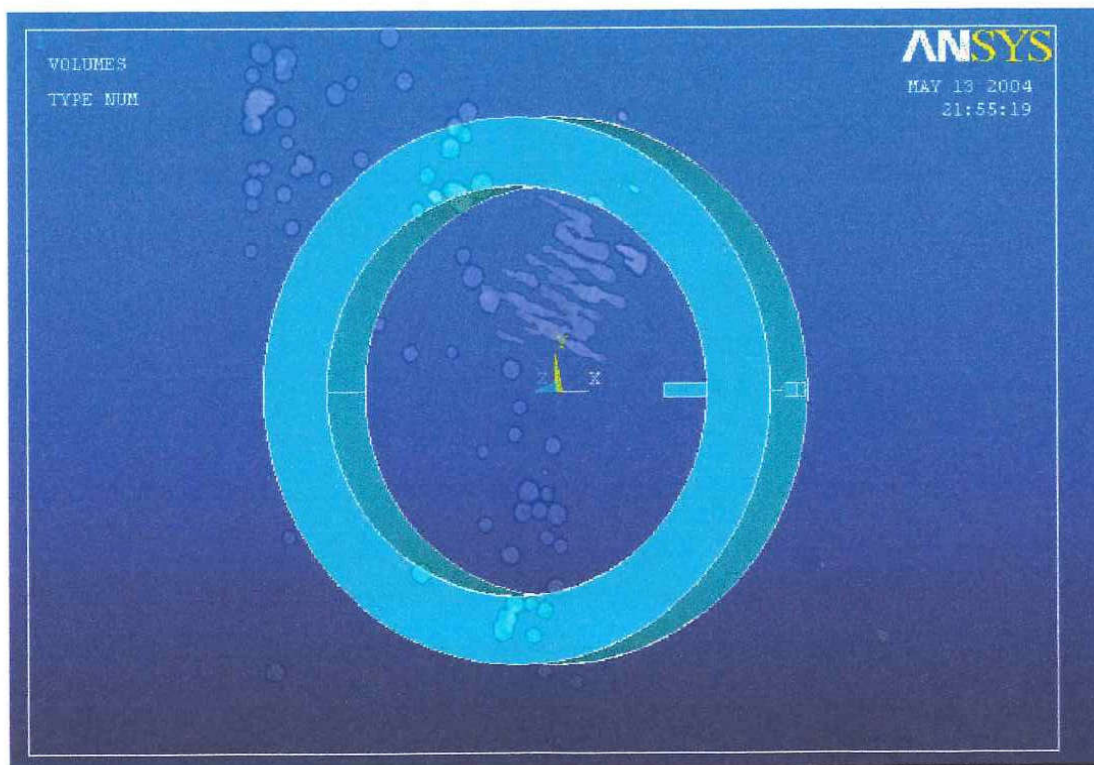
1. Main Menu > Preprocessor > -Modelling- Create > -Volumes- Block > By Dimensions

X1, X2: 0, 4 και 0, 2

Y1, Y2: 0, 01 και -0, 01

Z1, Z2: 0, 04 και 0, 06

2. Ok



Σχήμα A-22: Δημιουργούμε το τρισδιάστατο ορθογώνιο

Βήμα 4: Δημιουργούμε την ορθογωνική οπή

Στη συνέχεια δημιουργούμε την οπή, αφαιρώντας το τρισδιάστατο ορθογώνιο:

