ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ – ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: Α' ηλικιακού κύκλου

Διπλωματική εργασία

Δίγλωσσοι μαθητές και κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου στη σχολική τάξη

της

Κασάρη Γεωργίας, Α.Μ. 564

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Σταθοπούλου Χαρίκλεια, Καθηγήτρια Π.Τ.Ε.Α./Π.Θ.
Εξεταστές: Σακονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε./Δ.Π.Θ.
Γκανά Ελένη, Επ. Καθηγήτρια Π.Τ.Ε.Α./Π.Θ.

Φλώρινα, 3/3/2018

Ευχαριστίες

Αν όλα στη ζωή μας είναι κύκλος, τότε ένας μεγάλος κύκλος της ζωής μου κλείνει με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Ένας κύκλος γεμάτος με εμπειρίες και γνώσεις, που άνοιξε όταν πρωτοήρθα σε επαφή με τη μαθηματική εκπαίδευση στο πλαίσιο των προπτυχιακών μου σπουδών. Το μεταπτυχιακό πρόγραμμα της «Διδακτικής των Μαθηματικών» μου προσέφερε ένα σύνολο εφοδίων, απαραίτητα για τη μελλοντική μου πορεία στον κόσμο της επιστήμης και της εκπαίδευσης.

Θα ήθελα, λοιπόν, να ευχαριστήσω θερμά όλους τους διδάσκοντες του προγράμματος που συνέβαλαν σε αυτό το αποτέλεσμα μέσα από τη συνεργασία μας. Ιδιαίτερα, όμως, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στην επιβλέπουσα κ. Σταθοπούλου Χαρίκλεια, για την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου καθ' όλη τη διάρκεια της έρευνας και την ευκαιρία που μου έδωσε στην ενασχόληση με αυτή τη θεματολογία. Ακόμη, οφείλω να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, και συγκεκριμένα την κ. Γκανά Ελένη για τις χρήσιμες συμβουλές της στα γλωσσικά χωράφια της εργασίας, καθώς και τον κ. Σακονίδη Χαράλαμπο, χάρη στην ενθάρρυνση και πολύτιμη καθοδήγηση του οποίου βρέθηκα με ενθουσιασμό σε αυτό το μονοπάτι.

Φυσικά, δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που ήταν κοντά μου όλο αυτό το χρονικό διάστημα και πρωτίστως την οικογένειά μου, που υπομένει και με βοηθά να πραγματοποιήσω κάθε μου όνειρο. Η παρούσα εργασία είναι αφιερωμένη σ' αυτούς και σε όλα τα παιδικά χαμόγελα που μου έδωσαν δύναμη κατά τη διάρκεια της συγγραφής και υλοποίησης της έρευνας, με την ελπίδα να μείνουν για πάντα ζωντανά κι αληθινά.

«Οι νόμοι της φύσης είναι γραμμένοι στη γλώσσα των μαθηματικών… Τα σύμβολα είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τη βοήθεια των οποίων είναι αδύνατο να κατανοηθεί έστω και μια λέξη»

Γαλιλαίος

Περιεχόμενα

Περίληψη 5

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Εισαγωγή 7

Κεφάλαιο 1:

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΓΛΩΣΣΑΣ ΚΑΙ ΔΙΓΛΩΣΣΙΑΣ 9

1.1 Ορισμός διγλωσσίας 10

1.2 Εννοιολογική Αποσαφήνιση Όρων 12

1.3 Μορφές διγλωσσίας 13

1.4 Γλωσσική Κατάκτηση 15

1.5 Το Θεωρητικό Πλαίσιο του Cummins 17

Κεφάλαιο 2:

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΓΛΩΣΣΑΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 18

2.1 Σχέση Γλώσσας και Μαθηματικών 19

2.2 Λειτουργική ποικιλία της γλώσσας των μαθηματικών 21

2.2.1 Η πολυσημειωτική αντίληψη των μαθηματικών 21

2.2.2 Ορισμός και χαρακτηριστικά της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών 22

2.2.3 Δυσκολίες της γλώσσας των μαθηματικών 23

2.2.4 Κατάκτηση της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών 28

Κεφάλαιο 3:

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΑΠΟ ΔΙΓΛΩΣΣΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ 30

3.1 Διδασκαλία της Γλώσσας με βάση το Περιεχόμενο (Content and Language Integrated Learning - CLIL) 32

3.1.1 Εννοιολογικό Πλαίσιο των 4C 33

3.1.2 Πλεονεκτήματα, Μειονεκτήματα και Προβληματισμοί 34

3.2 Διαγλωσσικότητα 38

3.3 Ανασκόπηση στρατηγικών διδασκαλίας των μαθηματικών σε δίγλωσσους μαθητές 46

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

4. Μεθοδολογία 62

5. Ανάλυση Δεδομένων 70

6. Συζήτηση-Συμπεράσματα 98

7. Κριτική-Προτάσεις.....107
Βιβλιογραφία 108
Ελληνόγλωσση 108
Ξενόγλωσση 109
Παράρτημα.....120

Ευρετήριο πινάκων

Πίνακας 1: Σχέση ατομικής και κοινωνικής διγλωσσίας.....14
Πίνακας 2: Διάγραμμα Συγγενικών Μαθηματικών Λέξεων 58

Ευρετήριο εικόνων

Εικόνα 1: Τάνγκραμ, γεωπίνακας και ράβδοι Cuisenaire 54
Εικόνα 2: Πολύγλωσσος Τοίχος Μαθηματικών Λέξεων 55
Εικόνα 3: Μαθητές Α' Δημοτικού σχηματίζουν ένα τετράγωνο χρησιμοποιώντας τα σώματά τους.....56
Εικόνα 4: Σχηματισμός τετραέδρου με τη χρήση των δαχτύλων 57
Εικόνα 5: Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από ξυλάκια.....72
Εικόνα 6: Λίστα λέξεων.....73
Εικόνα 7: Ενασχόληση μαθήτριας με τα μέρη του σώματος.....74
Εικόνα 8: Κατασκευή ραβδογράμματος.....77
Εικόνα 9: Μαθήτριες ασχολούνται με τη στατιστική και τα γραφήματα.....77
Εικόνα 10: Χειραπτικό υλικό – κάρτες και νομίσματα του ευρώ 79
Εικόνα 11: Σημειόγραμμα 80
Εικόνα 12: Αριθμητικοί υπολογισμοί ενός μαθητή.....82
Εικόνα 13: Δεκαδική ανάλυση αριθμού 84
Εικόνα 14: Συντεταγμένες στο σκάκι.....87
Εικόνα 15: Δημιουργία σχημάτων με τα σώματα.....92
Εικόνα 16: Γραφή στη Γ2 – Σχήματα με ξυλάκια.....95
Εικόνα 17: Ταυτότητα Αριθμού 95
Εικόνα 18: Σχηματισμός λέξης με πλαστελίνη.....96

Ευρετήριο σχημάτων

Σχήμα 1: Περιστατικά της διαγλωσσικότητας της τάξης 42

Συντομογραφίες

Γ1 = πρώτη γλώσσα

Γ2 = δεύτερη γλώσσα

ΒΔΕΔ = Βασικές Διαπροσωπικές Επικοινωνιακές Δεξιότητες

ΓΑΓΕ = Γνωστική Ακαδημαϊκή Γλωσσική Επάρκεια

MRA = κατάκτηση της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών (Mathematics Register Acquisition)

CLIL = διδασκαλία της γλώσσας με βάση το περιεχόμενο (Content and Language Integrated Learning)

Περίληψη

Είναι κοινός τόπος το γεγονός ότι οι δίγλωσσοι μαθητές αντιμετωπίζουν ποικίλες δυσκολίες στην κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου, καθώς καλούνται παράλληλα να μάθουν μία δεύτερη γλώσσα. Στην παρούσα εργασία μελετώνται πολλές από αυτές τις δυσκολίες, προκειμένου να διερευνηθούν αποτελεσματικοί τρόποι και κατάλληλες στρατηγικές υποστήριξης των δίγλωσσων μαθητών εκ μέρους του εκπαιδευτικού. Για τον σκοπό αυτό, η έρευνα υλοποιήθηκε στον σχολικό χώρο μιας δομής φιλοξενίας και εγκατάστασης προσφύγων που λειτούργησε σε μια ημι-αστική περιοχή της Θεσσαλονίκης. Μέσα από αυτήν αναδεικνύονται τρόποι διαμόρφωσης ενός χώρου διαγλωσσικότητας αλλά και αξιοποίησης των μαθητικών πόρων γνώσης για την κατάκτηση νέων γνώσεων ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο, ακολουθώντας τη λογική της προσέγγισης CLIL και της διαγλωσσικότητας.

Λέξεις-Κλειδιά: διγλωσσία, μαθηματικό περιεχόμενο, CLIL, διαγλωσσικότητα, χώρος διαγλωσσικότητας

Abstract

It is common knowledge that bilingual students face multiple difficulties in understanding mathematics content, as they are expected to learn a second language at the same time. In the present thesis, many of these difficulties are being examined, in order to investigate effective ways and appropriate teachers' strategies of supporting bilingual students. For this purpose, the research was conducted in the school facility of a hosting and relocating refugees' infrastructure that ran in a semi-urban area around Thessaloniki. The results conclude in emerging ways of formulating translanguaging space and exploiting students' knowledge resources to acquire new ones, by following a CLIL and translanguaging approach.

Key-words: bilingualism, mathematics content, CLIL, translanguaging, translanguaging space

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου από δίγλωσσους μαθητές. Ο ρόλος του γλωσσικού παράγοντα στη μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί ένα ζήτημα που έχει κεντρίσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών εδώ και πάρα πολλά χρόνια, ιδίως με την κοινωνική στροφή του πεδίου που σηματοδοτήθηκε όταν ήρθαν στην επιφάνεια μελέτες της επίδρασης της μητρικής γλώσσας στην κατανόηση μαθηματικών γνωστικών διεργασιών και σχέσεων (Presmeg, 1988).

Αναμφίβολα, τα μαθηματικά βρίσκονται παντού γύρω μας, συνυφασμένα στη γλώσσα, στη γεωγραφία, στη φυσική, στην τέχνη, στη μουσική και στον αθλητισμό. Αυτή η παγκοσμιότητα των μαθηματικών, σε συνδυασμό με τα κοινά αποδεκτά τους σύμβολα, πολλές φορές συγχέεται ως μη πολιτισμική και μη γλωσσική τους εξάρτηση. Όμως, είναι πλέον αποδεδειγμένο πως τα μαθηματικά δεν είναι «άγλωσσα», αφού αποτελούνται από συγκεκριμένο λεξιλόγιο, συντακτική δομή και λόγο (discourse) που διαφέρει από πολιτισμό σε πολιτισμό (Barton & Neville-Barton, 2003).

Πέρα από την ιδιαιτερότητα της ίδιας της μαθηματικής γλώσσας, επιπλέον προβλήματα στην κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου από δίγλωσσους μαθητές προκύπτουν από τη γλώσσα διδασκαλίας. Δεν είναι λίγα τα σχολεία ανά τον κόσμο που αγνοούν την πολύγλωσση πραγματικότητα και τις ανάγκες της και διατηρούν μονόγλωσσο διδακτικό καθεστώς, στη δεύτερη ή συνήθως ασθενέστερη γλώσσα του μαθητή. Αντίθετα από αυτήν την εκπαιδευτική πολιτική, ερευνητικά πορίσματα συγκλίνουν πως η αξιοποίηση της μητρικής γλώσσας του μαθητή ευνοεί την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, καθώς αυτές μεταφέρονται με νοητική επεξεργασία από τη μία γλώσσα στην άλλη (Jegede,2011· Cummins 1986; 2001 ό.π. στο Celedón-Pattichis, Musanti & Marshall, 2010).

Άλλωστε, όπως υποστηρίζει ο Halliday (1975, ό.π. στο Graham, 1988) η εκμάθηση μιας γλώσσας περιλαμβάνει την εκμάθηση του «νοείν» και κατ' επέκταση η εκμάθηση της γλώσσας των μαθηματικών περιλαμβάνει την κατασκευή και συζήτηση μαθηματικών νοημάτων χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες γλωσσικές εκφράσεις σε κάθε συγκείμενο. Δηλαδή, όπως χρειάζεται οι μαθητές να αναπτύξουν πλούσιο καθημερινό λεξιλόγιο, είναι αντίστοιχα αναγκαίο να αποκτήσουν εμπειρίες της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών για να μπορούν να επεξεργαστούν και να εκφράσουν μαθηματικά νοήματα (Falle, 2007).

Τα παραπάνω ζητήματα εξετάζονται στην παρούσα εργασία. Αναλυτικότερα, στο πρώτο κεφάλαιο παρατίθενται απόψεις σχετικά τόσο με τη διγλωσσία, τον ορισμό και τις μορφές της όσο και με την κατάκτηση των γλωσσών εκ μέρους ενός ατόμου. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται λόγος για τη σύνδεση της γλώσσας και των μαθηματικών, τα χαρακτηριστικά και τις δυσκολίες της λειτουργικής ποικιλίας της

και δίνεται έμφαση στη θεώρηση των μαθηματικών ως πολυσημειωτικό πεδίο. Ακολούθως, στο τελευταίο κεφάλαιο του θεωρητικού μέρους της εργασίας καταγράφονται ποικίλες πρακτικές που μπορούν να αξιοποιήσουν οι εκπαιδευτικοί για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε δίγλωσσους μαθητές, στο πλαίσιο της προσέγγισης CLIL (Content and Language Integrated Learning) και της διαγλωσσικότητας.

Στο υπόλοιπο μέρος της εργασίας παρουσιάζεται η ερευνητική διαδικασία που ακολουθήθηκε με σκοπό τη διερεύνηση των στρατηγικών που αξιοποιούνται σε ένα πολύγλωσσο περιβάλλον κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών σε πρόσφυγες μαθητές. Συγκεκριμένα, περιγράφεται η μεθοδολογία της έρευνας, αναλύονται τα ποιοτικά δεδομένα που συγκεντρώθηκαν και, τέλος, δίνεται η συζήτηση και τα συμπεράσματα των αποτελεσμάτων αυτών. Η εργασία ολοκληρώνεται με έναν επίλογο σχετικά με την εκπόνηση της συγκεκριμένης έρευνας και προτάσεις για περαιτέρω προεκτάσεις που θα μπορούσε να λάβει στο μέλλον.

Κεφάλαιο 1:

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΓΛΩΣΣΑΣ ΚΑΙ ΔΙΓΛΩΣΣΙΑΣ

1.1 Ορισμός διγλωσσίας

Αποτελεί πραγματικότητα το γεγονός ότι η γλώσσα είναι αναπόσπαστο κομμάτι της κουλτούρας κάθε ατόμου, δίνοντάς του το αβαντάζ της επικοινωνίας με τους συνανθρώπους του. Ιστορικά η εμφάνιση της ανθρώπινης γλώσσας συμπίπτει με την ανάγκη της επαφής των διαφόρων λαών μεταξύ τους, δημιουργώντας από πολύ παλιά καταστάσεις διγλωσσίας ή πολυγλωσσίας. Το φαινόμενο αυτό έχει μελετηθεί από γλωσσολογική, κοινωνιολογική, ψυχολογική και παιδαγωγική σκοπιά, καθώς αφορά ποικίλες πτυχές του ανθρώπου και της κοινωνίας, τόσο σε μακρο-επίπεδο (κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον, κοινωνική διγλωσσία) όσο και σε μικρο-επίπεδο (ατομική διγλωσσία, ατομική ταυτότητα κ.ά.) (Brutt-Griffer & Varghese, 2004· Σελλά-Μάζη, 2001· Σκούρτου, 2011).

Έτσι, δεν προκαλεί έκπληξη η διαφοροποίηση των απόψεων των ερευνητών και η αδυναμία διατύπωσης ενός ορισμού της διγλωσσίας με γενική και καθολική ισχύ. Αντίθετα, εντοπίζεται στη βιβλιογραφία ευρεία ποικιλία ορισμών που αντιφάσκουν μεταξύ τους και διαπραγματεύονται διαφορετικές διαστάσεις της διγλωσσίας (Τριάρχη-Herrmann, 2000, 2005· Σκούρτου, 2011).

Μερικοί ερευνητές συμμερίζονται την άποψη του Bloomfield (1933), ο οποίος μιλά για διγλωσσία μόνο σε περιπτώσεις πλήρους κατοχής δύο γλωσσών από ένα άτομο, σε τέτοιο βαθμό που να εμφανίζει έμφυτο γλωσσικό αυτοέλεγχο και στις δύο γλώσσες. Αντίστοιχα, ο Weiss (1959) αναφέρει ως απαραίτητη προϋπόθεση για τον χαρακτηρισμό ενός ατόμου ως δίγλωσσου την άμεση χρήση της δεύτερης γλώσσας χωρίς τη μετάφραση ή επεξεργασία της στη μητρική γλώσσα (Τριάρχη-Herrmann, 2000, 2005).

Στο άλλο άκρο του υπό μελέτη βεληνεκούς τοποθετούνται ερευνητές που αποδέχονται ως δίγλωσσα τα άτομα που **μπορούν να εκφραστούν ακόμη και κατ' ελάχιστον στη δεύτερη γλώσσα**. Ενδεικτικά, ο MacNamara (1969) προσδιορίζει τη διγλωσσία με βάση τις ικανότητες ομιλίας, ανάγνωσης και γραφής έστω και σε μικρό βαθμό (Τριάρχη-Herrmann, 2000).

Ακόμη, ο Mackey (1970) υποστηρίζει ότι η διγλωσσία είναι κοινωνιογλωσσικό φαινόμενο που ανήκει στον τομέα της ομιλίας (parole) και όχι της γλώσσας (langue), με συνέπεια να μην καθίσταται δυνατή η ακριβής οριοθέτηση του σημείου στο οποίο ένα άτομο από μονόγλωσσο γίνεται δίγλωσσο. Έτσι, ο ίδιος θεωρεί ότι η διγλωσσία είναι η εναλλακτική χρήση δύο ή περισσότερων γλωσσών (Skutnabb-Kangas, 1981· Τριάρχη-Herrmann, 2000, 2005), ενώ ο Weinreich (1953) προσθέτει επεξηγηματικά ότι ένας ομιλητής που χρησιμοποιεί εναλλακτικά τις γλώσσες του είναι δίγλωσσος (Σκούρτου, 2011). Ένας αντίστοιχος ορισμός που συναντάται συχνά είναι αυτός του Oskaar (1971), όπου η διγλωσσία περιγράφεται ως η ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί δύο γλωσσικούς κώδικες σε διαφορετικές καταστάσεις, πραγματοποιώντας αυτόματες και μη προβληματικές εναλλαγές μεταξύ τους (Skutnabb-Kangas, 1981).

Βέβαια, ανάμεσα σε αυτές τις αντιδιαμετρικές θέσεις μπορεί κανείς να εντοπίσει τον ορισμό του Haugen (1956), κατά τον οποίο ένα άτομο είναι δίγλωσσο όταν μπορεί «*ολοκληρωμένα και με ορθό εννοιολογικό περιεχόμενο να εκφραστεί στη δεύτερη γλώσσα*» (Τριάρχη-Herrmann, 2000: 44). Επίσης, ενδιαφέρον παρουσιάζει η προσέγγιση του Grosjean (1985), κατά τον οποίο ένα δίγλωσσο άτομο έχει πλήρως ανεπτυγμένες ικανότητες ομιλίας και ακοής σε δύο γλώσσες -και πιθανότατα σε **ένα τρίτο σύστημα που αποτελεί συνδυασμό των δύο άλλων γλωσσικών συστημάτων**- στο βαθμό που απαιτείται από τις ατομικές και περιβαλλοντικές του ανάγκες (Shin, 2013).

Με βάση, λοιπόν, τη μελέτη των επιστημονικών πηγών κρίνεται απαραίτητο να αναφερθεί ότι στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας υιοθετείται και γίνεται αποδεκτός ένας πιο πρόσφατος ορισμός του 21^{ου} αιώνα που διατυπώθηκε από τους Brutt-Griffer & Varghese (2004). Ο ορισμός αυτός αναφέρει ότι:

«*Η διγλωσσία μπορεί να προσδιοριστεί ως ο ενδιάμεσος γλωσσικός χώρος, ο οποίος γινόταν παραδοσιακά αντιληπτός ως αποτελούμενος από διακριτές οντότητες, ως δύο ξεχωριστές γλώσσες. Τα δίγλωσσα άτομα μας υπενθυμίζουν ότι ο γλωσσικός χώρος αποτελεί μάλλον ένα συνεχές πεδίο και ότι δεν είναι μόνο οι γλώσσες οι οποίες συγκατοικούν στον ίδιο χώρο, αλλά ένα μείγμα από κουλτούρες και οπτικές γωνίες το οποίο για κάποιους είναι ακατανόητο και για άλλους ανησυχητικό*» (Τσοκαλίδου, 2012: 22).

1.2 Εννοιολογική Αποσαφήνιση Όρων

Στο σημείο αυτό κρίνεται επιβεβλημένος ο σύντομος προσδιορισμός του εννοιολογικού περιεχομένου των όρων που μελετώνται στην παρούσα εργασία. Το πλήθος των αναφορών σχετικά με τις έννοιες αυτές καταδεικνύει τη σημασία της κατανόησης και της διάκρισής τους.

Αρχίζοντας με την έννοια «**πρώτη γλώσσα**» (Γ1), σημειώνεται πως πρόκειται για αντικατάσταση του όρου «μητρική γλώσσα» (mother tongue, langue maternelle) και αφορά στη γλώσσα που το άτομο κατακτά χρονολογικά πρώτη, ακόμη και αν αντικατασταθεί μετέπειτα από άλλη γλώσσα ή χρησιμοποιηθεί για σύντομο χρονικό διάστημα (Mc Laughin, 1978). Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η Γ1 διαδραματίζει τόσο θεμελιώδη ρόλο στη δόμηση της προσωπικότητας του ατόμου, ώστε συχνά αποτελεί τη **γλώσσα ταύτισής** του (Μήτσης & Μήτση, 2007). Αυτό συμβαίνει γιατί οι φυσικές γλώσσες κατακτώνται κατά κανόνα στην ίδια περίπου ηλικία των παιδιών τυπικής ανάπτυξης, υπό την έννοια ότι το παιδί αναπτύσσει επιτυχώς την ικανότητα εκμάθησης του γλωσσικού συστήματος και της χρήσης του σε οποιοδήποτε περιβάλλον (Μπέλλα, 2016).

Κατ' αντιστοιχία με την πρώτη, η «**δεύτερη γλώσσα**» (Γ2) προσδιορίζεται από τον Stem (1983) ως εκείνη που κατακτά ένα άτομο μετά την εκμάθηση της πρώτης, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι κατώτερη (Davies, 2003). Η Jessner (2006) παραθέτει τον ορισμό του Smith (1991) κατά τον οποίο ως Γ2 χαρακτηρίζεται κάθε γλώσσα διαφορετική από την Γ1 που μαθαίνει ένα άτομο, ανεξαρτήτως του περιβάλλοντος μάθησης ή του πλήθους άλλων μη μητρικών γλωσσών.

Η Γ2 μπορεί να διακριθεί από την **ξένη γλώσσα**, κυρίως βάσει γεωγραφικών παραμέτρων, αφού η τελευταία κατακτάται στο περιβάλλον μόνιμης διαβίωσης του ατόμου (Μπέλλα, 2016). Ειδικότερα, ο όρος ξένη γλώσσα χρησιμοποιείται για να δηλώσει τη γλώσσα που μαθαίνει ένα άτομο μετά την κατάκτηση της πρώτης του γλώσσας, προκειμένου να εξυπηρετήσει επικοινωνιακούς σκοπούς που πιθανότατα θα προκύψουν στο μέλλον (Τριάρχη-Herrmann, 2000).

Αξιοσημείωτος είναι επίσης ο διαχωρισμός μεταξύ κατάκτησης και εκμάθησης, ο οποίος φαίνεται να απασχολεί ιδιαίτερα την ερευνητική κοινότητα. Ο Krashen (1977) προσδιορίζει την **κατάκτηση** ως την υποσυνείδητη, φυσική διαδικασία μάθησης μίας γλώσσας, που χρησιμοποιείται σε φυσικές περιστάσεις επικοινωνίας, με περισσότερη έμφαση στη σημασία αντί για τους γλωσσικούς τύπους. Από την άλλη πλευρά, με τον όρο **εκμάθηση** νοείται μια συνειδητή διαδικασία συστηματικής μελέτης της γλώσσας, εφιστώντας την προσοχή τόσο στους τύπους όσο και στις δομές της. Εν τούτοις, οι δύο έννοιες χρησιμοποιούνται κατά βάση με ελεύθερη εναλλαγή από τους συγγραφείς της ερευνητικής κοινότητας (Μπέλλα, 2016).

1.3 Μορφές διγλωσσίας

Η πολυμορφία του φαινομένου της διγλωσσίας συντελεί επιπλέον στη διατύπωση πληθώρας κριτηρίων και τύπων ανάπτυξής της σε όλο το εύρος της σχετικής βιβλιογραφίας. Για τον λόγο αυτό, γίνεται προσπάθεια παρουσίασης και μελέτης ορισμένης τυπολογίας της διγλωσσίας στην παρούσα ενότητα της εργασίας.

Με αρχικό κριτήριο την **ηλικία κατάκτησης της Γ2** εκ μέρους του ατόμου, η διγλωσσία διακρίνεται σε *ταυτόχρονη* (simultaneous) και *διαδοχική* (consecutive) ή σε *πρώιμη* (early)/*παιδική* (childhood) και *μεταγενέστερη/όψιμη* (late bilingualism). Η ταυτόχρονη διγλωσσία θεωρείται η μόνη γνήσια μορφή διγλωσσίας, καθότι υφίσταται όταν ένα παιδί κατακτά ταυτόχρονα τις δύο γλώσσες με τις οποίες έρχεται σε επαφή από τη στιγμή της γέννησής του, ενώ η διαδοχική διγλωσσία εμφανίζεται όταν ένα παιδί αρχίζει να μαθαίνει τη Γ2 μετά την πρώτη, συνήθως με το πέρας του 3^{ου} έτους της ηλικίας του. (Baker, 2001· Hamers & Blanc, 1995). Παρόμοια, η πρώιμη/παιδική διγλωσσία αφορά σε απόκτηση της Γ2 στην προεφηβεία και η μεταγενέστερη/όψιμη διγλωσσία σε εκμάθησή της κατά την εφηβική ή ενήλικη περίοδο ζωής του ατόμου (Hamers & Blanc, 1995).

Λαμβάνοντας υπόψη ως κριτήριο τον **τρόπο κατάκτησης της Γ2**, η διγλωσσία μπορεί να κατηγοριοποιηθεί σε *φυσική* (natural) και *κατευθυνόμενη* ή *πολιτισμική* (cultural). Στην πρώτη μορφή, η κατάκτηση της Γ2 γίνεται μέσω καθημερινής επαφής και επικοινωνίας του ατόμου με φυσικούς ομιλητές, ενώ στη δεύτερη μορφή πραγματοποιείται μέσω συστηματικής μάθησης και τυπικής/επίσημης εκπαίδευσης (Skutnabb-Kangas, 1981· Τριάρχη-Herrmann, 2000, 2005).

Προχωρώντας στον διαχωρισμό της διγλωσσίας που πρότεινε ο Lambert (1975) με κριτήριο την **επίδρασή της στα αναπτυξιακά στάδια** της παιδικής ηλικίας του ατόμου, εντοπίζονται δύο τύποι. Ο πρώτος τύπος είναι η *προσθετική διγλωσσία* (additive bilingualism), η οποία συναντάται συνήθως σε δίγλωσσα παιδιά της ομάδας της πλειονότητας, ταυτίζεται με την εκμάθηση της Γ2 διατηρώντας την πρώτη και ασκεί θετική επίδραση στην ανάπτυξη. Εν αντιθέσει, η *αφαιρετική διγλωσσία* (subtractive bilingualism) αφορά σε αντικατάσταση της πρώτης γλώσσας από τη δεύτερη και εμφανίζεται κυρίως σε παιδιά μεταναστών ή άλλων γλωσσικών μειονοτήτων (Carrasquillo & Rodriguez, 1996· Τριάρχη-Herrmann, 2000).

Από τους υπόλοιπους τύπους της διγλωσσίας που παρατίθενται στη διεθνή βιβλιογραφία, αξίζει να επισημανθεί η διάκριση ατομικής και κοινωνικής διγλωσσίας. Αφενός, η **ατομική διγλωσσία** (bilingualism) αφορά στη διγλωσσία μεμονωμένων ατόμων ή ομάδων που έχουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν δύο γλώσσες σε ένα κυρίαρχα μονόγλωσσο περιβάλλον. Αφετέρου, ως **κοινωνική ή συλλογική διγλωσσία** (diglossia: γλωσσική διμορφία/διφυΐα) προσδιορίζεται η κατάσταση κατά την οποία επικρατεί η χρήση δύο ή περισσότερων γλωσσών σε μία κοινωνία, ως «εγγενές» χαρακτηριστικό της (Δαμανάκης, 2001· Τριάρχη-Herrmann, 2000).

		Κοινωνική διγλωσσία	
		+	-
Ατομική διγλωσσία	+	Κοινωνική και ατομική διγλωσσία	Ατομική διγλωσσία χωρίς κοινωνική διγλωσσία
	-	Κοινωνική διγλωσσία χωρίς ατομική διγλωσσία	Ούτε ατομική ούτε κοινωνική διγλωσσία

Πίνακας 1: Σχέση ατομικής και κοινωνικής διγλωσσίας
Πηγή: Baker (2001)

Τέλος, μία ευρύτερη κατηγοριοποίηση των τύπων διγλωσσίας θεωρείται αυτή που περιλαμβάνει την *ισορροπημένη διγλωσσία* (balanced bilingualism) και την *κυρίαρχη διγλωσσία* (dominant bilingualism). Ο πρώτος όρος χαρακτηρίζει άτομα με εξίσου καλό επίπεδο ευχέρειας και στις δύο γλώσσες, ενώ ο δεύτερος όρος αναφέρεται σε όσα άτομα έχουν υψηλότερο επίπεδο ευχέρειας στη μία γλώσσα σε σχέση με την άλλη (Baker, 1993· Carrasquillo & Rodriguez, 1996).

Ο εν λόγω διαχωρισμός έχει δεχθεί ποικίλες επικρίσεις σχετικά με την καταλληλότητα των εννοιών, την προβληματική φύση τους αλλά και τον βαθμό στον οποίο καθίσταται δυνατή η σύγκριση των επιπέδων γλωσσικής επάρκειας μεταξύ δίγλωσσων και μονόγλωσσων ατόμων. Ακόμη, διατυπώνονται απόψεις για «**ημίγλωσσα**» άτομα (semilingual) ή το φαινόμενο της «**διπλής ημιγλωσσίας**» (double semibilingualism), για τις περιστάσεις όπου ένα άτομο εμφανίζει σημαντικές ποσοτικές και ποιοτικές ελλείψεις και στις δύο γλώσσες, συγκριτικά με ένα μονόγλωσσο (Baker, 2001). Όμως, ο Devies (2003) θεωρεί ότι η αναφορά σε καταστάσεις ημιγλωσσίας είναι δυνατή μόνο σε περιπτώσεις απώλειας μιας γλώσσας, η οποία μάλιστα βρίσκεται σε κίνδυνο φτωχοποίησης και επισημαίνει την αναγκαιότητα του κόσμου να ξεπεράσει το **στερεότυπο του ημίγλωσσου μετανάστη**.

1.4 Γλωσσική Κατάκτηση

Μία πτυχή της διγλωσσίας που απασχολεί ιδιαίτερα την ερευνητική και εκπαιδευτική κοινότητα αφορά στον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσονται οι γλώσσες των δίγλωσσων παιδιών. Πολλοί υποστηρίζουν ότι η μάθηση μέσω δύο γλωσσικών συστημάτων είναι διαφορετική από τη μάθηση μέσω ενός, αλλά επηρεάζεται από αυτήν.

Εκπροσωπώντας την εποικοδομιστική θεωρία, ο Ρώσος ψυχολόγος Vygotsky, περιέγραψε τη γλωσσική κατάκτηση ως τη σπουδαία περίσταση κατά την οποία συγκλίνουν οι νοητικές αναπαραστάσεις και η εξωτερική πραγματικότητα. Έτσι, ενισχύεται η άποψη ότι **η γλώσσα λειτουργεί ως εργαλείο σκέψης** που βοηθά τα παιδιά να κατασκευάσουν νοήματα μέσω της ανάπτυξής της σε εμπειρίες πολιτισμικής αλληλεπίδρασης και διαπροσωπικής επικοινωνίας (Garcia, 2005).

Πιο επεξηγηματικά, διατείνεται ότι τα παιδιά μαθαίνουν τη γλώσσα βάσει της τεχνικής των υποθέσεων, καθώς δηλαδή **εφαρμόζουν γλωσσικές στρατηγικές και τις επιβεβαιώνουν ή τις απορρίπτουν, σύμφωνα με την ανατροφοδότηση που λαμβάνουν** από τους συνομιλητές τους ως προς το νόημα του λόγου τους (Carrasquillo & Rodriguez, 1996). Για την Garcia (2005), η ανάπτυξη της ικανότητας χρήσης της γλώσσας ταυτίζεται με τη βελτίωση των δεξιοτήτων συλλογισμού και τη δόμηση νοητικών σχημάτων που αντικατοπτρίζουν τη θέαση του ατόμου για το περιβάλλον και τον κόσμο.

Η κατάκτηση της Γ2 υποστηρίζεται συχνά ότι εμφανίζει παρόμοια αναπτυξιακή ακολουθία γλωσσολογικών μοτίβων με την κατάκτηση της Γ1 (Carrasquillo & Rodriguez, 1996). Χαρακτηριστική είναι η έρευνα της Ervin-Tripp (1974) σε παιδιά 4-9 ετών στην οποία βρέθηκε ότι τα λάθη που έκαναν στη δεύτερη γλώσσα τους, τη γαλλική, ήταν απόρροια εφαρμογής των ίδιων στρατηγικών που χρησιμοποιούσαν κατά την κατάκτηση της πρώτης γλώσσας τους, της αγγλικής (Garcia, 2005).

Στα συμπεράσματα αυτής της έρευνας, οι Carrasquillo & Rodriguez (1996) συμπληρώνουν ότι **η Γ1 αποτελεί πηγή που χρησιμοποιείται είτε συνειδητά είτε υποσυνείδητα για την επεξεργασία δεδομένων στη Γ2**, κάτι το οποίο όμως εξαρτάται από ποικίλους ενδογενείς και εξωγενείς παράγοντες. Για παράδειγμα, ένα παιδί που έρχεται σε επαφή με νέες λέξεις ή έννοιες στη Γ2 φαίνεται να αναζητά πρωτίστως κάποιο συνώνυμο στη «βάση δεδομένων» της πρώτης του γλώσσας.

Η εξαρτησιακή σχέση μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης γλώσσας συνεπάγεται και την ύπαρξη διαφορών στον τρόπο κατάκτησής τους. Η κρισιμότερη από αυτές έγκειται κατά κύριο λόγο στην αξιοποίηση της γνωστικής και γλωσσολογικής γνώσης καθώς και των πρότερων εμπειριών από την εκμάθηση της Γ1 για την αποτελεσματικότερη εκμάθηση της Γ2, όπως έχει ήδη αναφερθεί (Carrasquillo & Rodriguez, 1996).

Ο Vygotsky (1962) σημείωσε, επίσης, ότι η κατάκτηση της Γ2 εξαρτάται από τον δείκτη «**μεταγλωσσικής συνειδητότητας**» (metalinguistic awareness) που εμφανίζουν. Συγκεκριμένα, τόνισε πως τα δίγλωσσα παιδιά διαθέτουν υψηλότερη συνειδητότητα χάρη στην εμπειρία της αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας σε δύο γλωσσικά συστήματα, η κοινή ύπαρξη των οποίων μπορεί να καταστήσει τα δομικά μοτίβα περισσότερο αντιληπτά στο παιδί και να επισπεύσει την προσοχή του στα συστηματικά χαρακτηριστικά της γλώσσας (Bialystok, 2003).

Γενικά, **το άτομο που μαθαίνει μία γλώσσα χτίζει τις αναπαραστάσεις του για αυτήν κομμάτι – κομμάτι και συνεχώς αναδιοργανώνει τη γνώση του**, ώστε να μπορεί να ερμηνεύει την αυστηρή δομή της (Bialystok, 1991). Όταν το άτομο αποκτήσει την απαραίτητη ικανότητα ελέγχου των γλωσσικών μεταβλητών, επικέντρωσης στις γλωσσικές δομές και συλλογισμού πάνω στις γλωσσικές οντότητες και λειτουργίες, τότε θεωρείται ότι επιδεικνύει μεταγλωσσική συνειδητότητα (Diaz & Klingler, 1991· Τριάρχη-Herrmann, 2005).

Όλα τα παραπάνω αναλύονται εκτενώς στις παραδοχές που παραθέτουν οι Carrasquillo & Rodriguez (1996) ως βασικές συνιστώσες της διαδικασίας πρόσκτησης της Γ2. Σύμφωνα με την πρώτη από αυτές, τα δίγλωσσα παιδιά έρχονται αντιμέτωπα με ποικίλες προκλήσεις, καθώς διανύουν μία **προ-παραγωγική «περίοδο σιωπής»**, όπου αναπτύσσεται η κατανόηση του γραπτού και του προφορικού λόγου, ενώ ταυτόχρονα **το ποσοστό ομιλίας είναι χαμηλό**.

Μία άλλη παραδοχή σχετίζεται με τον **ρόλο του πλαισίου και της φυσικής επικοινωνίας**, τόσο στην αποτελεσματική διαχείριση δεδομένων και δομών της Γ2 όσο και στη χρήση της ερμηνείας, έκφρασης και διαπραγμάτευσης νοημάτων. Αυτό συνάδει με τους ένθερμους υποστηρικτές της κοινωνικοπολιτισμικής θεωρίας, για τους οποίους η κοινωνική ζωή και εμπειρία είναι στενά συνδεδεμένη με τη σκέψη και ως εκ τούτου αποτελεί θεμελιώδες συστατικό της γνώσης (Garcia, 2005).

Επιπλέον, εξαίρεται η συμβολή των λαθών ως φυσιολογικό κομμάτι της παραγωγής γλώσσας στην κατανόηση των εν χρήσει στρατηγικών και διεργασιών κατά τη γλωσσική κατάκτηση. Τέλος, αναδεικνύεται η θετική επιρροή που ασκεί η επιτυχής εκμάθηση της Γ2 στην αυτοπεποίθηση, στην αυτενέργεια, στην ενίσχυση του εγώ και στην επιδίωξη για απόκτηση ικανοτήτων ή δεξιοτήτων σε διάφορους τομείς (Carrasquillo & Rodriguez, 1996).

1.5 Το Θεωρητικό Πλαίσιο του Cummins

Στη δεκαετία του 1970 ο Cummins εισήγαγε έναν διαχωρισμό των γλωσσικών δεξιοτήτων που μπορεί να κατακτήσει ένα δίγλωσσο άτομο. Οι Βασικές Διαπροσωπικές Επικοινωνιακές Δεξιότητες (ΒΔΕΔ) (Basic Interpersonal Communication Skills - BICS) είναι αυτές που κατακτώνται σε διάστημα ενός ή δύο ετών και παρατηρούνται στις πρόσωπο με πρόσωπο πλαισιωμένες αλληλεπιδράσεις του ατόμου, που στηρίζονται στη μη λεκτική χρήση της γλώσσας. Η Γνωστική Ακαδημαϊκή Γλωσσική Επάρκεια (ΓΑΓΕ) (Cognitive Academic Language Proficiency – CALP) κατακτάται περισσότερο δύσκολα, γιατί εμφανίζεται και απαιτείται σε ακαδημαϊκές περιστάσεις, μη εξαρτώμενες από το συγκείμενο (Baker, 2001).

Ο Cummins (2000) χαρακτήρισε τη ΓΑΓΕ ως εξειδίκευση στην κατανόηση και χρήση σχετικών πτυχών της γλώσσας. Έτσι, ο Gellert (2008) υποστήριξε ότι στη μαθηματική εκπαίδευση παρατηρείται μια **μαθηματικά-εξειδικευμένη ΓΑΓΕ** (mathematics-specific CALP) που αφορά κυρίως στο ειδικό λεξιλόγιο των σχολικών μαθηματικών εννοιών και στον συμβολισμό τους.

Με βάση τα παραπάνω ο Cummins (1983) καταλήγει στην ύπαρξη Κοινής Υποκείμενης Γλωσσικής Ικανότητας (Common Underlying Proficiency - CUP) για το σύνολο της γλωσσικής εκμάθησης και κάνει λόγο για την Υπόθεση Αλληλεξάρτησης των Γλωσσών (Linguistic Interdependece Hypothesis). Σύμφωνα με την τελευταία, «*η ικανότητα ενός παιδιού στη Γ2 εξαρτάται εν μέρει από το επίπεδο επάρκειας που έχει ήδη αποκτήσει στη Γ1. Όσο πιο ανεπτυγμένη είναι η πρώτη γλώσσα, τόσο ευκολότερο θα είναι να αναπτύξει και τη δεύτερη*» (Baker, 2001: 245).

Έτσι, ο Cummins (2000) επισήμανε την ανάγκη κατάκτησης ενός συγκεκριμένου επιπέδου (κατωφλιού) στη Γ1, το οποίο προσδιόρισε στη Θεωρία Οριακών Επιπέδων (Threshold Hypothesis) που πρότεινε με τους Takoma & Skutnabb-Kangas (1977). Μάλιστα, οι Ellerton & Clarkson (1996) συνδέουν αυτή τη θεωρία με τα μαθηματικά, υπογραμμίζοντας ότι οι δίγλωσσοι μαθητές τείνουν να δυσκολεύονται στην απόκτηση μαθηματικής κατανόησης αν οι ίδιοι ή οι εκπαιδευτικοί έχουν ελλιπή ευχέρεια σε κάποια γλώσσα.

Στη θεωρία αλληλεξάρτησης γίνεται λόγος για δύο διακριτά μνημονικά συστήματα του δίγλωσσου νου (Mägiste, 1980). Όμως, ο Baker (2001: 497) αναφέρει πως ανάμεσά τους εντοπίζεται ένα ενδιάμεσο, μεταβατικό σύστημα, η **διαγλώσσα**. Αυτή λειτουργεί φυσικά και *«δηλώνει τη γλωσσική δημιουργικότητα των μαθητών που χρησιμοποιούν τη λανθάνουσα κατανόηση της Γ1 για να συγκροτήσουν επικοινωνία με νόημα στη Γ2».* Έτσι, ο ίδιος θεωρεί τη διαγλώσσα ως μέρος του ταξιδιού από τη μονογλωσσία προς τη δίγλωσση επάρκεια.

Κεφάλαιο 2:

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΓΛΩΣΣΑΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

2.1 Σχέση Γλώσσας και Μαθηματικών

Τα μαθηματικά, όπως έχει ήδη αναφερθεί, δεν είναι άγλωσσα και απολιτισμικά. Αντιθέτως, είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με την κοινωνία και διαφέρουν από συγκείμενο σε συγκείμενο. Όπως επισημαίνει ο Brown (2001) οι μαθηματικές ιδέες δε διαθέτουν παγκόσμιο νόημα, αλλά το παράγουν ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο τις προσεγγίζει κάθε άτομο.

Συνεπώς, ανακύπτουν ποικίλα ζητήματα διδασκαλίας και εκμάθησης των μαθηματικών στο σύγχρονο πολυπολιτισμικό σχολείο, όπου κάθε μαθητής φέρει το δικό του υπόβαθρο εμπειριών, γνώσεων και αντιλήψεων. Σύμφωνα με την Moschkovich (2005), ειδικά οι δίγλωσσοι μαθητές έχουν διαφορετικές εμπειρίες με τη λειτουργική ποικιλία της γλώσσας των μαθηματικών και τον μαθηματικό διάλογο σε κάθε γλώσσα τους. Αυτό σημαίνει πως ένας μαθητής μπορεί να έχει αποκτήσει μικρότερο βαθμό ευχέρειας σε συγκεκριμένες πτυχές του μαθηματικού λεξιλογίου στη μία γλώσσα, αλλά ταυτόχρονα να μπορεί να επιχειρηματολογήσει ή να συγκρίνει λεκτικά μαθηματικές ποσότητες στην ίδια γλώσσα. Γι' αυτό παρατηρείται η συχνή εναλλαγή γλωσσών των μαθητών, μια επιλογή που καθορίζεται κυρίως από τη γλωσσική τους οικειότητα με ένα θέμα αλλά και από τους συνομιλητές τους.

Η κονστρουκτιβιστική θεώρηση της μάθησης των μαθηματικών προβάλλει την ιδιαίτερη θέση που κατέχει σε αυτήν η γλώσσα. Αναλυτικότερα, υποστηρίζεται ότι η μαθηματική γνώση διαφέρει από τη μαθηματική νοηματοδότηση στο σημείο όπου η τελευταία απαιτεί την γλώσσα, όχι μόνο για την εσωτερίκευσή της στο γνωστικό κεφάλαιο του μαθητή, αλλά και για την ορθή εξωτερίκευσή της προς τα άτομα με τα οποία αλληλεπιδρά. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές «*πρέπει να έχουν την ικανότητα να διατυπώνουν την κατανόηση κάποιου άλλου στον εαυτό τους, έτσι ώστε να μπορέσουν να αναδιοργανώσουν την εξωτερική γλώσσα σε "**εσωτερική γλώσσα**" ή "εσωτερικευμένη σκέψη"*» (Meaney, Trinick & Fairhall, 2012: 77).

Για τον Duval (1999) η μαθηματική κατανόηση προκύπτει από τη σύμπραξη δύο τουλάχιστον λειτουργικών ποικιλιών, που περιλαμβάνουν τη φυσική γλώσσα και τα σημειωτικά συστήματα. Η άποψη αυτή συνάδει με τους Alibali & Goldin-Meadow (1993: 515) που υποστήριξαν ότι «*η μαθηματική σκέψη, ειδικότερα η καινοτόμα μαθηματική σκέψη, δεν συντίθεται σε λέξεις αλλά σε **χωρικές εικόνες** -εικόνες που μπορεί πιο εύκολα να μεταφραστούν στο παγκόσμιο-συνθετικό αναπαραστατικό χαρακτηριστικό των χειρονομιών από ότι στο γραμμικό-κομματιασμένο αναπαραστατικό χαρακτηριστικό του λόγου*».

Με άλλα λόγια, οι αναπαραστάσεις διαδραματίζουν τόσο σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας και του μαθηματικού περιεχομένου, που γίνονται απαραίτητος κρίκος της διαδικασίας αντικειμενοποίησης (Smith, 2006). Αυτό δύναται να εξηγηθεί από το γεγονός ότι **οι μαθηματικές ιδέες παρουσιάζονται εξωτερικά και κατανοούνται εσωτερικά**, μέσα από τη δημιουργία νοητικών

σχημάτων ή την επεξεργασία και αλλαγή ήδη υπαρχόντων (McDonald, Warren & DeVries, 2011). Τότε, **οι μαθητές μπορεί να εκφράσουν τη μαθηματική τους κατανόηση, με γλωσσικές ή μη μορφές επικοινωνίας**, όπως για παράδειγμα με χειρονομίες, ανεξάρτητα από τη διγλωσσική ή μαθηματική τους ευχέρεια (Dominguez, 2005).

Ένα αρκετά κρίσιμο πρόβλημα που παρατηρείται στη διδασκαλία των μαθηματικών σε δίγλωσσους μαθητές αποτελεί το γεγονός ότι στο επίκεντρό της βρίσκεται συχνά το περιεχόμενο και η όχι η γλώσσα του γνωστικού αντικειμένου. Γι' αυτό, οι McDonald, Warren & DeVries (2011) κάνουν λόγο για μία πρόκληση της βελτίωσης της ποιότητας της μαθηματικής διδασκαλίας στο επίσημο εκπαιδευτικό περιβάλλον, καλώντας τους εκπαιδευτικούς να συνδυάσουν την προφορική γλωσσική επικοινωνία με πλούσιες μαθηματικές αναπαραστάσεις, παρά να εστιάζουν στην απλή επίδειξη και επανάληψη του λεξιλογίου.

Η ανάλυση των παραπάνω ζητημάτων επιχειρείται σε όλο το εύρος του παρόντος κεφαλαίου. Μάλιστα, γίνεται ιδιαίτερη προσέγγιση των δυσκολιών αλλά και των τρόπων αντιμετώπισης της προαναφερόμενης πρόκλησης.

Κλείνοντας, κρίνεται απαραίτητο να αναφερθεί ότι η ικανότητα των δίγλωσσων μαθητών να αξιοποιούν τη μαθηματική τους κατανόηση στην πραγματοποίηση εναλλαγών μεταξύ των γλωσσών τους και στην απόκτηση ευχέρειας στη μαθηματική ποικιλία της Γ2 είναι ανάλογη του βαθμού μύησής τους στα μαθηματικά του μη φυσικού περιβάλλοντος στο οποίο δρουν. Γι' αυτό στην εκπαίδευση των δίγλωσσων μαθητών προβάλλεται όλο και εντονότερα η **ανάγκη παροχής μίας γλώσσας με ρόλο γέφυρας** από «*τους λιγότερο μαθηματικούς τρόπους ομιλίας προς τις περισσότερο μαθηματικά ακριβείς λέξεις και φράσεις*» (Herbel-Eisenmann, 2002: 101· Meaney et al., 2012).

2.2 Λειτουργική ποικιλία της γλώσσας των μαθηματικών

Στην ενότητα αυτή μελετάται η πολυτροπικότητα των μαθηματικών και τα χαρακτηριστικά της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας τους.

2.2.1 Η πολυσημειωτική αντίληψη των μαθηματικών

Σύμφωνα με την O'Halloran (2000: 360), τα μαθηματικά δεν ερμηνεύονται μόνο με γλωσσικά μέσα, αλλά και με τη χρήση «*σημειωτικών πηγών του μαθηματικού συμβολισμού, οπτικής απεικόνισης με τη μορφή γραφημάτων και διαγραμμάτων και της γλώσσας*». Με άλλα λόγια, **οι κώδικες εναλλάσσονται και αλληλεπιδρούν συνεχώς μεταξύ τους για την κατασκευή νοήματος,** τόσο σε γραπτά κείμενα όσο και στον μαθηματικό διάλογο της τάξης (Meaney et al., 2012)

Ο χαρακτηρισμός των μαθηματικών ως πολυσημειωτικό πεδίο, όπως προκύπτει από τα παραπάνω, σημαίνει εν ολίγοις ότι η κατασκευή της μαθηματικής πραγματικότητας εμπλέκει τρία διαφορετικά μέσα αναπαράστασης: γλωσσικά, συμβολικά και εικονικά (O'Halloran, 2015). Μάλιστα, κάθε μία από αυτές τις μορφές εξυπηρετεί σε συγκεκριμένες λειτουργίες, με αντίστοιχους κανόνες ή άλλα γραμματικο-συντακτικά χαρακτηριστικά (Duval, 1993). Επομένως, οι δυσκολίες της πολυτροπικότητας της γλωσσικής ποικιλίας των μαθηματικών είναι κυρίαρχα γραμματικής φύσεως και σχετίζονται με τον τρόπο οργάνωσης των στοιχείων του μαθηματικού περιβάλλοντος για την κατασκευή νοήματος βάσει αυτών των τριών αναπαραστατικών μέσων (O'Halloran, 2015).

Η Schleppegrell (2007) υιοθετεί αντίστοιχη άποψη αναδεικνύοντας τη σύσταση της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών από πολλαπλά σημειωτικά συστήματα, στα οποία συγκαταλέγει τη συμβολική σημειογραφία, τις εικονικές αναπαραστάσεις και τη γραπτή ή προφορική γλώσσα. Η αλλαγή από το ένα σύστημα στο άλλο (π.χ. από μία εικόνα σε μία εξίσωση), ο μεταξύ τους συντονισμός, αλλά και ο μετασχηματισμός εντός του ίδιου συστήματος συνιστούν θεμελιώδεις ικανότητες για την κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης (Duval, 2006). Κατά συνέπεια, **για να εμβαθύνει ένας μαθητής στη μάθηση των μαθηματικών πρέπει να αποκτήσει τις ικανότητες ερμηνείας και χρήσης όλων αυτών των συστημάτων συγχρόνως και να μπορεί να προσδιορίζει ένα αντικείμενο σε κάθε μορφή αναπαράστασης** (Paez Paez, Cruz & Gallardo, 2016· Temple & Doerr, 2012).

Αξιοσημείωτο παράδειγμα αποτελεί εδώ η μελέτη της περίπτωσης του Ariel, ενός δίγλωσσου μαθητή της Α' Γυμνασίου. Στην έρευνα στην οποία συμμετείχε ο μαθητής παρατηρήθηκε ότι κατά την αρχική ενασχόλησή του με την επίλυση προβλημάτων ενεργοποιήθηκαν ποικίλα σημειωτικά συστήματα (συμβολικές αναπαραστάσεις, δεικτικές χειρονομίες, προφορική καταμέτρηση, χειραπτικά αντικείμενα), αργότερα όμως φάνηκε να προτιμάται η διατήρηση της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών ως μοναδικής βάσης συλλογισμού, νοητικής επεξεργασίας και κατανόησης (Sigley & Wilkinson, 2015).

Το εύρημα αυτό συνάδει σε κάποιο βαθμό με τους Ajayi & Lawani (2015), για τους οποίους η αξιοποίηση μόνο μίας πηγής δεν είναι αρκετή για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Οι ερευνητές αυτοί εστιάζουν περισσότερο στην **από κοινού συμβολή της γραπτής και της προφορικής γλώσσας** που ανταλλάσσεται κατά την αλληλεπίδραση μεταξύ εκπαιδευτικού και δίγλωσσου μαθητή σχετικά με το πρόβλημα προς επίλυση, ώστε ο τελευταίος να προσπεράσει τυχόν εμπόδια και να οικοδομήσει τη μαθηματική γνώση.

Βέβαια, για να φτάσει κάθε μαθητής στο επίπεδο να πλοηγείται στα πολλαπλά σημειωτικά συστήματα και να αναγνωρίζει τα γραμματικά μοτίβα της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών είναι αναγκαία η παροχή των κατάλληλων ευκαιριών εμπλοκής του σε δραστηριότητες ανταλλαγής ποιοτικού μαθηματικού λόγου με έμπειρους συνομιλητές (Temple & Doerr, 2012). Σε επόμενη ενότητα της εργασίας θα γίνει λόγος για τέτοιου είδους στρατηγικές που εφαρμόζουν οι εκπαιδευτικοί των πολύγλωσσων τάξεων.

2.2.2 Ορισμός και χαρακτηριστικά της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών

Ως λειτουργική ποικιλία (register) αναφέρεται γενικά η γλωσσική ποικιλία που χρησιμοποιείται σε ένα συγκεκριμένο πεδίο, καθορίζεται από τις ενέργειες του ομιλητή και ισοδυναμεί με το «δυνητικό νόημα» που μεταδίδεται σε ένα συγκείμενο (Pirie, 1991). Οι Halliday & Hasan (1985) περιγράφουν τα στοιχεία από τα οποία αποτελείται μία γλωσσική ποικιλία: το πεδίο λόγου (δηλαδή αυτό που συμβαίνει, η φύση της κοινωνικής δράσης που πραγματοποιείται), το νόημα του λόγου (δηλαδή οι ρόλοι και το στάτους των συμμετεχόντων) και το μέσο του λόγου (δηλαδή το κανάλι επικοινωνίας, γραπτής ή προφορικής μορφής) (Macken-Horarik & Adoniou, 2008· Straehler-Pohl, Fernández, Gellert & Figueiras, 2013· Trinick, Meaney & Fairhall, 2014).

Πιο αναλυτικά, ο Halliday (1978, ό.π. στο Prediger & Wessel, 2013: 437) προσδιορίζει τη λειτουργική ποικιλία ως *«ένα σύνολο νοημάτων»* και σημειωτικών πηγών που συνδέει ένα άτομο σε μία συγκεκριμένη περίσταση και σε ένα δεδομένο κοινωνικό πλαίσιο, σύμφωνα με την κουλτούρα στην οποία ανήκει. Ένας περισσότερο συγκεκριμένος ορισμός δίνεται από τον Romaine (1994: 20), κατά τον οποίο η λειτουργική ποικιλία *«αφορά σε ποικιλία στη γλώσσα που καθορίζεται από χρήσεις αντί για χρήστες και περιλαμβάνει μελέτη της κατάστασης ή του πλαισίου που χρησιμοποιείται, τον σκοπό, το θέμα και το περιεχόμενο του μηνύματος και τη σχέση μεταξύ των συνομιλητών»*. Συνεπώς, το αντίστοιχο ισχύει και για τη λειτουργική ποικιλία της γλώσσας των μαθηματικών (Adler, 2002).

Η προαναφερθείσα έννοια προσδιορίστηκε πρωταρχικά από τον Halliday (1975: 65) σε ένα συνέδριο της Unesco με αφορμή τα καίρια ζητήματα της διδακτικής των μαθηματικών σε χώρες με εθνικές γλώσσες χωρίς αρκετά ανεπτυγμένη γλωσσική ποικιλία των μαθηματικών (Morgan, 2012). Σύμφωνα με τον

ίδιο, η λειτουργική ποικιλία της γλώσσας των μαθηματικών ορίζεται ως «*ένα σύνολο νοημάτων που είναι κατάλληλο για μια συγκεκριμένη λειτουργία της γλώσσας, μαζί με τις λέξεις και τις δομές που εκφράζουν αυτά τα νοήματα*» (Pimm, 1991). Ακόμη, ο Halliday (1978: 175) προσθέτει επεξηγηματικά ότι η έννοια αυτή αφορά στη **μαθηματική χρήση της φυσικής γλώσσας**, δηλαδή στα νοήματα που ανήκουν στη γλώσσα των μαθηματικών και που μία γλώσσα πρέπει να εκφράζει εφόσον χρησιμοποιείται για μαθηματικούς σκοπούς (Herbel-Eisenmann et al., 2015).

Με βάση όλα τα παραπάνω, γίνεται αντιληπτό ότι η λειτουργική ποικιλία της γλώσσας των μαθηματικών είναι κάτι περισσότερο από ένα απλό σύνολο λεξιλογίου ή ορολογίας και εισαγωγής νέων λέξεων. Εξαιτίας της **πολυτροπικής φύσης** της, περιλαμβάνει επιπλέον τεχνικούς όρους, διαγράμματα, επιχειρηματολογία καθώς και γραμματικές εκφράσεις ή δομές, όπως τους λογικούς συνδέσμους, που αποτυπώνουν σχέσεις μεταξύ ιδεών (Ní Ríordáin, Coben & Miller-Reilly, 2015· Pimm, 1991) και δίνουν έμφαση στην πειθώ και στην τεκμηρίωση με ακρίβεια και συντομία.

Ο Cuevas (1984) παραθέτει τα βασικά συστατικά γνωρίσματα της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών, σύμφωνα με τον Halliday (1975). Αυτά είναι τα εξής:

- Λέξεις της φυσικής γλώσσας που αποκτούν νέα ερμηνεία στα μαθηματικά (π.χ. δύναμη)
- Εκφράσεις, όπως «το τετράγωνο της υποτείνουσας», «μέγιστος κοινός διαιρέτης» κ.ά.
- Σύνθεση λέξεων της φυσικής γλώσσας (π.χ. εξάγωνο)
- Όροι που προέρχονται από τη σύνθεση ελληνικών και λατινικών λέξεων[1]

Τόσο ο Freudenthal (1991) όσο και άλλοι ερευνητές εφιστούν την προσοχή των εκπαιδευτικών στη μετάβαση των μαθητών από τη μία μορφή «register» στην άλλη. Η διδασκαλία τους, μάλιστα, φαίνεται πως προκαλεί καίρια ζητήματα εκπαιδευτικής ισότητας, για τη γεφύρωση των οποίων αναδεικνύεται η χρήση της «σχολικής λειτουργικής ποικιλίας» (school register), ή απλούστερα της σχολικής γλώσσας (language of schooling), με διαμεσολαβητικό ρόλο ανάμεσα στις δύο προαναφερόμενες μορφές (Prediger & Wessel, 2013).

2.2.3 Δυσκολίες της γλώσσας των μαθηματικών

Σύμφωνα με την Graham (1988), η κατάκτηση της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών είναι μία απαιτητική διεργασία για τους φυσικούς ομιλητές της γλώσσας. Οι δυσκολίες όμως πολλαπλασιάζονται για τους δίγλωσσους μαθητές, εφόσον καλούνται να μάθουν τη Γ2 παράλληλα με τη γλώσσα των μαθηματικών. Η ίδια **η μαθηματική σκέψη πολλές φορές χρειάζεται την**

[1] Το χαρακτηριστικό αυτό που αναφέρει ο Halliday (1975) ισχύει για γλώσσες διαφορετικές από την ελληνική.

ενεργοποίηση δύο ή και περισσότερων γλωσσικών ποικιλιών ταυτόχρονα, ακόμη κι αν αυτό δεν είναι συνειδητό ή εξωτερικά εμφανές (Dana-Picard & Kidron, 2008).

Διερευνώντας τη σχέση της μαθηματικής και της καθημερινής λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας φαίνεται πως είναι άμεση σε ό,τι αφορά στην ορθολογικότητα των κανόνων τους. Ταυτόχρονα, όμως, διαφοροποιούνται στη θεμελίωση αυτών των κανόνων, καθώς η μαθηματική γλώσσα στηρίζεται κυρίως στον ορισμό, στην αφαίρεση και στην αρχή του αποκλειόμενου μέσου, ενώ η καθημερινή γλώσσα διέπεται πρωτίστως από πλαίσιο, χρήσεις και προϋποθέσεις (Sierpinska, 2005).

Έτσι, ένα κυρίαρχο ζήτημα που φαίνεται να προκαλεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους δίγλωσσους μαθητές έγκειται στη διαφορά του νοήματος που αποκτά μία λέξη σε μαθηματικό πλαίσιο σε σχέση με το **καθημερινό**. Τέτοια παραδείγματα στην ελληνική γλώσσα είναι οι λέξεις *δύναμη*, *έλλειψη*, *πρώτος (αριθμός)*, *άρτιος/περιττός (αριθμός)* κ.ά., τις οποίες συχνά τα παιδιά συγχέουν με τη μη μαθηματική τους σημασία (Ní Ríordáin et al., 2015·Pimm, 1987).

Το ίδιο μπορεί να συμβεί και με τη χρήση ρημάτων, όπως *δείχνω*, *βρίσκω* κ.λπ., τα οποία σε μαθηματικό πλαίσιο ταυτίζονται με μία συγκεκριμένη οδηγία ή εντολή για την εφαρμογή και επεξήγηση μιας πράξης ή αποδεικτικής διαδικασίας, ενώ σε ρεαλιστικό περιβάλλον μπορεί να δηλώνουν μία ενέργεια κυριολεκτικού χαρακτήρα, όπως την εύρεση ή τον εντοπισμό ενός αντικειμένου (Chan, 2015· Chapman, 1993). Η Celedón-Pattichis (2003) πιθανολογεί ότι αυτό συμβαίνει εξαιτίας της έμφασης που δίνεται συνήθως στην κατάκτηση των βασικών επικοινωνιακών δεξιοτήτων κατά τη διάρκεια των δύο πρώτων χρόνων επαφής του μαθητή με τη Γ2, ώστε να μπορεί να συμμετέχει ενεργά σε συναλλαγές και συνομιλίες με τον κοινωνικό του περίγυρο.

Συμπληρωματικά, οι Ní Ríordáin et al. (2015) εξηγούν ότι η εν λόγω σύγχυση μπορεί να οδηγήσει τους δίγλωσσους μαθητές σε αδυναμία κατανόησης του μαθηματικού περιεχομένου που τίθεται υπό διαπραγμάτευση στη σχολική τάξη, αφού τείνουν να **αναζητούν αντίστοιχες λέξεις στη Γ1**, που είναι πιθανό να μην υπάρχουν. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούν να ενταχθούν οι Αβορίγινες μαθητές που διδάσκονταν τα μαθηματικά σε διαφορετική γλώσσα και κουλτούρα από την πρώτη τους και εκδήλωναν αρκετά προβλήματα με τη σημασιολογία των δυτικοποιημένων εννοιών που μετέφραζαν (Ellerton & Clarkson, 1996).

Η δυσκολία που προαναφέρθηκε θεωρείται ότι είναι μεγαλύτερη ακόμα κι από το **τεχνικό λεξιλόγιο των μαθηματικών**. Εδώ παρατηρείται μία περίπτωση αντίθετη από την προηγούμενη, γιατί το τεχνικό λεξιλόγιο περιλαμβάνει όρους που χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά σε μαθηματικό πλαίσιο (π.χ. ισοσκελές, υποτείνουσα, παραλληλόγραμμο, εμβαδόν κ.ά.). Εξαιτίας αυτού του φορμαλισμού, στερείται από τους μαθητές η δυνατότητα αξιοποίησης των νοητικών σχημάτων και πρότερων εμπειριών τους για την πληρέστερη επεξεργασία και κατανόηση (Alt, Arizmendi & Beal, 2014· Chan, 2015· Ní Ríordáin et al., 2015).

Για τον λόγο αυτό, η Moschkovich (2007) υποστηρίζει ότι η απλή γνώση του τεχνικού λεξιλογίου δεν είναι αρκετή για να κατορθώσουν οι δίγλωσσοι μαθητές να συμμετέχουν ενεργά στον μαθηματικό διάλογο που αναπτύσσεται στην τάξη. Απεναντίας, **χρειάζεται να αναπτύξουν ικανότητες κατανόησης των όρων σε συνάρτηση με το πλαίσιο** στο οποίο τοποθετούνται, αλλά και να αντιλαμβάνονται πλήρως την ακρίβεια του περιεχομένου τους.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα σε αυτήν την περίπτωση συνιστά η έννοια του κλάσματος, η οποία χρησιμοποιείται σε ρεαλιστικές καταστάσεις υποδηλώνοντας συνήθως «ένα μικρό μέρος μιας ολόκληρης ποσότητας», ενώ στα μαθηματικά ένα κλάσμα μπορεί να είναι μεγαλύτερο από μία μονάδα (Adoniou & Qing, 2014). Η αυστηρότητα αυτή του μαθηματικού κώδικα προκαλεί σημαντικά μαθησιακά εμπόδια στους δίγλωσσους μαθητές, διότι καλούνται όχι μόνο να ερμηνεύσουν τη μαθηματική γλώσσα, αλλά και να τη χρησιμοποιήσουν για να μιλήσουν για τα μαθηματικά που σκέφτονται και κάνουν (Secada, 2007).

Στα παραπάνω πρέπει να προστεθεί και η **ύπαρξη πολλών λέξεων στην περιγραφή της ίδιας μαθηματικής διαδικασίας**. Για παράδειγμα, σε καταστάσεις ενασχόλησης με την έννοια της αφαίρεσης στη μαθηματική τάξη μπορεί να αναφερθούν οι λέξεις *αφαίρεση, μείωση, πλην, μείον, διαφορά, υπόλοιπο, βγάζω, αφαιρώ, μειώνω, μειωτέος* κ.ά. (Chan, 2015· Othman, 2012). Έτσι, μπορεί εδώ να εμφανιστούν ασυμφωνίες μεταξύ των γλωσσών του μαθητή, όπως λόγου χάρη μία τέτοια διαδικασία να αντιστοιχεί σε μία μόνο λέξη στη Γ1, ή μία λέξη της Γ2 να έχει διαφορετική λειτουργία στην πρώτη, όταν μεταφραστεί. Ο Skemp (1972), μιλώντας για τέτοιου είδους σύγχυση, χρησιμοποίησε τον γαλλικό όρο «**faux amis**» (false friends), δηλαδή «ψεύτικοι φίλοι», για να εξηγήσει τη σημασιολογική σύνδεση που *φαίνεται* να έχουν λέξεις διαφορετικών γλωσσών βάσει της μορφολογίας τους, ενώ στην πραγματικότητα *είναι* μη συναφείς σε αρκετά μεγάλο βαθμό.

Κινούμενος σε ανάλογη τροχιά, ο ίδιος παρατήρησε ότι το μαθηματικό λεξιλόγιο περιλαμβάνει **λέξεις με πολλαπλές σημασίες** ακόμη και μέσα στο ίδιο το μαθηματικό πλαίσιο της ίδιας λειτουργικής ποικιλίας (Patkin, 2011). Ενδεικτικά, θα μπορούσε εδώ να σημειωθεί η διττή χρήση της έννοιας του αναπτύγματος στη μαθηματική ορολογία της ελληνικής γλώσσας, αφενός ως ανάπτυγμα ενός στερεού σώματος (*ανάπτυγμα του κύβου*) και αφετέρου ως ανάπτυγμα ενός αριθμού με βάση τις δυνάμεις του 10 (*δεκαδικό ανάπτυγμα*).

Μία ιδιαίτερα συνηθισμένη πηγή δυσκολίας για τους δίγλωσσους μαθητές αποτελεί η **μαθηματική σύνταξη των προτάσεων**, με τη συχνή παρουσία συνδετικών λέξεων στον γραπτό ή στον προφορικό λόγο. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν εκφράσεις επαγωγικού συλλογισμού, όπως *αν….τότε*, αιτιώδεις σχέσεις, π.χ. *επειδή, ώστε, επομένως*, συγκριτικές εκφράσεις, π.χ. *μεγαλύτερο από, το ελάχιστο*, καθώς και εναντιωματικές προτάσεις, όπως με τις λέξεις *αν και…, όμως, ενώ, αλλά* κ.ά. (Ní Ríordáin et al., 2015· Roberts, 1998· Sigley & Wilkinson, 2015).

Για παράδειγμα, ως πειστικό επιχείρημα κατά την επίλυση προβλημάτων κρίνεται αυστηρά αυτό που αναδεικνύει εμφανώς μία σύνδεση μεταξύ δεδομένων και προτεινόμενης λύσης, με τη χρήση της λογικής (Meaney, 2007). Κατά τον Duval (2003: 40) η δυσκολία που περιγράφεται εδώ οφείλεται στο γεγονός ότι «***οι απαγωγικές επεξεργασίες που γίνονται στην κοινή φυσική γλώσσα λειτουργούν αντίθετα προς τον τρόπο με τον οποίο επιχειρηματολογούμε εκτός Μαθηματικών***», παρά την ομοιότητα των γλωσσικών δειγμάτων συλλογισμού.

Ειδικά στα **λεκτικά προβλήματα**, επιβεβαιώνεται από έρευνες ότι οι δίγλωσσοι μαθητές σημειώνουν 10-30% χαμηλότερη επίδοση σε σχέση με τους αριθμητικούς υπολογισμούς (Δούβλη, 2009), καθώς έρχονται αντιμέτωποι με τη δυσκολία ποσοτικοποίησης γραπτών πληροφοριών που ακολουθούν τη μαθηματική λογική. Παίρνοντας ως παράδειγμα το πρόβλημα «Η Ελένη είχε 6 καραμέλες και έδωσε 4 καραμέλες στον Κυριάκο. Πόσες καραμέλες έχει τώρα η Ελένη;», ένας μαθητής καλείται πρωτίστως να κατανοήσει ότι ο αριθμός 4 αντιστοιχεί σε ένα υποσύνολο που απομακρύνεται από το αρχικό σύνολο των 6 αντικειμένων. Επιπροσθέτως, οφείλει να αντιληφθεί ότι το ζητούμενο του προβλήματος είναι ο αριθμός των αντικειμένων που μένουν στο αρχικό σύνολο και, τέλος, να κατασκευάσει και να λύσει την ισότητα «6-4=;» (Bernando, 2002). Έτσι, η ανάγνωση και κατανόηση λεκτικών προβλημάτων στη Γ2 ενός μαθητή παρεμποδίζεται από τον χρόνο που απαιτείται γνωστικά για την επεξεργασία γλωσσικών δομών ή τη μεταφορά τους από τη μία γλώσσα στην άλλη, αλλά και τη σύγχυση μεταξύ φυσικής και μαθηματικής γλώσσας (Celedón-Pattichis, 2003).

Εν γένει, η σημασιολογική δομή είναι μία κρίσιμη γλωσσική μεταβλητή που δύναται να περιορίσει τον δίγλωσσο νου και να επηρεάσει τη συμπεριφορά του ατόμου, κυρίως στον τρόπο με τον οποίο σκέφτεται και κατανοεί τον κόσμο που τον περιβάλλει (Ellerton & Clarkson, 1996· Heredia & Cieślicka, 2015). Συνεπώς, η άγνοια μίας λέξης ή φράσης, που δεν μπορεί να γίνει αντιληπτή από τα συμφραζόμενα του λόγου, σημαίνει για τον μαθητή αδυναμία κατανόησης και ερμηνείας ολόκληρου του μαθηματικού κειμένου (Adoniou & Qing, 2014).

Ο Secada (1998) υποστηρίζει ότι αρκετές δυσκολίες των λεκτικών προβλημάτων είναι όμοιες για το δίγλωσσο μονόγλωσσο μαθητικό κοινό. Πολλές φορές, όμως, τα λεκτικά προβλήματα παρουσιάζονται ρεαλιστικά πλαισιωμένα αποσκοπώντας στην εξοικείωση των μαθητών με μαθηματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές με διαφορετικό πολιτισμικό και γλωσσικό υπόβαθρο βρίσκονται αντιμέτωποι με την **έλλειψη εξοικείωσης με το περιεχόμενο των προβλημάτων**, λόγω της προδιάθεσης των τελευταίων προς τον πληθυσμό και τα χαρακτηριστικά μιας συγκεκριμένης κουλτούρας (Bresser, Melanese & Sphar, 2009α). Αυτό αποδείχθηκε στην έρευνα της Norén (2008), όταν δύο μαθητές Ε' Δημοτικού με μητρική γλώσσα τα σομαλικά συνάντησαν δυσκολίες στην κατανόηση του περιεχομένου ενός λεκτικού προβλήματος, διότι αδυνατούσαν να αναπαραστήσουν εικονικά το άγνωστο πλαίσιο αναφοράς του.

Ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η δυσκολία των δίγλωσσων μαθητών στην κατανόηση και επίλυση λεκτικών προβλημάτων αυξάνεται σημαντικά στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού σχολείου, όπου το γλωσσικό και εννοιολογικό περιεχόμενο των προβλημάτων γίνεται περισσότερο σύνθετο (Bresser et al., 2009α). Οι Campbell, Adams & Davis (2007) θεωρούν ότι οι εν λόγω μαθητές τοποθετούνται σε μία κατάσταση *γνωστικής υπερφόρτωσης*, αφού απαιτείται μαθηματική και πλαισιωμένη γλώσσα στην οποία δεν έχουν αναπτύξει ακόμα τον απαραίτητο βαθμό ευχέρειας.

Εκτός από τα παραπάνω, η εκτενής χρήση της **παθητικής φωνής** (*αφαιρείται, ισούται, διαιρείται* κ.ά.) στη μαθηματική γλώσσα δημιουργεί επιπρόσθετα εμπόδια. Ο Jamison (2000) αποδίδει τη δυσκολία των μαθητών με την παθητική φωνή (*το α σχετίζεται με το β*) στην τάση τους να την αποφεύγουν, προτιμώντας τη χρήση ενεργητικής φωνής (*το α είναι σχετικό με το β*) κατά τις επικοινωνιακές περιστάσεις στις οποίες εμπλέκονται. Το γραμματικό αυτό φαινόμενο είναι δηλωτικό της φύσης του κειμένου και επιτρέπει την επικέντρωση του νοήματος στη διαδικασία, και όχι σε τυχόν λεπτομέρειες που μπορεί να περιλαμβάνει ένα μαθηματικό πρόβλημα αφηγητικής μορφής προκειμένου να μοιάζει ρεαλιστικό. Ωστόσο, πρόκειται αναμφίβολα για μία ιδιαίτερα προκλητική και δυσνόητη δομή για τους μαθητές που καλούνται να προσκτήσουν δύο ή και περισσότερες λειτουργικές ποικιλίες της γλώσσας ταυτόχρονα (Adoniou & Qing, 2014· O'Keefe & O'Donoghue, 2014), γιατί η επεξεργασία, σύγκριση και μεταφορά των γλωσσολογικών δομών από τη μία γλώσσα στην άλλη είναι μία χρονικά δαπανηρή διεργασία που απαιτεί ανώτερα και πιο αφηρημένα νοητικά σχήματα (Celedón-Pattichis, 2003).

Ακόμη, η πιθανή **έλλειψη αντιστοιχίας ένα-προς-ένα μεταξύ μαθηματικών συμβόλων και λεκτικών φράσεων** φαίνεται να προκαλεί επιπλέον σύγχυση στους δίγλωσσους μαθητές. Αυτό οφείλεται κατά μεγάλο ποσοστό στην τάση των τελευταίων να διατυπώνουν μαθηματικές προτάσεις που περιλαμβάνουν σύμβολα ακολουθώντας τη ροή του τυπικού λόγου, αντί για την ορθότητα της μαθηματικής γλώσσας. Σε αυτήν την περίπτωση, πολλοί ερευνητές καταγράφουν ως χαρακτηριστικό παράδειγμα τη λανθασμένη ερμηνεία της φράσης «το 5 διαιρεί το 10» ως την πράξη 5:10 εκ μέρους των δίγλωσσων μαθητών, ορμώμενοι ίσως και από τη λειτουργική ποικιλία της πρώτης τους γλώσσας. Ένα αντίστοιχο παράδειγμα είναι η λεκτικοποίηση της διαίρεσης «23:7» ως «το 7 χωράει στο 23», τρόπος που είναι ανόμοιος σε διαφορετικές γλώσσες (Celedón-Pattichis, 2003· Othman, 2012).

Ο Freudenthal (2002) αιτιολογεί τα παραπάνω ισχυριζόμενος ότι τα μαθηματικά σύμβολα για τους φυσικούς αριθμούς έχουν πλέον ενσωματωθεί στη γραπτή γλώσσα, αφού συχνά προηγούνται της προφορικής αναφοράς τους: λ.χ. **το σύμβολο *3* προηγείται της λέξης *τρία*** και το σύμβολο *100* προηγείται της λέξης *εκατό*. Άρα, «*η σημασιολογική δομή έχει πολύ πιο σημαντική επίδραση στη μάθηση και την ποιότητα της συμμετοχής στον διάλογο της τάξης από ότι άλλες περισσότερο εμφανείς μεταβλητές (όπως το λεξιλόγιο)*» (Ellerton & Clarkson, 1996: 1004).

Η χρήση της γλώσσας στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών λαμβάνει επίσης χώρα στη διαγραμματική και συμβολική αναπαράσταση μίας συνθήκης. Πολλές φορές, οι μαθητές καλούνται να μυηθούν σε μη γραμμικά μοτίβα ανάλυσης, καθώς μεταβαίνουν συνεχώς από τη μία μορφή αναπαράστασης στην άλλη, ώστε να αποδώσουν νόημα στις πληροφορίες που λαμβάνουν. Κατ' ακολουθίαν, η μετάφραση μιας οπτικής πληροφορίας σε λόγο για τη λεπτομερή περιγραφή ενός διαγράμματος, μίας εικόνας ή ενός πίνακα, αλλά και ευρύτερα η **λεκτικοποίηση της μαθηματικής σημειογραφίας** αποτελούν έργα ιδιαίτερα απαιτητικά για το δίγλωσσο μαθητικό κοινό (Avalos, Bengochea & Secada, 2015· Cuevas, 1984).

Από την άλλη πλευρά, ο Mallet (2011) δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στις δυσκολίες που προκύπτουν κατά την **προφορική επικοινωνία** στη σχολική τάξη. Συγκεκριμένα, υποστηρίζει ότι αρκετές φορές οι δίγλωσσοι μαθητές διευκολύνονται περισσότερο στην κατανόηση γραπτών παρά προφορικών δεδομένων, εξαιτίας της ενδεχόμενης ταχύτητας εκφοράς του προφορικού λόγου, της προφοράς του ομιλητή ή της χρήσης λαϊκών ιδιωματισμών.

Τέλος, πολλοί ερευνητές κάνουν λόγο για την επίδραση του παράγοντα χρόνου στον βαθμό ευχέρειας των δίγλωσσων μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρεται από τον Cummins (2005) ότι χρειάζονται περίπου 5-7 χρόνια για την απόκτηση γνωστικής και ακαδημαϊκής ικανότητας στη δεύτερη γλώσσα σε επίπεδο φυσικού ομιλητή, ενώ για την πρώτη σχεδόν 2-3 χρόνια. Αυτό σημαίνει ότι το χρονικό διάστημα που δίνεται συνήθως στα παιδιά κατά την εκπαιδευτική διαδικασία δεν ανταποκρίνεται στο απαιτούμενο, με αποτέλεσμα να μεγεθύνονται οι δυσκολίες και τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν στην κατανόηση του περιεχομένου (Δούβλη, 2009· Καλαϊτζίδου, 2013· Μαντζανίδου, 2009).

2.2.4 Κατάκτηση της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών

Στις προηγούμενες ενότητες μελετήθηκε εκτενώς η σημασία της γλώσσας στα μαθηματικά και στη λειτουργική ποικιλία, ακολουθώντας πληθώρα ερευνητικών δεδομένων. Ωστόσο, ένα σχετικό ζήτημα που απουσιάζει από μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας έγκειται στον τρόπο με τον οποίο ένας μαθητής κατακτά τη λειτουργική ποικιλία της γλώσσας των μαθηματικών.

Για να απαντήσει στο ερώτημα αυτό, η Meaney (2006) πρότεινε το μοντέλο κατάκτησης της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών (μοντέλο MRA) βάσει ερευνών που διεξήγαγε σε τάξεις με δίγλωσσους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, εκτίμησε ότι οι μαθητές είναι πιθανότερο να αξιοποιήσουν τις προϋπάρχουσες εμπειρίες τους από την εκμάθηση της Γ2 για να κατακτήσουν τη λειτουργική ποικιλία της γλώσσας των μαθηματικών, όπως αντίστοιχα χρησιμοποίησαν αυτές από τη Γ1 για την πρόσκτηση της δεύτερης. Έτσι, υιοθέτησε τα στάδια του μοντέλου κατάκτησης της Γ2 που περιέγραψε η Gass (1997) και τα προσάρμοσε στα μαθηματικά. Βέβαια, το μοντέλο MRA δεν πρέπει να θεωρηθεί ως μοναδική οδός για την κατάκτηση της υπό μελέτη λειτουργικής ποικιλίας.

Το μοντέλο MRA δομείται από τέσσερα στάδια στα οποία ο καταλυτικός ρόλος του εκπαιδευτικού έγκειται στη σταδιακή απώλεια ελέγχου του «πότε», «πώς» και «γιατί» οι μαθητές χρησιμοποιούν τη γλώσσα των μαθηματικών. Με άλλα λόγια, η βασική ενέργεια του εκπαιδευτικού είναι η παροχή των κατάλληλων ευκαιριών στο σύνολο των μαθητών δίγλωσσου υποβάθρου, έτσι ώστε να συμμετέχουν ενεργά σε μαθηματικό διάλογο για τις νέες πτυχές της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών που ανακάλυψαν (Meaney et al., 2012).

Στα πρώτα στάδια του μοντέλου MRA ο εκπαιδευτικός κρατά τον έλεγχο των αλληλεπιδράσεων με **σκαλωσιές**, καθώς εισάγει τη νέα γλώσσα με στρατηγικές επίδειξης. Ταυτόχρονα, ο ρόλος των μαθητών στην παραγωγή λόγου περιορίζεται στη χρήση όρων και γραμματικών εκφράσεων. Όμως, στα επόμενα στάδια οι ίδιοι οι μαθητές ελέγχουν το πότε και πώς χρησιμοποιούν τη γλώσσα για να επικοινωνήσουν τις μαθηματικές τους ιδέες, αξιοποιώντας τις αυξανόμενες ευκαιρίες που τους παρέχει ο εκπαιδευτικός (Meaney et al., 2012).

Αναλυτικότερα, στο πρώτο στάδιο που καλείται «εστίαση της προσοχής» (noticing) οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα σημεία στα οποία χρησιμοποιούνται νέες έννοιες και εκφράσεις και τα αναγνωρίζουν ως νέα γλώσσα προς εκμάθηση. Εδώ οι μαθητές πραγματοποιούν στοιχειώδη χρήση της νέας αυτής γλώσσας, κυρίως μέσα από έργα συμπλήρωσης εκφράσεων ή προτάσεων (prompts) σχετικά με τα μαθηματικά (Meaney et al., 2012· Meaney, Fairhall & Trinick, 2007α).

Ακολουθεί το στάδιο της πρόσληψης (intake), όπου οι μαθητές χρησιμοποιούν το επιθυμητό λεξιλόγιο σε ποικίλες περιστάσεις. Σύμφωνα με την ανατροφοδότηση που λαμβάνουν από τα μέλη της τάξης τους, εδραιώνουν την κατανόηση της καταλληλότητας ή μη του λεξιλογίου αυτού σε κάθε περίσταση.

Στο επόμενο στάδιο γίνεται η «ενσωμάτωση» (integration). Δηλαδή, το μαθητικό κοινό ενσωματώνει συνεχώς τους νέους όρους στον λόγο του ή μπορεί να χρησιμοποιήσει απλούστερους όρους σε περισσότερο προκλητικές συνθήκες.

Το μοντέλο ολοκληρώνεται με τα λεγόμενα γλωσσικά εξερχόμενα (output), δηλαδή την παραγωγή λόγου από το μανθάνον υποκείμενο. Στη φάση αυτή, οι μαθητές χειρίζονται τα νέα γλωσσικά στοιχεία με ευχέρεια, ακόμα και στις πιο απαιτητικές περιπτώσεις. Με την ολοκλήρωση του σταδίου, τα νέα αυτά γλωσσικά στοιχεία ανήκουν πλέον στο γλωσσικό ρεπερτόριο των μαθητών και μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα οποιαδήποτε στιγμή και σε οποιαδήποτε ευκαιρία.

Σε κάθε στάδιο του μοντέλου περιλαμβάνονται διαφορετικές στρατηγικές που χρησιμοποιούνται εκ μέρους του εκπαιδευτικού. Πολλές από αυτές αναφέρονται συγκεντρωτικά στο κεφάλαιο που ακολουθεί.

Κεφάλαιο 3:

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΑΠΟ ΔΙΓΛΩΣΣΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Στον κόσμο της παιδαγωγικής επιστήμης είναι κοινότοπη η αντίληψη ότι η ευελιξία των εκπαιδευτικών καθιστά ένα από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά τους. Ειδικά στα μαθηματικά, είναι επιβεβλημένη η κατοχή παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου[2] καθώς και ενός μετα-επιπέδου κατανόησης της επίδρασης του γλωσσικού παράγοντα στη μάθηση. Πρόκειται για μία ιδιότητα που έχει διερευνηθεί σε μεγάλο βαθμό, με πολλά αποτελέσματα να συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι η έλλειψή της συνδέεται με εκπαιδευτικούς που τείνουν να εστιάζουν περισσότερο σε διαδικασίες και λιγότερο σε έννοιες κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Τουναντίον, **ένας εκπαιδευτικός πολύγλωσσης τάξης οφείλει να είναι σε θέση να υποστηρίξει επαρκώς όλους τους μαθητές στην καλλιέργεια μαθηματικών ιδεών και τρόπων «σκέπτεσθαι», έτσι ώστε να κατακτήσουν τη μαθηματική ποικιλία**. Επακολούθως, κρίνεται αναγκαίο ο ίδιος να εντοπίζει και να εφαρμόζει διάφορες στρατηγικές που οδηγούν σε αυτόν τον δρόμο, μερικές από τις οποίες αναλύονται σε αυτό το κεφάλαιο (Meaney et al., 2012· Othman, 2012).

[2] Σύμφωνα με τον Shulman (1986: 8-9), η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου ορίζεται ως «*η ανάμιξη του περιεχομένου και της παιδαγωγικής στην οργάνωση, αναπαράσταση και προσαρμογή στα διαφορετικά ενδιαφέροντα και ικανότητες των μαθητών καθώς και στην παρουσίαση για διδασκαλία συγκεκριμένων θεμάτων, προβλημάτων ή ζητημάτων*» και περιλαμβάνει επιπλέον «*τους τρόπους αναπαράστασης και διατύπωσης του αντικειμένου που το κάνουν κατανοητό στους άλλους*».

3.1 Διδασκαλία της Γλώσσας με βάση το Περιεχόμενο (Content and Language Integrated Learning - CLIL)

Πριν την επικέντρωση στις στρατηγικές που εφαρμόζουν οι εκπαιδευτικοί όσον αφορά στην υπό μελέτη θεματολογία, κρίνεται σκόπιμο να γίνει λόγος για μία ευρύτερη προσέγγιση δίγλωσσου εκπαιδευτικού προσανατολισμού. Πρόκειται για την πολλά υποσχόμενη «**διδασκαλία της γλώσσας με βάση το περιεχόμενο**» (Content and Language Integrated Learning - CLIL), η οποία αφορά στη διδακτική ενός μη γλωσσικού γνωστικού αντικειμένου, όπως τα μαθηματικά ή η φυσική, μέσω της αξιοποίησης μιας δεύτερης ή ξένης γλώσσας.

Η CLIL είναι μία παιδαγωγική προσέγγιση διπλής εστίασης, όπου μία πρόσθετη γλώσσα αποτελεί όχημα διδασκαλίας και μάθησης του περιεχομένου παράλληλα με αυτήν (Coyle, Hood & Marsh, 2010). Γι' αυτό, δε νοείται ως μέθοδος υπό την έννοια μιας ακολουθίας βήμα προς βήμα, αλλά ως προσέγγιση επιστημολογικής νοοτροπίας που περιστρέφεται γύρω από την ιδέα της **συμβίωσης** (symbiosis) της γλώσσας και του περιεχομένου (Moore & Lorenzo, 2015). Για τους Van de Craen et al. (2007), βέβαια, η CLIL δε συνιστά ούτε μέθοδο διδασκαλίας ούτε παιδαγωγική τεχνική, αλλά ένα νέο, καινοτόμο **παράδειγμα** (paradigm) εκπαίδευσης σε ένα γνωστικό αντικείμενο μέσω μιας μη μητρικής γλώσσας.

Το παρόν μοντέλο ήρθε στο φως του επιστημονικού κλάδου από τον D. Marsh το 1994, σε ένα Πανεπιστήμιο της Φινλανδίας. Όπως αναφέρει η Dalton-Puffer (2007), πρόκειται για ένα καινούριο αλλά και παλιό φαινόμενο. Αρχικά, δε θεωρήθηκε σημαντική καινοτομία, γιατί φαινομενικά συνιστά συνδυασμό ήδη υπαρχόντων παιδαγωγικών πρακτικών με αποδεδειγμένα οφέλη (Surmont et al., 2016· Wossala et al., 2013). Έκτοτε, όμως, η CLIL αποκτά ολοένα και αυξανόμενη δημοτικότητα και ισχύ στα ευρωπαϊκά συστήματα δίγλωσσης ή πολύγλωσσης και πολυπολιτισμικής πολιτικής, χωρίς να αλλοιώνει το εκάστοτε πρόγραμμα σπουδών (Moore & Lorenzo, 2015· Surmont et al., 2016).