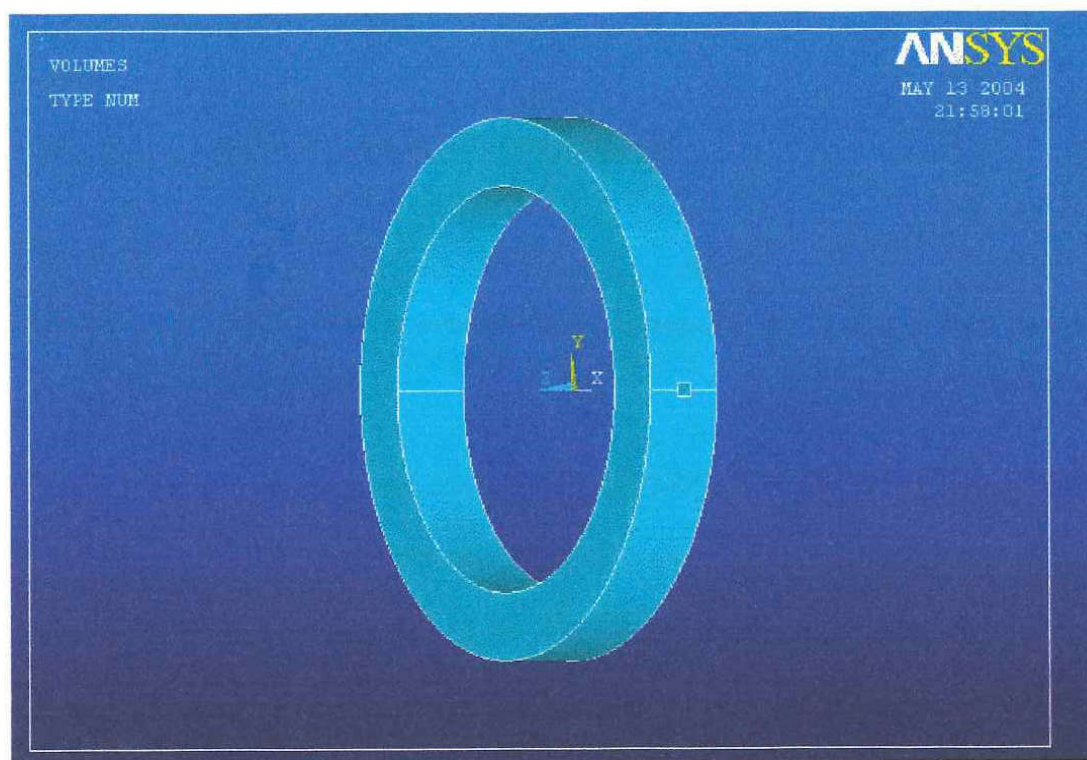
1. Main Menu > Preprocessor > -Modelling- Operate> -Booleans- Subtract > Volumes

Επιλέγουμε πρώτα και τους δύο όγκους (κύλινδρο και ορθογώνιο).

2. Apply

Επιλέγουμε μόνο το τρισδιάστατο ορθογώνιο.

3. Ok



Σχήμα A-23: Δημιουργούμε την ορθογωνική οπή

Καθορίζουμε τα υλικά

Βήμα 5: Καθορίζουμε τις υλικές ιδιότητες

Τώρα καθορίζουμε τις υλικές ιδιότητες για τον αγωγό. Για απλότητα, όλες οι υλικές ιδιότητες υποθέτουμε ότι είναι γραμμικές.:

1. Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models
2. Διπλό κλικ στο: Electromagnetics, Resistivity, Constant.
3. Εισάγουμε: $60 \cdot e^{-8}$ για το RSVX.
4. OK.
5. Material > Exit
6. Utility Menu > List > Properties > All Materials