Περνώντας σε βαθύτερη ανάλυση της μεθοδολογίας της CLIL, είναι ωφέλιμο να δοθεί περαιτέρω έμφαση στην ισορροπημένη σχέση που προτείνεται μεταξύ παράλληλης εκμάθησης γλώσσας και περιεχομένου. Ειδικότερα, σε μία σχολική τάξη όπου λαμβάνει χώρα ο εν λόγω τρόπος διδασκαλίας επιχειρείται η **ανάπτυξη του μη γλωσσικού περιεχομένου μέσω της Γ2 και, αντίστοιχα, η ανάπτυξη της Γ2 μέσω του πρώτου** (Novotná & Hofmannová, 2000). Με άλλα λόγια, όπως αναφέρουν οι Coyle et al. (2010), η μεθοδολογία CLIL δεν αντιπροσωπεύει την εκπαίδευση σε μια πρόσθετη γλώσσα, αλλά την εκπαίδευση μέσω αυτής.

Η σημασία, λοιπόν, της CLIL έγκειται στην εφαρμογή μιας προσέγγισης γλωσσικής εκμάθησης βασισμένης στην υλοποίηση έργων στο μαθησιακό περιβάλλον, όπου **η γλώσσα-στόχος μαθαίνεται καθώς αναδύεται η ανάγκη χρήσης της κατά την πραγμάτευση του περιεχομένου σε ποιοτικές μαθηματικές συζητήσεις** (Surmont et al., 2016). Εξάλλου, η αποτελεσματική διδασκαλία με τη

μεθοδολογία CLIL λαμβάνει χώρα όταν *«ο μαθητής κατανοεί το περιεχόμενο που διδάσκεται, σημειώνει πρόοδο στην απόκτηση γνώσεων και μυείται ενεργά στη συλλογιστική διεργασία»* (Czura & Kołodyńska, 2015: 92).

Κατά τους Moore & Lorenzo (2015) το κλειδί της διδασκαλίας της γλώσσας με βάση το περιεχόμενο βρίσκεται στο "I" του αγγλικού ακρωνυμίου, δηλαδή στην **ενσωμάτωση (integrated)**. Πιο εξειδικευμένα, ένας εκπαιδευτικός καλείται να ενσωματώσει ασυνείδητη ανάπτυξη της Γ2 με την γενικά περισσότερο συνειδητή διδασκαλία του περιεχομένου του εκάστοτε γνωστικού αντικειμένου. Μάλιστα, η θετική επίδραση αυτού του τρόπου μάθησης έχει επιβεβαιωθεί από ερευνητικά πορίσματα που απέδειξαν πως η ασυνείδητη κατάκτηση της Γ2 προκαλεί εγκεφαλική αντίδραση όμοια με αυτή της χρήσης της Γ1 (Bialystok & Barac, 2012).

Επιπροσθέτως, ο σχεδιασμός μιας διδακτικής πορείας με την προσέγγιση CLIL περιλαμβάνει την αξιοποίηση πολλαπλών αναπαραστάσεων και πολυμέσων, εκτός από τη γλώσσα. Τέτοιες τεχνικές αποτελούν εικόνες, πίνακες, γραφήματα, μαθηματικά σύμβολα και κατάλληλα εργαλεία, σε συνδυασμό με τις οποίες προτείνεται η διδασκαλία των κειμενικών ειδών και η προώθηση του εγγραμματισμού των μαθητών στο γνωστικό αντικείμενο (Favilli, Maffei & Peroni, 2013· Moore & Lorenzo, 2015).

3.1.1 Εννοιολογικό Πλαίσιο των 4C

Για την περιγραφή της προσέγγισης CLIL ο Coyle (1999 κ.ά.) εισήγαγε το Εννοιολογικό Πλαίσιο των 4C (4C's Conceptual Framework). Το πλαίσιο αυτό αποτελείται από τέσσερα συστατικά στοιχεία της δίγλωσσης εκπαίδευσης: το *περιεχόμενο* (content), δηλαδή την επιμέρους θεματολογία του γνωστικού αντικειμένου, την *επικοινωνία* (communication), δηλαδή τη γλώσσα, τη *γνωστική κατάκτηση* (cognition), δηλαδή τη σκέψη και μάθηση και την *κουλτούρα* (culture), δηλαδή την κοινωνική συνειδητότητα του εαυτού και την ετερότητα (Czura & Kołodyńska, 2015· Korosidou & Deligianni, 2017).

Ξεκινώντας από το **περιεχόμενο**, η κατάκτησή του μπορεί να υποστηριχθεί από πλειάδα στρατηγικών, οι οποίες θα αναφερθούν σε επόμενη ενότητα της εργασίας. Αυτό που είναι σημαντικό εδώ είναι η διαμόρφωση μιας δυναμικής σχέσης μεταξύ εκπαιδευτικών και μαθητικού κοινού καθώς και η συνεργατική κατασκευή του νοήματος του περιεχομένου.

Το δεύτερο στοιχείο του πλαισίου που αφορά στην **επικοινωνία**, αποβλέπει στην καλλιέργεια γλωσσικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων. Εδώ υπογραμμίζεται η χρήση στρατηγικών που προάγουν την αλληλεπίδραση και η υιοθέτηση ποικίλων λεκτικών ή μη μορφών λόγου (Czura & Kołodyńska, 2015).

Η επικοινωνία, ωστόσο, επιμερίζεται σε τρεις επιπλέον τομείς: τη γλώσσα της μάθησης, τη γλώσσα για τη μάθηση και τη γλώσσα μέσω της μάθησης. Η **γλώσσα της μάθησης** αντιπροσωπεύει την απαιτούμενη γλώσσα των μαθητών ώστε να

μπορούν να αντιληφθούν βασικές έννοιες του νέου περιεχομένου και το ειδικό του λεξιλόγιο. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της διδασκαλίας της μέτρησης πρέπει να συμπεριληφθούν λέξεις όπως μέτρο, μέτρα, εκατοστό, εκατοστά, μακρύς και κοντός, αλλά και γραμματικοί τύποι για την υλοποίηση συγκρίσεων (μακρύς, μακρύτερος), δημιουργώντας προτάσεις όπως «Το τραπέζι έχει μήκος 1 μέτρο» ή «Το τραπέζι είναι μακρύτερο/πιο μακρύ από την καρέκλα». Η **γλώσσα για τη μάθηση** αφορά στο γλωσσικό επίπεδο των μαθητών που είναι απαραίτητο για να επεξεργαστούν το περιεχόμενο και να συμμετέχουν σε ομαδικούς διαλόγους υπό ένα δεδομένο πλαίσιο. Εδώ, οι μαθητές χρειάζεται να εφαρμόσουν στρατηγικές, με τον εκπαιδευτικό να τους παρέχει υποστήριξη με την κατάλληλη σκαλωσιά αποβλέποντας στην ποιοτική μάθηση. **Η γλώσσα μέσω της μάθησης** εκφράζει τη γλώσσα που αναδύεται κατά την ενεργή δράση των μαθητών σε όλη τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας (Coyle et al., 2010· Devos, 2016· Harrop, 2012).

Συνεχίζοντας με το επόμενο στοιχείο του εννοιολογικού πλαισίου, η **γνωστική κατάκτηση** έγκειται στον εντοπισμό αλλαγών στη συλλογιστική και μαθησιακή διαδικασία. Οι Coyle et al. (2010) εκφράζουν την αντίληψη ότι διαφορετικοί τρόποι σκέπτεσθαι μπορεί να συμβάλλουν θετικά στην εννοιολογιοποίηση (conceptualization) και στην ανάπτυξη μνημονικών δεξιοτήτων ή άλλων ικανοτήτων, όπως κατανόησης, εφαρμογής, ανάλυσης, αξιολόγησης και δημιουργίας. Αναμφίβολα, οι μαθητές μέσω της προσέγγισης CLIL προχωρούν σταδιακά προς την υπέρβαση των εκφραστικών τους ορίων, με τη μύησή τους σε ολοένα και πιο νοητικά απαιτητικά έργα που αναβαθμίζουν τις σημασιολογικές και διαδικαστικές γνώσεις τους (Czura & Kołodyńska, 2015).

Το τελευταίο γράμμα του πλαισίου των 4C αντιστοιχεί στην **κουλτούρα**, η οποία κατά τον Brown (2007) αποτελεί καταλυτικό παράγοντα στην αλληλεπίδραση μεταξύ γλώσσας και σκέψης, εφόσον πολλές φορές τα γνωστικά και εθιμικά της πρότυπα κωδικοποιούνται στη γλωσσική συνείδηση. Η πολιτισμική πτυχή του πλαισίου είναι η επιτομή του, αποτελώντας τον συνδετικό κρίκο των υπόλοιπων στοιχείων του (Devos, 2016). Με αφορμή την προαναφερθείσα θέση, κρίνεται απαραίτητο το σύνολο των εκπαιδευτικών που εφαρμόζουν τη διδασκαλία της γλώσσας με βάση το περιεχόμενο να είναι συνειδητοποιημένοι και ευαισθητοποιημένοι σε ζητήματα κουλτούρας, διαφορετικότητας και ετερότητας προκειμένου να αξιοποιούν αποτελεσματικά τους διαθέσιμους πόρους ή τα εργαλεία τους (Czura & Kołodyńska, 2015).

3.1.2 Πλεονεκτήματα, Μειονεκτήματα και Προβληματισμοί

Από όλα τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι η διδακτική προσέγγιση CLIL συγκεντρώνει αρκετά θετικά χαρακτηριστικά. Στο σημείο αυτό θα αναφερθούν περισσότερα πλεονεκτήματα, μέσα από πιο εξειδικευμένο φακό εστίασης.

Με μία πρώτη ματιά παρατηρείται ότι η εν λόγω καινοτομία τοποθετεί τον μαθητή στο επίκεντρο της διδασκαλίας, υιοθετώντας κοινωνικο-κονστρουκτιβιστικό

προσανατολισμό. Εμβαθύνοντας, αντιλαμβάνεται κανείς ότι προσφέρει στον μαθητή ένα **φυσικό περιβάλλον γλωσσικής ανάπτυξης και εκμάθησης** (Novotná & Hofmannová, 2000), όπου έρχεται σε διαρκή επαφή με τη γλώσσα διδασκαλίας και ουσιαστικά βελτιώνει ασυνείδητα τις δεξιότητές του στην προφορική επικοινωνία (Czura & Kołodyńska, 2015· Surmont et al., 2016· Wossala et al., 2013).

Είναι αρκετά σημαντικό εδώ το γεγονός ότι η εκπαίδευση με την προσέγγιση CLIL παρέχει στους μαθητές περισσότερο **χώρο αλληλεπίδρασης**, δίνοντάς τους τη δυνατότητα να συμμετέχουν σε συλλογικές διαδικασίες παραγωγής λόγου και διαπραγμάτευσης νοημάτων (Somers, 2017). Η παροχή του κατάλληλου συγκειμένου στους δίγλωσσους μαθητές αποτελεί αρωγό της εμβάθυνσης στις γλωσσικές δομές και της διαμόρφωσης υψηλής μεταγλωσσικής συνειδητότητας (Surmont et al., 2016), ιδίως στην πραγματολογική χρήση της γλώσσας-στόχου (Ouazizi, 2016).

Το επίτευγμα αυτό είναι περισσότερο εμφανές στην υποστήριξη των μειονοτικών γλωσσών, χάρη στη συνύπαρξη πολιτισμών και στη θέσπιση «**ευέλικτων μαθησιακών πρακτικών**». Έτσι, μαθητές της μειονότητας και μαθητές της πλειονότητας αποκτούν ίσες ευκαιρίες στην εκμάθηση της γλώσσας διδασκαλίας και του γνωστικού περιεχομένου (Somers, 2017).

Ειδικά σε σύγκριση με την παραδοσιακή διδασκαλία και το δασκαλοκεντρικό μοντέλο, πολλά ερευνητικά στοιχεία επιβεβαιώνουν τα παραπάνω πλεονεκτήματα της προσέγγισης CLIL. Ο Naves (2009) αιτιολογεί το γεγονός αυτό εκφράζοντας την άποψη ότι η μύηση σε ζωντανές και φυσικές καταστάσεις επικοινωνίας, σε αντίθεση με τη μετωπική διδασκαλία, μπορεί να επιφέρει καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα για τη γλώσσα ως υπο-προϊόν της αλληλεπίδρασης.

Για αυτούς τους λόγους, η προσέγγιση CLIL θεωρείται ιδανικό περιβάλλον διδασκαλίας των μαθηματικών σε **αναδυόμενους δίγλωσσους μαθητές**. Οι τελευταίοι έχουν τη δυνατότητα να συμμετέχουν σε ένα ενθαρρυντικό πλαίσιο δραστηριοποίησης και αλληλεπίδρασης για τη μάθηση νέων μαθηματικών εννοιών και τερμινολογίας, όπου συνήθως η γλωσσική κατάκτηση αποτελεί προαπαιτούμενο (Ouazizi, 2016).

Ωστόσο, από την προσέγγιση CLIL δεν απουσιάζει η άλλη πλευρά του νομίσματος, δηλαδή τα αρνητικά της γνωρίσματα. Αρχικώς, σημειώνεται από τους Wossala et al. (2013) ότι είναι μία αρκετά απαιτητική προσέγγιση, τόσο σε διάρκεια χρονικής δαπάνης όσο και σε επίπεδο επαγγελματικών και γνωστικών δεξιοτήτων του εκπαιδευτικού. Επιπλέον, καθοριστική σημασία αποδίδεται στην επιλογή και προετοιμασία των κατάλληλων δραστηριοτήτων, ώστε να είναι κατανοητές από τους μαθητές, διατηρώντας παράλληλα έναν βαθμό σχετικής δυσκολίας για τη δημιουργία της αίσθησης της πρόκλησης. Τέλος, ως μειονέκτημα της CLIL καταγράφεται και το ρίσκο της έλλειψης κινήτρου εκ μέρους των μαθητών, ιδίως εκείνων με χαμηλή αυτοεκτίμηση για τις γνωστικές και γλωσσικές τους ικανότητες.

Τα παραπάνω στοιχεία για πολλούς ερευνητές συνιστούν απλούς περιορισμούς της υπό μελέτη διδακτικής προσέγγισης, χωρίς να προσδίδουν σε αυτά έντονα αρνητική χροιά. Η Klimova (2012) συνοψίζει κάποια από τα ζητήματα που θέτουν **εμπόδια** στην εφαρμογή της CLIL στο σχολικό περιβάλλον. Μερικά από αυτά είναι: η ελλιπής γνώση των μαθητών της γλώσσας-στόχου, η ποικιλομορφία του επιπέδου γλωσσικών ικανοτήτων των μαθητών μιας τάξης, η απουσία κατάλληλου μαθησιακού υλικού και πόρων και η μη παροχή υποστήριξης από τους εμπλεκόμενους στον χώρο της εκπαίδευσης.

Ως περιορισμός θα μπορούσε να αναφερθεί και η πρόκληση με την οποία έρχεται αντιμέτωπος ο εκπαιδευτικός που εφαρμόζει τη μεθοδολογία CLIL στην τάξη του. Καταρχήν, αναμένεται να απομακρυνθεί από τα δασκαλοκεντρικά μοντέλα και τη μονολογική διδασκαλία, πραγματοποιώντας μια στροφή προς τη μαθητοκεντρικότητα. Ακόμη, οφείλει να δρα ως **διαμεσολαβητής της γλώσσας και του περιεχομένου ταυτόχρονα**, με βασικό εργαλείο του τον λόγο κατά την αλληλεπίδραση της τάξης. Για παράδειγμα, καλείται να χρησιμοποιήσει κατάλληλες γραφικές αναπαραστάσεις, καταλόγους λέξεων και συχνή ανατροφοδότηση για την ενθάρρυνση των μαθητών (Favilli et al., 2013· Wossala et al., 2013).

Εστιάζοντας στα μαθηματικά, ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να προβεί σε μεθοδολογικές αλλαγές για την επίτευξη της ζητούμενης αλληλεπίδρασης. Συνάμα, τονίζεται πως οφείλει να χρησιμοποιεί την επίσημη και ανεπίσημη μαθηματική γλώσσα με απόλυτη ακρίβεια και περιεκτικότητα (Favilli et al., 2013).

Ακόμη, είναι αναγκαία η επίτευξη ισορροπίας μεταξύ των τιθέμενων στόχων στη διδασκαλία της γλώσσας και του περιεχομένου (Czura & Kołodyńska, 2015). Το έργο αυτό έχει αποδειχθεί εξαιρετικά δύσκολο για τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι μαρτυρούν ότι συχνά αισθάνονται πως διδάσκουν τη γλώσσα και όχι το γνωστικό αντικείμενο. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να πούμε πως έρχονται αντιμέτωποι με μία από τις κυριότερες προκλήσεις της προσέγγισης CLIL, η οποία μοιάζει με την αιώνια αντιπαράθεση μεταξύ λέξεων και μουσικής στην όπερα.

Αναλύοντας την παραπάνω πρόκληση, ανακύπτουν επιπρόσθετοι προβληματισμοί για τον εκπαιδευτικό. Αφενός, αναλογίζεται την ενδεχόμενη επιβράδυνση της εκμάθησης του περιεχομένου εκ μέρους των μαθητών, εξαιτίας της διδασκαλίας στη μη μητρική τους γλώσσα. Αφετέρου, το χαμηλό επίπεδο ευχέρειας των τελευταίων σε αυτή τη γλώσσα παρεμποδίζει τη γνωστική πολυπλοκότητα του προς εκμάθηση περιεχομένου, με κίνδυνο την απώλεια κινήτρων συμμετοχής των μαθητών (Dalton-Puffer, 2009).

Σε αυτά αξίζει να προσθέσουμε το **παράδοξο της προσέγγισης CLIL** (CLIL paradox), όπως σημειώνεται από την Heine (2010). Η ίδια κάνει λόγο για μία διλημματική κατάσταση στην οποία οι μαθητές καλούνται να κατακτήσουν ένα ευρύ φάσμα ικανοτήτων και δεξιοτήτων σχετικών με το γνωστικό αντικείμενο, ενώ παράλληλα το γλωσσικό τους επίπεδο δεν είναι αρκετό ώστε να τους επιτρέψει την

επεξεργασία του περιεχομένου υπό ένα δεδομένο πλαίσιο. Συνεπώς, η εκμάθηση της γλώσσας και του περιεχομένου για αυτούς τους μαθητές πρέπει να λάβει χώρα **ταυτόχρονα, παρά το γεγονός ότι το ένα είναι προϋπόθεση του άλλου**. Υπό αυτήν την έννοια, γίνεται αντιληπτό πως η έκφραση «πρώτα η μουσική και μετά ο λόγος» (prima la musica dopo le parole), δε βρίσκει ισχύ στην προσέγγιση CLIL, αφού η γλώσσα και το περιεχόμενο σε αυτήν είναι αλληλένδετα και συνυφασμένα το ένα στο άλλο (Dalton-Puffer, 2009).

Προσεγγίζοντας το ζήτημα με μία πιο κριτική ματιά, μπορεί κανείς να αναρωτηθεί «*γιατί να χρησιμοποιηθεί η μεθοδολογία CLIL στο μάθημα των μαθηματικών;*». Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα στρέφεται γύρω από την πτυχή της φαινομενικής παγκοσμιότητας των μαθηματικών και της υποβόσκουσας γλωσσικής και πολιτισμικής τους εξάρτησης. Ένας δίγλωσσος μαθητής που παρακολουθεί μία τάξη όπου χρησιμοποιείται η μεθοδολογία CLIL μπορεί να κατανοήσει τη σημασία των μαθηματικών συμβόλων και τύπων, υψώνοντας μια φυσική **γέφυρα** ως στρατηγική μάθησης και επικοινωνίας, σύμφωνα με τις ατομικές του ανάγκες και ιδιαιτερότητες. Με αυτή τη γέφυρα έχει τη δυνατότητα να μεταβαίνει αβίαστα από τη μητρική του γλώσσα στη γλώσσα διδασκαλίας και αντιστρόφως, χωρίς να χάνει το νόημα των ιδεών που πραγματεύεται στη μαθηματική τάξη (Czura & Kołodyńska, 2015· Favilli et al., 2013).

3.2 Διαγλωσσικότητα

Μία παιδαγωγική προσέγγιση που αναπτύχθηκε στα τέλη του 20ου αι. και διαλέγεται κριτικά με πολιτικές γλωσσικού διαχωρισμού (language separation) είναι η διαγλωσσικότητα (translanguaging)[3]. Πρόκειται για μία καινοτομία που αξιοποιεί κάθε γλώσσα ως πηγής, ακολουθώντας μία ετερογλωσσική (heteroglossic)[4] αντίληψη της διγλωσσίας. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι δίνεται στα παιδιά η δυνατότητα να χρησιμοποιούν με τρόπο ευέλικτο και αυθόρμητο **όλους τους γλωσσικούς και μη πόρους από κάθε γλωσσικό τους ρεπερτόριο**, ώστε να μεγιστοποιήσουν τη μάθηση, την κατανόηση του περιεχομένου και την ευχέρειά τους σε κάθε γλώσσα (Creese & Blackledge, 2015· García & Lin, 2016· Jones, 2017· Lasagabaster & García, 2014· Lopez et al., 2017· Probyn, 2015· Uribe-Flórez et al., 2014).

Σήμερα, ο όρος διαγλωσσικότητα έχει διευρυνθεί συγκριτικά με την πρώτη χρήση του[5] και προσδιορίζει πλέον τις *«**πολλαπλές πρακτικές λόγου** στις οποίες μυούνται τα δίγλωσσα άτομα προκειμένου να αποδώσουν το νόημα των δίγλωσσων κόσμων τους»* (García, 2009: 45), καθώς επίσης και τις διδακτικές πρακτικές που τις επηρέασαν (Wei & García, 2017). Έτσι, η διαγλωσσικότητα μετατράπηκε από κοινωνιογλωσσική θεωρία σε παιδαγωγική στρατηγική και διαδικασία για την εφαρμογή δυναμικών μοντέλων διγλωσσίας (Lasagabaster & García, 2014).

Διαγλωσσικότητα και CLIL

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3.1, η προσέγγιση CLIL αποτελεί μία σύγχρονη διδακτική μεθοδολογία που τοποθετεί τον μαθητή στο επίκεντρο και τον βοηθά να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ γλώσσας και κατανόησης του περιεχομένου. Η πρακτική που λειτουργεί ως γέφυρα στην CLIL και συμβάλλει στην ενίσχυση της πολύγλωσσης νοοτροπίας της, δεν είναι άλλη από τη διαγλωσσικότητα.

Ο όρος αυτός είναι γνωστός στη μεθοδολογία CLIL από πολλές αναφορές, άμεσα ή έμμεσα, που μελετούν τον ρόλο της Γ1 σε αυτήν. Ενδεικτικά, οι Marsh et al. (2011) συμπεριλαμβάνουν τη διαγλωσσικότητα στις στρατηγικές που πρέπει να εφαρμόσει ο εκπαιδευτικός για να υποστηρίξει τη συνεχή γλωσσική ανάπτυξη, μεταξύ άλλων στρατηγικών όπως τη συνειδητοποίηση του λάθους, τη μεταφορά και παρεμβολή, την επίδειξη και τον αντι-πλατωνισμό. Ακόμη, ο Li (2015) υπογραμμίζει ότι η προσέγγιση CLIL παρουσιάζει ευελιξία για τον δυνητικό ρόλο της αξιοποίησης

[3] Η απόδοση του όρου στην ελληνική γλώσσα προέρχεται από την Τσοκαλίδου (2016).

[4] Η ετερογλωσσία (heteroglossia) σύμφωνα με τον Lemke (1998) αναφέρεται στη συμμετοχή του ατόμου σε πληθώρα κοινωνικών διαλόγων στο πλαίσιο μιας κοινότητας που αποτελείται από ποικίλες κοινωνικές γλώσσες (Lin & He, 2017: 230).

[5] Ο όρος διαγλωσσικότητα έχει ουαλικές ρίζες, καθώς προέρχεται από τον όρο «trawsiethu» που χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Cen Williams τη δεκαετία του 1980. Με αυτόν ο ίδιος περιέγραψε μια παιδαγωγική πρακτική της δίγλωσσης εκπαίδευσης που περιελάμβανε τη σκόπιμη και συστηματική εναλλαγή γλωσσικών τύπων (language modes) κατά την πρόσληψη (ανάγνωση και ακοή) και την παραγωγή (ομιλία και γραφή) λόγου. Για παράδειγμα, σε ένα τέτοιο περιβάλλον οι μαθητές μπορεί να πραγματοποιούσαν έργα ανάγνωσης στην ουαλική γλώσσα και γραφής στην αγγλική γλώσσα ή αντιστρόφως (García, 2009· García & Lin, 2016· Hornberger & Link, 2012· Jones, 2017· Lasagabaster & García, 2014· Schwartz & Asli, 2014· Wei & García, 2017).

της Γ1 των μαθητών, κάτι που συνάδει με τη χρήση τεχνικών διαγλωσσικότητας (Nikula & Moore, 2016). Δηλαδή, η σύμπραξη των δύο προσεγγίσεων διακρίνεται στη διδασκαλία CLIL στην αντιμετώπισή της απέναντι στο ζήτημα «Γ1=πρόβλημα».

Συμπερασματικά, η μεταξύ τους σχέση έγκειται στην ιδιότητά τους ως όροι ομπρέλα. Όμως, η διαφορά τους αφορά στο ότι η διαγλωσσικότητα αναφέρεται στη **δίγλωσση συμπεριφορά**, ενώ η CLIL στη **δίγλωσση εκπαίδευση**. Άρα, ο ρόλος της διαγλωσσικότητας στη μεθοδολογία CLIL αφορά στον εμπλουτισμό της τελευταίας με πολύγλωσσες πρακτικές που είναι εξαρτώμενες από το πλαίσιο και όχι τυχαίες. Με τον τρόπο αυτό, ευνοείται η εκμάθηση του περιεχομένου και η διατήρηση δυναμικών και λειτουργικών αλληλεπιδράσεων (Moore & Nikula, 2016).

Οριοθέτηση της έννοιας

Η εννοιολογική οριοθέτηση της διαγλωσσικότητας εξακολουθεί να διασαφηνίζεται ακόμα και σήμερα μέσω θεωρητικών και ερευνητικών μελετών. Επιστήμονες διαφόρων γνωστικών πεδίων που θέτουν το εν λόγω φαινόμενο στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος δεν έχουν καταλήξει ακόμη σε έναν μοναδικό, πλήρη και ευρέως αποδεκτό ορισμό. Μερικοί από τους ορισμούς που επιχειρούν να προσεγγίσουν την έννοια της διαγλωσσικότητας παρατίθενται παρακάτω.

Αρχικά, η García (2009: 44) εξετάζει τη διαγλωσσικότητα από την πτυχή της κοινωνιογλωσσίας τρίτου κύματος (third wave sociolinguistics) και καταγράφει ότι: *«Η διαγλωσσικότητα, ή η μύηση σε δίγλωσσες ή πολύγλωσσες πρακτικές λόγου είναι μία προσέγγιση της διγλωσσίας που επικεντρώνεται όχι στις γλώσσες, όπως συνηθίζεται, αλλά στις πρακτικές των δίγλωσσων ατόμων που είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Οι παγκόσμιες αυτές πρακτικές […] θεωρούνται ως ο φυσικός τρόπος επικοινωνίας που […] χαρακτηρίζει κοινότητες σε όλο τον κόσμο».*

Εν συνεχεία, κατά τον Baker (2011: 288) η διαγλωσσικότητα ορίζεται ως *«η διεργασία νοηματοδότησης, σχηματοποίησης εμπειριών, κατανοήσεων και γνώσης μέσω δύο γλωσσών»*, ενώ ο Canagarajah (2011: 401) κάνει λόγο για τη διαγλωσσικότητα ως ικανότητα των πολύγλωσσων ομιλητών. Συγκεκριμένα, θεωρεί ως διαγλωσσικότητα την ικανότητα των τελευταίων *«να μετακινούνται μεταξύ γλωσσών, αντιμετωπίζοντας τις διάφορες γλώσσες που διαμορφώνουν το **ρεπερτόριό** τους ως ένα **ενσωματωμένο σύστημα**»*.

Στον όρο ρεπερτόριο (repertoire) αναφέρθηκε περαιτέρω και η García, σε ατομικές και συνεργατικές μελέτες του φαινομένου. Ενδεικτικά, εντοπίζεται ο προσδιορισμός της διαγλωσσικότητας ως *«οι τρόποι με τους οποίους οι δίγλωσσοι χρησιμοποιούν το σύνθετο σημειωτικό τους ρεπερτόριο για να δράσουν, να γνωρίσουν και να υπάρξουν»* (García & Wei, 2015: 237). Συμπληρωματικά, κατά την García (2012: 4) η διαγλωσσικότητα συνιστά *«το ρεπερτόριο των δίγλωσσων γλωσσικών πρακτικών που μπορούν να αναδυθούν και να επεκταθούν μόνο σε αλληλοσυσχέτιση μεταξύ τους και μέσω εξάσκησης και κοινωνικοποίησης»*.

Ακόμη, οι García & Leiva (2014, ό.π. στο Creese & Blackledge, 2015) μελετούν τη διαγλωσσικότητα υπό το πρίσμα μιας νέας **γλωσσικότητας**. Η έννοια αυτή έχει καταλυτικό ρόλο στη διαγλωσσικότητα, ως το δεύτερο συνθετικό της. Σύμφωνα με τους Lewis, Jones & Baker (2012), He et al. (2016) και Makalela (2015), νοείται ως μια ολιστική διεργασία γλωσσικής χρήσης για την απόκτηση γνώσεων και εμπειριών, την κατανόηση, την έκφραση σκέψεων και την επικοινωνία.

Με αυτήν την ψυχογλωσσολογική πτυχή της γλωσσικότητας, και κατ' επέκταση της διαγλωσσικότητας, πρεσβεύεται μια **συνεχής διαδικασία** που λαμβάνει χώρα σε οποιοδήποτε τυπικό ή άτυπο περιβάλλον και η γλώσσα παύει να είναι απλώς ένα ουσιαστικό με απρόσωπη και γενική ιδιότητα. Μάλιστα, σημειώνεται πως στη διαγλωσσικότητα η γλώσσα είναι «*δράση και πρακτική και όχι ένα απλό σύστημα δομών και διακριτών συνόλων δεξιοτήτων*» (García, 2011: 1). Αυτό φαίνεται και σε παρόμοιους όρους της διεθνούς βιβλιογραφίας, όπως μετρογλωσσία, πολυγλωσσικότητα, ετερογλωσσία, σύμπλεγμα κωδίκων, διαγλωσσική πρακτική, υβριδικές γλωσσικές πρακτικές κ.ά. (Lewis et al., 2012).

Το πρώτο συνθετικό της διαγλωσσικότητας λειτουργεί επίσης με ιδιαίτερη σκοπιμότητα. Οι He et al. (2016) επισημαίνουν πως το πρόθημα **"δια-"** (trans-) αντιπροσωπεύει τις τρεις διαστάσεις που αναδεικνύουν ευελιξία και δυναμική: δια-σύστημα/δομή/χώρος[6], δια-επιστημονικότητα[7], δια-μορφωτικότητα[8] (trans-system/structure/space, transdisciplinary, transformative).

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο απόσπασμα του Wei (2011: 1223) που ακολουθεί: *«Η διαγλωσσικότητα είναι τόσο το να κινείσαι ανάμεσα σε διαφορετικές γλωσσικές δομές και συστήματα που περιλαμβάνουν διαφορετικές μορφές (ομιλία, γραφή, τραγούδισμα, ακοή, ανάγνωση, μνήμη) όσο και το να τις ξεπερνάς. Περιλαμβάνει ολόκληρη την ποικιλία των γλωσσικών επιτελέσεων των πολύγλωσσων χρηστών της γλώσσας […]. Τότε είναι μεταμορφωτική στη φύση της· δημιουργεί έναν κοινωνικό χώρο για τον πολύγλωσσο χρήστη της γλώσσας συγκεντρώνοντας διαφορετικές διαστάσεις της προσωπικής του ιστορίας, εμπειρίας και περιβάλλοντος, τη στάση, τις πεποιθήσεις και την ιδεολογία του, τη γνωστική και φυσική ικανότητα σε μία συντονισμένη και ουσιαστική επιτέλεση, και την μετατρέπει σε μία βιωματική εμπειρία»*

Διαγλωσσικότητα και άλλες κοινωνιογλωσσικές πρακτικές στο παιδαγωγικό πλαίσιο

Μελετώντας την παιδαγωγική της διαγλωσσικότητας μπορεί κανείς να αναγνωρίσει μια σχετική ομοιότητα με άλλες πρακτικές που χρησιμοποιούνται σε

[6] Αναφέρονται στις πρακτικές που ενυπάρχουν μέσα και πέρα από κοινωνικά κατασκευασμένες γλώσσες και εκπαιδευτικές μεθόδους που μυούν την ποικιλία συστημάτων και υποκειμενικοτήτων των μαθητών κατά την κατασκευή νοημάτων (Wei & García, 2017).

[7] Αναφέρεται στη γλωσσικότητα και στην εκπαιδευτική ανάλυση ως εργαλεία κατανόησης, τόσο των γλωσσικών πρακτικών και της εκπαίδευσης, όσο και της ανθρώπινης κοινωνικότητας, της γνώσης και της μάθησης, των κοινωνικών σχέσεων κ.ά. (Wei & García, 2017).

[8] Αναφέρεται στην απελευθέρωση παλαιότερων κατανοήσεων για την παραγωγή νέων γλωσσικών πρακτικών, μεταμορφώνοντας υποκειμενικότητες και δομές (Wei & García, 2017).

δίγλωσσα περιβάλλοντα μάθησης. Στην υποενότητα αυτή επιχειρείται η διασαφήνιση της μεταξύ τους σχέσης βάσει της σύγχρονης βιβλιογραφίας.

Ξεκινώντας με την εναλλαγή κώδικα (code-switching), φαίνεται με μία πρώτη ματιά πως και οι δύο πρακτικές ενστερνίζονται τη χρήση δύο γλωσσών σε μεικτές φράσεις κατά την αλληλεπίδραση στην τάξη. Δεν προκαλούν, λοιπόν, έκπληξη τα ακατάπαυστα ερωτήματα που αναζητούν τη διαφορά των δύο μεθόδων, αλλά και οι κατηγορίες που θέλουν τη διαγλωσσικότητα να συνιστά απλά έναν νέο όρο για μία ήδη υπάρχουσα θεωρία (Lewis et al., 2012· Lin & He, 2017).

Εδώ, πολλοί ειδήμονες της επιστημονικής κοινότητας έρχονται να δώσουν απαντήσεις και να υπερασπίσουν τη νεωτερικότητα της διαγλωσσικότητας. Σε γενικές γραμμές, κάνουν λόγο για επέκταση της τελευταίας πέρα από την παραδοσιακή και στατική έννοια της εναλλαγής κώδικα, ενώ ταυτόχρονα παραδέχονται ότι ως ένα βαθμό την περιλαμβάνει (García, 2009· He et al., 2016).

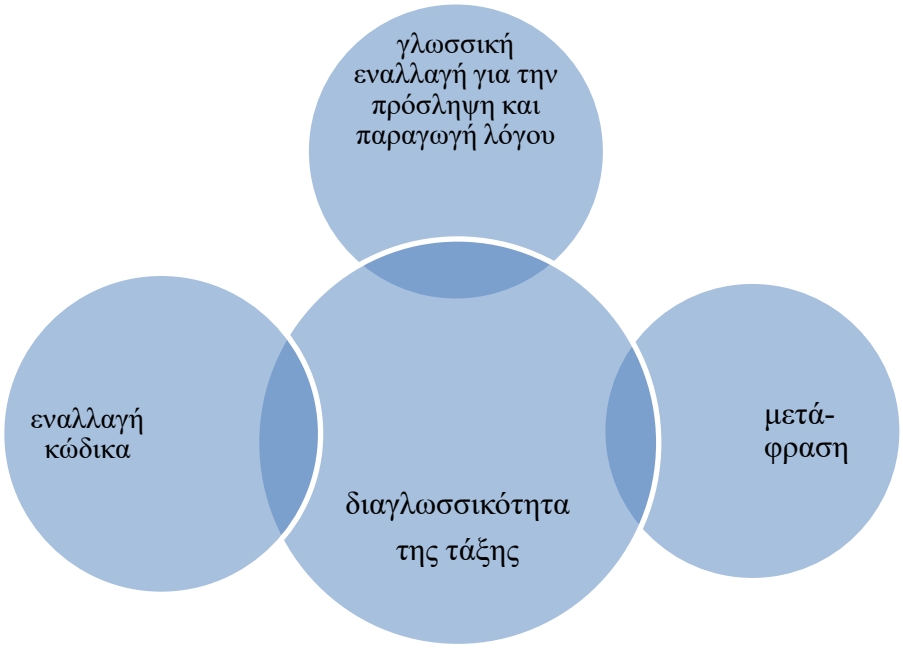
Συγκεκριμένα, υποστηρίζεται συχνά ότι η διαγλωσσικότητα εμπεριέχει την ιδέα της εναλλαγής και συγχώνευσης. Ωστόσο, εκτείνεται πέρα από την πρακτική αυτή και περικλείει «*μια ποικιλία τυπικών δίγλωσσων επικοινωνιακών στρατηγικών*», μεταξύ των οποίων ανήκουν η μετάφραση και άλλες μορφολογικά προερχόμενες διαδικασίες (Nikula & Moore, 2016: 3). Έτσι, μία διαγλωσσική προσέγγιση αποβλέπει στη **διγλωσσία χωρίς διγλωσσικό λειτουργικό διαχωρισμό** (diglossic functional separation) (Creese & Blackledge, 2015), σε αντίθεση με την επιστημολογικά διαφορετική ιδέα της εναλλαγής κώδικα.

Όπως σημειώνουν οι Lasagabaster & García (2014: 558), οι εν λόγω όροι δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται αυθαίρετα ως ισότιμοι. Στην εναλλαγή κώδικα οι δύο γλώσσες λειτουργούν με τη μορφή ξεχωριστών μονόγλωσσων κωδίκων, ενώ *«η διαγλωσσικότητα πιστεύει ότι οι δίγλωσσοι ομιλητές έχουν ένα **μοναδικό γλωσσικό ρεπερτόριο** το οποίο χρησιμοποιούν στρατηγικά για την επιλογή των στοιχείων που επιτρέπουν την αποτελεσματική επικοινωνία»*.

Προχωρώντας στην τεχνική της μετάφρασης (translation), υποστηρίζεται ότι διαφέρει από τη διαγλωσσικότητα. Πρωτίστως, η Probyn (2015) επισημαίνει ότι η μετάφραση στην εκπαίδευση λαμβάνει χώρα προσωρινά και πιθανώς αθέμιτα για μια σύντομη παρέκκλιση από τη μονογλωσσία, αγνοώντας την πολιτική του εκάστοτε σχολείου απέναντι στη διγλωσσία. Αντιθέτως, η διαγλωσσικότητα αποδέχεται τη δίγλωσση πραγματικότητα και ενθαρρύνει την ευέλικτη χρήση γλωσσικών πόρων καθώς και την πολυτροπικότητα (García & Lin, 2016).

Επιπρόσθετα, μία βασική διαφοροποίηση έγκειται στο γεγονός ότι η μετάφραση γίνεται συχνά από την αδύναμη προς την ισχυρή γλώσσα του μαθητή, για την επιβεβαίωση της κατανόησης, περνώντας το μήνυμα ότι η πρώτη προτιμάται σε ακαδημαϊκό επίπεδο συγκριτικά με τη δεύτερη. Από την άλλη, η διαγλωσσικότητα, όπως έχει αναφερθεί, **αξιοποιεί και ενδυναμώνει την ευχέρεια του μαθητή και στις δύο γλώσσες ταυτόχρονα και ισοδύναμα** (Lewis et al., 2012).

Ακόμη, ισχύει πως τόσο η μετάφραση όσο και η εναλλαγή κώδικα θεωρούνται απλά περιστατικά της διαγλωσσικότητας στην εκπαίδευση και μπορεί να επικαλύπτονται, όπως απεικονίζεται στη σχέση τους στο παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 1). Μάλιστα, στην έρευνα των Guzula, McKinney & Tyler (2016), η διαγλωσσικότητα φάνηκε πως λειτούργησε ως αμφίδρομη μετάφραση με παιδαγωγική αξία, μεταβαίνοντας από τη μία γλώσσα στην άλλη, ανάλογα με τη γλώσσα στην οποία δίνονταν οι απαντήσεις των μαθητών.



Σχήμα 1: Περιστατικά της διαγλωσσικότητας της τάξης
Πηγή: Jones (2017)

Όμως, υποστηρίζεται ότι όταν η μετάφραση συνιστά την επικρατούσα στρατηγική στη δίγλωσση εκπαίδευση επηρεάζει αρνητικά την εκμάθηση της γλώσσας-στόχου. Αυτό συμβαίνει γιατί ο μαθητής γνωρίζει τι επακολουθεί κατά τη διδασκαλία και απλά αναμένει παθητικά τη μετάφραση στην ισχυρή του γλώσσα, εγκαταλείποντας την προσπάθεια εκμάθησης της Γ2 (Schwartz & Asli, 2014).

Έπειτα από τη διερεύνηση των παραπάνω σχέσεων κρίνεται αξιοσημείωτο να επισημανθεί πως η διαγλωσσικότητα είναι μία σύγχρονη προσέγγιση που παρουσιάζει ομοιότητες και διαφορές με προηγούμενες πρακτικές. Ωστόσο, ακολουθώντας τους Guzula, McKinney & Tyler (2016: 214), η διαγλωσσικότητα μοιάζει περισσότερο με τις υβριδικές γλωσσικές πρακτικές που η Guitierrez και οι συνεργάτες της (1999) περιέγραψαν ως *«συστηματική, στρατηγική, προσφιλής και ερμηνευτική διαδικασία μεταξύ αυτών που μοιράζονται τον κώδικα, καθώς προσπαθούν να επιτύχουν την αμοιβαία κατανόηση»*.

Πλεονεκτήματα

Ανεξαρτήτως της μορφής διαγλωσσικότητας που εφαρμόζεται, όπως διαπιστώνεται από πολλές μελέτες, τα οφέλη της παραμένουν εξίσου σημαντικά.

Αυτά επικεντρώνονται στον αντίκτυπό της στη μάθηση και κατανόηση των μαθητών, ενώ εκλείπουν διαπιστώσεις που σχετίζονται με τους εκπαιδευτικούς.

Ο Baker (2011) σημειώνει ότι η παιδαγωγική πρακτική της διαγλωσσικότητας συνοδεύεται από τέσσερα πλεονεκτήματα και ότι πρωτίστως προάγει βαθύτερη **κατανόηση του περιεχομένου** του γνωστικού αντικειμένου. Αυτό δύναται να αιτιολογηθεί από το γεγονός ότι οι μαθητές μυούνται σε μία διαδικασία όπου αξιοποιούν τα κατάλληλα χαρακτηριστικά του γλωσσικού και σημειωτικού τους ρεπερτορίου και μαθαίνουν να τα επιλέγουν αυτόνομα. Έτσι, αναπτύσσουν ικανότητες αυτορρύθμισης και βελτιώνουν τα αισθήματα εκτίμησης και αποτελεσματικότητας του εαυτού. Η επιτυχημένη ταυτόχρονη χρήση δύο ή περισσότερων γλωσσών κατά τη μάθηση δηλώνει μια προϋπάρχουσα πολύπλοκη συλλογιστική διεργασία, που ξεκινά από τη σύνδεση λεξιλογικών στοιχείων με τις νοητικές αναπαραστάσεις τους και καταλήγει μετασχηματιστικά στην αφομοίωση, ή - κατά τον Baker (2011) - «χώνεψη» (digestion)[9] (Creese & Blackledge, 2015· García & Lin, 2016· Makalela, 2015· Wei & García, 2017).

Ακόμη, υποστηρίζεται ότι η διαγλωσσικότητα παρέχει πιο άμεσο τρόπο διδασκαλίας απαιτητικού γνωστικά περιεχομένου και ακαδημαϊκής γλώσσας, ενεργοποιώντας τη μάθηση από ποικίλες διαστάσεις παράλληλα με την ανάπτυξη του σκέπτεσθαι (García, 2011). Όπως οι ίδιοι οι μαθητές ανέφεραν σε έρευνα των Lewis et al. (2012), με τη διαγλωσσικότητα μπορούν να απλοποιήσουν τα έργα και να μεταφράσουν για να κατανοήσουν καλύτερα τις ιδέες και το περιεχόμενο.

Δεύτερον, ο ίδιος συγγραφέας εκφράζει την άποψη ότι η διαγλωσσικότητα **ενισχύει την ανάπτυξη ιδιαίτερα της αδύναμης γλώσσας** του μαθητή συγκριτικά με την ισχυρότερη. Το πόρισμα αυτό συνάγεται από την ίδια την ιδιοσυγκρασία της διαγλωσσικότητας και την ισχυρή τοποθέτησή της υπέρ της αναγνώρισης του ρόλου όλων των γλωσσών στην κατάκτηση ενός νοήματος (Makalela, 2015).

Κατά τους Creese & Blackledge (2010), σε μία παιδαγωγική της διαγλωσσικότητας κάθε γλώσσα μεταφέρει ένα διαφορετικό μήνυμα στον δέκτη, όμως μόνο όταν χρησιμοποιηθούν και οι δύο γλώσσες ταυτόχρονα μπορεί η πληροφορία να γίνει πλήρως κατανοητή. Σε έναν τέτοιο **δίγλωσσο διάλογο** (bilingual discourse) κάθε γλώσσα μαθαίνεται και αναπτύσσεται μέσα σε ειδικά κοινωνικά συγκείμενα (Lasagabaster & García, 2014), με αποτέλεσμα οι χρήστες να βελτιώνουν τη δια-γλωσσική τους ευελιξία (cross-linguistic flexibility) και να παρακινούνται να δοκιμάσουν και άλλες γλωσσικές πρακτικές.

---

[9] Η πλήρης τοποθέτηση του Baker (2000: 104-105) παρατίθεται από τους Nikula & Moore (2016): «*Είναι δυνατό σε ένα μονόγλωσσο πλαίσιο οι μαθητές να απαντούν σε ερωτήσεις ή να γράφουν μία έκθεση χωρίς να αντιλαμβάνονται πλήρως το θέμα. Ολόκληρες προτάσεις ή παράγραφοι μπορεί να αντιγράφονται […] χωρίς να έχουν πλήρως κατανοηθεί. Αυτό είναι λιγότερο εύκολο σε μία δίγλωσση περίσταση. Το να διαβάζεις και να συζητάς για ένα θέμα σε μία γλώσσα και μετά να γράφεις για αυτό σε μία άλλη, σημαίνει ότι το θέμα έχει "χωνευτεί" κατάλληλα και έχει επανακατασκευαστεί.*»

Το τρίτο χαρακτηριστικό πλεονέκτημα της διαγλωσσικότητας που καταγράφει ο Baker (2011) έγκειται στην **ενθάρρυνση των δεσμών μεταξύ σχολείου και οικογένειας**. Αυτό συμβαίνει γιατί η διαγλωσσικότητα παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να εφαρμόσουν γλωσσικές πρακτικές της οικογένειας, παρά τη διαφοροποίησή τους από τις τυπικές σχολικές πρακτικές, να εξασκούνται παράλληλα στη γλώσσα του σχολείου και εν τέλει, να αναπτύξουν ακαδημαϊκό λόγο (García, 2011). Στο παρακάτω απόσπασμα από τη συνέντευξη μιας συμμετέχουσας στην έρευνα του Makalela (2015: 209) φαίνεται η άποψή της για αυτή τη σύνδεση*: «Η χρήση περισσότερων από μία γλώσσες στην τάξη με έκανε να σκεφτώ τον τρόπο με τον οποίο σκέφτομαι συνήθως στο σπίτι ή όταν είμαι με τους φίλους μου. Η τάξη μού επέτρεψε να γίνω πραγματικά ο εαυτός μου με το να χρησιμοποιώ πάνω από μία γλώσσα για να μιλήσω για κάτι»*.

Με βάση αυτά, ο ίδιος ερευνητής σχολιάζει ότι οι διαγλωσσικές πρακτικές ενδυναμώνουν την αίσθηση της **πολλαπλής πολιτισμικής ταυτότητας** του ατόμου. Το συμπέρασμα αυτό συνάδει με την άποψη των García & Wei (2014) ότι η διαγλωσσικότητα ως κοινωνική και εκπαιδευτική διαδικασία προσφέρει ανοιχτές οδούς στους μαθητές για την οικοδόμηση και συνεχή επαν-οικοδόμηση των κοινωνικοπολιτισμικών τους ταυτοτήτων και αξιών. Επιτρέποντας στους μαθητές να συμμετάσχουν σε ένα τέτοιο περιβάλλον, αυξάνονται οι πιθανότητες κοινωνικοποίησης, αλληλοαποδοχής και συν-κατασκευής της ταυτότητας με τους συμμαθητές τους (Sayer, 2013). Αυτό επιβεβαιώνεται ερευνητικά από τον Makalela (2015), ο οποίος συμπέρανε πως οι συμμετέχοντες μείωσαν τα πολιτισμικά κενά που τυχόν υπήρχαν μεταξύ των δύο γλωσσών τους, αντιλαμβανόμενοι τις ποικίλες ομοιότητες ορισμένων στοιχείων τους.

Το τέταρτο και τελευταίο θετικό στοιχείο της διαγλωσσικότητας που σημειώνει ο Baker (2011) σχετίζεται με την **ενίσχυση των αναδυόμενων δίγλωσσων μαθητών (emergent bilinguals)** από την αλληλεπίδρασή τους με τους περισσότερο έμπειρους ομιλητές. Άλλωστε, η διαγλωσσικότητα θεωρείται πως είναι εφαρμόσιμη σε οποιοδήποτε στάδιο διγλωσσίας του ατόμου (Lasagabaster & García, 2014). Στην έρευνα των Lopez et al. (2017) έγινε φανερό ότι οι μαθητές της πρώτης περίπτωσης μπορούσαν μέσω της διαγλωσσικότητας να συμμετέχουν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία, καθώς αξιοποιούσαν τους διαθέσιμους πόρους των ρεπερτορίων τους για να παρουσιάσουν την κατεκτημένη γνώση τους στο μαθηματικό περιεχόμενο.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στην πρακτική της διαγλωσσικότητας

Για να τα πετύχει όλα αυτά ο εκπαιδευτικός πρέπει, σύμφωνα με τον Jones (2017), να σχεδιάσει και να προγραμματίσει με λεπτομέρεια και σαφήνεια τη στρατηγική χρήση των δύο γλωσσών. Σε αυτή την ενέργεια οφείλει να λάβει υπόψη του το κοινωνικοπολιτισμικό συγκείμενο που επηρεάζει τα χαρακτηριστικά της διαγλωσσικότητας, όπως ενδοσχολικούς παράγοντες (γλώσσα διδασκαλίας, εκπαίδευση εκπαιδευτικού, δίγλωσση πολιτική του σχολείου, επίπεδο διγλωσσίας/πολυγλωσσίας μαθητών, εκπαιδευτικών και συνεργατών, αξιολόγηση

κ.ά.) και εξωσχολικούς παράγοντες (κοινωνικο-γλωσσολογικό πλαίσιο, γλωσσικό κύρος, ομιλούμενες γλώσσες στην οικογένεια, απόψεις των γονέων για την εκπαίδευση των παιδιών τους κ.ά.).

Ακόμη, οι εκπαιδευτικοί που εφαρμόζουν πρακτικές διαγλωσσικότητας έρχονται αντιμέτωποι με μία πρόκληση: να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ της κατανόησης των μαθητών σε κάθε γλώσσα αλλά και μεταξύ **του καθημερινού και του ακαδημαϊκού λόγου** (Probyn, 2015). Εδώ βρίσκει εφαρμογή η προσέγγιση CLIL, εφοδιάζοντας τον εκπαιδευτικό με πλειάδα δυνατοτήτων και παιδαγωγικών στρατηγικών υποστήριξης των μαθητών σε αυτές τις προσπάθειες.

Ταυτόχρονα, κρίνεται σκόπιμο να αντιλαμβάνονται πως δεν έχουν απόλυτη εξουσία στη λήψη αποφάσεων σχετικά με το περιεχόμενο, τις μεθόδους, τα εμπόδια και τον τρόπο αξιολόγησης της γνωστικής κατάκτησης (Uribe-Flórez et al., 2014). Αντιθέτως, με τη διαγλωσσικότητα παρέχεται στους ίδιους τους μαθητές μία σχετική εξουσιαστική δύναμη στις αλληλεπιδράσεις τους, αναδιαμορφώνοντας τις τυπικές παραδοσιακές δασκαλομαθητικές σχέσεις (Creese & Blackledge, 2015· Makalela, 2015). Αυτό επιτυγχάνεται με την ανάπτυξη ενός **«χώρου διαγλωσσικότητας»** (translanguaging space), όπου τίθενται σε εφαρμογή πολλαπλές σημειωτικές μέθοδοι και μορφές επικοινωνίας για την από κοινού διαπραγμάτευση ενός νοήματος.

Επίλογος

Συμπερασματικά, η διαγλωσσικότητα δεν αποτελεί έναν απλό νεολογισμό, αλλά παρέχει έναν κριτικό αναλυτικό φακό με τον οποίο γίνεται ορατή η λειτουργία των γλωσσών ενός δίγλωσσου ή πολύγλωσσου ατόμου ως ένα ολοκληρωμένο και **ενσωματωμένο σύστημα**, και επιτρέπει την επιλογή πόρων του συνολικού γλωσσικού και σημειωτικού ρεπερτορίου του μαθητή για την αποτελεσματική πολυτροπική επικοινωνία. Έτσι, σε μία τέτοια **«ευέλικτη πολλαπλή προσέγγιση»** (flexible multiple approach) οι μαθητές κατακτούν το μαθησιακό περιεχόμενο με ***υποστηρικτικές δίγλωσσες σκαλωσιές***, μειώνοντας τη γνωστική υπερφόρτωση και τα γνωστικά κόστη που ελλοχεύουν κατά τη μεταφορά της γνώσης από το ένα σύστημα στο άλλο, όταν αυτά δε θεωρούνται ενιαία (Creese & Blackledge, 2015· Hornberger & Link, 2012· Saalbach et al., 2013· Uribe-Flórez et al., 2014).

Αν συμφωνήσουμε με τους Lewis et al. (2012: 667), τότε η ουσιαστική κατανόηση της διαγλωσσικότητας απαιτεί την ύπαρξη *«πλαισίου και όχι μόνο περιεχομένου, γνωστικής και εγκεφαλικής δραστηριότητας και όχι μόνο γλωσσικού κώδικα»* καθώς και συνεχόμενη και όχι μόνο ενδοσχολική λειτουργία. Γι' αυτό, προτείνεται η θεώρηση της διαγλωσσικότητας μέσα από το **«συνεχές του δι-γραμματισμού»** (continua of biliteracy)[10] που περιέγραψε η Hornberger (2008).

[10] Ο διγραμματισμός κατά την Hornberger (1990: 213) προσδιορίζεται ως *«όλα τα περιστατικά στα οποία λαμβάνει χώρα η επικοινωνία σε δύο (ή περισσότερες) γλώσσες στη γραφή ή γύρω από τη γραφή»* (Hornberger & Link, 2012).

3.3 Ανασκόπηση στρατηγικών διδασκαλίας των μαθηματικών σε δίγλωσσους μαθητές

Στην ενότητα αυτή εξετάζονται στρατηγικές των εκπαιδευτικών για την υποστήριξη των δίγλωσσων μαθητών στην κατανόηση και κατάκτηση του μαθηματικού περιεχομένου. Σε αυτές συμπεριλαμβάνονται στρατηγικές που εμπίπτουν στη διδασκαλία με την προσέγγιση CLIL, στρατηγικές διαγλωσσικότητας αλλά και εκμάθησης σε μία μη μητρική γλώσσα γενικότερα. Για την ταξινόμησή τους χρησιμοποιείται ένα τριμερές μοντέλο, που εξυπηρετεί στους σκοπούς της παρούσας εργασίας. Γι' αυτό, πρέπει να σημειωθεί το ενδεχόμενο μη σαφούς διάκρισής τους και πιθανής κατάταξης μιας στρατηγικής σε διαφορετική κατηγορία.

Α. Στρατηγικές γνωστικής ανάπτυξης

Σε αυτήν κατηγορία ανήκουν στρατηγικές που στοχεύουν στην ανάπτυξη των γνωστικών λειτουργιών και δεξιοτήτων των μαθητών κατά την πρόσκτηση και επεξεργασία πληροφοριών.

Βάσει ερευνητικών τεκμηρίων που θέλουν τους μαθητές «μίμους» του δασκαλικού προτύπου, πληθώρα επιστημονικών οδηγών εξαίρουν τη σημασία της **επίδειξης** (modelling) εκ μέρους του εκπαιδευτικού. Στις έρευνες των Meaney et al. (2007α· 2007β· 2009· 2012 κ.ά.) σε δίγλωσσα σχολικά περιβάλλοντα διαπιστώθηκε η εκτενής χρήση της προαναφερόμενης τεχνικής με πολλαπλούς τρόπους. Σε κάθε περίπτωση, απώτερος σκοπός ήταν η γνωστική προετοιμασία των μαθητών, με τα κατάλληλα μοντέλα για την ατομική τους δράση ή εργασία (Doerr & Chandler-Olcott, 2009). Μερικά παραδείγματα στρατηγικών επίδειξης είναι τα εξής:

- ☞ υπόδειξη μιας νέας ιδέας καθώς επεξηγείται από τον εκπαιδευτικό ή τους μαθητές
- ☞ επανάληψη αυτής της ενέργειας από τους μαθητές

(Meaney et al., 2012)

- ☞ επίδειξη μιας δραστηριότητας με ακρίβεια, δίνοντας στους μαθητές ένα παράδειγμα των αναμενόμενων ενεργειών τους

(Bresser et al., 2009α)

- ☞ γραφή λέξεων, συμβόλων ή διαγραμμάτων ως μέρη του διαλόγου που εξελίσσεται στην τάξη (π.χ. σχεδίαση ενός τετραγώνου στον πίνακα για τον εμπλουτισμό των ικανοτήτων των μαθητών στην αναγνώριση και περιγραφή των χαρακτηριστικών του)
- ☞ παρουσίαση ενός γραπτού μαθηματικού κειμένου που αργότερα οι μαθητές καλούνται να αντιγράψουν στα τετράδιά τους

(Meaney, Trinick & Fairhall, 2009)

- ☞ επίδειξη της χρήσης του μαθηματικού λεξικού

(Trinick et al., 2014)

- ☞ επίδειξη της γλώσσας και του λεξιλογίου που είναι επιθυμητό να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές

Στη σφαίρα των στρατηγικών επίδειξης θα μπορούσε κανείς να εντάξει μερικές ακόμα μεθόδους που εφαρμόζονται σε τάξεις με δίγλωσσους μαθητές. Πρόκειται για **τεχνικές προφορικής επικοινωνίας**, που υποστηρίζεται πως ευνοούν τους μαθητές στην ορθή εκμάθηση της γλώσσας παράλληλα με την επικέντρωσή τους στο μαθηματικό περιεχόμενο. Μεταξύ αυτών των μεθόδων ανήκουν η προσαρμογή της ταχύτητας έκφρασης του εκπαιδευτικού, η καθαρότητα της άρθρωσης του λόγου του αλλά και η απόδοση μεγαλύτερης έμφασης σε σημαντικά στοιχεία, μέσω του επιτονισμού και της αυξομείωσης της φωνητικής του έντασης (Bresser et al., 2009α· Garrison & Morra, 1999). Στις ρίζες των παραπάνω τεχνικών συναντώνται θεωρίες που ισχυρίζονται ότι οι μαθητές εν γένει αντιλαμβάνονται το **μαθηματικά σημαντικό περιεχόμενο** παρατηρώντας τα στοιχεία που τονίζονται εμφαντικά και υποδεικνύονται από τα υπόλοιπα μέλη της τάξης (Ikonomou, Kaldrimidou, Sakonidis & Tzekaki, 1999).

Για τις Bresser et al. (2009β) ουσιώδες μέλημα του εκπαιδευτικού οφείλει να αποτελεί η **διατύπωση ερωτήσεων** με τόσο σαφή και ακριβή σχεδιασμό που να δίνει στους μαθητές υπόδειγμα ολοκληρωμένης απάντησης. Στο άρθρο τους καταγράφουν ένα σχετικό παράδειγμα, προτείνοντας την αντικατάσταση της ερώτησης «Τι βλέπετε σε αυτό το γράφημα;» με την ερώτηση «Τι προτιμούν οι περισσότεροι (ή οι λιγότεροι) άνθρωποι σύμφωνα με το γράφημα;». Στην πρώτη περίπτωση οι μαθητές τείνουν να εκφράζουν απαντήσεις του τύπου «Σε πολλά άτομα αρέσει να…», ενώ στη δεύτερη η απάντησή τους δομείται πιο αβίαστα ως εξής: «Οι περισσότεροι άνθρωποι προτιμούν να κολυμπούν» ή «Οι λιγότεροι άνθρωποι προτιμούν να κάνουν ποδήλατο». Έτσι, οι μαθητές που επικοινωνούν στην τάξη μέσω ενός δεύτερου κώδικα οδηγούνται στη χρήση περισσότερο ακαδημαϊκής γλώσσας και σκέψης για την επιχειρηματολογία ή την έκφραση της συλλογιστικής τους και απομακρύνονται από μονολεκτικές ή τυχαίες απαντήσεις.

Η στρατηγική αυτή μοιάζει σε κάποιο βαθμό με το έναυσμα που μπορεί να δώσει ο εκπαιδευτικός στις απαντήσεις των μαθητών (**prompts**), τόσο για την ενεργοποίησή τους όσο και την υπόδειξη ορθού μαθηματικού λόγου. Η εν λόγω τεχνική θεωρείται ένα δυναμικό εργαλείο για τους δίγλωσσους μαθητές, καθώς η ευελιξία της επιτρέπει να εφαρμοσθεί σε μεγάλη γκάμα πλαισίων.

Η αξία της στρατηγικής των ημιτελών φράσεων έγκειται στην κινητοποίηση και πρόκληση που αισθάνονται οι μαθητές κατά τη χρήση τους για την τροποποίηση και βελτίωση του λόγου τους στις αλληλεπιδράσεις τους (Prediger & Wessel, 2013). Παράλληλα, υποστηρίζεται πως συνεισφέρει στην ανάπτυξη του μαθηματικού λεξιλογίου των μαθητών, στην κατανόηση της μαθηματικής σύνταξης και στη σύνδεση συλλογισμών που ενώνονται, απορρίπτονται ή επιβεβαιώνονται μεταξύ τους (Bresser et al., 2009α, 2009β). Οι Celic & Seltzer (2011) προτείνουν τη δημιουργία πολύγλωσσων αφισών με χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων φράσεων που

μπορούν να τοποθετηθούν σε εμφανές σημείο της τάξης ή να δοθούν σε κάθε μαθητή ως γλωσσικό βοήθημα κατά την παραγωγή λόγου.

Η εφαρμογή της εκπαιδευτικής αυτής μεθόδου συναντάται με δύο μορφές: είτε με την παροχή υποστήριξης μόνο κατά την έναρξη μίας απάντησης των μαθητών, είτε με τη χρήση μοντέλων φράσεων με κενά σημεία προς συμπλήρωση. Μάλιστα, εκφράζεται η πεποίθηση ότι τα νύγματα της δεύτερης περίπτωσης προκαλούν γνωστικά τους μαθητές και σχετίζονται με την παραγωγή περισσότερο πολύπλοκων μαθηματικών προτάσεων, συγκριτικά με τον συνηθέστερο απλουστευμένο λόγο τους (Bresser et al., 2009α, 2009β· Meaney et al., 2012).

Κάποια παραδείγματα της πρώτης περίπτωσης που εφαρμόζουν οι εκπαιδευτικοί πολύγλωσσων τάξεων είναι:

- η αναφορά των πρώτων συλλαβών των όρων προς υπενθύμιση και ολοκλήρωση από τους μαθητές
- η συνειδητή έκφραση μιας ημιτελούς πρότασης, με την άμεση ανατροφοδότηση στους μαθητές που την συμπληρώνουν ορθά ή λανθασμένα (π.χ. *«Το βρήκες κάνοντας…», «Είναι πολύγωνο γιατί…», «Πρώτα τοποθέτησες το εξάγωνο στο τραπέζι και μετά…»*)

(Bresser et al., 2009α· Meaney et al., 2012)

Όμοια, κάποια παραδείγματα της δεύτερης περίπτωσης είναι τα ακόλουθα:

- η χρήση απλών προτάσεων με ενδιάμεσα κενά για παροχή νύγματος στους μαθητές με μικρότερα επίπεδα επάρκειας στη γλώσσα διδασκαλίας (π.χ. «*Το …… έχει ……*» αποβλέποντας σε απαντήσεις όπως «*Το τετράγωνο* έχει 4 πλευρές» ή «*Το τρίγωνο έχει 3 πλευρές*»)
- η διαμόρφωση σύνθετων φραστικών μοντέλων όταν ο εκπαιδευτικός απευθύνεται σε μαθητές με μεσαίο ή υψηλό βαθμό επάρκειας στη γλώσσα διδασκαλίας (π.χ. «*Το …… έχει ……, αλλά το …… έχει ……. Και τα δύο έχουν ……*», για την προώθηση σκέψεων όπως «*Το τετράγωνο έχει 2 ζεύγη παράλληλων πλευρών, αλλά το τραπέζιο έχει 1 ζεύγος παράλληλων πλευρών. Και τα δύο έχουν 4 πλευρές.*»)

(Bresser et al., 2009α, 2009β).

Ο εκπαιδευτικός μπορεί ακόμη να εφαρμόσει ποικίλες στρατηγικές υποστήριξης των μαθητών στην κατανόηση του περιεχομένου και της γλωσσικής ποικιλίας των μαθηματικών. Μία αρκετά συχνή στρατηγική είναι η **επανάληψη των όρων** που μελετώνται, είτε από τον εκπαιδευτικό είτε από το σύνολο των μαθητών. Η επανάληψη αυτή πρέπει, βάσει ερευνητικών ισχυρισμών, να πραγματοποιηθεί 7 φορές, έτσι ώστε οι μαθητές να κατακτήσουν τους νέους όρους, με την ορθή προφορά και τα γραμματικο-συντακτικά χαρακτηριστικά τους.

Παρά τις επικρίσεις που δέχεται η τεχνική αυτή, ως έργο χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων, φαίνεται πως πρόκειται κυρίως για ένα μέσο ενεργοποίησης και κινητοποίησης των μαθητών, στη θέση της απλής ακοής και παθητικής παρακολούθησης του εκπαιδευτικού. Πολλοί εκπαιδευτικοί μάλιστα, καλούν τους μαθητές σε επανάληψη ολόκληρων φράσεων που έχουν διατυπωθεί ορθά από άλλα μέλη της τάξης (Bresser et al., 2009α· Meaney et al., 2012· Thornbury, 2002).

Μία άλλη τεχνική που εφαρμόζεται από μεγάλο μέρος εκπαιδευτικών συνιστά η **παράφραση ή επαναδιατύπωση** των ιδεών που εκφράζονται κατά τον μαθηματικό διάλογο. Έτσι, οι δίγλωσσοι μαθητές αποκτούν περισσότερες ευκαιρίες αποσαφήνισης της σκέψης τους και ενδυναμώνουν το νόημα που αποδίδουν στις έννοιες που μελετούν (Bresser et al., 2009α). Κατά τον Bernando (2002), ειδικά η επαναδιατύπωση ενός λεκτικού προβλήματος επιδρά θετικά στην αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών με τη δομή ή την τυχόν ασάφεια του περιεχομένου τους. Αυτό συμβαίνει γιατί με τον τρόπο αυτό το πρόβλημα δομείται σε μικρότερες προτάσεις, με πιο απλή γλώσσα και χωρίς περιττό λεξιλόγιο.

Η επαναδιατύπωση μπορεί να περιλαμβάνει επανάληψη, επέκταση, παράφραση ή αναφορά των λεγόμενων ενός μαθητή, ως ένα μέσο ενορχήστρωσης (orchestration) του μαθηματικού διαλόγου. Η αξία της από την παιδαγωγική οπτική έγκειται στην προώθηση ενός μαθηματικού τρόπου σκέπτεσθαι, στον σεβασμό των ιδεών των μαθητών και στην ενθάρρυνση της μαθηματικής τους φωνής. Ωστόσο, απαιτείται κατάλληλη διαχείριση της μεθόδου εκ μέρους του εκπαιδευτικού, καθώς σε πολλές περιπτώσεις μπορεί **να περιορίσει τον παραγωγικό διάλογο** και την ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών των μαθητών (Franke, Kazemi & Battey, 2007).

Υπό την παρουσία ενός χώρου διαγλωσσικότητας, η επαναδιατύπωση μπορεί πολλές φορές να πραγματοποιηθεί από τους μαθητές σε οποιαδήποτε γλώσσα. Οι έμπειροι δίγλωσσοι μαθητές μπορούν να αναλάβουν τον ρόλο μεταφραστών και ειδημόνων, μεταφέροντας στην υπόλοιπη τάξη τις απόψεις και εμπειρίες που μοιράζονται οι αναδυόμενοι δίγλωσσοι (Celic & Setzer, 2011).

Β. Στρατηγικές κοινωνικο-πολιτισμικού προσανατολισμού

Αυτή η κατηγορία διδακτικών στρατηγικών περιλαμβάνει εκείνες που αποσκοπούν στην κοινωνικο-συναισθηματική ολοκλήρωση των μαθητών και στην αυτονόμηση του τρόπου μάθησής τους για τη διαχείριση των γνώσεων και πληροφοριών με τις οποίες έρχονται σε επαφή.

Μία τέτοια στρατηγική που καταγράφεται στα επιστημονικά κείμενα καλεί τον εκπαιδευτικό να παρουσιάσει το μαθηματικό περιεχόμενο εφιστώντας την αμέριστη προσοχή των μαθητών με κατάλληλες γλωσσικές εκφράσεις-εντολές (**noticing**), όπως «προσέξτε», «αυτό που θα πούμε είναι σημαντικό», «κάτω τα μολύβια, τα μάτια σας σ' εμένα», κ.ά.. Ακολουθώντας αυτή τη στρατηγική, οι μαθητές εξασκούν τόσο τις ικανότητες αυτοσυγκέντρωσής τους, όσο και τις

ακουστικές τους ικανότητες για την εκτέλεση οδηγιών στη Γ2, μέσω νορμών λόγου της τάξης (Bresser et al., 2009α· Meaney et al., 2012· Meaney et al., 2007α).

Πολλοί ερευνητές του φαινομένου της διγλωσσίας ισχυρίζονται ότι οι μαθητές που μαθαίνουν και διδάσκονται σε μία Γ2, συνήθως διστάζουν να εκφράσουν τις σκέψεις τους στην ολομέλεια της τάξης (Garrison & Mora, 1999). Για τον λόγο αυτό, προτείνεται η δαπάνη περισσότερου χρόνου στη **συζήτηση των μαθητών σε μικρές ομάδες**, όπου αποκτούν περισσότερες ευκαιρίες συμμετοχής σε μαθηματικό διάλογο με τους συμμαθητές τους, δίγλωσσους ή μη.

Έτσι, τα παιδιά έχουν τη δυνατότητα να μυούνται ομαλά σε ελεύθερη παρουσίαση των ιδεών τους, πραγματοποιώντας συνεχείς συλλογισμούς και, λαμβάνοντας άμεση ανατροφοδότηση από την ομάδα των συνομηλίκων τους, να εσωτερικεύσουν τις υπόλοιπες απόψεις που εκφράζονται για τις έννοιες (Garrison & Mora, 1999· Kirsner & Bethell, 1992). Ο θετικός αντίκτυπος της ομαδικής συζήτησης φανερώνεται στη μαρτυρία ενός μαθητή στην έρευνα της Tavares (2015): *«Αν απαντούσα στην ερώτηση μόνος μου, θα φοβόμουν πολύ, μήπως κάνω λάθος. Αλλά αφού το συζήτησα με τους συμμαθητές μου, αισθάνομαι πολύ πιο άνετα»*.

Σχετικά με την τοποθέτηση των μαθητών σε ομάδες, όπως υποστηρίζουν οι Celic & Seltzer (2011), απαιτείται στρατηγική σκέψη του εκπαιδευτικού για να ανοίξει έναν **χώρο διαγλωσσικότητας**. Ένας τρόπος διαχωρισμού των μαθητών είναι βάσει της κοινής μητρικής γλώσσας, όπου αναμένεται να αλληλεπιδράσουν μαθητές με διαφορετικό επίπεδο ευχέρειας στη γλώσσα-στόχο. Η συνεργασία σε αυτήν την περίπτωση λειτουργεί ως σκαλωσιά, καθώς αποκτούν τη δυνατότητα ανάπτυξης γλωσσικών ικανοτήτων και στις δύο γλώσσες, μέσα από την επικοινωνία και ανταλλαγή απόψεων. Εναλλακτικά, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δοκιμάσει τη διαμόρφωση ομάδων που περιλαμβάνουν μονόγλωσσους και δίγλωσσους μαθητές, δίνοντας **πολύγλωσσο υλικό** προς διερεύνηση και προβάλλοντας τη διγλωσσία ως προνόμιο, αφού ο μαθητής καλείται να μεταφέρει τη γνώση που απέκτησε στη Γ2 του, προκειμένου να γίνει κατανοητός στους συμμαθητές του.

Η Celic (2009) περιγράφει τον δίγλωσσο διάλογο μαθητών Ε' Δημοτικού κατά τη διάρκεια ανακάλυψης ενός κανόνα για τον υπολογισμό του όγκου του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Στην έρευνα αυτή παρατηρήθηκε ότι στις **γλωσσικά ομοιογενείς ομάδες** μαθητών χρησιμοποιήθηκαν και οι δύο γλώσσες, ενώ στις **ετερογενείς ομάδες** χρησιμοποιήθηκε η Γ2 κατά την ομαδική συζήτηση και η κοινή Γ1 κατά τη συζήτηση των μαθητών ανά δύο.

Η μαθηματική επικοινωνία και ο **μαθηματικός διάλογος**[11], κατά την Moschkovich (2002), είναι ένα πολύ σημαντικό μέσο, όχι μόνο για την παραγωγή

[11] «[Ο μαθηματικός διάλογος είναι] *ένας κοινωνικά αποδεκτός σύνδεσμος μεταξύ τρόπων χρήσης της γλώσσας, άλλων συμβολικών εκφράσεων, πεποιθήσεων, αξιών και δραστηριοποίησης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναγνωρισθεί κάποιος ως μέλος μιας κοινωνικά σημαντικής ομάδας ή «κοινωνικού δικτύου» ή για να σηματοδοτήσει (ότι κάποιος παίζει) έναν κοινωνικά σημαντικό ρόλο*» (Gee, 1996: 131)

λόγου, αλλά και για τη διάδοση μαθηματικών αξιών και πεποιθήσεων. Ο διάλογος μπορεί να είναι μαθηματικός, δηλαδή να περιλαμβάνει διαδικαστικές και εννοιολογικές συζητήσεις για την περιγραφή και αιτιολόγηση μαθηματικών ακολουθιών, ή μη μαθηματικός, δηλαδή να περιλαμβάνει είτε ρυθμιστικό (regulatory) λόγο για τον έλεγχο της συμπεριφοράς των μαθητών είτε πλαισιωμένο λόγο, σχετικά με το συγκείμενο του έργου που εκτελούν (Setati, 2003)[12].

Πολύ συχνά ο γλωσσικός κώδικας του μαθηματικού διαλόγου εναλλάσσεται μεταξύ των ομιλούμενων γλωσσών των μαθητών. Πρόκειται για το φαινόμενο της **εναλλαγής κώδικα (code-switching)**, το οποίο λαμβάνει χώρα φυσικά ή ασυνείδητα και εξυπηρετεί κυρίαρχα σε επικοινωνιακούς σκοπούς (Yamat et al., 2011). Η εναλλαγή κώδικα επιμερίζεται σε δια-προτασιακή (μεταξύ προτάσεων) και σε ενδο-προτασιακή (μεταξύ λέξεων ή φράσεων) (Senyatsi, 2012) και πολλοί ερευνητές την διακρίνουν από την εναλλαγή ή μίξη γλωσσών και τη μίξη κωδίκων (Cantone, 2007). Παρά τις επικρίσεις που έχει δεχθεί, υποστηρίζεται πως αποκτά ιδιαίτερη αξία στην εκμάθηση του μαθηματικού περιεχομένου (Jegede, 2011) γιατί, σύμφωνα με τον Setati (1998) αποτελεί επιπρόσθετη πηγή και δεξιότητα των δίγλωσσων μαθητών, που απαιτεί και ταυτόχρονα αναπτύσσει τη γλωσσική ευχέρεια.

Η εναλλαγή κώδικα, σύμφωνα με τον Sert (2005), μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τον εκπαιδευτικό –σε περίπτωση που είναι γνώστης των γλωσσών των μαθητών- για τη διαμόρφωση φιλικού περιβάλλοντος στη σχολική τάξη και τη θεμελίωση ενότητας και αλληλοϋποστήριξης των μαθητών, ανεξάρτητα από την κουλτούρα στην οποία ανήκουν. Επιπλέον, δύναται να εφαρμοσθεί για ποικίλες σκοπιμότητες, όπως την αποσαφήνιση, επιβεβαίωση ή επέκταση μηνυμάτων, τη μετάφραση ή ακόμη και την προσθήκη χιουμοριστικής διάθεσης στην τυπική διδασκαλία (Senyatsi, 2012).

Γ. Κοινωνιο-γνωστικές στρατηγικές

Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται στρατηγικές εναλλακτικών τρόπων πρόσληψης και ανάκλησης της γνώσης, με βάση το κοινωνικό υπόβαθρο των μαθητών και με σκοπό την ένταξή τους στο περιβάλλον στο οποίο ζουν.

Πολλές από αυτές τις στρατηγικές ανήκουν στο φάσμα της **σκαλωσιάς**. Οι Wood, Brunner & Ross (1979), βασισμένοι στη θεωρία του Vygotsky για τη Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης, πρότειναν την έννοια της σκαλωσιάς (scaffolding) για να περιγράψουν την υποστήριξη που δίνει ένας ενήλικας ή ένα περισσότερο ικανό άτομο σε ένα παιδί για να προχωρήσει στη γνωστική του ανάπτυξη.

Μία λεπτομερής επεξήγηση της σκαλωσιάς σκιαγραφείται από τον Greenfield (1984: 101): «*Η σκαλωσιά είναι μία μεταφορά για την περιγραφή του ιδανικού ρόλου του δασκάλου. […] Όπως είναι γνωστή στην κατασκευή κτιρίων, έχει πέντε χαρακτηριστικά: παρέχει υποστήριξη, λειτουργεί ως εργαλείο, επεκτείνει το εύρος του*

[12] Οι Favilli et al. (2013) συνοψίζουν τα είδη του μαθηματικού διαλόγου μιας σχολικής τάξης σε: διαλογικό, περιγραφικό, επιχειρηματολογικό και ρυθμιστικό-κατευθυντικό λόγο.

εργάτη, [του] επιτρέπει να ολοκληρώσει ένα έργο που δε θα μπορούσε να επιτευχθεί διαφορετικά, και χρησιμοποιείται επιλεκτικά για να [τον] βοηθήσει όπου χρειάζεται»[13].

Η Gibbons (2002) προσάρμοσε τον αρχικό ορισμό της σκαλωσιάς στο ζήτημα της κατάκτησης μιας Γ2. Χρησιμοποιώντας τον όρο «γλωσσική σκαλωσιά» (scaffolding language), περιέγραψε μια προσωρινή και σκόπιμη υποστήριξη που βοηθά το άτομο που μαθαίνει μια Γ2 να κατακτήσει νέες δεξιότητες ή έννοιες και να αναπτύξει νέα επίπεδα κατανόησης (Smit & van Eerde, 2011).

Η αξιοποίηση της σκαλωσιάς στη μαθηματική εκπαίδευση είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη, αφενός γιατί προσφέρει άμεση λύση σε τυχόν προβλήματα που προκύπτουν και αφετέρου γιατί μυεί τους μαθητές στην πρακτική εφαρμογή μεθόδων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στο μέλλον. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής έχει τα κατάλληλα όπλα για να οδηγηθεί στη μαθηματική κατανόηση και στην κατάκτηση της λειτουργικής ποικιλίας της γλώσσας των μαθηματικών έχοντας πλήρη αυτοέλεγχο της γνωστικής διαδικασίας, από τη στιγμή της απομάκρυνσης της βοήθειας του εκπαιδευτικού (Meaney et al., 2012· Othman, 2012). Σύμφωνα με τους Franke et al. (2007: 232), «*οι εκπαιδευτικοί πρέπει να παρέχουν σκαλωσιές, να εποπτεύουν και να διευκολύνουν τον διάλογο γύρω από τις μαθηματικές ιδέες με τρόπους που υποστηρίζεται η μάθηση των μαθητών*».

Μολαταύτα, ερευνητικά πορίσματα δείχνουν ότι **ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται το μεγαλύτερο μέρος του λόγου**, τόσο αναφορικά με το πεδίο όσο και με το μέσο παραγωγής του (Crawford, 1990). Η εξουσιαστική αυτή τάση έχει ως αποτέλεσμα την έλλειψη ή αποτυχία της μεταφοράς του ελέγχου (Meaney et al., 2012), με τους μαθητές να περιορίζονται στην επανάληψη οδηγιών ή την επίδειξη διαδικαστικών γνώσεων και, εν τέλει, να γίνονται παθητικοί δέκτες του μαθηματικού περιεχομένου (Crawford, 1990).

Ακόμη, σχετικά με τη σκαλωσιά, οι Hammond & Gibbons (2005) διέκριναν δύο επίπεδα, το macro και το micro. Στο επίπεδο της **μικρο-σκαλωσιάς** ανήκουν οι στρατηγικές επικοινωνιακής υποστήριξης των μαθητών κατά τη διάρκεια των αλληλεπιδράσεών τους με τον εκπαιδευτικό. Στο επίπεδο της **μακρο-σκαλωσιάς** συμπεριέλαβαν τον σχεδιασμό και τη διευθέτηση μαθησιακών διατάξεων που υλοποιεί ο εκπαιδευτικός πριν την έναρξη της εκάστοτε διδασκαλίας, λαμβάνοντας υπόψη την ετερογένεια των ικανοτήτων των μαθητών (Prediger & Wessel, 2013).

Ένα πολύ σημαντικό βήμα για την παροχή σκαλωσιάς αποτελεί η **διερεύνηση του τρόπου σκέπτεσθαι του μαθητή**. Ο εκπαιδευτικός, δηλαδή, χρειάζεται να απευθύνει στον μαθητή λιγότερο ερωτήσεις απλής ανάκλησης μνήμης και

[13] Ερμηνεύοντας την παραπάνω μεταφορά στο πλαίσιο της μαθησιακής διαδικασίας γίνεται αντιληπτό πως το κτίριο μεταφράζεται ως η γνώση προς απόκτηση, ο εργάτης αντιπροσωπεύει τον μαθητή και η σκαλωσιά λειτουργεί σαν προσωρινή πλατφόρμα στήριξης για την επίτευξη ενός σκοπού. Αντίστοιχα, η απομάκρυνση της σκαλωσιάς από το κτίριο με την ολοκλήρωσή του αναπαριστά τη σταδιακή μείωση της υποστήριξης του εκπαιδευτικού προς τον μαθητή, μεταφέροντας την ευθύνη της μάθησης στον τελευταίο (Meaney et al., 2012· Othman, 2012).

περισσότερο ερωτήσεις που αφορούν στις εσωτερικές του σκέψεις και στις στρατηγικές του. Έτσι, όταν γνωρίσει τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται η μαθηματική σκέψη του μαθητή αλλά και τον βαθμό επίδρασης του γλωσσικού παράγοντα στη μάθησή του, θα μπορεί να τον βοηθήσει πιο αποτελεσματικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής του ευχέρειας (Franke et al., 2007· Musanti, Celedón-Pattichis & Marshall, 2009).

Μία στρατηγική αυτής της κατεύθυνσης που αναφέρεται συχνά ως έναυσμα αφορά στην **ενεργοποίηση των προηγούμενων γνώσεων και δεξιοτήτων των μαθητών και τη συσχέτισή τους με τις νέες ιδέες που μελετώνται**. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να υπενθυμίσει την αφαίρεση στις μονάδες (π.χ. 7-3) για να εισάγει την αφαίρεση στις δεκάδες (π.χ. 70-30), προκειμένου οι μαθητές να παρατηρήσουν τις ομοιότητες και τις διαφορές τους. Με τον τρόπο αυτό, δίνονται στους μαθητές τα εφόδια για την ερμηνεία νέων πληροφοριών, χωρίς να χρειάζεται να τις επαν-οικοδομήσουν, συμβάλλοντας στη διευκόλυνση της μάθησης. Σε συνδυασμό με την εν λόγω στρατηγική, είναι καλό ο εκπαιδευτικός να αξιοποιήσει και το πολιτισμικό ή γλωσσικό υπόβαθρο του μαθητή, παρέχοντάς του τη δυνατότητα να μοιραστεί και να συγκρίνει τις εμπειρίες, τις γνώσεις και τις σκέψεις του με τα υπόλοιπα μέλη της τάξης (Bresser et al., 2009α· Celic & Setzer, 2011· Meaney et al., 2012).

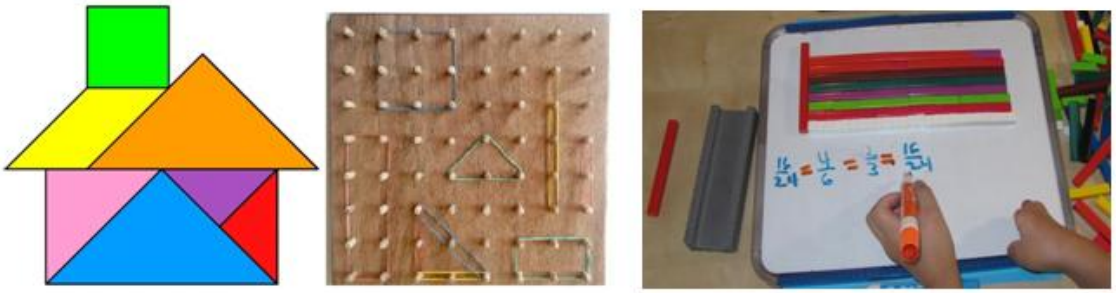
Συνάμα, σε πληθώρα επιστημονικών πηγών εντοπίζεται ποικιλία στρατηγικών **διαχείρισης των λανθασμένων απαντήσεων** των μαθητών. Ένας τρόπος αφορά στη διατύπωση στοχευμένων ερωτήσεων προκειμένου ο μαθητής να φανερώσει το σκεπτικό του και να οδηγηθεί στην **αυτοδιόρθωση**. Για παράδειγμα, ένας εκπαιδευτικός μιας δίγλωσσης τάξης που διαπίστωσε ασυμφωνία μεταξύ προφορικής και γραπτής εξήγησης ενός μαθητή, του παρείχε κατευθυντήριες γραμμές για να επαναδιατυπώσει το γραπτό του κείμενο. Άλλοι εκπαιδευτικοί επέλεγαν να αγνοήσουν τα λάθη ή να γνωστοποιήσουν στους μαθητές ότι πλησιάζουν στη σωστή απάντηση, αναμένοντας να την αντιληφθούν με τη βοήθεια κάποιου συμμαθητή τους (Meaney et al., 2009, 2012).

Για την κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου, εκπαιδευτικοί και ερευνητές συστήνουν, επιπλέον, τη χρήση πολλαπλών **αναπαραστάσεων**, όπως εικόνες, σχήματα, γραφήματα και χειραπτικά υλικά. Εξάλλου, η εκμάθηση νέων εννοιών θεωρείται περισσότερο αποτελεσματική όταν ο μαθητής βρίσκεται σε ένα **πολυαισθητηριακό περιβάλλον**, όπου έχει τη δυνατότητα να δει και να αγγίξει τα συναφή αντικείμενα (Garrison & Mora, 1999).

Γενικότερα, η αξία των αναπαραστάσεων έγκειται στη διευκόλυνση της μετάβασης των μαθητών από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, στην καλλιέργεια ερμηνευτικών και μεταγνωστικών ικανοτήτων καθώς και στη βελτίωση της επίδοσης ή ακόμα και της στάσης τους απέναντι στα μαθηματικά (Johnson, 2000· Vamvakousi & Vosniadou, 2007). Ο εκπαιδευτικός δεν πρέπει να λησμονά ότι, ειδικά **οι**

αναδυόμενοι δίγλωσσοι μαθητές έχουν κατεκτημένες γνώσεις, τις οποίες όμως δυσκολεύονται να μοιραστούν γλωσσικά (Celic & Setzer, 2011).

Ειδικά τα **χειραπτικά αντικείμενα** τροφοδοτούν τους μαθητές με ποικιλία τρόπων κατασκευής φυσικών μοντέλων των αφηρημένων μαθηματικών ιδεών και δημιουργίας εννοιολογικών συνδέσεων μέσα από ευχάριστες διαδικασίες (Hiebert et al., 1997). Ενδεικτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ζάρια ή τραπουλόχαρτα για την έννοια της πιθανότητας, τάνγκραμ ή γεωπίνακες στη γεωμετρία και τις μετρήσεις (εμβαδού, γωνιών κ.ά.), ράβδοι Cuisenaire ή τουβλάκια (Μ-Δ-Ε) για επεξεργασία ιδεών στα κλάσματα, στα ποσοστά ή στους δεκαδικούς αριθμούς.



Εικόνα 1: Τάνγκραμ, γεωπίνακας και ράβδοι Cuisenaire

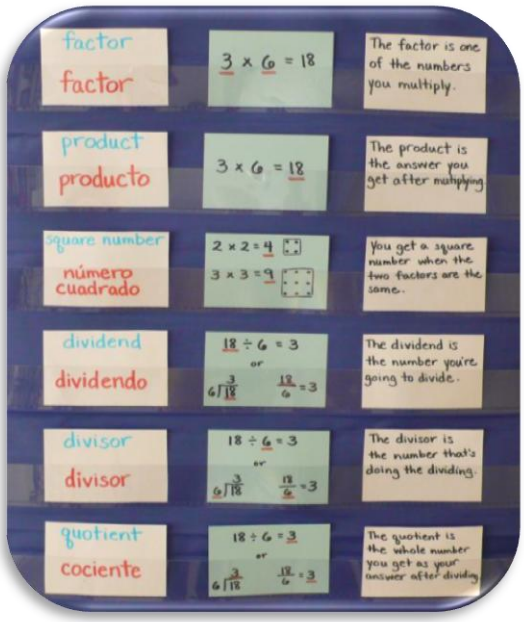
Επιπρόσθετα, αξίζει να σημειωθεί ο ρόλος των διαγραμμάτων (π.χ. διαγράμματα ροής, διαγράμματα Venn, εννοιολογικοί χάρτες κ.λπ.). Συγκεκριμένα, επισημαίνονται συχνά τα πλεονεκτήματα της αναπαραστατικής αυτής μεθόδου, στα οποία συμπεριλαμβάνεται η οργάνωση πληροφοριών για την αποσαφήνιση και ενίσχυση νέων εννοιών (Crandall, 1987), η οπτικοποίηση των μεταξύ τους σχέσεων, βρίσκοντας ακολουθίες, ομοιότητες ή διαφορές (Barton, Heidama & Jordan, 2002) και η επέκταση του μαθηματικού λεξιλογίου (McLaughin & Allen, 2002).