Πίνακας A-9: Κατάλογος υλικών

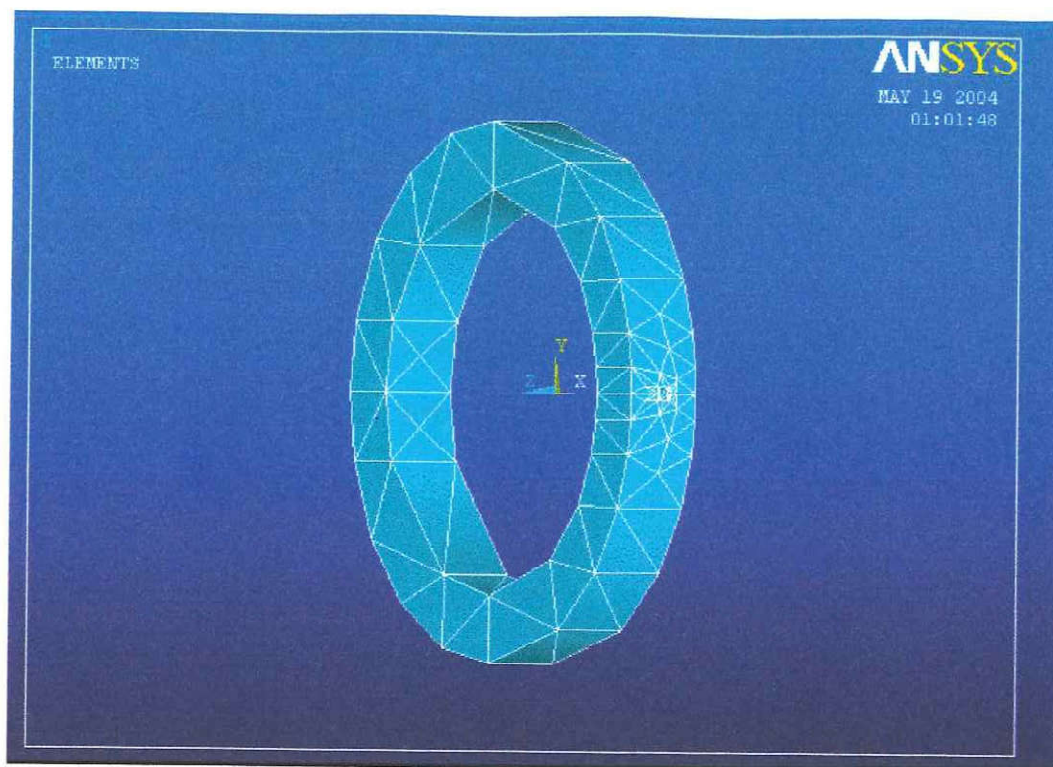
```
EVALUATE MATERIAL PROPERTIES FOR MATERIALS    1 TO    1 IN INCREMENTS OF
1
MATERIAL NUMBER =    1 EVALUATED AT TEMPERATURE OF  0.0000
RSVX = 0.60000E-06
```

7. Αναθεωρούμε τον κατάλογο υλικών, έπειτα επιλέγουμε:

File > Close (Windows),

ή

Close (X11/Motif) για να κλείσει το παράθυρο.