Οι Celic & Seltzer (2011) κάνουν λόγο για τη χρήση διαγραμμάτων που περιγράφουν κανόνες ή εξηγούν τα βήματα μιας διαδικασίας που χρειάζεται να εφαρμόζουν συχνά οι μαθητές. Ακόμη, προτείνουν την ανάρτηση διαγραμμάτων συσχετίσεων και λεξιλογικών χαρτών με τη μορφή των Τεσσάρων Τετραγώνων, ή παραλλαγών τους, έτσι ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να πάρουν πολλές πληροφορίες ταυτόχρονα από τέτοιες αναπαραστάσεις.

Ενδεικτικά, σε αυτά τα γραφήματα μπορεί να συμπεριλαμβάνεται η έννοια, ο μη τεχνικός ορισμός της, τα χαρακτηριστικά της, παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, η οπτική της απεικόνιση καθώς και ο τρόπος χρήσης της σε μία πρόταση. Εδώ, σημειώνεται πως είναι καλό ο εκπαιδευτικός να προετοιμάζεται για τη χρήση όλων των γλωσσών των μαθητών ή να ζητήσει από αυτούς να σχεδιάσουν μόνοι τους ένα διάγραμμα, όπως συνέβη στις μελέτες των Meaney et al. (2007β· 2012), σύμφωνα με τις μαρτυρίες των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν.

Ένα ακόμη ωφέλιμο εργαλείο αυτής της νοοτροπίας αποτελεί ο «τοίχος λέξεων». Η στρατηγική αυτή συναντάται με πολλές μορφές, όπως στην έρευνα των Gebhard, Hafner & Wright (2004), όπου η εκπαιδευτικός διαμόρφωσε έναν «τοίχο μαθηματικών λέξεων» με κεντρικές ιδέες, έννοιες και πράξεις, επιτρέποντας στους μαθητές να τον χρησιμοποιήσουν ως πηγή και «τράπεζα λέξεων» κατά τη διεκπεραίωση έργων.

Οι Celic & Seltzer (2011) προτείνουν τη διαμόρφωση «πολύγλωσσων τοίχων λέξεων», με λέξεις, εικόνες, ορισμούς και παραδείγματα χρήσης τους σε προτάσεις, λεκτικές ή μαθηματικές (Εικ. 2), με διαφορετικό χρώμα γραφής για κάθε γλώσσα. Με τον τρόπο αυτό δίνεται στα παιδιά η δυνατότητα να διαβάζουν, να ακούν και να χρησιμοποιούν ορθά τις έννοιες κατά την παραγωγή γραπτού ή προφορικού λόγου. Επιπρόσθετα, μπορούν να καλλιεργήσουν ακαδημαϊκό λεξιλόγιο και στις δύο γλώσσες, καθώς τις αντιπαραβάλλουν και συγκρίνουν τις ομοιότητες και τις διαφορές τους.



Εικόνα 2: Πολύγλωσσος Τοίχος Μαθηματικών Λέξεων
Πηγή: Celic & Seltzer (2011)

Για παράδειγμα, οι παραπάνω συγγραφείς αναφέρουν την περίπτωση μιας εκπαιδευτικού Δ' Δημοτικού, που δημιούργησε μία τέτοια απεικόνιση κατά τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 2, συμπεριέλαβε τις λέξεις παράγοντας, γινόμενο (ως αποτέλεσμα), τετράγωνος αριθμός, διαιρετέος, διαιρέτης και πηλίκο, για τις οποίες οι ίδιοι οι μαθητές έδωσαν απλούς ορισμούς[14]. Το σημαντικό, βέβαια, είναι πως η εκπαιδευτικός αξιοποιούσε τον «τοίχο λέξεων» με κάθε ευκαιρία, καλώντας τους μαθητές να περιγράψουν όσα έχουν μάθει για τις λέξεις αυτές, ή να τις ανακατέψουν και να τις αντιστοιχίσουν και πάλι.

Λαμβάνοντας υπόψη την πολυσημειωτική αντίληψη των μαθηματικών και τις προτάσεις της διαγλωσσικότητας, είναι αναγκαίο ο εκπαιδευτικός να αξιοποιήσει όλο το γλωσσικό ρεπερτόριο των μαθητών. Αυτό μπορεί να το πετύχει με τη χρήση της **τεχνολογίας** και των ψηφιακών λειτουργιών που παρέχει το διαδίκτυο.

Μία τέτοια πολυτροπική πηγή αποτελούν τα βίντεο ή άλλα πολυμεσικά εργαλεία που αναπαριστούν τις έννοιες ζωντανά και «εν δράσει», σε οποιαδήποτε γλώσσα (π.χ. www.watchknowlearn.com). Γενικά, οι μη γραπτές πηγές θεωρούνται

[14] Οι στρατηγικές που καλούν τους μαθητές να παραθέσουν ορισμούς, να αναφέρουν παραδείγματα και να εξηγήσουν με ακρίβεια τη σκέψη τους παρατηρούνται σε αρκετά μεγάλη συχνότητα (Meaney et al., 2012). Ο Jamison (2000) θεωρεί τη διατύπωση ορισμών μία θεμελιώδη ικανότητα για την επικοινωνία του ατόμου σε τυπικό μαθηματικό περιβάλλον, όπου τείνει να επικρατεί το μοτίβο ορισμός – θεώρημα – απόδειξη. Ο ίδιος, ακολουθώντας την αριστοτελική λογική του ορισμού εννοιών, πιστεύει ότι ένας ολοκληρωμένος ορισμός πρέπει να περιλαμβάνει τις προϋποθέσεις, το γένος και το είδος και να χαρακτηρίζεται από γραμματικά σωστές και σαφείς προτάσεις.

περισσότερο ωφέλιμες για τους αναδυόμενους δίγλωσσους μαθητές που καταβάλλουν συνεχείς προσπάθειες απόκτησης ευχέρειας στις δύο γλώσσες τους.

Εάν ο εκπαιδευτικός δε γνωρίζει τη Γ1 των μαθητών, μπορεί να χρησιμοποιήσει τον παγκόσμιο ιστό για να βοηθήσει τους μαθητές που μαθαίνουν μία Γ2 να κατανοήσουν το μαθηματικό περιεχόμενο. Με μία απλή αναζήτηση εντοπίζει ψηφιακές εφαρμογές (π.χ. Jibbigo) και πληθώρα ιστοσελίδων που προσφέρουν μετάφραση μεταξύ γλωσσών, όπως τα ηλεκτρονικά λεξικά και η μετάφραση Google (Google Translate). Η μετάφραση αυτή μπορεί να αφορά σε λέξεις, προτάσεις ή κείμενα μεγαλύτερης έκτασης, που πληκτρολογεί ο εκπαιδευτικός ή ο μαθητής. Η ενθάρρυνση του πολύγλωσσου περιβάλλοντος κλιμακώνεται με τη χρήση της ηχητικής λειτουργίας, δηλαδή το άκουσμα του μεταφρασμένου κειμένου, συμβάλλοντας στην άμεση συνειδητοποίηση σχέσεων μεταξύ γραπτής και ακουστικής μορφής των λέξεων (Celic & Seltzer, 2011).

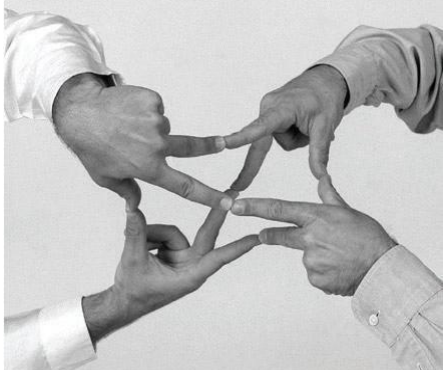
Επίσης, ο εκπαιδευτικός αποκτά τη δυνατότητα αποσαφήνισης του νοήματος του λόγου που ανταλλάσσει με τους μαθητές αναζητώντας οπτικές ενισχύσεις στη Γ1 μέσω των εικόνων Google (Google Images). Ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών, η αναζήτηση εικόνων μπορεί να γίνει από τους ίδιους, γράφοντας λέξεις-κλειδιά που αντιστοιχούν στο περιεχόμενο και περιγράφοντας τις διαφορετικές όψεις μιας έννοιας σε ποικιλία πλαισίων (Celic & Seltzer, 2011).

Ωστόσο, η μαθηματική επικοινωνία δεν αποτελείται μόνο από ομιλία αλλά και από πλειάδα μη λεκτικών ενδείξεων. Συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ενισχύσει τον λόγο του με χειρονομίες, τεχνική που φαίνεται πως βοηθά ιδιαίτερα το δίγλωσσο μαθητικό κοινό στην κατανόηση εννοιών, διαδικασιών, εξηγήσεων, οδηγιών, προβλημάτων και της λειτουργικής ποικιλίας της μαθηματικής γλώσσας.

Εικόνα 3: Μαθητές Α' Δημοτικού σχηματίζουν ένα τετράγωνο χρησιμοποιώντας τα σώματά τους
Πηγή: Meaney et al. (2012)

Επίσης, είναι καλό ο εκπαιδευτικός να δίνει στους μαθητές τη **δυνατότητα σωματικών και όχι μόνο λεκτικών απαντήσεων**, ζητώντας τους για παράδειγμα να δείξουν ένα πολύγωνο, να αγγίξουν τον ζυγό αριθμό ή να σχηματίσουν με τους συμμαθητές τους ένα τετράγωνο (Εικ. 3) (Bresser et al., 2009α).

Ειδικά για τις **χειρονομίες**, ο Dominguez (2005) υποστηρίζει πως συνιστούν τρόπο εκδήλωσης της κατανόησης και της δημιουργίας συνδέσεων, συμπληρώνοντας τον προφορικό λόγο. Μεταξύ των λοιπών πλεονεκτημάτων της χρήσης χειρονομιών στη δίγλωσση μαθηματική τάξη, ο ίδιος επισημαίνει τη μετατροπή αφηρημένων μαθηματικών ιδεών, όπως σύνθετα γεωμετρικά σχήματα, σε συγκεκριμένα μηνύματα, που αποκωδικοποιούνται και οδηγούν στη γνωστική ανάπτυξη. Για την επίτευξη όσων προαναφέρθηκαν, θα ήταν καλό ο εκπαιδευτικός να εντάσσει μαθηματικά έργα που μπορούν να αναπαρασταθούν και απτά υλικά που μπορούν να ενισχύσουν την κατανόηση ποσοτήτων ή ποσοτικών σχέσεων και, φυσικά, να μην αποθαρρύνει την επίλυση προβλημάτων με τον τρόπο αυτό.



Εικόνα 4: Σχηματισμός τετραέδρου με τη χρήση των δαχτύλων
Πηγή: Belcastro & Schaffer (2011)

Σε μεγαλύτερες τάξεις, οι μαθητές μπορούν επίσης να συνεργαστούν μεταξύ τους για να φτιάξουν περισσότερο σύνθετα γεωμετρικά σχήματα ή στερεά, όπως το τετράεδρο που φαίνεται στην Εικόνα 4 (Belcastro & Schaffer, 2011). Με τον τρόπο αυτό, συμμετέχουν σε κιναισθητικές δραστηριότητες, οι οποίες τους βοηθούν στην αναγνώριση, περιγραφή και διάκριση χαρακτηριστικών των γεωμετρικών σχημάτων ή άλλων στοιχείων του μαθηματικού τομέα (Meaney et al., 2012).

Αξιοσημείωτη είναι εδώ η δραστηριότητα των «Χορευτικών Μαθηματικών» (Dancing Mathematics) που επινοήθηκε σε ένα δίγλωσσο σχολείο, με τους μαθητές να υιοθετούν κινήσεις για αριθμούς και σύμβολα για να κάνουν πράξεις ή να λύσουν προβλήματα. Το κίνημα αυτό φάνηκε πως βελτίωσε σημαντικά τη μαθηματική κατανόηση και σκέψη των μαθητών, προσεγγίζοντας το πολιτισμικό τους υπόβαθρο (Meaney et al., 2012). Κατά τους Belcastro & Schaffer (2011), τα Χορευτικά Μαθηματικά επιτρέπουν στους μαθητές την επεξεργασία ιδεών αναφορικά με θεμελιώδεις έννοιες, όπως τον καθρεφτισμό, την περιστροφή, την αντανάκλαση και τη μεταφορά στο πεδίο της συμμετρίας.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να εφαρμόσει πολλές ακόμη γλωσσικές στρατηγικές που είναι χρήσιμο να επισημανθούν. Συγκεκριμένα, μεγάλο ποσοστό παιδαγωγικών και επιστημονικών εγχειριδίων τονίζουν εμφαντικά την **αξιοποίηση της μητρικής γλώσσας του μαθητή** ως πηγή κατανόησης και οργάνωσης της σκέψης του. Μάλιστα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να αναζητήσει κεντρικούς όρους του μαθηματικού λεξιλογίου στη Γ1 των μαθητών, να διαμορφώσει ένα δίγλωσσο λεξικό για το περιεχόμενο του υπό διδασκαλία αντικειμένου και να ενθαρρύνει τους μαθητές με όμοιες γλωσσικές ρίζες να συζητούν προκειμένου να αποσαφηνίσουν έννοιες, οδηγίες ή άλλες πληροφορίες (Gebhard, Hafner & Wright, 2004· Moschkovich, 2002).

Το **δίγλωσσο λεξικό** μπορεί να συμβάλλει στην ανάπτυξη του λεξιλογίου και της κατανόησης των μαθητών στη γλώσσα-στόχο, αρκεί να μη γίνεται κατάχρησή του ως μοναδική στρατηγική εκ μέρους του εκπαιδευτικού. Το εργαλείο αυτό μπορεί να έχει ψηφιακή ή έντυπη μορφή, να περιλαμβάνει εικόνες (δίγλωσσο εικονικό λεξικό)

και να απεικονίζει καθημερινό ή τεχνικό-μαθηματικό λεξιλόγιο. Είναι σημαντικό το λεξιλόγιο που περιλαμβάνει να αφορά σε ιδέες που είναι απολύτως κεντρικές για την κατανόηση και τη μάθηση, ώστε οι μαθητές να μην αποσυγκεντρώνονται από τη συσσώρευση πληροφοριών καθώς αναζητούν λέξεις από τη Γ1 στη Γ2 ή αντίστροφα.

Επιπλέον, ο εκπαιδευτικός θα ήταν καλό να ζητήσει από τους **γονείς** των μαθητών να εμπλακούν στην κοινότητα της τάξης ή του σχολείου. Ο ρόλος των γονέων μπορεί να αφορά σε διερμηνεία ενός κειμένου, ανάλογα με τον βαθμό της διγλωσσικής τους ευχέρειας, σε γραπτή ή μαγνητοφωνημένη μορφή προκειμένου να βοηθήσουν τα παιδιά στις προσπάθειες κατανόησης του περιεχομένου. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της μητέρας μιας μαθήτριας που δίδαξε μερικές λέξεις και εκφράσεις στην αραβική γλώσσα σε όλα τα μέλη μιας πολύγλωσσης τάξης στη Γαλλία. Κατά συνέπεια, όλοι οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με μια νέα γλώσσα που χρησιμοποιεί χαρακτήρες αντί για γράμματα και το κλίμα των διαμαθητικών σχέσεων έγινε περισσότερο οικείο και φιλικό (Celic & Seltzer, 2011).

Ο εκπαιδευτικός, γενικά, χρειάζεται **να γνωστοποιήσει στους μαθητές πως έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν τη Γ1 ή τη Γ2 τους, ή άλλους πόρους του γλωσσικού τους ρεπερτορίου**. Με τον τρόπο αυτό το βελτιώνεται η κατανόηση και καλλιεργείται η ακαδημαϊκή ικανότητα σε όλες τις γλώσσες τους.

Το σύνολο αυτών των στρατηγικών αναγνωρίζει την επίδραση της Γ1 στον τρόπο με τον οποίο το άτομο αντιλαμβάνεται την πραγματικότητα και αξιοποιεί τα σημασιολογικά και γραμματικά χαρακτηριστικά της για να συνδέσει εντυπώσεις και να οργανώσει τα νοητικά σχήματα του περιβάλλοντος (Novotná & Hofmannová, 2000). Με άλλα λόγια, η αξιοποίηση του γλωσσικού και πολιτισμικού κεφαλαίου του μαθητή δύναται να ενισχύσει τη σύνδεση μαθηματικών ιδεών μεταξύ των γλωσσικών συστημάτων του (Halai & Karuka, 2013), διότι ο ίδιος αισθάνεται πιο οικεία και αποκτά ενεργή πρόσβαση στο μαθηματικό περιεχόμενο (Prediger & Wessel, 2013).

Γενικά, οι δίγλωσσοι μαθητές μπορούν να συμβάλλουν στην εμβάθυνση του μαθηματικού διαλόγου, καθώς αναλύουν τα χαρακτηριστικά και τη σημασία μιας έννοιας σε κάθε γλώσσα του ρεπερτορίου τους. Η ανάλυση αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με ποικίλες μεθόδους, όπως τον εντοπισμό συγγενικών ή ομόρριζων, «ψεύτικων φίλων» (βλ. ενότητα 2.2.3) και της προέλευσης ή ετυμολογίας των λέξεων. Σε κάθε περίπτωση, οι λέξεις μπορούν να αναπαριστώνται σε διάγραμμα, όπως αυτό που φαίνεται στον διπλανό δίγλωσσο πίνακα.

English	Spanish
area	area
centimeter	centímetro
kilometer	kilómetro
meter	metro
mile	milla
millimeter	milímetro
yard	yarda

Πίνακας 2: Διάγραμμα Συγγενικών Μαθηματικών Λέξεων
Πηγή: Celic & Seltzer (2011)

Ενδεικτικά, οι μαθητές μπορούν να αναλάβουν τον ρόλο «γλωσσικών ντετέκτιβ» και να διερευνήσουν τον τρόπο και τον λόγο διαφοροποίησης ιδιωματισμών μεταξύ γλωσσών και πολιτισμών. Έτσι, εξερευνούν, ανακαλύπτουν και συνειδητοποιούν πως μία έννοια μπορεί να αποκτά διαφορετική σημασία σε κάθε

γλώσσα, να μην αντιστοιχεί σε κάποια ιδέα στη μία ή να έχει πλήθος συνωνύμων στην άλλη. Η αξία των στρατηγικών αυτής της κατηγορίας έγκειται στην ενίσχυση της κατανόησης όλων των μαθητών, αφού αποκτούν μεταγλωσσική και δια-γλωσσική (cross-linguistic) συνειδητότητα και μαθαίνουν πώς να μαθαίνουν (σε) μία γλώσσα (Celic & Seltzer, 2011· Nikula & Moore, 2016).

Στον τομέα των μαθηματικών, η προαναφερόμενη μέθοδος βρίσκει εφαρμογή στο παράδειγμα των μαθητών μιας τάξης που επιχειρούσαν να μεταφράσουν αλγεβρικές εξισώσεις σε λεκτικά προβλήματα. Η εκπαιδευτικός της εν λόγω τάξης, ζήτησε από τα παιδιά να παρουσιάσουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους αναπαριστώνται μαθηματικές διεργασίες στις μητρικές τους γλώσσες και να τις συγκρίνουν με τις νέες (Celic & Seltzer, 2011).

Στο σημείο αυτό κρίνεται απαραίτητο να επισημανθεί η σημασία των στρατηγικών των εκπαιδευτικών που σχετίζονται με **γραπτά μαθητικά έργα**. Πιο εξειδικευμένα, βρέθηκε πως σε αρχικά στάδια της μαθησιακής διαδικασίας οι εκπαιδευτικοί αναθέτουν στους μαθητές περισσότερο πρόχειρα γραπτά έργα, όπως την εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών, την απλή εφαρμογή μαθηματικών ιδιοτήτων ή την επαναλαμβανόμενη αντιγραφή ψηφίων ή κειμένων. Έπειτα, καθώς οι μαθητές εξερευνούν όψεις των μαθηματικών, καλούνται κατά κανόνα να διεκπεραιώσουν έργα καταγραφής συμπερασμάτων ή ενεργειών που έχουν ληφθεί κατά τη συζήτηση της ολομέλειας της τάξης. Περνώντας στα τελικά στάδια, φαίνεται πως αρκετοί εκπαιδευτικοί αναθέτουν όλο και πιο απαιτητικά έργα, ζητώντας από τους μαθητές να περιγράψουν τις αποκτηθείσες γνώσεις τους περιληπτικά ή σχεδιάζοντας ένα διάγραμμα.

Ο ρόλος, λοιπόν, των γραπτών έργων εντοπίζεται στην ανάδειξη της αναπτυσσόμενης ευχέρειας των μαθητών αναφορικά με τις πτυχές της μαθηματικής επιστήμης ως περιεχομένου ή ως γλωσσικής ποικιλίας, συνάμα με την καλλιέργεια συναισθημάτων αυτονομίας στη μαθησιακή τους πορεία (Meaney et al., 2009, 2012). Η ενθάρρυνσή τους προς αυτό το μονοπάτι είναι βασική για την αποτελεσματικότητα των πρακτικών του εκπαιδευτικού, αφενός γιατί συμβάλλουν στην ανάπτυξη των μεταγνωστικών στρατηγικών των μαθητών και αφετέρου γιατί σηματοδοτούν την επιτυχία της σκαλωσιάς (Walqui, 2000).

Για την υποστήριξη των μαθητών στα γραπτά έργα παρατηρούνται αρκετές προτάσεις της διεθνούς βιβλιογραφίας. Μία πρόταση αφορά στη μέθοδο της **διαδραστικής γραφής** (interactive writing), όπου ο εκπαιδευτικός βοηθά με σκαλωσιές τους μαθητές να συγγράψουν λέξεις ή προτάσεις που είναι αρκετά δύσκολες για αυτούς. Η εν λόγω στρατηγική μπορεί να εφαρμοστεί σε ατομικό ή συλλογικό επίπεδο, με τους μαθητές να συμβάλλουν, ανάλογα με τον βαθμό ευχέρειάς τους, στη συμπλήρωση γραμμάτων, σημείων στίξης καθώς και συχνών και σημαντικών λέξεων που γνωρίζουν ή που πρέπει να γνωρίζουν. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να ζητηθεί από τους μαθητές να τοποθετήσουν λεζάντες σε εικόνες ή

ετικέτες σε ένα διάγραμμα ή τίτλους σε έναν πίνακα και άλλες μορφές αναπαραστάσεων (Celic & Setzer, 2011).

Επιπλέον, συνιστάται η παροχή της δυνατότητας γραφής στη μητρική ή γενικότερα στην ισχυρή γλώσσα των μαθητών, προκειμένου να αναδειχθούν οι γνωστικές τους ικανότητες και να αποφευχθεί η αποθάρρυνση της έκφρασης των σκέψεών τους. Σε συνδυασμό με αυτό είναι καλό οι μαθητές να αναπτύξουν δεξιότητες γραφής σε ποικίλα είδη, μη παραδοσιακά, αποβλέποντας στη σφαιρική αντίληψη και κατανόηση μιας ιδέας. Αξιοσημείωτο είναι εδώ το παράδειγμα μιας «μαθηματικής σκηνής» που δημιούργησαν οι μαθητές μιας τάξης, μετατρέποντας τα στάδια επίλυσης ενός σύνθετου προβλήματος σε θεατρικό διάλογο με τους συμμαθητές τους, ο οποίος περιελάμβανε -μεταξύ άλλων- συνθήκες διαπραγμάτευσης, συμφωνίας ή διαφωνίας και επιχειρηματολογίας (Celic & Setzer, 2011).

Βέβαια, δεν πρέπει να λησμονηθεί η σημασία της **πλαισίωσης** του μαθηματικού περιεχομένου σε μία σχολική τάξη με δίγλωσσα ή πολύγλωσσα παιδιά. Αναλυτικότερα, η παροχή ενός πλαισίου σε μία προβληματική μαθηματική κατάσταση είναι σπουδαίος αρωγός, αρχικά για την κατανόησή της και μετέπειτα για τον έλεγχο της ορθολογικότητας της απάντησης. Ειδικά κατά τη διδασκαλία νέων εννοιών κρίνεται σκόπιμο να λαμβάνεται υπόψη, όχι μόνο ο παράγοντας των κοινωνικο-πολιτισμικών εμπειριών του μαθητή, αλλά και του υποβάθρου ανάπτυξης και διαμόρφωσης των εννοιών αυτών (Garrison & Mora, 1999· Meaney et al., 2012).

Εφόσον οι έννοιες αποτελούν το κέντρο περιστροφής της μάθησης, δίνεται στους δίγλωσσους μαθητές αφθονία δυνατοτήτων επεξεργασίας τους μέσα στο κατάλληλο πλαίσιο (Gibbons, 2002). Παράλληλα, οι ίδιοι μπορούν να αποκτήσουν έλεγχο της εναλλαγής μεταξύ επίσημης και ανεπίσημης χρήσης της γλώσσας, υπό την έννοια της γλωσσικής ποικιλίας (Celic & Setzer, 2011).

Τέλος, η Herbel-Eisenmann (2002) προτείνει την ενσωμάτωση μίας **γλώσσας-γέφυρας** για τους δίγλωσσους μαθητές, η οποία τοποθετείται μεταξύ της λειτουργικής ποικιλίας της επίσημης μαθηματικής γλώσσας και της πλαισιωμένης γλώσσας. Η γλώσσα αυτή συνδέεται στενά με το πνεύμα της διαγλωσσικότητας, δίνοντας στους μαθητές τη δυνατότητα αξιοποίησης όλων των διαθέσιμων πόρων του ρεπερτορίου τους για να επικοινωνήσουν, να αλληλεπιδράσουν και να μάθουν.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

4. Μεθοδολογία

4.1 Σκοπός

Όπως διαπιστώνεται από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε στο θεωρητικό μέρος της εργασίας, τα περισσότερα παιδιά που μαθαίνουν και διδάσκονται μαθηματικά σε μία Γ2 αντιμετωπίζουν επιπρόσθετες δυσκολίες στη μαθηματική κατανόηση. Έτσι, σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση αποτελεσματικών προσεγγίσεων για την υποστήριξη των μαθητών αυτών στην κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου, όταν ο εκπαιδευτικός δεν έχει γνώση της μητρικής τους γλώσσας.

4.2 Μέθοδος

Για την υλοποίηση της έρευνας επιλέχθηκαν ποιοτικές μέθοδοι, καθώς οδηγούν στην ανάδειξη νοημάτων της κοινωνικής δραστηριότητας των ατόμων σε δεδομένες χωροχρονικές συνθήκες (Σταθοπούλου, 2005). Επιπλέον, η έρευνα αυτή, όπως κάθε ποιοτικό νατουραλιστικό μοντέλο, αποβλέπει στην ανακάλυψη πτυχών της πραγματικότητας που συνεισφέρουν στην εκπαιδευτική γνώση και πολιτική (Merriam, 1988). Γενικά, η ποιοτική μέθοδος προτιμάται για την περιγραφή και ανάλυση ζητημάτων που σχετίζονται με κοινωνικά ή προσωπικά βιώματα, που δεν μπορούν να εξηγηθούν με αριθμούς και στατιστικές αναλύσεις ποσοτικών μεθόδων.

Αφενός, η έρευνα αντλεί στοιχεία από τη μικρο-εθνογραφία, γιατί παρέχει στην έρευνα τον κατάλληλο φακό για την ολιστική αποτύπωση μιας πραγματικότητας, μέσα από την περιγραφή, κατανόηση και εξήγηση συγκεκριμένων περιστάσεων που λαμβάνουν χώρα σε ένα πεδίο. Τέτοιες περιστάσεις μπορεί να είναι ο τρόπος σκέψης και αλληλεπίδρασης των μελών μιας κοινωνικής ομάδας, οι εμπειρίες των μελών της, οι διαμαθητικές ή δασκαλομαθητικές σχέσεις και οι δραστηριότητες ή τα διδακτικά-μαθησιακά μοτίβα που εφαρμόζονται (Goetz & LeCompte, 1984· Σταθοπούλου, 2005).

Ένας από τους κυριότερους λόγους επιλογής της εθνογραφικής μεθόδου είναι πως δεν υπαγορεύει καθορισμένο τρόπο συλλογής και ανάλυσης δεδομένων. Ως επί το πλείστον, η χρήση της γίνεται για την προσέγγιση μιας πραγματικότητας που δε θα μπορούσε να γίνει με άλλες ερευνητικές μεθοδολογίες (Κοταρίνου, 2014).

Αφετέρου, η παρούσα έρευνα διατηρεί κοινό προσανατολισμό με την έρευνα-δράση, ο οποίος έγκειται στην εφαρμογή, διερεύνηση και βελτίωση εκπαιδευτικών πρακτικών. Γι' αυτό, αξιοποιούνται στοιχεία της μεθόδου, όπως η πρόκληση της σπείρας του αυτο-στοχασμού, μέσω του σχεδιασμού και κριτικού επανασχεδιασμού στρατηγικών δράσεων για τη βελτίωσή τους. Πιο εστιασμένα, γίνεται προσπάθεια εντοπισμού, ερμηνείας και επίλυσης προβλημάτων, χωρίς να ακολουθούνται προϋπάρχοντα ειδικά σχεδιασμένα μοντέλα (Herr & Anderson, 2005· White, 2004).

4.3 Ερευνητικό Πρόβλημα και Ερευνητικά Ερωτήματα

Το Ερευνητικό Πρόβλημα της παρούσας έρευνας προκύπτει από την αναγκαιότητα των εκπαιδευτικών να εντοπίσουν και να εφαρμόσουν κατάλληλες μεθόδους προκειμένου να συμβάλλουν στην αντιμετώπιση των υπαρκτών δυσκολιών των δίγλωσσων μαθητών στη μαθηματική κατανόηση. Συνεπώς, το πρόβλημα αυτό αφορά στη διερεύνηση του τρόπου χρήσης εναλλακτικών προσεγγίσεων και στρατηγικών εκ μέρους του εκπαιδευτικού για την υποστήριξη δίγλωσσων ή αναδυόμενων δίγλωσσων μαθητών στην κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου. Κατ' ακολουθίαν, τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας διαρθρώνονται ως εξής:

Ε.Ε.1: Με ποιους τρόπους μπορούν να αξιοποιηθούν οι πόροι γνώσης των δίγλωσσων μαθητών για την οικοδόμηση νέας γνώσης σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο;

Ε.Ε.2: Ποιες γνωστικές, κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνιο-γνωστικές στρατηγικές μπορούν να αξιοποιηθούν από τον εκπαιδευτικό στη διαμόρφωση ενός χώρου διαγλωσσικότητας για τους δίγλωσσους μαθητές;

4.4 Πεδίο της έρευνας (fieldwork)

Η έρευνα διεξήχθη σε έναν προσφυγικό καταυλισμό ημιαστικής περιοχής της Θεσσαλονίκης κατά τη διάρκεια της θερινής σχολικής περιόδου. Συγκεκριμένα, διακρίθηκαν δύο χρονικές φάσεις της έρευνας: η 1^{η} φάση διήρκησε περίπου 15 διδακτικές ώρες και περιελάμβανε την πιλοτική διερεύνηση των συνθηκών και των ζητημάτων, ενώ η 2^{η} φάση διήρκησε περίπου 30 διδακτικές ώρες και περιελάμβανε την επίσημη μελέτη και καταγραφή των γεγονότων που παρουσιάζονταν. Η εκπαίδευση των προσφύγων στην περίοδο αυτή έλαβε χώρα σε έναν ενιαίο χώρο, διαμορφωμένο με κατάλληλο σχολικό εξοπλισμό και με αναρτημένα δείγματα της εργασίας τους κατά τη διάρκεια του προηγούμενου ακαδημαϊκού έτους.

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από πρόσφυγες και μετανάστες μαθητές χωρών της Μέσης Ανατολής (Συρία, Αφγανιστάν) που βρέθηκαν στη συγκεκριμένη δομή φιλοξενίας και μετεγκατάστασης κατά τη διάρκεια των μεγάλων κυμάτων εισροών προς την Ελλάδα. Πιο εξειδικευμένα, πρόκειται για παιδιά σχολικής ηλικίας (8-12 ετών) που απομακρύνθηκαν από τον τόπο καταγωγής τους εκούσια ή ακούσια, όμως επέλεξαν να παρακολουθήσουν το σχολικό πρόγραμμα κατά τους θερινούς μήνες του χρόνου.

Κατά την παραμονή της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού στο συγκεκριμένο πεδίο συλλέχθηκαν προσωπικές πληροφορίες και βιώματα των μαθητών μέσα από τη συζήτηση μαζί τους. Αρχικά, ως προς τα κοινωνικά χαρακτηριστικά τους, προέρχονται συνήθως από πολυμελείς οικογένειες, αγροτικών ή μικρο-μεσοαστικών στρωμάτων, με ελαφρά υπεροχή του αρσενικού πληθυσμού έναντι του γυναικείου φύλου. Ακόμη, διαπιστώθηκε η ευαισθησία τους απέναντι σε θέματα πατρίδας, θρησκείας και οικογένειας, βάζοντας προτεραιότητα στην κουλτούρα, στα ήθη και στις παραδόσεις. Για παράδειγμα, τα περισσότερα παιδιά διατηρούσαν στενές

αδελφικές σχέσεις και προστατευτικό ρόλο απέναντι στα μέλη της οικογένειάς τους, ιδιαίτερα στα ηλικιακά μικρότερα. Επιπλέον, το σύνολο του μαθητικού αυτού δείγματος ασπάζεται τη μουσουλμανική θρησκεία και δεν παραλείπει να συμμετάσχει σε οικογενειακές ή μαζικές θρησκευτικές εκδηλώσεις (π.χ. Κουρμπάν Μπαϊράμ) στη νέα χώρα κατοίκησης.

Ένα ακόμη στοιχείο που χαρακτήρισε το δείγμα αφορά σε αρνητισμό και δυσαρέσκεια σχετικά με το «σπίτι» και τη «θάλασσα». Συγκεκριμένα, τα παιδιά απέφευγαν να μιλούν για την προηγούμενη κατοικία τους και δυσαρεστούνταν όταν κάποιο αντικείμενο του περιβάλλοντος τους θύμιζε τις ανέσεις που είχαν στη χώρα καταγωγής τους, όπως κατάλληλο ρουχισμό, σχολικά είδη, χρήματα και μέσα μεταφοράς. Από τα τελευταία, περισσότερο αρνητικά συναισθήματα φάνηκε πως προκαλούν τα καράβια, ίσως επειδή τα παιδιά αναγκάστηκαν να τα χρησιμοποιήσουν για να διασχίσουν μια μεγάλη επικίνδυνη απόσταση που τους απομάκρυνε από την πατρίδα τους και ήταν η αιτία αποχωρισμού ορισμένων μελών της οικογένειάς τους, όπως σε μία παιδική ζωγραφιά που βρέθηκε στον σχολικό χώρο.

Τα γλωσσικά στοιχεία που συγκεντρώθηκαν για τους μαθητές αυτούς μαρτυρούν την ύπαρξη δύο κυρίαρχων γλωσσών, των αραβικών και των περσικών (τυπικά λεγόμενα φαρσί), με τα τελευταία να διακρίνονται και σε επιμέρους διαλέκτους σύμφωνα με τη γεωγραφική περιοχή στην οποία κατοικούσαν οι μαθητές (χωρίς να εμποδίζουν την μεταξύ τους επικοινωνία). Η σχέση των δύο αυτών γλωσσών μοιάζει συγγενική έως όμοια για έναν ομιλητή διαφορετικής γλώσσας. Είναι γεγονός ότι η περσική γλώσσα στηρίζεται στην αραβική, όμως περιλαμβάνει επιπλέον γράμματα και φθόγγους, με επιρροές από ινδοευρωπαϊκές και ιδίως αγγλικές ρίζες. Αυτό σημαίνει ότι ένας ομιλητής της αραβικής γλώσσας δε μπορεί να συνομιλήσει με έναν ομιλητή της περσικής γλώσσας, παρά μόνο εάν είναι γνώστης ορισμένων χαρακτηριστικών της ή δίνεται το κατάλληλο συγκείμενο.

Ακόμη, ιδιαίτερα φανερή είναι η διαφοροποίηση του γλωσσικού επιπέδου των μαθητών στην ελληνική (γλώσσα-στόχος) και στην αγγλική γλώσσα (διαμεσολαβητική μεταφραστική γλώσσα). Αυτό συνέβη γιατί μέρος του δείγματος προερχόταν από καταυλισμούς που δεν προσέφεραν γλωσσική διδασκαλία ή την προσέφεραν για πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Έτσι, εντοπίστηκαν πολλοί αναδυόμενοι δίγλωσσοι μαθητές με χαμηλό ή μέτριο επίπεδο ελληνικής γλώσσας (Γ2) και μερικοί δίγλωσσοι μαθητές με αρκετά καλό επίπεδο.

Η πλειονότητα του πρώτου υποσυνόλου μαθητών φάνηκε πως είχε μεγαλύτερο βαθμό πρόσληψης και κατανόησης προφορικού λόγου στη Γ2 ή στην αγγλική γλώσσα, συγκριτικά με την χαμηλή έως σπάνια παραγωγή γραπτού ή προφορικού λόγου. Τα παιδιά αυτά προτιμούσαν να χρησιμοποιούν την Γ1 τους, συνοδευομένη με ποικίλες σημειωτικές πηγές που είχαν στη διάθεσή τους για να μεταδώσουν ένα μήνυμα σε ένα άτομο που δεν είχε γνώση αυτής της γλώσσας. Στο δεύτερο μαθητικό υποσύνολο που προαναφέρθηκε ανήκουν παιδιά με αρκετά καλές

ικανότητες πρόσληψης, κατανόησης και παραγωγής προφορικού λόγου, ενώ σημείωναν περισσότερες ελλείψεις στις αντίστοιχες ικανότητες του γραπτού λόγου.

Σχετικά με την αγγλική γλώσσα, φαίνεται πως ομιλείται περισσότερο από τα παιδιά που κατάγονται από το Αφγανιστάν, πιθανώς λόγω της γλωσσικής συγγένειας, ενώ σε χαμηλότερο έως καθόλου βαθμό από τα περισσότερα παιδιά της Συρίας ή άλλων χωρών με επίσημη την αραβική. Γι' αυτό η αγγλική γλώσσα χρησιμοποιήθηκε διαμεσολαβητικά και όσο το δυνατόν απλούστερα, αφού αποτελούσε τον μόνο κοινό γλωσσικό κώδικα επικοινωνίας με τα περισσότερα παιδιά.

4.5 Ρόλος ερευνητή

Ο ρόλος της ερευνήτριας σε όλη τη διάρκεια της παρουσίας της ήταν αυτός της εκπαιδευτικού του προσφυγικού πληθυσμού. Συγκεκριμένα, αναλάμβανε την υποστήριξη της μάθησης ομάδων ή μεμονωμένων περιπτώσεων μαθητών σε μαθήματα ελληνικής ή αγγλικής γλώσσας, μαθηματικών ή άλλων γνωστικών αντικειμένων, σύμφωνα με τις ανάγκες και τις προτιμήσεις τους.

Ωστόσο, ο ρόλος της ως εθνογράφου ήταν αυτός του συμμετοχικού παρατηρητή που λειτουργεί ως ανθρώπινο εργαλείο για τη συλλογή δεδομένων. Επιπλέον, ο ρόλος αυτός ήταν περισσότερο παθητικός και διακριτικός στην 1η φάση, αποσκοπώντας κυρίαρχα στην εξοικείωση με το περιβάλλον, στη γνωριμία και επαφή με την κουλτούρα των μαθητών και στη σύναψη καλών διαπροσωπικών σχέσεων μαζί τους. Στη 2η φάση, ο ρόλος αυτός εξελίχθηκε σε «μεθοδολογικά παμφάγος» και παρεμβατικός σε οποιαδήποτε ευκαιρία δινόταν για τη συγκέντρωση δεδομένων γύρω από τα κεντρικά ζητήματα της έρευνας (Cohen, Manion & Morrison, 2008).

Γενικά, ακολουθώντας το πρότυπο της ποιοτικής έρευνας, έγινε προσπάθεια προσέγγισης του φαινομένου «ανοιχτά» για τη σύλληψη πολλαπλών στοιχείων της κοινωνικής σκηνής. Αρχικά, η εθνογράφος επιδίωξε να γίνει αποδεκτό μέλος της προσφυγικής κοινότητας, προκειμένου να κατορθώσει να συγκεντρώσει πληροφορίες για τη ρουτίνα των μελών της, να αποσπάσει προσωπικά τους διηγήματα ή εμπειρίες και να εξερευνήσει τη συμπεριφορά και τον τρόπο σκέψης τους. Ακόμη, στις σημειώσεις πεδίου που καταγράφονταν επιχειρήθηκε η ενσωμάτωση συναισθημάτων και εκφράσεων των παιδιών, βάσει της στάσης τους και της τονικής διάθεσης του λόγου τους, αποφεύγοντας ταυτόχρονα την παραγωγή κοινωνικών και πολιτισμικών στερεοτύπων (Κοταρίνου, 2014· Σταθοπούλου, 2005).

Ειδικότερα, στο πλαίσιο της έρευνας-δράσης ο ρόλος της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού ήταν η διαλεκτική διερεύνηση θεωρίας και πράξης μέσα από υποθέσεις, δοκιμές, ελέγχους και συμπεράσματα σε μια μη γραμμική και πεπερασμένη ερευνητική μεθοδολογία. Ως θεμελιώδες εργαλείο της έρευνας, οδηγούνταν σε συνεχή οργάνωση και αναδιοργάνωση ιδεών, ώστε να προκύψει η παραγωγή θεωρίας επαγωγικά Τέλος, κλήθηκε να δράσει ως υποκείμενο με συνειδητότητα για να προβεί σε αυτοκριτική, αυτοδιόρθωση και αυτοβελτίωση, αλλά

και με υπευθυνότητα απέναντι στο έργο που συνθέτει και στη συμβολή του στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών (Burgess, 1995· Σταθοπούλου, 2005).

4.6 Μέθοδοι συλλογής δεδομένων

Τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ποικίλα, καθώς κρίθηκε απαραίτητη η συγκέντρωση όσο το δυνατόν περισσότερων πληροφοριών. Ένα εργαλείο ήταν οι παρατηρήσεις, που καταγράφονταν ως σημειώσεις πεδίου, εστιάζοντας σε κομβικά και κρίσιμα γεγονότα του περιβάλλοντος χώρου, των αλληλεπιδράσεων εκπαιδευτικού-μαθητών αλλά και των μαθητών μεταξύ τους. Επιπλέον, συλλέχθηκαν τα τεκμήρια των μαθητών (artifacts) και λήφθηκαν μερικές εικόνες από τις δράσεις ή τα έργα τους, όπως για παράδειγμα κατά τη χρήση χειραπτικού υλικού ή τη δημιουργία σχημάτων με τα σώματα και τα χέρια τους.

Τα δύο προηγούμενα εργαλεία συνέβαλαν συνδυαστικά στη σύνταξη των καθημερινών αναφορών των γεγονότων που έλαβαν χώρα στο σχολείο του καταυλισμού, οι οποίες αποτελούν το πραγματολογικό υλικό. Ως προς τα χαρακτηριστικά των αναφορών αυτών, διακρίνονται από ανεπισημότητα, ανωνυμία και αποφυγή καταγραφής θεωρητικών συμπερασμάτων.

Σαφώς, ένα κατάλληλο εργαλείο για την αποτύπωση της εν μελέτη πραγματικότητας θα ήταν η μαγνητοφώνηση ή βιντεοσκόπηση. Όμως, πρακτικές δυσκολίες, όπως η διαμόρφωση του σχολικού χώρου με «τάξεις χωρίς τοίχους» και η κινητικότητα τόσο της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού, όσο και των μαθητών δεν επέτρεπαν εκ των πραγμάτων τη συλλογή δεδομένων με αυτούς τους τρόπους.

4.7 Λειτουργικοί Ορισμοί

Για την προσέγγιση του προβλήματος και των ερωτημάτων της έρευνας είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός των κυριότερων εννοιών και ιδεών τους.

Ως στρατηγική, επομένως, στη συγκεκριμένη εργασία θεωρείται κάθε διδακτική προσέγγιση με συγκεκριμένο διδακτικό και μαθησιακό στόχο, η πορεία εφαρμογής της οποίας μπορεί να διαφέρει για κάθε μαθητή.

Ο λειτουργικός ορισμός της διαγλωσσικότητας που παρατίθεται βασίζεται στις απόψεις των García & Wei (2015) και Lasagabaster & García (2014). Έτσι, λοιπόν, ως διαγλωσσικότητα λαμβάνεται κάθε γλωσσική και σημειωτική πηγή που χρησιμοποιείται στην επικοινωνία εκπαιδευτικού-μαθητών ή των μαθητών μεταξύ τους για τη μετάδοση σαφών μηνυμάτων. Κατ’ επέκταση, ο χώρος διαγλωσσικότητας θεωρείται ότι δημιουργείται όταν η χρήση αυτών των πηγών νομιμοποιείται, γίνεται αποδεκτή και προκύπτει ως αυθόρμητη δίγλωσση συμπεριφορά.

4.8 Εμπόδια/Περιορισμοί της έρευνας

Η έρευνα αυτή βρέθηκε αντιμέτωπη με ποικίλα εμπόδια κατά τη διεξαγωγή της. Αρχικά, στην 1η φάση διαπιστώθηκε η αδυναμία ύπαρξης ενός ελεγχόμενου

περιβάλλοντος, καθώς τα παιδιά παρίστανται στο σχολείο με δική τους βούληση. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μέρα διαφορετικά παιδιά έρχονταν στο σχολείο, διαφορετικές ώρες και με διαφορετικές ανάγκες. Έτσι, η πλήρης οργάνωση σχεδίων μαθημάτων και η γνωριμία κάθε παιδιού ήταν αδύνατη. Σε αυτό αξίζει να προστεθεί η διαφοροποίηση των αναγκών συνεισφοράς του εκπαιδευτικού προσωπικού σε καθημερινή βάση, εξαιτίας μη προγραμματισμένων δράσεων των Μ.Κ.Ο. ή άλλων ιθυνόντων, για μαθήματα αγγλικών, μητρικής γλώσσας ή για περίοδο ελεύθερου παιχνιδιού και κατασκευών.

Επιπροσθέτως, η διαμόρφωση του σχολικού κτιρίου σε έναν ενιαίο χώρο, με «ανοιχτές αίθουσες» και μη διαχωριζόμενα τμήματα, απέκλεισε τη δυνατότητα συλλογής δεδομένων με άλλες μεθόδους καταγραφής, όπως μαγνητοφώνηση ή βιντεοσκόπηση. Αυτό αποδείχθηκε σε προσπάθειες απομαγνητοφώνησης ορισμένων περιστάσεων επικοινωνίας της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού με τους μαθητές, όπου ο ουσιαστικός λόγος διακρίνεται με μεγάλη δυσκολία, εξαιτίας των ηχητικών παρεμβολών.

Για την αντιμετώπιση αυτών των περιορισμών έγινε προσπάθεια όσο το δυνατόν πιο άμεσης και πλήρους καταγραφής των γεγονότων που συνέβαιναν. Συγκεκριμένα, η ερευνήτρια διατηρούσε πρόχειρες σημειώσεις στο πεδίο, τις οποίες ανέπτυσσε και συμπλήρωνε με την απομάκρυνσή της από αυτό, δίνοντάς τους τη μορφή αναφορών. Επιπλέον, έγινε λήψη εικόνων που αναπαριστούν δράσεις ή έργα των μαθητών και συλλογή των μαθητικών τεκμηρίων, όπως φύλλα εργασίας, κάρτες ποσών, ξυλάκια τύπου γλωσσοπίεστρα και έγχρωμα χαρτάκια τύπου post-it.

Ακόμη, θα έλεγε κανείς ότι η έλλειψη γνώσης των μητρικών γλωσσών των μαθητών εκ μέρους της ερευνήτριας αποτελούσε εμπόδιο της επικοινωνίας σε αρκετές περιπτώσεις. Μολαταύτα, καταβλήθηκαν πολλές προσπάθειες προκειμένου το γεγονός αυτό να μην επηρεάσει αρνητικά τη μάθηση των μαθητών, μέσα από τη δοκιμή και υιοθέτηση διαφόρων στρατηγικών, κυρίως διαγλωσσικών.

Τέλος, θεωρείται γενικά ότι τα αποτελέσματα μιας ποιοτικής έρευνας είναι κοινωνικοπολιτισμικά εξαρτώμενα και μη γενικεύσιμα, επειδή είναι στη φύση της υποκειμενική. Για την αντιμετώπιση αυτού του ερευνητικού περιορισμού, αξιοποιείται η δυνατότητα γενίκευσης με όρους συγκρισιμότητας και μεταφρασιμότητας των αναδυόμενων κατηγοριών και των χαρακτηριστικών του δείγματος με άλλες παρόμοιες ομάδες μαθητών ή με άλλους επιστημονικούς κλάδους, όπως αναφέρουν οι Cohen, Manion & Morrison (2008).

4.9 Εγκυρότητα – Αξιοπιστία

Είναι γνωστό πως η λογική της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας σε μια ποιοτική έρευνα δεν είναι εφικτό να εφαρμοστεί όπως σε μια ποσοτική. Όμως, υποστηρίζεται ότι η διασφάλισή τους πραγματώνεται μέσα από την ερευνητική συνέπεια και την όσο το δυνατόν ακριβέστερη και πληρέστερη περιγραφή της μεθοδολογίας και των δεδομένων που τελικά συλλέγονται από τον ερευνητή.

Άλλωστε, σύμφωνα με τους Anfara, Brown & Magnione (2002), ο τρόπος με τον οποίο ο ίδιος λογοδοτεί για τον εαυτό του διαδραματίζει ρόλο-κλειδί στην έρευνα που διεξάγει με ποιοτική μέθοδο. Για όλους τους παραπάνω λόγους, στην παρούσα μελέτη υιοθετούνται αρχές της ποιοτικής έρευνας που οδηγούν στην αναζήτηση της αντικειμενικότητας και όχι της γενίκευσης.

4.10 Δεοντολογία

Αξίζει να αναφερθεί πως στην παρούσα εργασία τηρήθηκε κώδικας δεοντολογίας στην προστασία της ιδιωτικότητας των συμμετεχόντων. Συγκεκριμένα, εφαρμόσθηκε ανωνυμία της ταυτότητάς τους, διατηρώντας μόνο τα αρχικά γράμματα των ονομάτων τους.

Οι ίδιοι, όμως, δε γνώριζαν πως αποτελούν μέλη μιας ερευνητικής διαδικασίας. Αυτό συνέβη γιατί είναι σημαντικό σε κάθε έρευνα τέτοιου είδους να συγκεντρώνονται στοιχεία και συμπεριφορές στο φυσικό τους περιβάλλον, αποφεύγοντας την αλλοίωση των δεδομένων και των αποτελεσμάτων.

Παρόλα αυτά, κρίθηκε σκόπιμο οι μαθητές να συναινούν στη λήψη εικόνων με τους ίδιους και τα έργα που εκτελούσαν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση ενός παιδιού που ανέλαβε αυτοβούλως ρόλο φωτογράφου, χρησιμοποιώντας την κινητή συσκευή που του δόθηκε και πλησίαζε τους συμμαθητές του μιλώντας τους στη Γ1 τους. Βέβαια, παρατηρήθηκε και η αντίθετη περίσταση, δηλαδή η απουσία συγκατάθεσης μίας μαθήτριας, άποψη η οποία έγινε σεβαστή.

4.11 Τρόπος ανάλυσης δεδομένων

Όπως προαναφέρθηκε, η έρευνα αξιοποιεί στοιχεία της εθνογραφίας και της έρευνας-δράσης. Επομένως, κρίθηκε αναγκαία η υλοποίηση μιας πρωτοβάθμιας ανάλυσης και επεξεργασίας των δεδομένων κατά τη διάρκεια της συλλογής τους, με τη συγγραφή των αναφορών που παρατίθενται στο Παράρτημα της εργασίας. Αυτό το επίπεδο ανάλυσης, σε συνδυασμό με το πιλοτικό στάδιο της έρευνας, προσέφερε μία γραμμή για την επακόλουθη μεθόδευση της έρευνας, παρά τους αστάθμητους παράγοντες που λάμβαναν χώρα.

Το δεύτερο επίπεδο ανάλυσης σηματοδοτήθηκε με την αποστασιοποίηση της ερευνήτριας από το πραγματολογικό υλικό που συγκέντρωσε, προκειμένου να επιτευχθεί όσο το δυνατόν υψηλότερος βαθμός αντικειμενικότητας των αποτελεσμάτων. Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε επαναπροσέγγιση και πολλαπλή μελέτη του υλικού, με στόχο την αναζήτηση απαντήσεων σχετικών με το ερευνητικό πρόβλημα που τέθηκε.

Η τελική ανάλυση στηρίχθηκε σε τρεις άξονες εκπαιδευτικών στρατηγικών, όπως αναφέρονται στο κεφάλαιο 3.3.3 του θεωρητικού μέρους της εργασίας. Πιο επεξηγηματικά, έγινε ταξινόμηση των στρατηγικών που εντοπίστηκαν με κριτήριο τον προσανατολισμό τους ως προς τις εξής κατηγορίες: γνωστικές στρατηγικές,

κοινωνικο-πολιτισμικές στρατηγικές και κοινωνιο-γνωστικές στρατηγικές. Βέβαια, σύμφωνα με το ίδιο μοντέλο, υπογραμμίζεται πως μία στρατηγική θα μπορούσε να εντάσσεται σε διαφορετική κατηγορία, ανάλογα με τον φακό εστίασης.

Σε κάθε στρατηγική αναφέρεται ο τρόπος εφαρμογής της και η τυχόν διαφορετικότητα στον στόχο και στη λειτουργία της. Επίσης, δίνονται σχετικά αποσπάσματα ή επεισόδια που αναδεικνύουν τη χρήση τους. Ειδικότερα, τα αποσπάσματα αφορούν στην παράθεση συμβάντων όπως ακριβώς καταγράφονται στις αναφορές που συντάχθηκαν, ενώ στα επεισόδια γίνεται σύντομη και εκ νέου περιγραφή συμβάντων, διότι αυτά δεν εντοπίζονται με αρκετά σαφή τρόπο σε συγκεκριμένο σημείο των αναφορών.

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί πως αρκετές στρατηγικές προέκυψαν από τον σχεδιασμό και επανασχεδιασμό της έρευνας, βάσει του θεωρητικού υποβάθρου που την πλαισιώνει. Ωστόσο, εντοπίστηκαν στρατηγικές οι οποίες εφαρμόσθηκαν από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό, χωρίς να έχουν προμελετηθεί, εξαιτίας της αναγκαιότητας προσαρμογής στα φαινόμενα που συνεχώς εξελίσσονταν στο ερευνητικό πεδίο.

4.12 Πραγματολογικό υλικό

Το πραγματολογικό υλικό που συλλέχθηκε κατά τη διεξαγωγή της έρευνας αποτελεί ένα ιδιαίτερα σημαντικό κομμάτι της. Σε αυτό περιγράφονται αναλυτικά τα γεγονότα, οι δράσεις και οι αντιδράσεις που εκτυλίχθηκαν, κατά τη ματιά της συγγραφέως στον διττό ρόλο της ερευνήτριας και της εκπαιδευτικού.

Λόγω του μεγέθους του υλικού αυτού, κρίθηκε προτιμότερη η παρουσίασή του στο Παράρτημα της εργασίας. Συγκεκριμένα, συμπεριλαμβάνονται 19 αναφορές που χαρακτηρίζονται κυρίως από περιγραφικό πλάγιο λόγο, ενώ όπου κατέστη δυνατό παρατίθενται σημεία ευθύ λόγου, είτε μεμονωμένων απαντήσεων των μαθητών, είτε διαλόγων που διεξάγονταν στις αλληλεπιδράσεις τους.

5. Ανάλυση Δεδομένων

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν κατά τη διεξαγωγή της ερευνητικής διαδικασίας. Σύμφωνα με τις αναφορές που συντάχθηκαν, παρατηρείται ότι χρησιμοποιήθηκε ποικιλία στρατηγικών και προσεγγίσεων για την επίτευξη του σκοπού της έρευνας. Εδώ παρουσιάζονται οι συχνότερες και πιο σταθερές από τις στρατηγικές αυτές, εξαιρώντας ορισμένες που, παρότι εφαρμόσθηκαν σε όλο το εύρος της διδασκαλίας και μάθησης, δεν ήταν δυνατό να καταγραφούν με απόλυτη ακρίβεια, εξαιτίας περιορισμών που έχουν αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Σε αυτές τις στρατηγικές ανήκουν η επανάληψη και επαναδιατύπωση λέξεων ή φράσεων, η εναλλαγή κώδικα των μαθητών (Γ1-ελληνικά/αγγλικά) ή του εκπαιδευτικού (ελληνικά-αγγλικά) καθώς και οι φράσεις εστίασης της μαθητικής προσοχής (noticing).

Α. Στρατηγικές γνωστικής ανάπτυξης

1. Γλωσσική προτροπή (prompts)

Μία στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε αρκετά συχνά αφορά στη γλωσσική προτροπή με ημιτελείς προτάσεις, φράσεις ή λέξεις (prompts). Η εφαρμογή τους γινόταν στο σύνολο των μαθητών, σε μικρές ομάδες μαθητών (δυάδες, τριάδες) ή ατομικά σε συγκεκριμένους μαθητές ή μαθήτριες, οι οποίοι επαναλάμβαναν άμεσα ή όχι τις εκφράσεις αυτές. Γενικά, φαίνεται ότι η χρήση αυτής της στρατηγικής ήταν ο ταχύτερος τρόπος για την επίδειξη της ορθής γλωσσικής έκφρασης, είτε κατά τη διδασκαλία νέας γνώσης (Α) είτε κατά τη διόρθωση του λόγου των μαθητών (Β), είτε ως νύγμα (Γ). Παραδείγματα κάθε περίπτωσης αποτελούν τα εξής:
(Α) Στη διδασκαλία νέας γνώσης:

I – σε επίπεδο πρότασης

- Απόσπασμα A_{I1} (αναφορά $8^{η}$, §8)

ΕΕ (ερευνήτρια-εκπαιδευτικός): Ένα ευρώ ισοδυναμεί με …..;

- Απόσπασμα A_{I2} (αναφορά $11^{η}$, §2)

ΕΕ: Έχω στο πορτοφόλι μου περίπου …. ευρώ.

II – σε επίπεδο λέξης

- Απόσπασμα A_{II1} (αναφορά $10^{η}$, §6)

ΕΕ: Κάνω α…. […]
Χ.: Αφαίρεση.

- Απόσπασμα A_{II2} (αναφορά $13^{η}$, §19)

ΕΕ: There are labels, but there is no… ? (Υπάρχουν ετικέτες, αλλά δεν υπάρχει…;)
Μαθητές: Title!
ΕΕ: Δηλαδή; Ελληνικά; Μοιάζει πολύ! Τί….;
Μαθ.: Τίτλος!

- Απόσπασμα A_{II3} (αναφορά 15η, §13)

ΕΕ: Κα….σε….
Λ.: Κασετίνα!

- Απόσπασμα A_{II4} (αναφορά 16η, §21)

ΕΕ: You can say it… (Μπορείς να το πεις…) Δε…;
Μαρ.: Δέκα.

III – σε επίπεδο φράσης

- Απόσπασμα A_{III1} (αναφορά 15η, §14)

ΕΕ: Αν δώσω […] Πεντακόσια εξήντα ευρώ, τότε θα πάρω…
Μ.: Ρέστα.

- Απόσπασμα A_{III2} (αναφορά 18η, §6)

ΕΕ: Έφτιαξες ένα…;
Λ.: Τετράγωνο (δείχνοντάς το).
ΕΕ: Κι εδώ; Τι έκανες;
Λ.: Έφτιαξα ένα κύκλος.

(Β) Στη διόρθωση του λόγου των μαθητών

Απόσπασμα Β (αναφορά 15η, §14):
ΕΕ: Αν δώσω… (δείχνοντας στο 600 €)
Μ.: Εξηκο… Εξήντα…
ΕΕ: Εξα….
Μ.: Εξακόσια.
ΕΕ: Εξακόσια (με θετικό νεύμα) …

(Γ) Ως νύγμα απλής μορφής, για την ώθηση της προφορικής έκφρασης των μαθητών, την αύξηση της ενεργούς συμμετοχής τους και τον έλεγχο της γνώσης τους, όπως στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Απόσπασμα $Γ_1$ (αναφορά 14η, §17)

ΕΕ: Και μετά πήραμε, φάγαμε ας πούμε, τα … ; (δείχνοντας το άλλο σχήμα)
Γμ.: Τέσσερα.
ΕΕ: Από τα…;
Γμ.: Οχτώ.

- *Επεισόδιο $Γ_2$ (αναφορά 13η, §2):* Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός ξεκίνησε να μετρά δυνατά τον αριθμό των αγοριών και των κοριτσιών και με τη στάση, τη φωνή και το νεύμα της την συνόδευσαν τα παιδιά της τάξης.

2. Διδασκαλία μαθηματικού λεξιλογίου

Εκτός των άλλων στρατηγικών, η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός επιχείρησε τη διδασκαλία της γλώσσας μέσω των μαθηματικών με διάφορες μεθόδους, για την κατανόηση της ίδιας της γλώσσας αλλά και του μαθηματικού περιεχομένου.

I. Διδασκαλία ομόρριζων λέξεων, όπως ευρώ-Ευρώπη και δεύτερο-Δευτέρα στα αποσπάσματα Ια και Ιβ που ακολουθούν αντίστοιχα.

Απόσπασμα Ια (αναφορά 8η, §4):
«Επανέλαβα δυνατά «ευρώ, όπως Ευρώπη» στα ελληνικά και στα αγγλικά, έγραψα στον πίνακα Ευρώπη και κύκλωσα το «ευρώ». Τα παιδιά επανέλαβαν ατομικά […]».

Απόσπασμα Ιβ (αναφορά 14η, §6):
«[…] της εξήγησα ότι όταν αυτοί οι αριθμοί είναι στον παρονομαστή διαβάζουμε (καθώς έγραφα) "πρώτο, δεύτερο […κτλ], δέκατο" κτλ. και επισήμανα βοηθητικά ότι από το δεύτερο μέχρι το πέμπτο μοιάζει με τις ημέρες της εβδομάδας (Δευτέρα, Τρίτη κτλ) και τα υπόλοιπα ακολουθούν τη μορφή του (απόλυτου) αριθμητικού, όπως είχαν αναφέρει τα κορίτσια στην πιλοτική έρευνα […]».

II. Διδασκαλία αντίθετων λέξεων, όπως για παράδειγμα τα ζεύγη περισσότερο-λιγότερο, μεγαλύτερο-μικρότερο, κοντά-μακριά, ένα-πολλά κ.ά., σύμφωνα με τα ενδεικτικά αποσπάσματα που δίνονται παρακάτω.

Απόσπασμα ΙΙα (αναφορά 8η, §19):
«Ανέφερα τι εννοούμε περισσότερο και λιγότερο από, χρησιμοποιώντας χειρονομίες μεγαλύτερου και μικρότερου, τις αγγλικές λέξεις more/less than και τα σύμβολα της ανισότητας (>,<). […] Ανέφερα όμως ότι το περισσότερο το λέμε αλλιώς και «πιο πολύ» και το λιγότερο «πιο λίγο», όμως δε λέμε «πιο λιγότερο» ή «πιο περισσότερο»».

Απόσπασμα ΙΙβ (αναφορά 17η, §2):
ΕΕ: Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μία, δύο, τρεις, τέσσερις πλευρές και μία, δύο, τρεις, τέσσερις γωνίες (δείχνοντας). Αυτά, τα ξυλάκια, λέγονται πλευρές. Εκεί που ενώνονται τα ξυλάκια λέγονται γωνίες. Οκ; Πλευρά, γωνία (δείχνοντας). Μία πλευρά (δείχνοντας 1 δάχτυλο), πολλές πλευρές (χειρονομία «πολλά»). Μία γωνία, πολλές γωνίες (δείχνοντας ό,τι λέω).

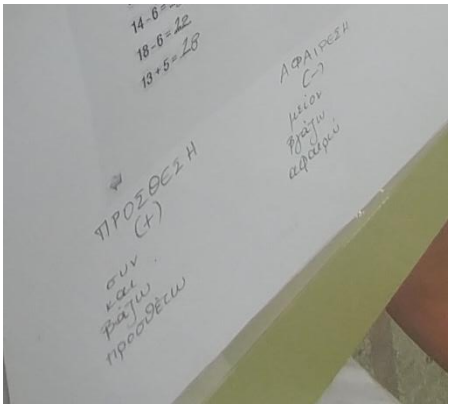
Εικόνα 5: Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από ξυλάκια

ΙΙΙ. Ετυμολογία των λέξεων, δηλαδή ανάλυση και εξήγηση των συνθετικών τους, π.χ. ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα (ΙΙΙα), σημειόγραμμα (ΙΙΙβ), τρίγωνο (ΙΙΙγ) και εξίσωση (βλ. Παράρτημα, αναφορά 17η), όπως φαίνεται στα εξής αποσπάσματα.

Απόσπασμα ΙΙΙα (αναφορά 14η, §25):
« […] δηλαδή να είναι ομώνυμα ([…] εξήγησα εδώ ότι βγαίνει από το «όμοιος» και «όνομα» και σημαίνει ότι έχουν το ίδιο όνομα), ενώ όταν δεν έχουν ίδιο παρονομαστή λέγονται ετερώνυμα («έτερ και ώνυμα, δηλαδή διαφορετικό όνομα», κύκλωσα-υπογράμμισα τα συνθετικά των λέξεων για να τα εντοπίσει καλύτερα)».

Απόσπασμα ΙΙΙβ (αναφορά 15η, §24):
«Έπειτα τόνισα ότι το σχέδιο που έκαναν με τις τελίτσες λέγεται σημειόγραμμα επειδή «γράφω σημεία-σημάδια» ή στα αγγλικά «dot plot» επειδή «γράφω dots» (δείχνοντας μια κουκκίδα)».

Απόσπασμα ΙΙΙγ (αναφορά 18η, §3):
«Η Λ. πολλές φορές έλεγε ορθογώνιο αντί για τρίγωνο και της εξήγησα ότι το τρίγωνο το λέμε έτσι γιατί έχει 3 γωνίες. Έδωσα μερικά επιπλέον παραδείγματα για να βρίσκει το όνομα του σχήματος με βάση τον αριθμό των γωνιών (εκτός από την περίπτωση 4 γωνίες γιατί εκεί υπάρχει η κατηγορία τετράπλευρο που θα την μπέρδευε), π.χ. 5 γωνίες-πεντάγωνο, 6 γωνίες-εξάγωνο, 8 γωνίες-οκτάγωνο, και σχεδίασα τα σχήματα αυτά στον πίνακα. Κάθε φορά της ζητούσα να μαντέψει πώς λέγεται το σχήμα και η προσπάθειά της ήταν πολύ καλή».



Εικόνα 6: Λίστα λέξεων

IV. Διδασκαλία συνώνυμων λέξεων, με καταγραφή τους σε λίστα λέξεων, όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα.

V. Εντοπισμός καθημερινών και μαθηματικών λέξεων, όπως για παράδειγμα τις λέξεις «ρέστα», «κοστίζει» και ιδιαίτερα το τρίπτυχο «τίτλος-δεδομένα-ετικέτες» (απόσπασμα V_α), την πολυσημία των λέξεων «γωνία» και «πλευρά» (V_β) καθώς και την πολυσημία της λέξης «λεπτά» (λεπτά της ώρας – λεπτά του ευρώ) και τον «ψεύτικο φίλο» της (λεφτά), στα αποσπάσματα V_γ και V_δ αντίστοιχα.

Απόσπασμα V_α (αναφορά 13η, §14):
«[…]τους εξήγησα ότι κάθε γράφημα αποτελείται από τον τίτλο («title, όπως λέμε το όνομα, the name»), τις ετικέτες («labels, όπως η ετικέτα στα ρούχα μας», δείχνοντας την ετικέτα της μπλούζας μου και ενός κοριτσιού που ήταν κοντά μου) και τα δεδομένα (data), δείχνοντας στο αντίστοιχο σημείο του εικονογράμματος κάθε φορά.»

Απόσπασμα V_β (αναφορά 17η, §4):
«Έπειτα τους είπα ότι τα αντικείμενα έχουν γωνίες και πλευρές όπως τα σχήματα και αυτές τις λέξεις τις χρησιμοποιούμε και αλλού, π.χ. λέμε η γωνία δύο σπιτιών – για να πας εκεί θα στρίψεις στη γωνία ή ότι ο πίνακας είναι σε αυτήν την πλευρά του τοίχου – θα κοιμηθώ απ' αυτήν την πλευρά – πονάνε τα πλευρά μου. Κάθε φορά έδειχνα το σημείο για το οποίο μιλάω και έπαιρνα την ανάλογη έκφραση ή στάση σώματος, κάνοντας τα παιδιά να χαμογελάσουν».

Απόσπασμα V_{γ} (αναφορά 8η, §12):
«Εξήγησα ότι υπάρχουν και «αξίες» μικρότερες από 1 € που λέγονται cents ή λεπτά του ευρώ. Ο Σ. ρώτησε «λεπτά;» δείχνοντας ένα νοητό ρολόι στο χέρι του. Με αφορμή αυτήν την ερώτηση εξήγησα ότι τα λεπτά της ώρας (δείχνοντας το νοητό ρολόι και κάνοντας τικ τοκ τικ τοκ, κεντρίζοντας με το γέλιο την προσοχή των παιδιών) είναι διαφορετικά από τα λεπτά του ευρώ, όμως και τα δύο τα λέμε λεπτά γιατί είναι μικρότερης αξίας από τη μονάδα».

Απόσπασμα V_{δ} (αναφορά 11η, §6):
«Ο Ρ. τότε είπε χαρούμενος «Ναιιι, έχω τα πιο πολλά λεπτά!» και γελώντας του απάντησα «Λεφτά, καλέ, λεφτά, φφφ!». Εκείνος επανέλαβε «λεφτά», του εξήγησα ότι τα λεπτά είναι αυτά τα μικρά κέρματα, τα «κίτρινα» και τα «κόκκινα» και επανέλαβα με έμφαση «λεπτά (δείχνοντας τα κέρματα), λεφτά (δείχνοντας όλα τα χρήματα), χρήματα, money, λεφτά is money, λεπτά is cents». Ο Ρ. έγνεψε καταφατικά «ναι, ναι, money».».

VI. Διδασκαλία τεχνικού λεξιλογίου των μαθηματικών, π.χ. δεκαδικός αριθμός (VIα), ίσον, τα ζεύγη αριθμητής-παρονομαστής και ζυγός-μονός αριθμός, με χαρακτηριστική την περίπτωση που περιγράφεται στις ακόλουθες γραμμές.

Απόσπασμα VIα (αναφορά 12η, §11-12):
«[…] κατάλαβα […] ότι δεν ξέρει τους δεκαδικούς αριθμούς. Μόλις σχηματίστηκε το αποτέλεσμα 11,25 του είπα για αυτούς τους αριθμούς.
Ξεκίνησα με μια πρόχειρη αριθμογραμμή από το 0 μέχρι το 2 και του είπα ότι ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς έχουμε άλλους που λέγονται δεκαδικοί. Ο Μ. επανέλαβε «δεκαδικοί» [...]. Χώρισα την αριθμογραμμή πρώτα στη μέση και σημείωσα τον αριθμό 1, και έπειτα από το 0 μέχρι το 1 ξανά στη μέση και σημείωσα το 0,5 και αντίστοιχα από το 1 μέχρι το 2. Έπειτα χώρισα ξανά ανά 0,1 και σημείωσα τους αριθμούς από το 0,1 μέχρι το 1,9. Ως τότε είχε καταλάβει το πρότυπο και απαριθμούσε μαζί μου».

VII. Διδασκαλία καθημερινού μη μαθηματικού λεξιλογίου ανά κατηγορίες, όπως τον ρουχισμό (VIIα), τα μέρη του σώματος (VIIβ και Εικόνα 7), τα προϊόντα του σούπερ μάρκετ (VIIγ), τα χρώματα και διάφορα αντικείμενα του περιβάλλοντος (π.χ. θρανίο, πίνακας, πόρτα, δίσκος, ρόδα), όπως παρατηρείται στα επόμενα αποσπάσματα.

Εικόνα 7: Ενασχόληση μαθήτριας με τα μέρη του σώματος

Απόσπασμα VIIα (αναφορά 15η, §9):
«Τότε της ζήτησα να πάρει το φυλλάδιό της και να πλησιάσει μαζί μου το χαρτόνι με τις εικόνες και τις λέξεις των εικόνων αυτών που υπήρχε στην τάξη. Της είπα: «Έχεις 60 ευρώ. Δείξε μου και πες μου τι μπορείς να αγοράσεις». Εκείνη μου έδειξε πρώτα το «φουστάν», μετά τη «τζακέτ» και το «πανταλόν» και της ζήτησα να κάνει το ίδιο σύμφωνα με τις απαντήσεις που έδωσε στο φυλλάδιο […]».

Απόσπασμα VIIβ (αναφορά 17η, §15):
«Τότε, συζητήσαμε όλοι μαζί για τα μέρη του σώματος που βλέπουν στον άνθρωπο (κεφάλι, πρόσωπο, λαιμός, σώμα, χέρια, πόδια) και σηκώθηκαν όρθιοι για να τα δείξουν και στον εαυτό τους».

Απόσπασμα VIIγ (αναφορά 11η, §11,13):
«Στη συνέχεια τους μοίρασα φυλλάδια του σούπερ μάρκετ στα οποία βρήκαμε μαζί κάποια προϊόντα και είπαμε πώς λέγονται στα ελληνικά και πόσο κοστίζουν (π.χ. γάλα, χυμός, κρουασάν, σοκολάτα, μολύβι, κασετίνα, πατάτες, λουκάνικα, κρεμμύδια, μήλα, αχλάδια, σταφύλια κ.ά.). […] Τα παιδιά βρήκαν κάποια προϊόντα σε έκπτωση […] και τους ζήτησα να διαλέξουν ένα προϊόν από διαφορετικές σελίδες. Συγκεκριμένα, ζήτησα από τη Φ. να διαλέξει ένα προϊόν από τα σχολικά, από τον Ρ. να διαλέξει ένα προϊόν από το κρεοπωλείο του καταστήματος και από την Μπ. ένα προϊόν από το μανάβικο».

3. Ανάγνωση μαθηματικής πρότασης

Μία ακόμα στρατηγική σχετίζεται με την ανάγνωση μαθηματικής πρότασης εκ μέρους των μαθητών. Δηλαδή, ζητήθηκε από αυτούς να μεταφράσουν τα σύμβολα σε λόγο, είτε μόνο στην ελληνική γλώσσα (αποσπάσματα $α_1$ και $α_2$), είτε στην ελληνική και στη μητρική γλώσσα τους (απόσπασμα $α_3$).

Στην περίπτωση ανάγνωσης μόνο στη Γ2 (ελληνική γλώσσα) παρατηρείται πως η στρατηγική εφαρμόσθηκε για τη διόρθωση λαθών των μαθητριών κατά την ατομική εργασία τους. Αυτό φαίνεται στα παρακάτω αποσπάσματα:

Απόσπασμα $α_1$ (αναφορά 10η, §5):
«Στη συνέχεια έπρεπε να κάνει μερικές ακόμα εναλλασσόμενες προσθέσεις και αφαιρέσεις. Τότε ήταν που δεν παρατήρησε την αλλαγή του συμβόλου από - σε + και αντίστροφα, μέχρι που της ζήτησα να διαβάσει τις αντίστοιχες πράξεις-μαθηματικές προτάσεις και παρατήρησε ότι το σύμβολο δεν ταίριαζε με την πράξη που έκανε […] Έτσι, ήταν αργότερα προσεκτική και δεν έκανε κανένα υπολογιστικό λάθος. Χρησιμοποιούσε και στις προσθέσεις και στις αφαιρέσεις λέξεις από τη λίστα της: π.χ. έλεγε «12 μείον 7 κάνει ...», «16 να βγάλω 5... ίσον...», «15 και 3», «9 συν 6» κ.λπ.»

Απόσπασμα $α_2$ (αναφορά 16η, §3,5):
«Στον πολλαπλασιασμό «10x8» με ρώτησε αν το αποτέλεσμα «08» που έγραψε είναι σωστό. Της ζήτησα να το διαβάσει και μου είπε «10 και 8», οπότε της εξήγησα ότι το σύμβολο «x» (δείχνοντάς το) λέγεται «επί» και […] δίνοντάς της ένα παράδειγμα στο

ακριβώς από πάνω γινόμενο όπου έγραφε «6 επί 6 (αργά) ή αλλιώς 6 φορές το 6, ίσον… ; τριάντα…;», την παρότρυνα να απαντήσει, όπως και έκανε λέγοντας «έξι». Συνέχισα δείχνοντας το 10x8 και η Μ. είπε «10 … επί … 8 …», οπότε την ενθάρρυνα επιβεβαιώνοντας τα λόγια της και ρωτώντας την «πόσο κάνει» αυτή η πράξη που είπε. Η Μ. απάντησε «ογδόντα», με αποτέλεσμα να καταλάβει εύκολα ότι το 80 που είπε δεν ταιριάζει με τον αριθμό που έγραψε. […] Στον πολλαπλασιασμό 2x11 η Μ. ζήτησε τη βοήθειά μου. Της ζήτησα πάλι να το διαβάσει και το έκανε σωστά («2 επί 11»).»

Ο δεύτερος τρόπος χρήσης της εν λόγω στρατηγικής περιελάμβανε την εξήγηση της έννοιας της ισότητας και του συμβόλου «=», όχι απλά ως δεικτικό του αποτελέσματος μιας πράξης. Έτσι, όπως φαίνεται στο απόσπασμα $α_3$, ο λόγος στη Γ2 μετατράπηκε σε μαθηματικό σύμβολο, το οποίο με τη σειρά του μεταφράστηκε σε λόγο, πρώτα στη Γ2 και έπειτα στην κοινή Γ1 των μαθητών (φαρσί).

Απόσπασμα $α_3$ (αναφορά $2^η$, §4-5):
«Η Φ. έριξε το ζάρι και έφερε 4. Την ρώτησα ποια σχέση έχει ο αριθμός της με τον αριθμό της Α. και εκείνη απάντησε «ίδιο» και συμπλήρωσα «είναι ίδιοι, δηλαδή ίσοι οι αριθμοί, they are the same, they are equal… equal? you understand?». […] Μετά, ρώτησα όλα τα παιδιά αν ξέρουν το σύμβολο του ίσον και πώς μπορούν να μου δείξουν γραπτώς ότι δύο αριθμοί είναι ίσοι. Η Φ. με ρώτησε τι εννοώ και […] τους είπα ότι όταν λέμε ότι το 4 είναι ίσο με το 4, συμβολίζεται 4 (ζητώ από τον Σ. να γράψει), ίσον (ο Σ. δεν ξέρει και του έδειξα το σύμβολο ίσον από τις προηγούμενες πράξεις του και τότε καταλαβαίνουν και οι 2 λέγοντας «αααα!»), 4 (ο Σ. γράφει το 4 μετά το ίσον). Ζήτησα από τα παιδιά να διαβάσουν μαζί μου την μαθηματική πρόταση «4 ίσον 4» και τους ρώτησα πώς το διαβάζουν αυτό στη γλώσσα τους. Τα παιδιά το έκαναν και το επανέλαβα κι εγώ στη δική τους γλώσσα, ελέγχοντάς το σε ένα ιντερνετικό λεξικό.»

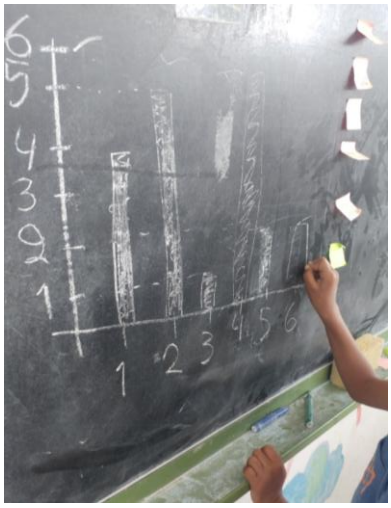
Β. Στρατηγικές κοινωνικο-πολιτισμικού προσανατολισμού

1. Μαθητής ως διερμηνέας/βοηθός δασκάλου

Μία σημαντική στρατηγική κοινωνικο-πολιτισμικού προσανατολισμού αφορά στην αξιοποίηση έμπειρων ομιλητών της Γ2 ως βοηθών-διερμηνέων για την επικοινωνία της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού με τα υπόλοιπα μέλη της τάξης (α’), με συγκεκριμένη ομάδα μαθητών (β’) ή με έναν μαθητή (γ’). Ακολουθεί η περιγραφή χαρακτηριστικών επεισοδίων σύμφωνα με τις αναφορές που γράφτηκαν. Αξίζει να σημειωθεί πως τα επεισόδια α’ και $γ_1$’ αφορούν ενθάρρυνση αυτής της συμπεριφοράς από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό, ενώ τα επεισόδια β’ και $γ_2$’ εμφανίστηκαν με πρωτοβουλία των ίδιων των μαθητών.

*Επεισόδιο α’ (*αναφορά $9^η$, §5*)*: Ο Ε. (με Γ1 την περσική γλώσσα) πέρασε από την τάξη της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού και εκείνη τον ρώτησε αν γνωρίζει το σύμβολο “≥”, λέγοντας «μεγαλύτερο ή ίσο», το οποίο προσπαθούσε να εξηγήσει στα υπόλοιπα παιδιά. Ο Ε. απάντησε θετικά και στη συνέχεια του ζητήθηκε να εξηγήσει στα

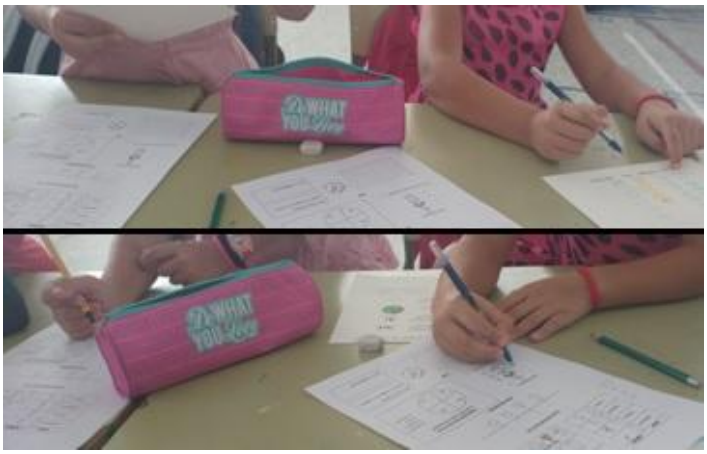
υπόλοιπα μέλη της τάξης τη χρήση και ερμηνεία του συμβόλου. Ο ίδιος απολογήθηκε λέγοντας «arabic, no, μόνο farsi» και φώναξε έναν φίλο του (με Γ1 την αραβική γλώσσα). Αφού συνεννοήθηκαν, μετέφρασαν σε κάθε γλωσσική ομάδα παιδιών το σύμβολο και τους ευχαρίστησα.



Εικόνα 8: Κατασκευή ραβδογράμματος

*Επεισόδιο β' (*αναφορά 13η, §17*)*: Ο Ι. δυσκολευόταν να εκτελέσει τις (δίγλωσσες) οδηγίες της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού για τη σχεδίαση ενός ραβδογράμματος στον πίνακα. Η Φ. προσφέρθηκε να βοηθήσει τον Ι., μεταφράζοντας στη Γ1 τους τη διαδικασία που καλούνταν να ακολουθήσει και εξηγώντας τα λεγόμενα της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού. Έτσι, και τα υπόλοιπα παιδιά με ίδια Γ1 μπόρεσαν να κατανοήσουν και να συμμετάσχουν.

*Επεισόδιο γ_1' (*αναφορά 11η, §7-8*)*: Μία ομάδα μαθητών ασχολούνταν με τις έννοιες «κοντά» και «μακριά» στις εκτιμήσεις νομισματικών ποσοτήτων. Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός προσπαθούσε να τις εξηγήσει χρησιμοποιώντας τα πιο διαθέσιμα μέσα, δηλαδή χειρονομίες, εναλλαγή αγγλικών και ελληνικών κ.ά., χωρίς άμεσο αποτέλεσμα. Η Φ., εν τέλει, κατόρθωσε να αντιληφθεί τη σημασία των λέξεων και να συνδέσει τη χειρονομία με τη λέξη. Έτσι, της ζητήθηκε να μεταφέρει την κατανόησή της στον Ρ., όπως και έκανε, χωρίς να παραλείψει να χρησιμοποιήσει τις ίδιες χειρονομίες και να επαναλάβει τις αντίστοιχες λέξεις στη Γ1.


Εικόνα 9: Μαθήτριες ασχολούνται με τη στατιστική και τα γραφήματα

Επεισόδιο γ_2' (αναφορά 15η, §21,25): Οι μαθήτριες Μ. και Λ. ασχολούνταν με τη στατιστική και τα γραφήματα. Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός έδωσε μία προφορική οδηγία για την εκτέλεση μιας γραπτής άσκησης την οποία κατάλαβε μόνο η Λ. Τότε η Λ. εξήγησε την άσκηση στη Μ., χρησιμοποιώντας τη μητρική τους γλώσσα.

2. Μαθητής ως δάσκαλος

Ως στρατηγική ανάλογου πνεύματος μπορεί να αναφερθεί η τοποθέτηση μαθητών σε ρόλο δασκάλου και βοηθού των συμμαθητών τους. Για να γίνει αυτό, όπως φαίνεται στα κάτωθι επεισόδια, όλα τα παιδιά χρησιμοποίησαν τη μητρική τους

γλώσσα και το αποτέλεσμα της σκαλωσιάς που παρείχαν ήταν πάντα επιτυχημένο. Επίσης, είναι σημαντικό να υπογραμμιστεί πως όλες οι περιπτώσεις στηρίζονται στην πρωτοβουλία των ίδιων των μαθητών.

Επεισόδιο Α (αναφορά 16η, §5-6): Η Λ. είχε ολοκληρώσει επιτυχώς μια σειρά πράξεων και συνομιλούσε με την Α., η οποία δυσκολευόταν. Τότε η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός ζήτησε από τη Λ. να εντοπίσει τυχόν σημεία όπου η Α. έχει κάνει λάθος, όπως και έγινε αρκετά γρήγορα. Μάλιστα, η Λ. με δική της πρωτοβουλία έκανε το ίδιο και στα αποτελέσματα των πράξεων της Μ., δείχνοντάς τα.

Επεισόδιο Β (αναφορά 18η, §4-5): Η Α., που συμμετείχε για δεύτερη φορά σε μάθημα ενασχόλησης με τα σχήματα, πήρε την πρωτοβουλία να δείξει τις γνώσεις της στις υπόλοιπες συμμαθήτριες και φίλες της. Συγκεκριμένα, πήρε τα μεγάλα σχήματα στα χέρια της και έδειξε το πλήθος των πλευρών και γωνιών καθενός, χρησιμοποιώντας την αραβική και την ελληνική γλώσσα. Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός την συνεχάρη για τη σκέψη της και για τη γνώση που απέδειξε ότι κατέκτησε και της ζήτησε να σταθεί ως βοηθός της Μπ. κατά την υλοποίηση μιας γραπτής εργασίας. Η Α. παρείχε στη Μπ. λεκτική και συμβολική καθοδήγηση στη μητρική τους γλώσσα.

3. Συνεργασία των μαθητών ανά δύο ή σε ομάδες

Εκτός από τις παραπάνω περιπτώσεις παρατηρήθηκαν κι άλλα γεγονότα συνεργασίας των μαθητών, αυτοβούλως ή με την ενθάρρυνση της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού. Εδώ η κατηγοριοποίηση των συμβάντων μπορεί να πραγματοποιηθεί με βάση τη γλώσσα επικοινωνίας των μαθητών: αφενός υπήρχαν ομοιογενείς ομάδες συνεργασίας, που χρησιμοποίησαν την κοινή μητρική τους γλώσσα για να αλληλεπιδράσουν (α) και αφετέρου εντοπίστηκε μία γλωσσικά ετερογενής ομάδα, που χρησιμοποίησε διάφορα κανάλια επικοινωνίας (β).

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν συμβάντα όπου τα παιδιά συνεργάστηκαν με τους συμμαθητές τους με κοινή Γ1 για να ολοκληρώσουν ένα έργο, να επεξεργαστούν πτυχές του μαθηματικού περιεχομένου με τη διαμεσολάβηση ενός μαθηματικού εργαλείου ή να βοηθήσουν τους λιγότερο έμπειρους συμμαθητές τους να χρησιμοποιήσουν τη Γ1 τους για να προφέρουν λέξεις στη Γ2. Όλα τα παραπάνω διακρίνονται στο Παράρτημα της εργασίας και συγκεκριμένα στις αναφορές 9, 15 και 16 αντίστοιχα.

Στη δεύτερη κατηγορία εντοπίζεται ένα μοναδικό επεισόδιο, το απόσπασμα (αναφορά 9η, §11-13) του οποίου δίνεται παρακάτω:

«Η Μπ. μιλά αραβικά ενώ η Φ. μιλά Φαρσί. Έτσι, η μόνη κοινή γλώσσα ήταν η γλώσσα των μαθηματικών. Η Φ. προσέγγισε πρώτη την Μπ. μιλώντας στα Φαρσί και χρησιμοποιώντας τις λέξεις ευρώ και cents. Η Μπ. δεν απάντησε και η Φ. συνέχισε, κοιτώντα τις κάρτες της Μπ. και τα χρήματά τους. Αφού σκέφτηκε λίγο, της είπε: «εσύ πάρε αυτό, 10 λεπτά και 10 λεπτά, cents, και πάρω 20 cents». Η Μπ. συμφώνησε και τα

κορίτσια συνέχισαν να κολλούν τα κέρματά τους. […] Η Φ. έφτιαξε το σύνολο με 2 €, 1 € και 2 κέρματα των 5 λ. (αντί για τα 50 λ.). Εντόπισα το λάθος και ότι έλειπε και 1 €, αλλά η Φ. πήρε τα 5 € από τη Μπ., με την Μπ. να διακόπτει αμέσως μιλώντας πολύ σιγανά στη γλώσσα της. Η Μπ. έδειξε με το δάχτυλό της τα 50 λ., τα αντικατέστησε στη θέση των 5 λ. κι έτσι η Φ. κατάλαβε το λάθος της».

Εικόνα 10: Χειραπτικό υλικό – κάρτες και νομίσματα του ευρώ

4. Αξιοποίηση του χιούμορ

Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός παρατηρείται πως χρησιμοποίησε το χιούμορ ως στρατηγική αρκετά συχνά. Λόγω, όμως, των περιορισμών στην πλήρη καταγραφή των αλληλεπιδράσεων στις τάξεις, σημειώνονται αναλυτικά μόνο μερικά από αυτά, που ενδεχομένως συγκέντρωσαν μεγαλύτερο βαθμό αντιδράσεων εκ μέρους των παιδιών, χάρη στη θεατρικότητα που συνόδευσε τον προφορικό λόγο. Τόσο στο πρώτο όσο και στο δεύτερο απόσπασμα η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός ενσωμάτωσε ποικίλα εκφραστικά μέσα στην ομιλία της, όπως τόνο της φωνής, στάση-κίνηση του σώματος και χειρονομίες, αποσκοπώντας στη διαμόρφωση οικείου κλίματος και σχέσεων εμπιστοσύνης με τους μαθητές, προκειμένου οι τελευταίοι να αισθάνονται άνεση και ελευθερία έκφρασης.