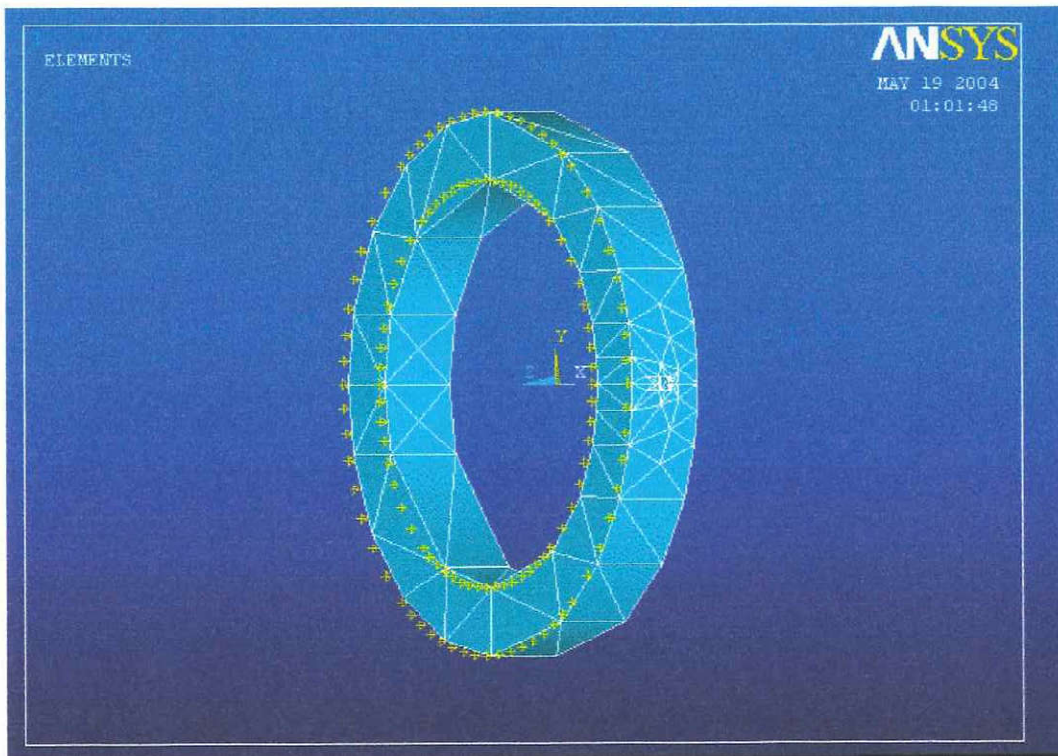


Σχήμα A-24: Δημιουργούμε το πλέγμα στον κύλινδρο

Βήμα 8: Εφαρμόζουμε οριακές συνθήκες

Για την ανάλυση αυτή, πρέπει το σύνολο των μονάδων να είναι σε συμφωνία. Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται είναι ήδη στο SI. Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες. Έτσι, ο μόνος βαθμός ελευθερίας που υπάρχει, είναι τα VOLT. Θα εφαρμόσουμε μία διαφορά δυναμικού, από -10 Volt έως 10 Volt:

1. Main Menu > Solution > -Loads- Apply > -Electric- Boundary > -Voltage- On Areas
2. Κάνουμε κλικ με το βελάκι πάνω στην μια πλαϊνή πλευρά του κυλίνδρου
3. Επιλέγουμε: Apply
4. Θέτουμε την τιμή -10, στο Load Volt value
5. Πατάμε: Apply

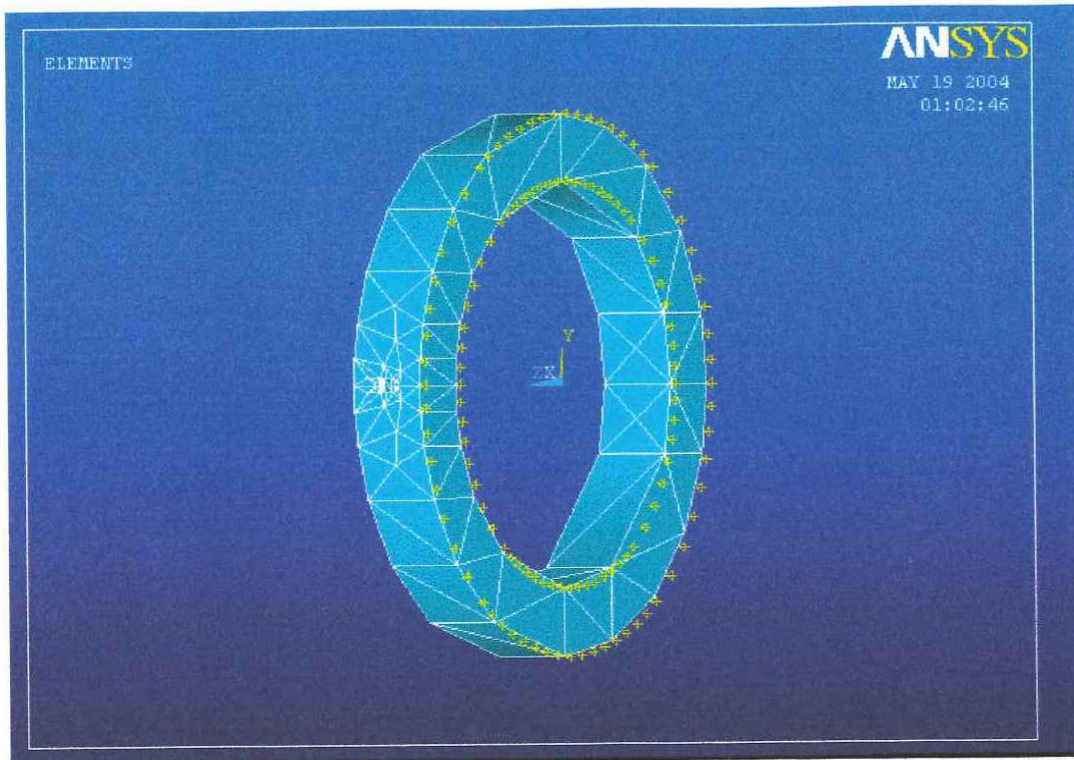


Σχήμα A-25: Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες στον κύλινδρο

6. Utility menu > Pan, Zoom, Rotate.
7. Περιστρέφουμε το μοντέλο μέχρι να φανεί η άλλη πλαϊνή πλευρά του κυλίνδρου
8. Κάνουμε κλικ με το βελάκι πάνω στην άλλη πλαϊνή πλευρά του κυλίνδρου
9. Επιλέγουμε: Ok

10. Θέτουμε την τιμή 10, στο Load Volt value

11. Επιλέγουμε: Ok



Σχήμα A-26: Δημιουργούμε το πλέγμα στον κύλινδρο

12. Εισάγουμε: Solve > Current LS.