Απόσπασμα Α (αναφορά 10η, §5):
ΕΕ: […] Στην κασετίνα μου είχα 3 μολύβια. Έχασα το 1. Πόσα μολύβια μου έμειναν;
Χ.: 3 μολύβια;
ΕΕ: Ναι
Χ.: Και έφυγε 1;
ΕΕ: Το έχασα. Κάπου το άφησα και δεν το ξαναβρήκα (έκφραση προσώπου). Δεν έφυγε μόνο του, δεν έβγαλε πόδια και περπάτησε (γέλια)!

Απόσπασμα Β (αναφορά 11η, §9):
«[…] αν η Μπ. πάει στο σούπερ μάρκετ (προσποιούμαι ότι παίρνω το πορτοφόλι και προχωράω και γελάνε) θεωρώντας ότι έχει 100 ευρώ (δείχνοντας το 100 στην καρτέλα της) και θέλει να ψωνίσει κάτι παραπάνω, τα λεφτά δε θα της φτάσουν γιατί έχει 74, έχει <u>πιο λίγα</u> από 100. Αφού είδα ότι τους άρεσε η θεατρικότητα συνέχισα λέγοντας με ίδιο τρόπο ότι μπορεί να φτάσει στο ταμείο και να πρέπει να πληρώσει 80 ευρώ, θα νομίζει ότι έχει, αλλά (έκφραση προσώπου) δε θα τα έχει (γελάνε) […]».

Γ. Κοινωνιο-γνωστικές στρατηγικές

1. Σκαλωσιά

Η σκαλωσιά αποτέλεσε στρατηγική που εφαρμόσθηκε σε όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας και έρευνας, με ποικίλους τρόπους. Στο σημείο αυτό γίνεται εστίαση στην υποστηρικτική σκαλωσιά της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού για την κατασκευή αναπαραστάσεων εκ μέρους των μαθητών και τη διόρθωση λαθών τους.

Στην πρώτη ομάδα σκαλωσιάς εντοπίζονται περιστατικά όπου οι μαθητές κατασκεύαζαν αναπαραστάσεις με την αρχική καθοδήγηση της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού και έπειτα χωρίς αυτήν. Συγκεκριμένα, παρατηρείται η κατασκευή αριθμογραμμής από τον Μ. και η σχεδίαση και συμπλήρωση σημειογράμματος από την Μν., όπως φαίνεται στα αποσπάσματα και στη διπλανή εικόνα.

*Επεισόδιο i (*αναφορά 12η, §11-14, 19*):*
Ο Μ. ασχολούνταν με τους δεκαδικούς αριθμούς. Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε αριθμογραμμές για να εξηγήσει τη θέση τους και την πυκνότητά τους, «ζουμάροντας» κάθε φορά ανάμεσα σε δύο αριθμούς με ολοένα και αυξανόμενα δεκαδικά ψηφία. Σε αυτή τη διαδικασία συνέβαλε και ο Μ., χωρίζοντας και συμπληρώνοντας την αριθμογραμμή με τη βοήθεια της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού. Μάλιστα, λίγο αργότερα ο ίδιος μαθητής σκέφτηκε να κατασκευάσει μια αριθμογραμμή από το 0,70 ως το 1,70 για να βοηθήσει έναν συμμαθητή να επιλύσει ένα ερώτημα που τον δυσκόλευε.

Απόσπασμα ii (αναφορά 13η, §15-16):
«Ζήτησα από τη Μν. να σχεδιάσει στον πίνακα μία γραμμή και να σημειώσει τους αριθμούς που υπάρχουν στο ζάρι […]. Της επισήμανα να κάνει τους αριθμούς μεγάλους ώστε να φαίνονται σε όλους και την βοήθησα να χωρίσει τη γραμμή ώστε να τοποθετήσει τους αριθμούς σε καλές αποστάσεις μεταξύ τους. Τα παιδιά άρχισαν να ρίχνουν το ζάρι με τη σειρά και η Μν. (πρώτα με τη βοήθειά μου και έπειτα χωρίς) σημείωνε ένα Χ στην αντίστοιχη νοητή στήλη του πίνακα στη γραμμή που έκανε […]».

Εικόνα 11: Σημειόγραμμα

Στη δεύτερη ομάδα σκαλωσιάς σχετικά με τη διόρθωση των μαθητικών λαθών, διακρίνονται επεισόδια όπου οι μαθητές οδηγηθήκαν στην αυτοδιόρθωση και επεισόδια χωρίς αυτοδιόρθωση εκ μέρους τους. Σε όλες τις περιστάσεις χρησιμοποιήθηκε η πολυτροπικότητα εργαλείων, μέσων και μεθόδων.

Πιο συγκεκριμένα, στο απόσπασμα Α περιγράφεται η αλληλεπίδραση της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού με την Μ., προκειμένου η ίδια να ολοκληρώσει επιτυχώς ένα γραπτό έργο στην περιοχή της στατιστικής. Γίνεται αντιληπτό ότι οι μέθοδοι που ενσωματώθηκαν ταυτόχρονα αφορούσαν στις πολλαπλές αναπαραστάσεις (σχήματα, σημειόγραμμα), στον μαθηματικό διάλογο και στη μετάφραση του λόγου σε αριθμητικά σύμβολα.

Απόσπασμα Α (αναφορά 15η, §23):
«Η Μ. υπολόγισε πρώτα το άθροισμα χωρίς να σημειώσει κάτι. Γραμμοσκίασε το τρίγωνο στο τρίτο πλαίσιο και μετά το έσβησε. Για να τη βοηθήσω οπτικά, ζήτησα από τα κορίτσια να προχωρήσουν στην επόμενη άσκηση και να βάλουν 1 κουκκίδα σε κάθε (νοητή) στήλη για κάθε σχήμα, ανάλογα με το πλήθος που βρήκαν. Ήλπιζα αυτό να βοηθήσει οπτικά ιδίως τη Μ., συγκρίνοντας το τρίγωνο με το τετράγωνο που είναι τα περισσότερα και τα λιγότερα αντίστοιχα, αλλά οι κουκκίδες των κοριτσιών ήταν άνισες και σε άνισες αποστάσεις μεταξύ τους. Παρόλα αυτά προσπάθησα να της δείξω με το σχήμα της, χρησιμοποιώντας τον υπολογισμό που έκανε για να βάλει τόσες κουκκίδες. Μείωσα τα σχήματα προς σύγκριση σε δύο, το τρίγωνο και το τετράγωνο που είναι δίπλα δίπλα και έχουν και το περισσότερο ενδιαφέρον. Την βοήθησα με ερωτήσεις να αντιληφθεί ότι στο σχήμα, στον πίνακα του φυλλαδίου και στο αρχικό σκίτσο φαίνεται ότι υπάρχουν 8 τρίγωνα και 4 τετράγωνα και, επομένως, τα τετράγωνα είναι <u>τα λιγότερα</u>. Τότε εκείνη διόρθωσε το πλαίσιο και γραμμοσκίασε το τετράγωνο.

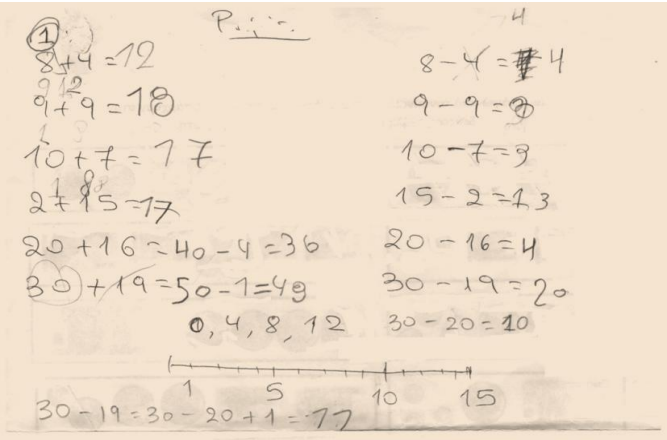
Στα επόμενα αποσπάσματα η αυτοδιόρθωση των μαθητών είναι σαφέστερη. Αναλυτικότερα, στο απόσπασμα Β καταγράφεται ο τρόπος με τον οποίο η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός υποστήριξε τη Μ. στην αναγνώριση και διόρθωση ενός λάθους της, όχι εξαιτίας μη ορθού υπολογισμού, αλλά εξαιτίας της επιρροής της πρώτης γλώσσας, όπου η γραφή ακολουθεί πορεία από τα δεξιά προς τα αριστερά. Έτσι, εφαρμόσθηκαν ποικίλες τεχνικές, όπως η ανάγνωση μαθηματικής πρότασης, γλωσσικές προτροπές με ημιτελείς φράσεις και παραδείγματα.

Απόσπασμα Β (αναφορά 16η, §3):
«Στον πολλαπλασιασμό «10x8» με ρώτησε αν το αποτέλεσμα «08» που έγραψε είναι σωστό. Της ζήτησα να το διαβάσει και μου είπε «10 και 8», οπότε της εξήγησα ότι το σύμβολο «x» (δείχνοντάς το) λέγεται «επί» και […] επανέλαβα «αυτό είναι το επί» δίνοντάς της ένα παράδειγμα στο ακριβώς από πάνω γινόμενο όπου έγραφε «6 επί 6 (αργά) ή αλλιώς 6 φορές το 6, ίσον… ; τριάντα…;», την παρότρυνα να απαντήσει, όπως και έκανε λέγοντας «έξι». Συνέχισα δείχνοντας το 10x8 και η Μ. είπε «10 … επί … 8 …», οπότε την ενθάρρυνα επιβεβαιώνοντας τα λόγια της και ρωτώντας την «πόσο κάνει» αυτή η πράξη που είπε. Η Μ. απάντησε «ογδόντα», με αποτέλεσμα να καταλάβει εύκολα ότι το 80 που είπε δεν ταιριάζει με τον αριθμό που έγραψε. Αμέσως, έλεγξε το γινόμενο που έγραψε και το διόρθωσε από 08 σε 80».

Το επόμενο απόσπασμα αναφέρεται στη στρατηγική που ακολούθησε ο Ρ. για την εκτέλεση πράξεων. Ο μαθητής χρησιμοποίησε τη μέθοδο της στρογγυλοποίησης των αριθμών προς την κοντινότερη δεκάδα, με αποτέλεσμα να οδηγείται σε εκτίμηση του αποτελέσματος και όχι σε ακριβή υπολογισμό. Ωστόσο, με τη βοήθεια της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού, ο Ρ. κατόρθωσε να εντοπίσει το λάθος του και να ολοκληρώσει τη στρατηγική του. Όσον αφορά στις μεθόδους της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού στην εν λόγω περίπτωση, συμπεριλαμβάνονται η χρήση ημιτελών φράσεων ως νυγμών, η διερεύνηση της σκέψης του μαθητή και η ενεργοποίηση των προηγούμενων γνώσεών του και της κουλτούρας του, καθώς συμμετείχε σε έναν μαθηματικό διάλογο.

Απόσπασμα Γ (αναφορά 16η, §10):

« […] στο 20+16 […] φαντάστηκα πως το υπολόγισε όπως τα υπόλοιπα (το 30+19 και 30-19), θεωρώντας το 16 ως 20 (η κοντινή στρογγυλοποίηση), καταλήγοντας στο 20+20=40 και παραλείποντας την αφαίρεση 4 μονάδων. Τον ρώτησα πάλι πώς το σκέφτηκε και μου είπε πως δε θυμόταν. Τότε τον ρώτησα αν το έκανε και αυτό όπως στο σχολείο στο Αφγανιστάν και μου είπε «ναι». Του ζήτησα να το ελέγξει και το κοιτούσε αρκετά ώσπου σημείωσε το σύμβολο «–» και με ρώτησε «4;» και του έγνεψα καταφατικά. Έπειτα σημείωσε το «=» και έγραψε «3», μέτρησε με τα δάχτυλά του (κατάλαβα ότι θεώρησε το 40 ως 10 γιατί μετρούσε αντίστροφα στα ελληνικά «9, 8, … 6») και έγραψε «6». Τον ρώτησα πόσο βρήκε τελικά, μου είπε «26» και του θύμισα πως «είναι 10, 20 …..;» (δείχνοντας 1 και 2 δάχτυλα) και συμπλήρωσε «30», οπότε τον παρότρυνα να διορθώσει και να πει 36».



Εικόνα 12: Αριθμητικοί υπολογισμοί ενός μαθητή

Στο απόσπασμα Δ παρατηρείται ότι δόθηκε έμφαση στη διερεύνηση της σκέψης του μαθητή και στην ενθάρρυνσή του προς την αιτιολόγηση. Ο Ε. φαίνεται πως κατάλαβε το λάθος του στην επιλογή πράξης, το οποίο δεν έγινε κατακριτέο, αλλά αξιοποιήθηκε με εναλλακτικό τρόπο.

Απόσπασμα Δ (αναφορά 4η, §2):

«*Έπειτα η Δ. του ζήτησε να βρει τη διαφορά των ηλικιών μας, δηλαδή πόσο πιο μικρός είναι εκείνος. Ο Ε. αρχικά σκέφτηκε να κάνει πολλαπλασιασμό γράφοντας τα έτη γέννησης το ένα κάτω από το άλλο και το σύμβολο «επί» […] και κατέληξε σ' έναν πολύ μεγάλο αριθμό εκατομμυρίων […] και τον ρώτησα αν είναι λογικό αυτό το αποτέλεσμα που βρήκε και τι σημαίνει με βάση την ερώτηση που του έγινε αρχικά σχετικά με το πόσο μεγαλύτερος είναι ο ένας από το άλλον. Ο Ε. κοιτούσε τον αριθμό κατάπληκτος λέγοντας «αυτό δεν είναι σωστό!» και όταν τον ρώτησα «γιατί;» απάντησε «είναι πολύ μεγάλο!». Του ζήτησα να πει πιο συγκεκριμένα <u>γιατί</u> και τι καταλαβαίνει και εκείνος επανέλαβε «αυτό δεν είναι σωστό!» […] και του είπα πως καλά κατάλαβε, γιατί δε γίνεται να είμαι τόσα εκατομμύρια χρονών. Τότε τον ρώτησα πώς θα βρει την πραγματική διαφορά των ηλικιών μας και έγραψε από δίπλα την πράξη με τους ίδιους αριθμούς σε αφαίρεση και το υπολόγισε».*

Η πολυτροπικότητα μεθόδων γίνεται φανερή και στο περιστατικό αυτοδιόρθωσης της Λ. και ταυτόχρονα μη αυτοδιόρθωσης της Μ. που παρατηρήθηκε κατά την εκτέλεση ενός γραπτού έργου σχετικά με το νόμισμα του ευρώ. Η ίδια η Λ. εξέφρασε τη δυσκολία της σε ένα μέρος αυτού του έργου και η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός προσπάθησε να συμβάλλει στην κατανόηση των δύο κοριτσιών χρησιμοποιώντας χειραπτικό υλικό, βιωματικά παραδείγματα, εναλλαγή κώδικα σε έναν μαθηματικό διάλογο με την ίδια και τη συμμαθήτριά της, αλλά και επιτρέποντας έναν χώρο συνομιλίας στη μητρική της γλώσσα με τη Λ., που τελικά οδηγήθηκε σε σωστό αποτέλεσμα. Παρόλα αυτά, η Μ. χρειάστηκε πολλές κατευθύνσεις για την κατανόηση του υπό διαπραγμάτευση μαθηματικού περιεχομένου.

Απόσπασμα Ε (αναφορά 15η, §15-18):
«Η Μ. είπε πως μέτρησε 1,2,3,4 και […]πως έκανε όπως παραπάνω στην τσάντα (δείχνοντας την τσάντα). Τότε κατάλαβα πως η τσάντα την βοήθησε γιατί εκεί οι αριθμοί ήταν μικρότεροι και με διαφορά 10 €, όπου μέτρησε εύκολα ανά 10 για να βρει την απάντηση 40 € στο laptop. […] Τότε, διάλεξα μερικά ψεύτικα νομίσματα και τους τα έδωσα […] και προσποιήθηκα ότι είμαι πελάτης σε μαγαζί και αγοράζω την κασετίνα της Μ. που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως. Μάλιστα, κόλλησα ένα χαρτάκι επάνω της και έγραψα την τιμή της […] ζητώντας της να μου δείξει πόσα χρήματα πρέπει να δώσω από το πορτοφόλι μου για να αγοράσω την κασετίνα. Εκείνη είπε 8 €, όμως μου έδωσε 7. Η Λ. επενέβη, λέγοντας «7» και επανέλαβα: «7€, 5 και 2 μου έδωσες που κάνουν 7». […] Τότε η Λ. […] ξεκίνησε να μιλά στη Μ. στη μητρική τους […] έγραψε σωστά 50c, οπότε απευθύνθηκα στη Μ.: «Εσύ έγραψες 1 € και 50 λεπτά. Όμως αυτό είναι παραπάνω από όσα χρειάζομαι, έτσι; If you give me 1 € και 50 λεπτά, I give you back 1 € because I need 50 λεπτά μόνο. Οπότε… τα 50 λεπτά μπορείς να τα γράψεις όπως η Λ., ή … (σβήνοντας το 1 από το 1,50 που έγραψε και γράφοντας 0) έτσι. Με το μηδέν μπροστά και κόμμα. Κατάλαβες;». Η Μ. με ρώτησε «γιατί;» και της εξήγησα πως και οι δύο τρόποι γραφής δείχνουν το ίδιο, δηλαδή τα 50 λ. ή αλλιώς μισό ευρώ και πως έτσι τώρα μπορούμε να ελέγξουμε με πρόσθεση ότι 50 λ. + 6 ευρώ και 50 λ κάνουν 7 ευρώ, δηλαδή όσα ακριβώς έδωσα».

2. Ενεργοποίηση προηγούμενων γνώσεων

Μία ακόμη στρατηγική που αξιοποιήθηκε ήταν η ενεργοποίηση των προηγούμενων γνώσεων των μαθητών. Αυτό έγινε με υποστηρικτικές σκαλωσιές, όπως φαίνεται σε κάποιες περιπτώσεις που αναφέρθηκαν προηγουμένως (αποσπάσματα Γ και Ε), καθώς και με επιπλέον μεθόδους, όπως τη χρήση του πίνακα και του ζαριού. Μάλιστα, διακρίνεται η εφαρμογή της στρατηγικής σε μεγάλη ομάδα παιδιών (α’), σε ζεύγη (β’) ή εξατομικευμένα (γ_1’ και γ_2’). Παρακάτω δίνονται ενδεικτικά αποσπάσματα των αναφορών του Παραρτήματος για κάθε περίσταση:

Απόσπασμα α’ (αναφορά 16η, §13-14):
«Έπειτα, έγραψα 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 και υπογράμμισα τα κοινά σημεία στο πρόθημα (τρία-τριάντα, τέσσερα-σαράντα κλπ) και κύκλωσα τις κοινές καταλήξεις

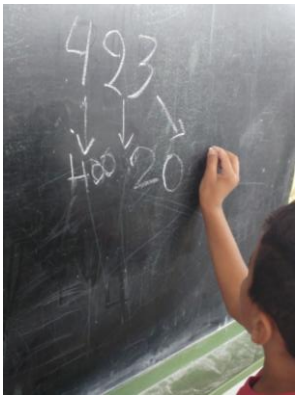
(τριάντα-σαράντα, πενήντα-εξήντα κλπ). Διαβάσαμε τους αριθμούς 2-3 φορές προφορικά όλοι μαζί. […] Στη συνέχεια, έγραψα τυχαίους μη στρογγυλούς αριθμούς (π.χ. 16, 27, 38, 49, 56, 61, 77, 84, 92) και ζήτησα να τους διαβάσουν προφορικά. Τα περισσότερα παιδιά τα κατάφεραν, όμως χρειάστηκε να επαναλάβω πιο καθαρά και δυνατά για να κάνουν κι οι υπόλοιποι το ίδιο. Εδώ η Αν. είπε πως και στη μητρική της γλώσσα έτσι τα λένε μόνο που βάζουν το «και» ανάμεσα στις λέξεις (π.χ. λένε το 56 ως 50+6, δηλαδή το και ακούγεται) και η Φ. συμφώνησε».

Απόσπασμα β' (αναφορά 1η, §3-5):
«Στα προβλήματα φάνηκε ότι ήξεραν πρόσθεση με κρατούμενο αλλά όχι αφαίρεση με δανεικό. Έτσι προσπάθησα να την εξηγήσω δείχνοντας την αξία της θέσης των ψηφίων των αριθμών.
π.χ. το 85-27 έδειξα ως

	70	15
	~~80~~	~~5~~
-	20	7
	50	8 → 50 + 8 = 58

[…] Μετά η Τζ. έκανε την αφαίρεση 48-35 σωστά με τον ίδιο τρόπο που της έδειξα (έδειχνε ότι είχε κατανοήσει εύκολα, κουνούσε καταφατικά το κεφάλι και ανέφερε «me, mathematics good»)».

Απόσπασμα γ_1' (αναφορά 2η, §1-2):
*«Τότε σκέφτηκα να του ζητήσω να κάνει προσθέσεις των ίδιων αριθμών: 5+5, 6+6, 7+7, 8+8, 9+9, γιατί στόχευσα στο να μπορεί να κάνει τις προσθέσεις στρατηγική. Του είπα διάφορα αθροίσματα τα οποία έγραφε στο τετράδιο του, π.χ. 5+9=**5+5**+4=**10**+4=14 (υπογράμμιζα και ένωνα με γραμμές/βελάκια τους αριθμούς). Στο άθροισμα 6+8 ο Σ. έγραψε: 6+8=6+6+2=12+2=14. Δηλαδή, προτίμησε τον χωρισμό του 8 στους αριθμούς 6+2 ώστε να προκύψει το άθροισμα 6+6 το οποίο γνώριζε, αφού είχε υπολογίσει προηγουμένως. […] Τότε χρησιμοποίησα ζάρια για […] να φτιάξει τις κουκκίδες που έδειχναν, ώστε να εξοικειώνεται οπτικά με το πώς αναπαριστώνται οι κουκκίδες, πώς μοιάζουν και ταυτόχρονα να κυκλώνει τη δεκάδα και να βλέπει ότι όσες περισσεύουν εκτός της δεκάδας είναι αυτές που βοηθούν στο να βγει το αποτέλεσμα, π.χ. στις 6+8 κουκκίδες περισσεύουν 4 κουκκίδες που φαίνονται στο αποτέλεσμα 14 (10+4)».*



Εικόνα 13: Δεκαδική ανάλυση αριθμού

Απόσπασμα γ_2' (αναφορά 16η, §16):
«Μετά, ζήτησα από τον Αχ. να έρθει στον πίνακα και να προσπαθήσει να διαβάσει τον αριθμό 423. Επειδή δυσκολευόταν, του εξήγησα πώς να αναλύσει τον αριθμό στις αξίες που κρύβουν τα ψηφία του, δείχνοντας ένα παράδειγμα με τον αριθμό 315 ως 315=300+10+5. Ο Αχ. είπε πως κατάλαβε και έβαλε βελάκια κάτω από κάθε ψηφίο του αριθμού του και έγραψε αντίστοιχα 400, 20, 3. Τον ρώτησα αν τώρα που ξέρει τι κρύβει κάθε ψηφίο μπορεί πιο εύκολα να διαβάσει τον αριθμό και τον βοήθησα να πει

«τετρακόσια» αντί για «τεσσερακό…» που ξεκίνησε να λέει. Στο 23 δεν αντιμετώπισε κανένα πρόβλημα και χρησιμοποίησε τα δάχτυλά του ως το 3 (δηλαδή βρήκε πώς λέγεται το 3 ξεκινώντας από το 1, 2, 3), ενώ τον βοηθούσα δείχνοντας τους κάτω αριθμούς και κρύβοντας τους υπόλοιπους με το χέρι μου.»

3. Ποικιλία μαθηματικών αναπαραστάσεων

Καθ' όλη τη διάρκεια της παρουσίας της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού στη δομή φιλοξενίας των προσφύγων χρησιμοποίησε πολλές αναπαραστάσεις, όπως χειραπτικά υλικά, τεχνολογικά μέσα, διαμεσολαβητικά εργαλεία και χειρονομίες. Στην ανάλυση που ακολουθεί γίνεται λόγος για κάθε ένα από τα παραπάνω είδη, με εξαίρεση τις χειρονομίες που καταγράφονται ως διακριτή στρατηγική κοινωνιο-γνωστικού προσανατολισμού.

Σε μία πρώτη διάκριση των αναπαραστάσεων εντοπίζονται αυτές που κατασκεύασε η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός, αυτές που δημιούργησαν οι μαθητές και οι αναπαραστάσεις του περιβάλλοντος. Στην πρώτη ομάδα ανήκουν αναπαραστάσεις όπως αριθμογραμμές, σχήματα, γραφήματα, κλασματικές περιοχές (γραμμοσκιασμένα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, κύκλοι κ.ά.) και το διάγραμμα των τεσσάρων τετραγώνων (βλ. Παράρτημα, αναφορά 14^{η}). Στη δεύτερη ομάδα εντάσσονται οι ίδιες αναπαραστάσεις κατασκευασμένες από τους μαθητές, όπως η αριθμογραμμή του Μ. (βλ. Παράρτημα, αναφορά 12^{η}), οι κλασματικές περιοχές της Γμ. (βλ. Παράρτημα, αναφορά 14^{η}) και τα γραφήματα (σημειόγραμμα και ραβδόγραμμα) των Μν. και Ι. αντίστοιχα, με τη βοήθεια της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού (βλ. Παράρτημα, αναφορά 12^{η}). Στην τρίτη ομάδα συμπεριλαμβάνονται αναπαραστάσεις του περιβάλλοντος χώρου, όπως τα ενδοσχολικά και εξωσχολικά αντικείμενα που μοιάζουν με σχήματα στο επίπεδο και οι εικόνες άλλων αντικειμένων της καθημερινής ζωής των μαθητών που έδειξε η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός σε ψηφιακή μορφή και που δεν εντοπίζονταν στο υπάρχον πεδίο (βλ. Παράρτημα, αναφορά 17^{η}).

Συνεχίζοντας με τα **χειραπτικά υλικά**, διακρίνονται δύο κατηγορίες: το υλικό που είχε προετοιμάσει εξ' ολοκλήρου η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός και χρησιμοποιήθηκε αυτούσιο από τα παιδιά (α') και το υλικό που αξιοποίησαν τα παιδιά για προσωπικές δημιουργίες (β'). Τα απτά αυτά αντικείμενα χρησιμοποιήθηκαν από διάφορους μαθητές σε διάφορες περιόδους.

Στην κατηγορία α' ανήκουν τα νομίσματα (ψεύτικα κέρματα και χαρτονομίσματα του ευρώ), τα σχήματα από μεγάλα χρωματιστά ξυλάκια (τύπου γλωσσοπίεστρα) και τα πλαστικά ποτήρια. Σε κάθε περίπτωση έγινε επίδειξη του υλικού και έπειτα επεξεργασία και χρήση του από τα παιδιά, με μεγάλο ενδιαφέρον.

Πρώτον, τα νομίσματα χρησιμοποιήθηκαν από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό για την εξήγηση των σχέσεων μεταξύ των διαφόρων κερμάτων και χαρτονομισμάτων. Αργότερα, χρησιμοποιήθηκαν από τα παιδιά για την απεικόνιση και συμπλήρωση

νομισματικών ποσών, που κόλλησαν σε κάρτες αντικειμένων. Δεύτερον, τα σχήματα χρησιμοποιήθηκαν από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό για την επεξεργασία και συζήτηση των ιδιοτήτων τους, ενώ από τα παιδιά για τον εντοπισμό αντικειμένων κάθε σχήματος στον περιβάλλοντα χώρο τους και τη σύγκρισή τους με άλλα σχήματα. Τρίτον, τα πλαστικά ποτήρια χρησιμοποιήθηκαν από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό και από τη μαθήτρια για τον σχηματισμό πολυψήφιων αριθμών και την επίδειξη του τρόπου εύρεσης της αξίας κάθε θέσης.

Στην κατηγορία β' ανήκουν τα καπάκια (αναψυκτικού), τα μικρά χρωματιστά ξυλάκια και η πλαστελίνη. Τα δύο τελευταία υλικά χρησιμοποιήθηκαν από τα παιδιά για την κατασκευή σχημάτων στο επίπεδο (τετράγωνο, τρίγωνο, ορθογώνιο ή πλάγιο παραλληλόγραμμο) (Εικόνα 16), με τη διαφορά ότι η πλαστελίνη παρείχε επιπλέον τη δυνατότητα κατασκευής κύκλου αλλά και των γραμμάτων των λέξεων κάθε σχήματος (Εικόνα 18). Τα καπάκια χρησιμοποιήθηκαν μόνο για την κατασκευή κύκλου.

Συνολικά, λοιπόν, οι λόγοι ενσωμάτωσης του χειραπτικού υλικού αφορούν κυρίως στην παροχή περισσότερων οπτικών και απτών πληροφοριών στους δίγλωσσους ή αναδυόμενους δίγλωσσους μαθητές, ώστε να διευκολυνθεί η σύνδεση της γλώσσας με το περιεχόμενο. Όπως φάνηκε, τα παιδιά είχαν μεγαλύτερο ενδιαφέρον συμμετοχής και απέκτησαν τη δυνατότητα μη γλωσσικής έκφρασης της κατανόησής τους, ιδιαίτερα η Α. (βλ. Παράρτημα, αναφορά $17^{η}$ & $18^{η}$) και η Μπ., σύμφωνα με το απόσπασμα (αναφορά $18^{η}$, §8,10):

«Στη συνέχεια έδωσα σε όλους πλαστελίνες για να φτιάξουν πάλι τα σχήματα […] και το όνομα του σχήματος με την πλαστελίνη, κάνοντας παράλληλα εξάσκηση στη γραφή. Τα παιδιά ήταν ενθουσιασμένα. […]Μου έκανε εντύπωση το ταλέντο της Μπ., που δεν εκφράζεται εύκολα λεκτικά, αλλά έδειξε με αυτόν τον τρόπο την κατανόησή της. […] Όλα τα παιδιά ολοκλήρωσαν σωστά το έργο, μιας και ήδη είχαν γράψει τις λέξεις με την πλαστελίνη. Μάλιστα, η Μπ. τελείωσε πρώτη και της είπα πως κέρδισε το παιχνίδι και αυτό με χαροποιεί πολύ και εκείνη χαμογέλασε τόσο έντονα που δεν την έχω ξαναδεί».

Σχετικά με τα **τεχνολογικά μέσα** που χρησιμοποιήθηκαν, αυτά συνιστούσαν η κινητή συσκευή και το τάμπλετ. Ο σκοπός τους ήταν γενικότερα η πρόσβαση στο διαδίκτυο και η ενσωμάτωση ψηφιακών εφαρμογών σχετικών με τα μαθηματικά.

Συγκεκριμένα, η κινητή συσκευή αποτέλεσε άμεσο τρόπο αναζήτησης και μετάφρασης λέξεων, κυρίως στο Google Translate ($α_1$), είτε με τη χρήση της φωνής του είτε όχι. Δοκιμάστηκε και μία αντίστοιχη εφαρμογή, που όμως δεν παρείχε πάντα αξιόπιστες πληροφορίες, σύμφωνα με τις αντιδράσεις των παιδιών και δεν καταγράφεται ως άλλη περίπτωση. Επίσης, έγινε χρήση των εικόνων Google ($α_2$) αλλά και των χαρτών Google ($α_3$). Ακόμη, στο πιλοτικό στάδιο της έρευνας προβλήθηκε βίντεο με αραβικούς υπότιτλους γνωστής ταινίας και ιδιαίτερα αγαπητής στα παιδιά ($α_4$).

Απόσπασμα α_1 (αναφορά 19η, §2):
«Της έδωσα κάποιους αριθμούς σε χαρτάκια τύπου post-it ώστε να τους ταξινομήσει από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο. Πρώτα, διάβασε όλους τους αριθμούς προφορικά και της ζήτησα να βρει τον μικρότερο και τον μεγαλύτερο από όλους. Αρχικά, δεν καταλάβαινε την οδηγία στα ελληνικά, στα αγγλικά, ούτε τις χειρονομίες και τα σύμβολα «>» και «<» κι έτσι χρησιμοποίησα το Google translate για τις λέξεις μεγαλύτερο και μικρότερο. Η Αν. διάβασε τις μεταφρασμένες λέξεις στη γλώσσα της και με ρώτησε «of all the numbers?... and ....?» (όπου ... οι λέξεις μεγαλύτερο και μικρότερο αντίστοιχα στα περσικά), ουσιαστικά επαναδιατυπώνοντας την οδηγία».

Απόσπασμα α_2 (αναφορά 17η, §12):
«Μετά ρώτησα τα κορίτσια αν ξέρουν κάποιο αντικείμενο που δεν είδαν μέχρι τότε και, έτσι, χρησιμοποίησαν το κινητό μου για να μου δείξουν στο Google Images. Η Φ. και η Αν. αποφάσισαν να γράψουν οι ίδιες στα αγγλικά και να μου δείξουν τη σημαία της χώρας τους, με τα ορθογώνια σχήματα, ενώ η Α. μου έδειξε τις φιγούρες σε ένα από τα αυτοκόλλητα που της είχα δώσει και κατάλαβα πως μου ζητούσε να γράψω τον τίτλο της ταινίας (frozen) και από τις εικόνες που φάνηκαν μου έδειξε τον χιονάνθρωπο που μοιάζει να αποτελείται από κύκλους».

Απόσπασμα α_3 (αναφορά 11η, §12):
«Η Φ. είπε πως έχει πάει στο Lidl, και της έδωσα το διαφημιστικό φυλλάδιο του lidl. Τότε άνοιξα τους χάρτες Google και τους έδειξα πού είναι το κάθε σούπερ μάρκετ σε σχέση με την τρέχουσα θέση τους και πώς να πάνε εκεί. Μάλιστα, παρατήρησαν πως ο πλοηγός έγραφε τη διάρκεια της διαδρομής με αυτοκίνητο και με τα πόδια και πως η διαδρομή για το ένα σούπερ μάρκετ είναι πιο γρήγορη από ότι για το άλλο. Επίσης, είδαμε τις οδηγίες που έδινε αναλυτικά ο χάρτης παράλληλα με την προβολή του δορυφόρου. Έτσι, είδαν τη διαδρομή που ακολούθησαν για να πάνε στα σούπερ μάρκετ και παρατήρησαν ότι είναι πολύ κοντά και πως η απόστασή τους σε διάρκεια και χιλιόμετρα είναι σχεδόν ίδια».

Απόσπασμα α_4 (αναφορά 5η, §3-4):
«Αυτό μου θύμισε μία σκηνή από τον Χάρι Πότερ και […] βρήκα ένα βιντεάκι που χρησιμοποιεί υπότιτλους, τους οποίους ρύθμισα στα αραβικά. […] Συνέχισαν το παιχνίδι λέγοντας τις συντεταγμένες του σημείου όπου μετακινούσαν το πιόνι τους, όπως τα παιδιά στο βίντεο. […] Τους είπα πως έχω βρεθεί κι εγώ σ' ένα μεγάλο σκάκι με μικρά πιόνια και μετακινούμουν κι εγώ σαν πιόνι. Στο διάλειμμα που ακολούθησε πήγαμε έξω και κάναμε πως ήμασταν πιόνια, π.χ. το άλογο ή ο βασιλιάς […]»

Εικόνα 14: Συντεταγμένες στο σκάκι

Η ηλεκτρονική συσκευή τάμπλετ χρησιμοποιήθηκε για την εκτέλεση γρήγορων νοερών υπολογισμών σε μία μαθηματική εφαρμογή εκ μέρους ενός μαθητή, χωρίς την καθοδήγηση της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού (β_1), για την προβολή

μετατροπέα νομισματικών ποσοτήτων, όπως έχει ήδη αναφερθεί καθώς και για την ενασχόληση των παιδιών με ένα ψηφιακό παιχνίδι (βλ. Παράρτημα, αναφορά $9^{η}$).

Απόσπασμα $β_1$ (αναφορά $4^{η}$, §3-4):
«Ξεκίνησε με τον πολλαπλασιασμό θετικών ακεραίων στο εύκολο επίπεδο, όπου έβρισε τις σωστές απαντήσει με μεγάλη ευκολία […] και τον ρώτησα πώς μπορεί να τα υπολογίζει τόσο γρήγορα γρήγορα (π.χ. τον πολλαπλασιασμό 36·53).
Μου εξήγησε ότι υπολογίζει με βάση τα τελευταία ψηφία και τον πιο κοντινό αριθμό (στο περίπου δηλαδή) που μπορεί να προκύπτει ως γινόμενο (συνδυαστικά αυτοί οι δύο τρόποι σκέψης). Ο τρόπος που μου εξηγούσε (δείχνοντας τα αντίστοιχα ψηφία καθώς μιλούσε ώστε να καταλάβω) ήταν σαν να το θεωρούσε απόλυτα φυσιολογικό […]».

Στη διάρκεια παραμονής της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού στον σχολικό χώρο του καταυλισμού χρησιμοποίησε ποικίλα **διαμεσολαβητικά εργαλεία**. Αυτά διακρίνονται από άλλα είδη αναπαραστάσεων, γιατί στόχος της ενσωμάτωσής τους ήταν η διευκόλυνση της μάθησης, όπως αναδεικνύεται παρακάτω. Μερικά εργαλεία ήταν: α) ο μετατροπέας, β) η αριθμομηχανή, γ) τα ζάρια, δ) οι κάρτες, ε) οι αποδείξεις, στ) τα διαφημιστικά φυλλάδια των σούπερ μάρκετ και ζ) τα γεωμετρικά όργανα.

α) Η χρήση του μετατροπέα πραγματοποιήθηκε για την εύρεση της ισοτιμίας του ευρώ με τα νομίσματα των χωρών καταγωγής των μαθητών. Οι ίδιοι έδιναν παραδείγματα από τον περιβάλλοντα χώρο τους, όπως ένα μικρό μπουκάλι νερό, και η τιμή τους πληκτρολογούνταν στον μετατροπέα. Αμέσως, γινόταν δυνατή η γνώση του αντίστοιχου ποσού στα άλλα νομίσματα. Με τον τρόπο αυτό, τα παιδιά ενεργοποίησαν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους και μπόρεσαν να εισαχθούν σε μία λογική σύγκρισης του μεγέθους δύο ποσών στα διαφορετικά νομίσματα (βλ. Παράρτημα, αναφορά $8^{η}$).

β) Η λειτουργία της αριθμομηχανής ήταν κυρίως διευκολυντική, για τον υπολογισμό απαιτητικών πράξεων εκ μέρους των μαθητών. Τα περισσότερα παιδιά ήταν εξοικειωμένα με τον βασικό τρόπο χρήσης της, με εξαίρεση μία μαθήτρια.

Πιο αναλυτικά, ένας τρόπος ενσωμάτωσης της αριθμομηχανής ήταν αυτός της συνεργασίας των μαθητών στην πληκτρολόγηση ποσών και αριθμητικών συμβόλων για την εύρεση της συνολικής τιμής των προϊόντων που διάλεξαν να «αγοράσουν» από το φυλλάδιο του σούπερ μάρκετ. Αυτό φαίνεται στο απόσπασμα $β_1$ των αναφορών (αναφορά $11^{η}$, §13):

«[…] τους ζήτησα να προσθέσουμε τις τιμές των προϊόντων που διάλεξαν με τη βοήθεια μιας αριθμομηχανής. Ο καθένας πληκτρολόγησε την τιμή του προϊόντος που διάλεξε και ένα μαθηματικό σύμβολο. Η Φ. και η Μπ. πληκτρολόγησαν το σύμβολο της πρόσθεσης και ο Ρ. το σύμβολο του ίσον. Έτσι, διαβάσαμε το συνολικό ποσό.»

Ο άλλος τρόπος χρήσης της αριθμομηχανής ήταν ατομικός. Συγκεκριμένα, κρίθηκε αναγκαίο εργαλείο για την ενθάρρυνση της Αν. προκειμένου να

ολοκληρώσει ένα έργο. Το έργο περιελάμβανε πράξεις διαίρεσης και πολλαπλασιασμού, με τις οποίες δεν είχε επαρκή προηγούμενη επαφή και χάρη στην αριθμομηχανή δεν εμποδίστηκε η επεξεργασία των εννοιών «μισό» και «διπλάσιο». Όλα τα παραπάνω διακρίνονται στο απόσπασμα β_2 (αναφορά 19η, §14):

«Η Αν είπε «I understand, but I don't know this teacher», δείχνοντας το σύμβολο της διαίρεσης. Έτσι, την ενθάρρυνα να κάνει τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις με το νου, ενώ για το μισό και το διπλάσιο της είπα πως μπορεί να χρησιμοποιήσει την αριθμομηχανή. Ήξερε πώς να την χρησιμοποιήσει και ξαφνιάστηκε όταν είδε τον αριθμό 2,5 ως το μισό του 5».

Σε άλλη περίπτωση, η αριθμομηχανή χρησιμοποιήθηκε συνεργατικά από τις μαθήτριες Λ. και Μ. κατά την ατομική εργασία τους. Απώτερος σκοπός ήταν η εκτέλεση πράξεων και η σύγκριση του αποτελέσματος με το ποσό των 60€, για να διαπιστωθεί η δυνατότητα ή μη αγοράς κάποιων προϊόντων. Εδώ η αριθμομηχανή δε δόθηκε αμέσως από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό, αλλά τη στιγμή που έγινε αντιληπτή η δυσκολία των μαθητριών με την εκτέλεση των υπολογισμών, είτε γραπτά είτε νοερά. Το απόσπασμα $\beta_{3\text{-I}}$ (αναφορά 15η, §5) είναι χαρακτηριστικό αυτής της τεχνικής:

«Στη δεύτερη άσκηση τα κορίτσια δυσκολεύτηκαν περισσότερο. Αρχικά έβλεπα την αντίδρασή τους με τις πράξεις με το νου. Η Μ. ξεκίνησε βάζοντας «✓» στο 5 και στο 3 και στη συνέχεια πήγε να γράψει μια πράξη στο θρανίο της, αλλά τότε την διέκοψα και της έδωσα την αριθμομηχανή για να την κάνει εκεί, όπως έδωσα και στην Λ.»

Σχετικά με τη μαθήτρια που δεν ήταν εξοικειωμένη με τη χρήση και λειτουργία της αριθμομηχανής φάνηκε πως η συμβολή της συμμαθήτριάς της ήταν καθοριστική. Η Λ. δεν εξέφρασε απορία στην ερώτηση της εκπαιδευτικού για τη γνώση της αριθμομηχανής και οι λόγοι μπορεί να είναι πολλοί: αδυναμία κατανόησης της ερώτησης, αισθήματα ανασφάλειας και ντροπής έκφρασης ή απουσία αρκετών ευκαιριών από την πλευρά της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού. Αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά στη φράση της Λ. «madame don't go» («κυρία μην φύγετε»), που συμπεριλαμβάνεται στο απόσπασμα $\beta_{3\text{-II}}$ (αναφορά 15η, §6-7) που ακολουθεί:

«Χωρίς να απομακρυνθώ παρατηρούσα τα κορίτσια σιωπηρά, δίνοντάς τους τον ατομικό χώρο να δοκιμάσουν την αριθμομηχανή […]. Είδα ότι η Λ. ήταν πιο προβληματισμένη και δε χρησιμοποίησε την υποδιαστολή στον αριθμό που πληκτρολόγησε. Τότε απευθύνθηκα στη Μ., η οποία είχε μόλις πληκτρολογήσει το «+» μετά από έναν δεκαδικό αριθμό. Απαντώντας στη Λ. και δείχνοντας την εικόνα 5 του φυλλαδίου, πληκτρολόγησε 36,40 και έπειτα η Λ. επενέβη πατώντας το «=».
Τα κορίτσια συζήτησαν στη Γ1 τους και φάνηκαν να διαφωνούν πάνω στο αποτέλεσμα που βρήκαν. Μου έδειξαν το αποτέλεσμα στην οθόνη της αριθμομηχανής, όμως, αντί να δώσω βάση στο αν αυτό είναι σωστό ή λάθος, υπενθύμισα τον σκοπό της άσκησης […]. Τις ρώτησα αν καταλαβαίνουν και ανέφερα πως τα πηγαίνουν πολύ καλά,

προτρέποντάς τες να συνεχίσουν. Η Λ. μου είπε "madame don't go" και της απάντησα "εδώ είμαι"».

Επομένως, συγκεντρώνοντας τις παραπάνω περιπτώσεις φαίνεται ότι η αριθμομηχανή βοήθησε στην ενασχόληση των μαθητών με το μαθηματικό περιεχόμενο, χωρίς την αποδιοργάνωση της σκέψης τους για την εκτέλεση υπολογισμών. Στο πραγματολογικό υλικό που παρουσιάζεται στο Παράρτημα της εργασίας μπορούν να μελετηθούν πιο διεξοδικά τα προαναφερόμενα συμβάντα.

γ) Το ζάρι χρησιμοποιήθηκε ως ένα εργαλείο που παρέχει παιγνιώδη μορφή στη διδασκαλία και μάθηση. Διακρίθηκαν οι εξής τρεις τρόποι χρήσης του: i) ατομικά, ii) σε μικρή ομάδα και iii) συνεργατικά με το σύνολο της τάξης.

Η ατομική χρήση πραγματοποιήθηκε για τη δημιουργία τυχαίων προσθέσεων από τον ίδιο τον μαθητή, τον Σ., και όχι από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό, αφενός για τη σύνδεση της αναπαράστασης των αριθμών με κουκκίδες και σύμβολα και αφετέρου για την εξοικείωσή του με την οπτικοποίηση της δεκάδας. Στο απόσπασμα γ_i (αναφορά $2^η$, §2) φαίνεται η εν λόγω στρατηγική:

«Τότε χρησιμοποίησα ζάρια για να κάνει τυχαίες προσθέσεις με πιο παιγνιώδη τρόπο και του ζήτησα να φτιάξει τις κουκκίδες που έδειχναν, ώστε να εξοικειώνεται οπτικά με το πώς αναπαριστώνται οι κουκκίδες, πώς μοιάζουν και ταυτόχρονα να κυκλώνει τη δεκάδα και να βλέπει ότι όσες περισσεύουν εκτός της δεκάδας είναι αυτές που βοηθούν στο να βγει το αποτέλεσμα, π.χ. στις 6+8 κουκκίδες περισσεύουν 4 κουκκίδες που φαίνονται στο αποτέλεσμα 14 (10+4). Εκείνος συμμετείχε με ενθουσιασμό και χρησιμοποιούσε πάντα την ελληνική γλώσσα για να εκφράσει τους αριθμούς. Κάθε φορά που ο Σ. ολοκλήρωνε ένα άθροισμα ζητούσε "κι άλλο, σέλω κι άλλο!" και έριχνε ξανά τα ζάρια».