13. Επιλέγουμε: Ok

Πίνακας A-10: Επιλύουμε τα ρεύματα

SOLUTION OPTIONS

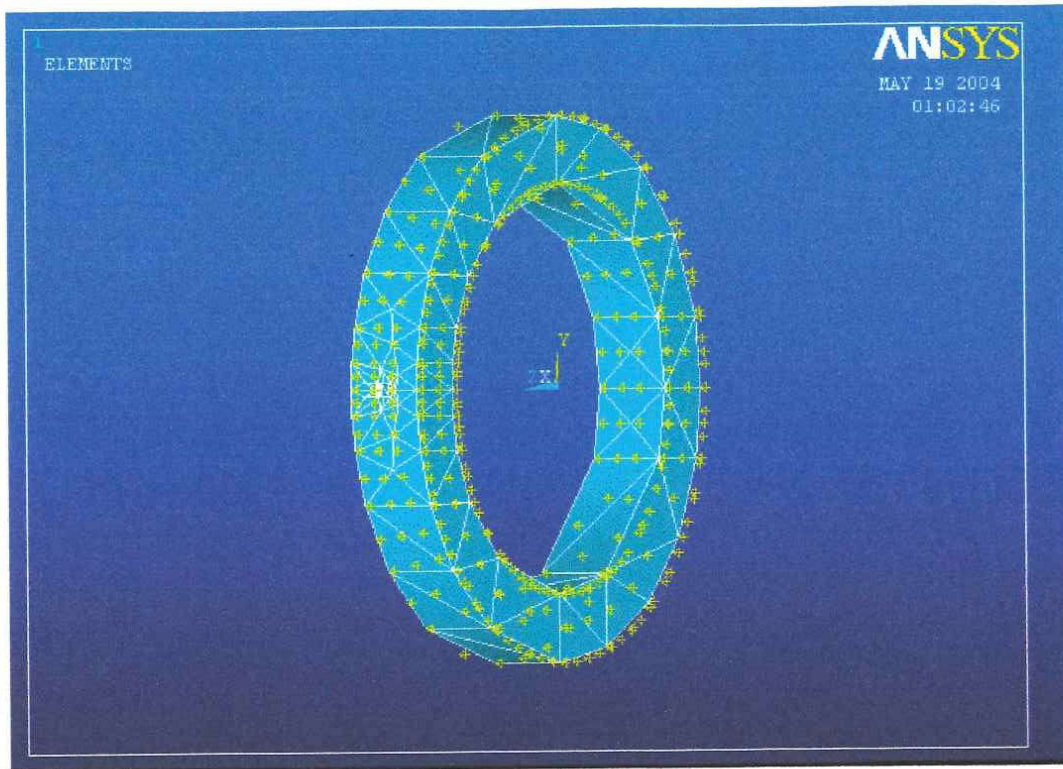
PROBLEM DIMENSIONALITY.....	3-D
DEGREES OF FREEDOM.....	VOLT
ANALYSIS TYPE.....	STATIC (STEADY-STATE)

LOAD STEP OPTIONS

LOAD STEP NUMBER.....	1
TIME AT END OF THE LOAD STEP.....	1.0000
NUMBER OF SUBSTEPS.....	1
STEP CHANGE BOUNDARY CONDITIONS.....	NO
PRINT OUTPUT CONTROLS.....	NO PRINTOUT
DATABASE OUTPUT CONTROLS.....	ALL DATA WRITTEN FOR THE LAST SUBSTEP

14. Close.

15. Toolbar: SAVE_DB



Σχήμα A-27: Επιλύουμε τα ρεύματα

Βήμα 9: Καθορίζουμε τις παραμέτρους

Για να γίνει αυτό, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Utility Menu>Parameters>Scalar Parameters. Ένα παράθυρο διαλόγου εμφανίζεται.
2. Πληκτρολογούμε τις τιμές των παραμέτρων που φαίνονται παρακάτω, μετά από κάθε εισαγωγή πατάμε ENTER.

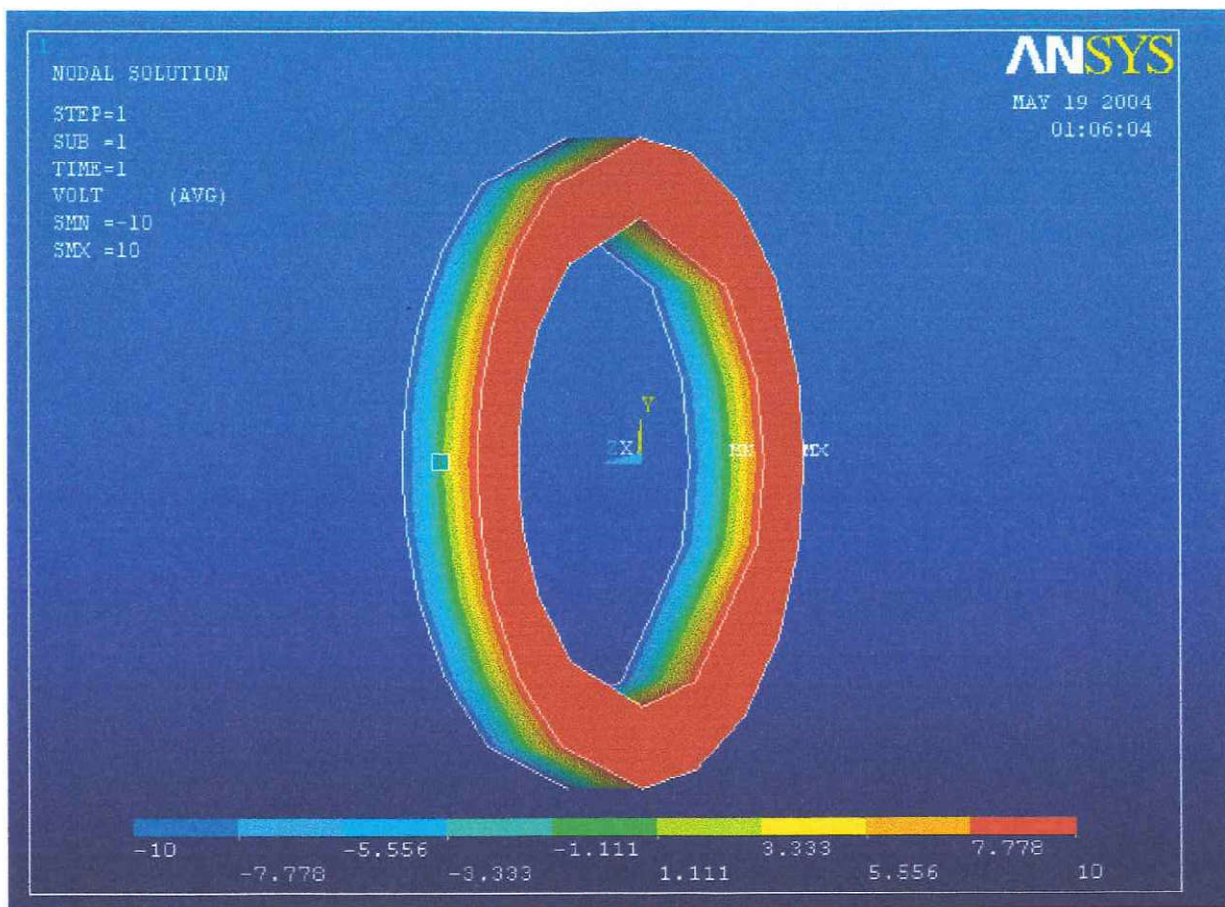
$$V1 = 10$$

$$V0 = -10$$

3. Κάνουμε κλικ στο: Close.



Το παράθυρο 'Graphics Window' δείχνει τη μορφή των ισοδυναμικών γραμμών.



Σχήμα A-28: Παρουσιάζεται μία μορφή των ισοδυναμικών γραμμών

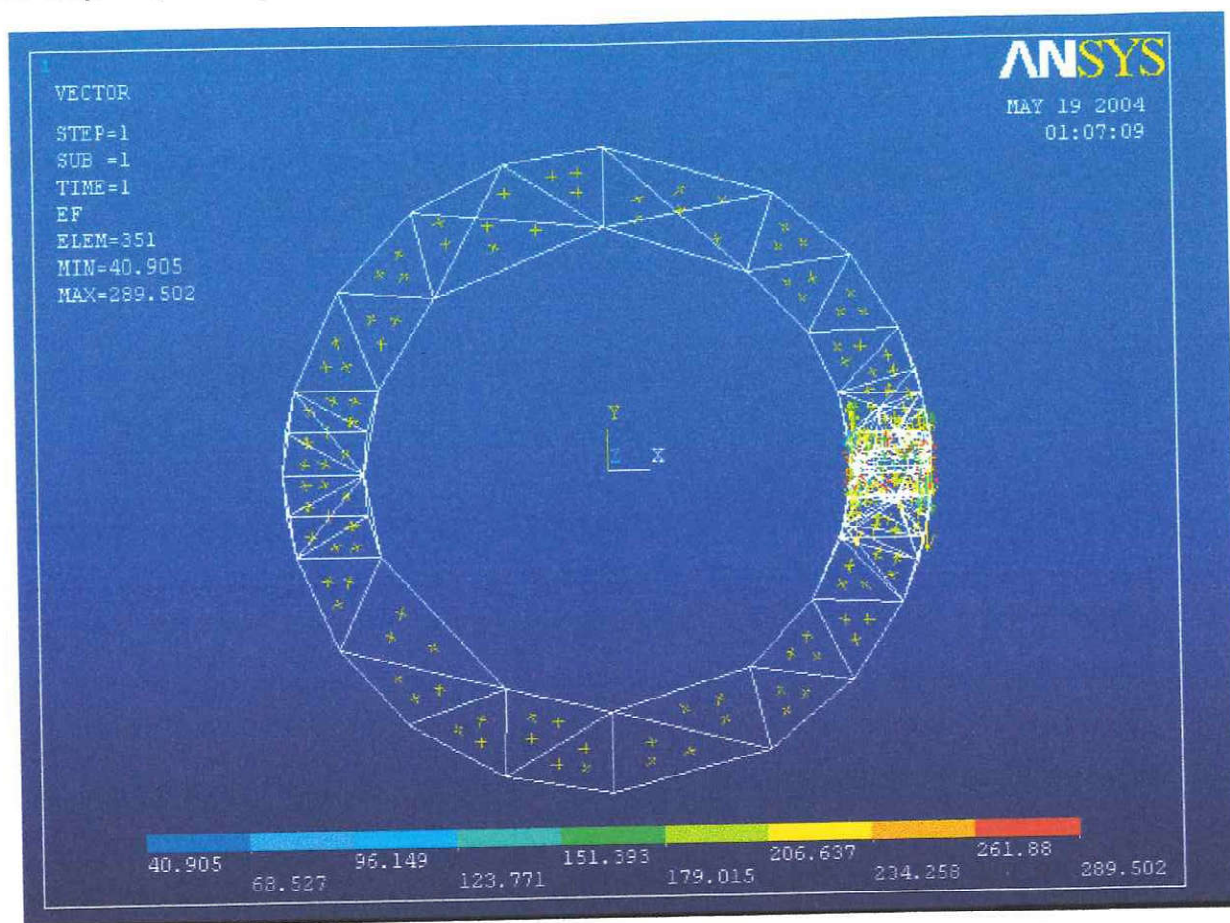
7. Main Menu > General Postproc > Plot Results > -Vector Plot- Predefined.

Το παράθυρο διαλόγου 'Vector Plot of User-defined Vectors' εμφανίζεται.

8. Στο "Vector Item to be plotted" field, επιλέγουμε το 'Flux & Gradient' και μετά επιλέγουμε το 'Elec Field EF'.

9. Κάνουμε κλικ στο: OK.

Το παράθυρο 'Graphics Window' δείχνει τη διανυσματική μορφή του ηλεκτρικού πεδίου.



Σχήμα A-29: Παρουσιάζεται μια διανυσματική μορφή του ηλεκτρικού πεδίου



Το παράθυρο διαλόγου 'Named Parameter Status' εμφανίζεται.

14. Στο "Name of parameter" field, επιλέγουμε το R.

15. Κάνουμε κλικ στο: OK.

Ένα παράθυρο εμφανίζει την τιμή της παραμέτρου R (αντίσταση).

Πίνακας A-12: Τιμή της παραμέτρου R

PARAMETER STATUS- R (36 PARAMETERS DEFINED) (INCLUDING 31 INTERNAL PARAMETERS)			
NAME	VALUE	TYPE	DIMENSIONS
R	1.714425051E-11	SCALAR	

16. Κάνουμε κλικ στο: Close, για να κλείσει το παράθυρο.

Βήμα 13: Τελειώνουμε την ανάλυση

Για να τελειώσουμε την ανάλυση, επιλέγουμε Main Menu>Finish. Κατόπιν κάνουμε κλικ στο QUIT στη γραμμή εργαλείων του ANSYS. Επιλέγουμε μια έξοδο και κάνουμε κλικ στο OK.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Η κωδικοποίηση της παραπάνω διαδικασίας μπορεί να γίνει σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού. Έτσι η *FORTRAN* κρίνεται κατάλληλη γι' αυτή την κωδικοποίηση.

```
C*****
C*****
C***** One-dimensional demonstration program *****
C*****
C*****
C          Copyright (c) 1995 P.P. Silvester and R.L. Ferrari
C*****
C
C  The variables in commons are:
C
C  Problem definition and solution
C  M      = συντελεστές των αγνώστων
C  T      = μήτρα με σταθερή τιμή
C  S      = μήτρα με σταθερή τιμή
C  resist = αντίσταση ανά μονάδα μήκους
C  conduc = αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους
C  ellng  = μήκος
C  d      = πίνακας με τους συντελεστές των αγνώστων
C  f      = πίνακας με τους σταθερούς συντελεστές του συστήματος
C  root   = ρίζες του συστήματος
C
C=====
C  Global declarations -- same in all program segments
C=====
C  Ορίζουμε τις μεταβλητές
C  real, dimension (4,4):: M, T, S, ellng
C  real, dimension (3,3):: a, d, f (3), root (3)
C  real:: X, Y, Z, W, conduc, resist
C  integer:: l
C
C  Θέτουμε τιμές στην αγωγιμότητα και στην ειδική αντίσταση
C  conduc =0.5
C  resist =1.
C
C  Ορίζουμε τις τιμές του ellng
```




References

1. 'Επαγωγικές επιδράσεις ηλεκτρικών γραμμών ισχύος σε γειτονικούς αγωγούς-Εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων και ανάπτυξη συστημάτων τεχνητής νοημοσύνης': Διδακτορική διατριβή Κωνσταντίνου Σάτσιου
2. 'Finite elements for electrical engineers': Peter P. Silvester and Ronald L. Ferrari, p.p. 1-15
3. 'Nondestructive Evaluation-A tool in design, manufacturing and service': Don E. Bray and Roderic K. Stanley, p.p. 369-385
4. 'Εισαγωγή στη βασική θεωρία του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου': Θ. Δ. Τσιμπούκη (Τόμος II)
5. 'Εισαγωγή στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων': Θ. Δ. Τσιμπούκη
6. 'Μη Καταστροφικές δοκιμές με δινορεύματα': Θεόδωρος Π. Θεοδουλίδης (Σεμινάριο Τομέα Τηλεπικοινωνιών)
7. 'Μη Καταστροφικές δοκιμές με δινορεύματα': Ιωάννης Σακελλάρης, Αρετή Μαλκογιάννη, Μαγδαληνή Χατζηκώστα
8. 'Eddy currents: Theory and Applications': E. E. Kriezis, SENIOR MEMBER, IEEE, Theodoros D. Tsiboukis, MEMBER, IEEE, and John A. Tegopoulos, LIFE FELLOW, IEEE.
9. 'Ηλεκτρομαγνητικά πεδία και κύματα': Makios B., Soultis D., Patras, Greece.
10. 'Analytical Solutions to Eddy-Current Probe-Coil Problems': C. V. Dodd and W. E. Deeds
11. FLUX SOFTWARE: 'Non Destructive Testing with FLUX'
12. ANSYS SOFTWARE