Στη μικρή ομάδα μαθητών τα ζάρια χρησιμοποιήθηκαν για την υλοποίηση συγκρίσεων αθροισμάτων και την ανακάλυψη στρατηγικών γρήγορων υπολογισμών. Το εν λόγω συμβάν περιγράφεται εκτενώς στις αναφορές που δίνονται στο Παράρτημα της εργασίας, ενώ εδώ δίνεται ενδεικτικά το απόσπασμα γ_{ii} (αναφορά $2^η$, §3) στις γραμμές που ακολουθούν:

«Όλα τα παιδιά έριξαν το ζάρι τους και τους ζήτησα να βρουν ποιος έφερε τον μεγαλύτερο και ποιος τον μικρότερο αριθμό. Ο Σ. πριν το κάνει αυτό βρήκε το άθροισμα των τριών αριθμών με το νου. Η Α. πίστευε ότι έχει φέρει τον μεγαλύτερο, ενώ είχε φέρει τον μικρότερο. Ο Σ. και η Φ. βρήκαν πως η Φ. έφερε τον μεγαλύτερο και η Α. τον μικρότερο […] και προσπαθούσαμε όλοι μαζί να εξηγήσουμε στην Α. […] Η Α. δεν έδειχνε αν καταλαβαίνει ή όχι και έτσι έριξα κι εγώ ένα ζάρι. Ο αριθμός που έτυχε ήταν μεγαλύτερος από του Σ. κι έτσι επανέλαβα ότι ο ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος και ο άλλος μικρότερος και τα παιδιά συμφώνησαν».

Τέλος, στο σύνολο της τάξης το ζάρι χρησιμοποιήθηκε για την ενεργό συμμετοχή των μαθητών σε μια δραστηριότητα και την επικέντρωση της προσοχής

και του ενδιαφέροντός τους. Περισσότερες λεπτομέρειες δίνονται από το απόσπασμα γ_{iii} (αναφορά 13η, §15-16):

« […] έδωσα στα παιδιά ένα μεγάλο ζάρι από βαμβακερό υλικό. Ξεκίνησαν να λένε τους αριθμούς που βλέπουν στο ζάρι και προσέλκυσα την προσοχή τους λέγοντας ότι αυτό είναι ένα ζάρι, που έχει σχήμα κύβου. Ζήτησα από τη Μν. να σχεδιάσει στον πίνακα μία γραμμή και να σημειώσει τους αριθμούς που υπάρχουν στο ζάρι, δηλαδή 1 έως 6. […] Τα παιδιά άρχισαν να ρίχνουν το ζάρι με τη σειρά και η Μν. (πρώτα με τη βοήθειά μου και έπειτα χωρίς) σημείωνε ένα Χ στην αντίστοιχη νοητή στήλη του πίνακα στη γραμμή που έκανε […]. Αυτή η διαδικασία (ρίψη ζαριού) πραγματοποιήθηκε αρχικά από μία φορά για κάθε μαθητή και έπειτα μερικές ακόμα φορές μέχρι να συμπληρωθούν 20 ρίψεις».

δ) Οι κάρτες με τα νομισματικά ποσά ή τις εικόνες αντικειμένων χρησιμοποιήθηκαν για την παροχή άμεσων οπτικών πληροφοριών στους μαθητές και τον συνδυασμό τους με τα ακουστικά ερεθίσματα που προσλάμβαναν σχετικά με το ευρώ. Με τις κάρτες αυτές τα παιδιά πήραν στα χέρια τους τη διδασκαλία και, με τρόπο επικοινωνίας τις γλώσσες ή τις χειρονομίες τους, άρχισαν να δείχνουν στην ερευνήτρια-εκπαιδευτικό και στους συμμαθητές τους τις γνώσεις τους. Έπειτα, οι ίδιες κάρτες χρησιμοποιήθηκαν σε ένα παιχνίδι ταξινόμησης νομισματικών ποσών σε φακέλους, σύμφωνα με την κατηγορία στην οποία ανήκουν (π.χ. περισσότερο από 2,50 ευρώ). Ακόμη, στη δεύτερη όψη των καρτών τα παιδιά κλήθηκαν αργότερα να εντοπίσουν και να κολλήσουν τα νομίσματα που απαιτούνται για τη δημιουργία του αναγραφόμενο ποσού. Ακολουθεί το απόσπασμα δ_1 (αναφορά 8η, §16-17):

«Ζήτησα την προσοχή τους δείχνοντας την πρώτη κάρτα με ένα παγωτό, το οποίο είχε αναφέρει η Μ. Τους ρώτησα αν μπορεί κανείς να πει πόσο κοστίζει. Αυτό που έκαναν όλα τα παιδιά ήταν να δουν τα νομίσματα της κάρτας και να διαλέξουν τα αντίστοιχα από αυτά που είχαν μπροστά τους λέγοντας «1, 20, 10», «madame, look», «madame, να» […] Τους επιβράβευσα και τους είπα δείχνοντας στο δεκαδικό ποσό ότι «κοστίζει 1 ευρώ και (έμφαση στο σύμβολο κόμμα και τη λέξη και) 30 λεπτά/cents» […] Επίσης, επανέλαβα την ανάγνωση του ποσού της κάρτας δυνατά και ρώτησα αν κατάλαβαν.
Στις επόμενες κάρτες έγινε η ίδια διαδικασία, με τα παιδιά να επιλέγουν κάθε φορά το αντίστοιχο ποσό από τα νομίσματα που είχαν ατομικά μπροστά τους […]».

ε) Οι αληθινές αποδείξεις αποτέλεσαν υλικό που συνέδεσαν την τάξη με εκτός σχολείου δραστηριότητες. Με αυτές τα παιδιά ήρθαν σε επαφή με τον κόσμο των ενηλίκων και προσπάθησαν να αποκωδικοποιήσουν τα στοιχεία που αναγράφονται ως τις πληροφορίες που αντιλαμβάνονται οι «μεγάλοι». Το θετικό στοιχείο εδώ ήταν ο κοινός τρόπος οργάνωσης των μηνυμάτων που συμπεριλαμβάνονται στις αποδείξεις παγκοσμίως, κάνοντάς τες μη γλωσσικά εξαρτώμενες. Έτσι, προκλήθηκε το ενδιαφέρον πολλών παιδιών και κατόρθωσαν να εντοπίσουν τα δεδομένα, μαθηματικά ή μη, που περιέχει μια απόδειξη καφετέριας, βενζινάδικου, περιπτέρου,

βιβλιοπωλείου κ.ά. Περισσότερες πληροφορίες για την τεχνική αυτή καταγράφονται στο Παράρτημα της εργασίας (αναφορά 11η, §14).

στ) Τα διαφημιστικά φυλλάδια του σούπερ μάρκετ είχαν διττό ρόλο: την παρατήρηση προϊόντων και των τιμών τους και την επιλογή αγοράς κάποιων από αυτά. Αυτό περιγράφεται στο επεισόδιο που ακολουθεί.

Επεισόδιο$_{στ}$ (αναφορά 11η, §11,13): Τα παιδιά καθώς ξεφύλλιζαν τους καταλόγους ονόμαζαν στην ελληνική γλώσσα τα προϊόντα που ήξεραν και ρωτούσαν την ονομασία άλλων. Επίσης, παρατήρησαν πολλά προϊόντα σε προσφορά και διάλεξαν μερικά από επιμέρους «γωνιές» των καταστημάτων (κρεοπωλείο, μανάβικο και σχολικά προϊόντα), προσθέτοντας τις τελικές τιμές τους. Με τον τρόπο αυτό αναπτύχθηκε το λεξιλόγιο των μαθητών.

ζ) Τα γεωμετρικά όργανα (χάρακας, γνώμονας, διαβήτης, μέτρο) χρησιμοποιήθηκαν στο πιλοτικό στάδιο της έρευνας κατά την ενασχόληση των παιδιών με τη σχεδίαση σχημάτων ή γραμμών, τη μέτρησή τους και τη μέτρηση του δικού τους ύψους. Ειδικά στην τελευταία περίπτωση, διαπιστώθηκε πως τα παιδιά απέκτησαν ή επισημοποίησαν γνώσεις για τους δεκαδικούς αριθμούς και αλληλεπιδρούσαν με αρκετά μεγάλη συμμετοχικότητα, όπως φαίνεται στην παρακάτω καταγραφή:

Απόσπασμα ζ (αναφορά 6η, §4, 7, 8):
«[…] έδειξα σε όλα τα παιδιά το μέτρο, λέγοντάς τους πως για μεγάλες επιφάνειες χρησιμοποιούμε το μέτρο που ισούται με 100 cm και για μικρές χρησιμοποιούμε τον χάρακα που μπορεί να είναι 10, 15, 20 κλπ. εκατοστά όπως αυτοί που έχουμε. Τότε τους ρώτησα «με το μέτρο δηλαδή μπορούμε να μετρήσουμε το…;» και ο Μορ. φώναξε «θρανίο!», ενώ συνέχισα να τους ρωτάω «και τι άλλο;» και τόνισα «ψάξτε γύρω σας να δείτε…». Αμέσως, ο Ε. απάντησε «πίνακα!» και τον επιβράβευσα […] Μετρήσαμε το ύψος όλων των παιδιών και ο καθένας το κατέγραφε στο τετράδιό του στη φράση «Το ύψος μου είναι …. m.». Τα παιδιά βρήκαν ότι πιο ψηλός είναι ο Ε. […]».

4. Χειρονομίες

Μία στρατηγική που έπαιξε καταλυτικό ρόλο στην επικοινωνία της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού με τους μαθητές αλλά και μεταξύ των μαθητών με διαφορετική μητρική γλώσσα ήταν οι χειρονομίες. Αυτές χρησιμοποιήθηκαν σε αρκετά μεγάλη συχνότητα, σε συνδυασμό με την προφορική γλώσσα.

Εικόνα 15: Δημιουργία σχημάτων με τα σώματα

Μεταξύ των χειρονομιών που εφαρμόσθηκαν είναι δυσκολότερο να καταγραφούν όσες αφορούν στη στάση του σώματος και στα νεύματα της ερευνήτριας-

εκπαιδευτικού, λόγω της απουσίας βιντεοσκοπήσεων. Από τα παραπάνω, εξαιρείται η περίπτωση δημιουργίας σχημάτων με τα σώματα των παιδιών, όπως φαίνεται στις διπλανές εικόνες. Παρόλα αυτά, έγινε προσπάθεια αναφοράς μερικών συμβολικών και δεικτικών χειρονομιών. Ενδεικτικά, μερικές από αυτές ήταν:

- η χρήση των δακτύλων που πλησιάζουν ή απομακρύνονται, για την κατανόηση των εννοιών κοντά και μακριά αντίστοιχα (βλ. Παράρτημα, αναφορά 11η)
- το σήκωμα του χεριού, ως επίδειξη οδηγίας που έπρεπε να ακολουθήσουν οι μαθητές στην τάξη για την ολοκλήρωση ενός έργου (βλ. Παράρτημα, αναφορά 13η)
- η επίδειξη λέξεων (π.χ. τη λέξη cent στο κέρμα του ενός λεπτού του ευρώ) αριθμών και συμβόλων, στον πίνακα, στα τετράδια ή στα φυλλάδια των μαθητών
- η χρήση του κατάλληλου πλήθους δακτύλων που αντιστοιχεί σε έναν αριθμό (π.χ. 7 δάχτυλα για τον αριθμό 7)
- η χρήση ενός δακτύλου και πολλών δακτύλων για την κατανόηση της διαφοράς ένα-πολλά, τονίζοντας τις καταλήξεις των λέξεων που μπορεί να συνοδεύουν αυτό το πλήθος (π.χ. ένα πιόνι-πολλά πιόνια, ένα εκατομμύριο-πολλά εκατομμύρια)

Στην περίπτωση των χειρονομιών παρατηρήθηκαν δύο αξιοσημείωτα γεγονότα. Το πρώτο αφορά στη μίμηση μερικών από αυτές από τους μαθητές, όπως η Φ. στις χειρονομίες «κοντά-μακριά» και «περίπου» (αναφορά 11η, §7-8) αλλά και οι μαθήτριες Αν., Α. και Φ. στις χειρονομίες «μία πλευρά-πολλές πλευρές» (βλ. Παράρτημα, αναφορά 17η). Το δεύτερο γεγονός σχετίζεται με την εμφανή λειτουργία των χειρονομιών ως σκαλωσιές, που σταδιακά απομακρύνονταν και τα παιδιά έδειχναν την κατανόησή τους χρησιμοποιώντας μόνο τον προφορικό λόγο.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η σωστή χρήση των λέξεων γωνία και πλευρά σε ενικό και πληθυντικό αριθμό από την Αν., παρά τον αρχικό δισταγμό της και τη δήλωση ότι δυσκολεύεται να τις εκφέρει («*Πλερ.. I can't say it*»). Ακόμη, ο συνδυασμός των δεικτικών χειρονομιών με άλλες στρατηγικές, όπως τις προτροπές με ημιτελείς λέξεις/φράσεις και την επίδειξη μέσω συνεχούς επανάληψης οδήγησε στη διεξαγωγή σαφούς επικοινωνίας μεταξύ της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού και των μαθητριών Λ. και Μ., όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα (αναφορά 15η, §12):

ΕΕ: […] Δίνω 3 ευρώ για ένα… (έδειξα στο 3 ευρώ)
Λ. και Μ. (μαζί): Παγωτό!
ΕΕ: Σωστά. Αλλά δεν κάνει 3 ευρώ. Κάνει… ; (δείχνοντας στη διπλανή στήλη και κοιτώντας τη Λ.)
Λ: 2 ευρώ και 10 cents.
ΕΕ: Μπράβο! Άρα θέλω ρέστα. Πόσα;
Λ. και Μ. (μαζί): Αααα!
Μ.: Ξέρω! Εννια… ενανήντα λεπτά!
ΕΕ: Ναι, 90 λεπτά! Και για την τσάντα;
Μ.: (αφού σκέφτηκε λίγο) 10 ευρώ!

Επίσης, αξίζει να αναφερθεί μία περίπτωση όπου η χρήση χειρονομιών δε συνέβαλε στην επικοινωνία της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού με την αναδυόμενη δίγλωσση μαθήτρια. Η εξαίρεση αυτή περιγράφεται στο απόσπασμα (αναφορά 16η, §21,22) που ακολουθεί:

«Έπειτα έκανα έναν μικρό διάλογο με την Μαρ., όπου την ρώτησα πόσο χρονών είναι για να γνωριστούμε περισσότερο […]. Έδωσε την απάντησή της, αφού σκέφτηκε λίγο, δείχνοντας 10 δάχτυλα, οπότε την προέτρεψα να πει «δέκα» ή «είμαι 10 χρονών» […]. Η Μαρ. συνέχισε να λέει «I am δέκα» […]. Τότε της είπα πως «εγώ είμαι 25 χρονών» δείχνοντάς το με τα χέρια μου. Αυτό φάνηκε να την δυσκόλεψε, παρόλο που το επανέλαβα πολλές φορές, σε συνδυασμό με τον λόγο στην ελληνική και στην αγγλική γλώσσα. Τελικά, την καθοδήγησα να γράψει τον αριθμό 25 στον πίνακα […]».

5. Αξιοποίηση της Γ1 των μαθητών

Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός δεν αντιστάθηκε να χρησιμοποιήσει τις πρώτες γλώσσες των μαθητών, παρά τη δυσκολία τους. Με τις κάτωθι στρατηγικές παρατηρείται ότι τα παιδιά αντιλήφθηκαν πως έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν και εκείνοι την Γ1 τους, παίρνοντας το παράδειγμα της εκπαιδευτικού. Έτσι, διαπίστωσαν τον σεβασμό της τελευταίας για το γλωσσικό και πολιτισμικό τους υπόβαθρο και ανέπτυξαν υψηλότερα ποσοστά αυτοπεποίθησης στο μαθησιακό περιβάλλον.

Μία από αυτές τις στρατηγικές αφορά στη **νομιμοποίηση της Γ1** των παιδιών και την απενοχοποίηση του λάθους τους. Αυτό γίνεται εμφανές σε δύο κυρίαρχα επεισόδια, τα οποία περιγράφονται παρακάτω.

Επεισόδιο Α (αναφορά 8η, §3): Στην περίπτωση ενασχόλησης με τα ευρώ, η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός ανέφερε τα νομίσματα των χωρών καταγωγής των μαθητών στις μητρικές γλώσσες τους, προσπαθώντας να διαμορφώσει οικείο κλίμα και να κερδίσει την εμπιστοσύνη τους. Όμως, τα ίδια τα παιδιά διόρθωσαν την προφορά της, δείχνοντας την ευχέρειά τους στη Γ1 τους. Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός δεν αγνόησε αυτή τη συμπεριφορά, αλλά απολογήθηκε για το λάθος της και επανέλαβε τις λέξεις σύμφωνα με τις υποδείξεις τους. Έτσι, μετέδωσε υπόρρητα το μήνυμα ότι η έλλειψη γνώσης μιας γλώσσας δεν είναι κατακριτέα.

Επεισόδιο Β (αναφορά 16η, §21,22): Σε μία επικοινωνιακή περίσταση με μία μαθήτρια, όπου η τελευταία κατέβαλε αρκετές προσπάθειες αλληλεπίδρασης, η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός την προέτρεψε να εκφράζεται χωρίς φόβο του λάθους, καθώς ούτε η ίδια γνωρίζει αραβικά. Τότε η μαθήτρια και η συμμαθήτριά της που την παρατηρούσε χαμογέλασαν και κούνησαν καταφατικά το κεφάλι.

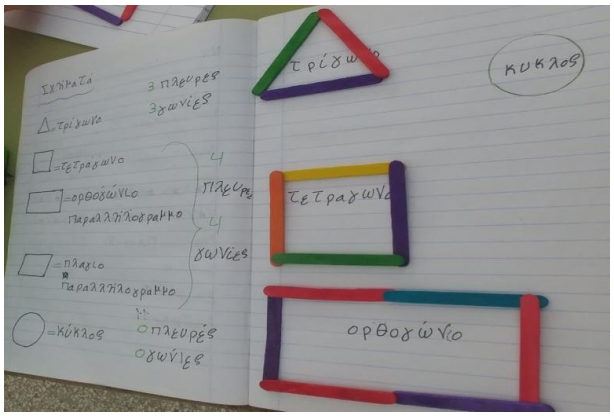
Επιπλέον, πολλές φορές χρησιμοποιήθηκε η τεχνική της **μετάφρασης λέξεων ή φράσεων** στις μητρικές γλώσσες των μαθητών εκ μέρους της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού. Η διαδικασία αυτή έγινε με τη συμβολή διαδικτυακών τόπων

μετάφρασης ή λεξικών (π.χ. google translate, wordreference, elglosbe) ή ψηφιακών εφαρμογών (π.χ. Translator του PlayStore), με δυνατότητα ηχητικής μετάφρασης. Σε κάποιες περιπτώσεις η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός είχε προετοιμάσει μεταφρασμένες λέξεις στη Γ1 των μαθητών, όπως τα νομίσματα των χωρών καταγωγής τους (βλ. Παράρτημα, αναφορά 8η). Πιο συχνά, όμως, η ανάγκη μετάφρασης προέκυπτε αυθόρμητα, τυχαία και μη προγραμματισμένα, για να διαλευκανθεί το νόημα του λόγου και να υπάρξει αποτελεσματική επικοινωνία. Από το σύνολο αυτών των επεισοδίων, μόνο σε ένα διαπιστώθηκε ομοιότητα μεταξύ Γ1 και Γ2 από τις μαθήτριες, όπως φαίνεται στο ακόλουθο απόσπασμα (αναφορά 16η, §14):

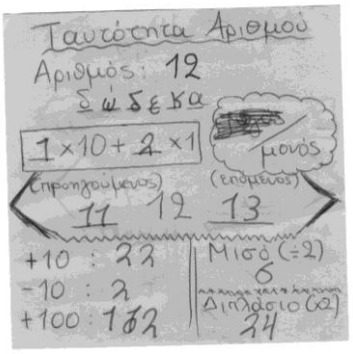
«Στη συνέχεια, έγραψα τυχαίους μη στρογγυλούς αριθμούς (π.χ. 16, 27, 38, 49, 56, 61, 77, 84, 92) και ζήτησα να τους διαβάσουν προφορικά. Τα περισσότερα παιδιά τα κατάφεραν, όμως χρειάστηκε να επαναλάβω πιο καθαρά και δυνατά για να κάνουν κι οι υπόλοιποι το ίδιο. Εδώ η Αν. είπε πως και στη μητρική της γλώσσα έτσι τα λένε μόνο που βάζουν το «και» ανάμεσα στις λέξεις (π.χ. λένε το 56 ως 50+6, δηλαδή το και ακούγεται) και η Φ. συμφώνησε».

6. Γραπτά έργα

Η στρατηγική της γραπτής γλώσσας εκ μέρους των μαθητών χρησιμοποιήθηκε λιγότερο συχνά, λόγω της έλλειψης γνώσης των μητρικών γλωσσών των μαθητών και της παρατηρούμενης δυσκολίας των τελευταίων να ολοκληρώσουν αντίστοιχα έργα στην ελληνική γλώσσα. Στη διάρκεια διεξαγωγής της έρευνας, όμως, εντοπίζονται περιστατικά κατά τη διδασκαλία νέας γνώσης (κατηγορία Ι) και κατά την εμπέδωση της γνώσης αυτής (κατηγορία ΙΙ).



Εικόνα 16: Γραφή στη Γ2 – Σχήματα με ξυλάκια



Εικόνα 17: Ταυτότητα Αριθμού

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν συμβάντα όπως η γραφή αριθμολέξεων και η ονομασία σχημάτων (Εικόνα 16) ή χαρακτηριστικών (υπο)συνόλων των φυσικών αριθμών (Ι’). Στη δεύτερη κατηγορία μπορούν να συμπεριληφθούν γραπτές μαρτυρίες των μαθητών κατά τη συμμετοχή τους σε ελεύθερο παιχνίδι «μαθηματικής κρεμάλας» (βλ. Παράρτημα, αναφορά 18η), τη συμπλήρωση «ταυτοτήτων των αριθμών» (Εικόνα 17) και τη δημιουργία σχημάτων με ξυλάκια (Εικόνα 16) ή πλαστελίνη (απόσπασμα ΙΙ’ και Εικόνα 18).

Απόσπασμα Ι' (αναφορά 19η, §4):
«Τις έννοιες μονός και ζυγός τις κατάλαβε εύκολα, αφού της εξήγησα πώς τα ξεχωρίζουμε, πώς λέγονται στα αγγλικά και περσικά και εκείνη μάλιστα ήθελε να τις καταγράψει στο τετράδιό της για να τις μελετήσει και στο σπίτι».

Απόσπασμα ΙΙ' (αναφορά 18η, §8-9):
«Στη συνέχεια έδωσα σε όλους πλαστελίνες για να φτιάξουν πάλι τα σχήματα. Για να δώσω υψηλότερο επίπεδο στην άσκηση τους ζήτησα να φτιάξουν και το όνομα του σχήματος με την πλαστελίνη, κάνοντας παράλληλα εξάσκηση στη γραφή. Τα παιδιά ήταν ενθουσιασμένα. […] Όμως, αυτό που επίσης παρατήρησα στην Α. ήταν ότι σχημάτισε τη λέξη κύκλος με την πλαστελίνη σωστά στον πίνακα και έπειτα στο θρανίο την έγραψε αντίστροφα δηλαδή "ςολκύκ"».

Στο τελευταίο απόσπασμα, μάλιστα, είναι χαρακτηριστική η λανθασμένη αντίληψη της μαθήτριας και η επιρροή της από τη μητρική της γλώσσα. Συγκεκριμένα, είναι γνωστό πως η αραβική γλώσσα γράφεται από τα αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή αντίθετα από την ελληνική. Έτσι, η Α. σχημάτισε ορθά τη μορφή των γραμμάτων, όμως επηρεάστηκε από τη μητρική της γλώσσα στην απεικόνιση της λέξης, όπως έχει συμβεί και με άλλους μαθητές σε αντίστοιχες περιπτώσεις.

Εικόνα 18: Σχηματισμός λέξης με πλαστελίνη

Μία τρίτη κατηγορία γραφής στην Γ2 των μαθητών θα μπορούσαν να αποτελούν τα επεισόδια διαδραστικής γραφής (interactive writing). Σε αυτά εντάσσονται:
- μη γνωστικά απαιτητικά γεγονότα, όπου οι μαθητές έγραφαν με τη βοήθεια της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού μία λέξη που είχαν ήδη γραμμένη μπροστά τους (ΙΙΙα)
- λιγότερο γνωστικά απαιτητικά γεγονότα, όπου οι μαθητές έγραφαν με τη βοήθεια της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού μία διαφορετική μορφή της λέξης που είχαν ήδη γραμμένη μπροστά τους (ΙΙΙβ)
- περισσότερο γνωστικά απαιτητικά γεγονότα, όπου οι μαθητές δεν είχαν μπροστά τους γραμμένη τη λέξη και προσπαθούσαν να τη γράψουν μετά από νοητική επεξεργασία και καθοδήγηση της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού (ΙΙΙγ).

Στα ενδεικτικά αποσπάσματα που ακολουθούν διακρίνεται η χρήση της παραπάνω στρατηγικής:

Απόσπασμα ΙΙΙα (αναφορά 18η, §8): «*Η Λ. και η Μ. δυσκολεύονταν να σχηματίσουν κάποια γράμματα, όπως το γ (στο τρίγωνο και τετράγωνο) και το λ (στον κύκλο), γι'*

αυτό και τις πλησίασα και τις βοήθησα σε αυτά, μέχρι που δε χρειάζονταν πια αυτή τη βοήθεια».

Απόσπασμα ΙΙβ (αναφορά 12η, §8): *«[…] του είπα «ναι, Greek 1 εκατομμύριο», επαναλαμβάνοντας πιο αργά «εκατομμύριο». Το επανέλαβε κι εκείνος και μου ζήτησε να το γράψω. Κοιτούσε με προσοχή πώς το έγραφα. Τότε […] δείχνοντας το αντίστοιχο πλήθος δαχτύλων, «1 εκατομμύριο, 2 εκατομμύρια, πολλά είναι εκατομμύρια, 1, πολλά», επανέλαβα στα αγγλικά να γράψει 2 εκατομμύρια και τότε έγραψε τον αριθμό 2.000.000 κάτω από τον αριθμό 1.000.000. Από δίπλα του έγραψα τη λέξη δύο και εκείνος συμπλήρωσε «εκατομμύρια» κοιτώντας την επάνω λέξη».*

Απόσπασμα ΙΙγ (αναφορά 19η, §4): *« Τις έννοιες μονός και ζυγός […] ήθελε να τις καταγράψει στο τετράδιό της για να τις μελετήσει και στο σπίτι. Ξεκίνησε να γράφει τις λέξεις μόνη της, με βάση τους ήχους και τα γράμματα που ήξερε, με περισσότερη ευκολία στα γράμματα ζ, ο, μ, και ν και λιγότερη στα υ (που κατέγραψε ως ε και μετά ως ι), γ και ς, τα οποία την βοήθησα να θυμηθεί και να καταγράψει.»*

6. Συζήτηση-Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται η συζήτηση των αποτελεσμάτων της έρευνας, και η σύνδεσή τους με τη διεθνή έρευνα, όπως αυτή αποτυπώνεται στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας. Έπειτα, καταγράφονται τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγει η παρούσα έρευνα.

Ε.Ε.1: Με ποιους τρόπους μπορούν να αξιοποιηθούν οι πόροι γνώσης των δίγλωσσων μαθητών για την οικοδόμηση νέας γνώσης σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο;

Όπως διαπιστώνεται από την ανάλυση των δεδομένων, πολλές από τις στρατηγικές που εφαρμόσθηκαν αφορούσαν στην αξιοποίηση των πόρων γνώσης των μαθητών για την οικοδόμηση μιας νέας. Στο σημείο αυτό παρατηρούνται στρατηγικές που αναδείχθηκαν είτε σκόπιμα από τον εκπαιδευτικό, είτε από τις αυθόρμητες συμπεριφορές των ίδιων των μαθητών.

Στον πρώτο άξονα εντάσσεται η διεξαγωγή μαθηματικού διαλόγου με στόχο τη **διερεύνηση και αιτιολόγηση της σκέψης του μαθητή από τον ίδιο μαθητή**. Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε ενθάρρυνση κάθε μαθητή για την ανάπτυξη του βαθμού εμπλοκής του στη μαθηματική επικοινωνία και των ικανοτήτων λεκτικής απόδοσης διαδικασιών, δηλαδή την έκφραση των ιδεών και σκέψεών του με όσο το δυνατόν περισσότερη ακρίβεια και πληρότητα, αξιοποιώντας όλο το διαθέσιμο ρεπερτόριο επικοινωνίας. Για το παιδαγωγικό αυτό γεφύρωμα χρησιμοποιήθηκαν και επιμέρους γλωσσικές στρατηγικές σκαλωσιάς, όπως η εναλλαγή γλωσσικών κωδίκων (ελληνικά, αγγλικά), η διατύπωση σαφών, κατευθυντηρίων ερωτήσεων και η χρήση λεκτικών ή εξωγλωσσικών νύξεων (prompts).

Γίνεται, λοιπόν, φανερό ότι η παραπάνω στρατηγική ακολουθεί τις προτάσεις της προσέγγισης CLIL. Σύμφωνα με αυτήν, η κατάκτηση της γλώσσας-στόχου επιτυγχάνεται με την αναδυόμενη ανάγκη χρήσης της σε ποιοτικές μαθηματικές συζητήσεις σχετικά με το περιεχόμενο του γνωστικού αντικειμένου (Surmont et al., 2016).

Επιπλέον, η εν λόγω στρατηγική επισημαίνεται από πληθώρα μελετών ως ιδιαίτερα σημαντική. Ενδεικτικά, οι Walshaw & Anthony (2007) υποστηρίζουν βάσει ερευνών ότι η μύηση των μαθητών προς αυτήν την κατεύθυνση οδηγεί σε βαθύτερη και πιο συγκροτημένη σκέψη, υψηλότερα επίπεδα γνωστικής δραστηριότητας και αναπτύσσει τα κίνητρά τους για την απόκτηση νέων γνώσεων. Παράλληλα, οι ίδιοι συγγραφείς συμπληρώνουν ότι οι μαθητές γίνονται μέλη ενός «μικρόκοσμου μαθηματικής πρακτικής», όπου κατακτούν μαθηματικές ιδέες, μεθόδους και την κατάλληλη μαθηματική γλώσσα.

Ακόμη, μελετώντας τις αναφορές που συντάχθηκαν, όπως παρατίθενται στο Παράρτημα της εργασίας, εντοπίζονται στρατηγικές αξιοποίησης του **καθημερινού λόγου**, που είχαν ήδη κατακτήσει οι μαθητές, προκειμένου να επιτευχθεί η κατανόηση του νέου μαθηματικού περιεχομένου. Τέτοιες περιπτώσεις είναι, για

παράδειγμα, η σύνδεση παρώνυμων λέξεων κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων για τη διάκριση διαφορετικών σημασιών του καθημερινού και του μαθηματικού λόγου στην ελληνική γλώσσα (Δευτέρα, Τρίτη κ.ό.κ. - δεύτερα, τρίτα κ.λπ.), οι διαγλωσσικές συσχετίσεις για τη διασαφήνιση δομικών χαρακτηριστικών της γλώσσας-στόχου (π.χ. η απόδοση του γένους των λέξεων κύκλος, γωνία και πλευρά σε αντιστοιχία με τις αγγλικές λέξεις he/she/it), αλλά και η διάκριση των χαρακτηριστικών των σχημάτων (τρίγωνο, τετράγωνο κ.ο.κ.) μέσα από την ανάλυση στα συνθετικά τους (τρεις γωνίες, τέσσερις γωνίες κ.ο.κ.) –αν και εδώ μπορεί να θεωρηθεί ότι ο λόγος είναι τόσο καθημερινός όσο και μαθηματικός.

Τα παραπάνω ευρήματα συνάδουν με την «ενσωμάτωση» (integration) της γλώσσας και του περιεχομένου, η οποία αποτελεί το το κλειδί της προσέγγισης CLIL. Με άλλα λόγια, φαίνεται πως επιδιώκεται η ασυνείδητη ανάπτυξη της Γ2 παράλληλα με τη συνειδητή διδασκαλία του περιεχομένου (Moore & Lorenzo, 2015), αξιοποιώντας τους μαθητικούς τρόπους σκέπτεσθαι. Οι τελευταίοι, μάλιστα, αποτελούν μέρος του στοιχείου του Εννοιολογικού πλαισίου των τεσσάρων «C» του Coyle, που αφορά στη γνωστική κατάκτηση.

Μία επιπλέον στρατηγική αυτής της λογικής αποτελεί η ενσωμάτωση **πλαισιοθετημένων πρακτικών**, δηλαδή η σύνδεση της γλώσσας και του περιεχομένου σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο. Η εφαρμογή τους πραγματοποιήθηκε σε διάφορες φάσεις της έρευνας, όμως παρατηρείται περισσότερο στη διδασκαλία των σχημάτων και των νομισμάτων.

Στην πρώτη περίπτωση πραγματοποιήθηκε συσχέτιση αντικειμένων του κοντινού περιβάλλοντος με απτά σχήματα, κατασκευασμένα από χρωματιστά ξυλάκια, και μελέτη των χαρακτηριστικών τους. Έπειτα, προβλήθηκαν ψηφιακές εικόνες άλλων αντικειμένων της καθημερινής ζωής των μαθητών, όπως δίσκος, σήματα Κ.Ο.Κ., γράμματα, χαρτοπετσέτες κ.ά., ενώ μάλιστα αναζητήθηκαν στο διαδίκτυο αντίστοιχες εικόνες από τους ίδιους τους μαθητές. Με τις τεχνικές αυτές τα παιδιά κατόρθωσαν να ανατρέξουν στις άτυπες γνώσεις και εμπειρίες που διαθέτουν και να χτίσουν νέες πάνω σε αυτές.

Αντίστοιχα, στην περίπτωση των νομισμάτων χρησιμοποιήθηκαν αρχικά αντικείμενα του περιβάλλοντος (π.χ. μολύβι, μπουκάλι νερό) για την αναφορά της τιμής αγοράς τους σε λίρες Συρίας, αφγάνι ή ευρώ και μετέπειτα προβλήθηκαν κάρτες με εικόνες αντικειμένων της καθημερινότητάς τους (π.χ. μπάλα, παγωτό, λουλούδι, κρεβάτι), όπου αναγραφόταν παράλληλα ένα σύνολο ενδεικτικών νομισμάτων ευρώ που αντιστοιχεί στην τιμή τους. Έτσι, δόθηκε στα παιδιά η δυνατότητα να αξιοποιήσουν την προϋπάρχουσα γνώση τους για το πιθανό ποσό αγοράς κάποιων προϊόντων στη χώρα καταγωγής τους και να το συγκρίνουν με το ανάλογο ποσό στη χώρα υποδοχής τους. Αποτέλεσμα αυτής της διεργασίας ήταν η απόκτηση νέων γνώσεων σχετικά με τη διαχείριση των νομισμάτων του ευρώ, οι οποίες πρόκειται να αποβούν ιδιαίτερα χρήσιμες για τα ίδια τα παιδιά αλλά και πιθανότατα για τα υπόλοιπα μέλη της οικογένειά τους.

Η χρήση της προαναφερθείσας πρακτικής εγκολπώνεται την πολυσημειωτική αντίληψη των μαθηματικών, για την οποία έγινε λόγος στο θεωρητικό μέρος της παρούσας μελέτης. Σύμφωνα με αυτήν, η κατασκευή του μαθηματικού νοήματος περιλαμβάνει την ερμηνεία και χρήση πολλαπλών σημειωτικών συστημάτων (γλώσσα, σύμβολα και εικόνες) ταυτόχρονα. Έτσι, η αξιοποίηση των προηγούμενων γνώσεων και εμπειριών που φέρουν τα μέλη του δίγλωσσου μαθητικού κοινού στην τάξη και παράλληλα η διεύρυνσή τους, πραγματοποιείται δίνοντάς τους τη δυνατότητα να επεξεργαστούν τις μαθηματικές έννοιες στο κατάλληλο «συν-κείμενο» (συγκείμενο) και γεφυρώνοντας ποικιλία πηγών (O'Halloran, 2015).

Η γενικότερη αξιοποίηση **των πόρων καθημερινής γνώσης των μαθητών** συνιστά μια στρατηγική που προτείνεται από πολλές θεωρητικές και ερευνητικές μελέτες. Οι προϋπάρχουσες γνώσεις θεωρούνται ιδιαίτερα σημαντικές για την κατάκτηση νέων και υπογραμμίζεται ότι ο εκπαιδευτικός οφείλει να τις λαμβάνει υπόψη του κατά τη μετακίνηση από την άτυπη στην τυπική μάθηση, προκαλώντας ταυτόχρονα στους μαθητές το αίσθημα πως δεν πρόκειται για γνώσεις «άχρηστες» για αυτούς (Σταθοπούλου, 2005). Πιο εξειδικευμένα όμως, τα παραπάνω ευρήματα συνάδουν με τα συμπεράσματα ερευνών των Kotarinou, Gana & Stathopoulou (2017), σύμφωνα με τα οποία είναι καλό να δίνεται στα παιδιά η δυνατότητα να κατανοήσουν τη σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή και να εμβαθύνουν έτσι στις μαθηματικές έννοιες.

Στις στρατηγικές αξιοποίησης των γνωστικών πόρων των μαθητών που προαναφέρθηκαν, η σκόπιμη **ενσωμάτωση της πρώτης γλώσσας** τους εκ μέρους του εκπαιδευτικού είναι χαμηλή. Παρόλα αυτά, διαπιστώνεται πως η συμβολή της γλώσσα αυτής στην οικοδόμηση νέων γνώσεων ήταν καθοριστική σε πολλές περιπτώσεις. Εφόσον, λοιπόν, πρόκειται κυρίαρχα για τρόπο αλληλεπίδρασης που αναδείχθηκε αυθόρμητα από τους μαθητές, συμπεριλαμβάνεται στον δεύτερο άξονα στρατηγικών.

Αναλυτικότερα, ιδιαίτερα κρίσιμη στάθηκε η συμβολή της Γ1 στη διαμαθητική επικοινωνία. Αυτό συνέβη γιατί η αξιοποίηση πόρων από μία ήδη γνωστή γλωσσική βάση για τους μαθητές από τους συμμαθητές τους λειτούργησε θετικά κατά την επεξεργασία νέων ιδεών σε μία νέα γλώσσα.

Η εν λόγω στρατηγική ακολουθεί τις διδακτικές προτάσεις προηγούμενων ερευνών. Συγκεκριμένα, στον οδηγό των Celic & Seltzer (2011) αναγράφεται ότι είναι σημαντικό τα παιδιά να επικοινωνούν στη Γ1 με τους συμμαθητές τους με τους οποίους έχουν αναπτύξει σχέσεις εμπιστοσύνης, διότι αποκτούν τη δυνατότητα να συλλάβουν νοήματα σε δύο γλώσσες ταυτόχρονα, συμπληρώνοντας τις γνωστικές ελλείψεις τους σε κάθε μία με την αρωγή της άλλης. Συνεπώς, η διγλωσσία προβάλλεται ως πλεονέκτημα του μαθητή στη μάθηση. Άλλωστε, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς από την οποία διέπεται η προσέγγιση CLIL, μία γνώση που έχει κατακτηθεί σε μία γλώσσα διευκολύνει σημαντικά την κατανόηση της νέας (Ouazizi, 2016).

Παραδείγματα τέτοιων επεισοδίων εντοπίζονται εντονότερα στις αλληλεπιδράσεις των μαθητών μεταξύ τους και λιγότερο συχνά στο τυπικό πλαίσιο υπό την παρουσία της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού. Στην πρώτη περίπτωση, χαρακτηριστική ήταν αφενός η χρήση της κοινής Γ1 δύο μαθητριών κατά την ενασχόλησή τους με τη στατιστική και τα γραφήματα, για την επεξήγηση μιας έννοιας ή διαδικασίας που παρουσιαζόταν στη Γ2, και αφετέρου η μεταφορά των γνώσεων που απέκτησε η Φ. από τη Γ2 στη Γ1 προκειμένου να βοηθήσει τον συμμαθητή της να οδηγηθεί στην κατανόηση της έννοιας της εκτίμησης.

Στη δεύτερη περίπτωση ανήκει ένα μοναδικό γεγονός, κατά το οποίο μία μαθήτρια αξιοποίησε την ευχέρειά της στη μητρική της γλώσσα για να αναφέρει, τόσο στην ερευνήτρια-εκπαιδευτικό όσο και στους υπόλοιπους συμμαθητές της, τον τρόπο ανάγνωσης των αριθμών στη Γ1. Έτσι, συγκρίνοντας τον τρόπο αυτό με τον αντίστοιχο στη Γ2, ευνοήθηκε η κατανόηση της ονοματολογίας των αριθμών και επιτεύχθηκε η καλλιέργεια διαγλωσσικών (cross-linguistic) και διγλωσσικών ικανοτήτων για όλους τους μαθητές.

Η ενσωμάτωση τέτοιων στρατηγικών στη διδασκαλία του μαθηματικού περιεχομένου σε δίγλωσσους μαθητές προτείνεται από πληθώρα επιστημόνων. Οι Portolés & Martí (2017) υπογραμμίζουν πως η ευέλικτη χρήση και μετακίνηση μεταξύ γλωσσών εντάσσεται στη στοχοθεσία κάθε αποτελεσματικής πολύγλωσσης παιδαγωγικής και ειδικά στο πλαίσιο εφαρμογής της προσέγγισης CLIL. Συμπληρωματικά, η αξία μιας τέτοιας μεθόδου, όπου οι μαθητές εντοπίζουν ομοιότητες ή διαφορές ανάμεσα στις δύο γλώσσες τους, έγκειται στη γλωσσική επαγρύπνηση, στην ενδυνάμωση αποτελεσματικών μαθησιακών στρατηγικών και στην ανάπτυξη της μεταγλωσσικής συνειδητότητας.

Γι’ αυτό θα ήταν καλό η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός να ενθαρρύνει περισσότερο τέτοιες μαθητικές συμπεριφορές, απευθύνοντας ερωτήσεις όπως: «Υπάρχει κάποια λέξη στη μητρική σου γλώσσα που να μοιάζει/ακούγεται σαν αυτήν;» (Celic & Seltzer, 2011). Στις πιθανές αιτίες απουσίας παρόμοιων ερωτήσεων θα μπορούσε να συμπεριληφθεί το **μονογλωσσικό habitus** της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού, σε συνδυασμό με την έλλειψη γνώσης των μητρικών γλωσσών των μαθητών εκ μέρους της.

Επιπρόσθετα, φαίνεται ότι προτιμήθηκε σε μεγάλο βαθμό η **προφορική αλληλεπίδραση έναντι της γραπτής**. Αυτό συνέβη εξαιτίας της παρατηρούμενης δυσκολίας της συντριπτικής πλειονότητας των μαθητών στην ανάγνωση ή έκφραση στη γραπτή μορφή της γλώσσας-στόχου, δηλαδή την ελληνική. Συγκεκριμένα, πρόκειται για δυσκολίες που αναδείχθηκαν ήδη κατά το πιλοτικό στάδιο της έρευνας, τόσο στα μαθηματικά όσο και σε άλλα γνωστικά αντικείμενα με τα οποία ασχολήθηκαν οι μαθητές και η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός.

Από τη μία πλευρά, το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη σχετική βιβλιογραφία, όπου υποστηρίζεται ότι οι δίγλωσσοι μαθητές διευκολύνονται

περισσότερο στη γραπτή παρά στην προφορική επικοινωνία και έκφραση (Mallet, 2011). Από την άλλη πλευρά, όμως, υπάρχουν ερευνητικά δεδομένα που συγκλίνουν στην άποψη ότι η προφορική γλώσσα συνιστά το κυριότερο εργαλείο για την ανάπτυξη του γραμματισμού και ιδιαίτερα του **αναδυόμενου μαθηματικού γραμματισμού** των μαθητών (McDonald, Warren & DeVries, 2011).

Βέβαια, εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι το μεγαλύτερο μέρος του λόγου στην επικοινωνία ήταν κατευθυνόμενο από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό, όπως παρατηρείται και σε άλλα ερευνητικά πορίσματα (Crawford, 1990). Μία πιθανή αιτιολόγηση αυτής της αναμενόμενης κυριαρχίας συνιστά το γεγονός ότι το μεγαλύτερο μέρος του δείγματος αποτελούνταν από αναδυόμενους δίγλωσσους μαθητές, οι οποίοι σε επίπεδο κατάκτησης της δεύτερης γλώσσας θα μπορούσε να ειπωθεί ότι βρίσκονται σε ένα προπαραγωγικό στάδιο «σιωπής», με χαρακτηριστικό τα χαμηλά ποσοστά ομιλίας (Carrasquillo & Rodriguez, 1996).

Ειδικότερα, ο λόγος των μαθητών περιοριζόταν κυρίως σε εκφράσεις του τύπου «αυτό», «εκείνο», το «άλλο», σε συνδυασμό με εξωγλωσσικά στοιχεία για τον δεικτικό προσδιορισμό ενός αντικειμένου ή μιας διαδικασίας που αναφερόταν. Ακόμη, περιορίζονταν κυρίως σε μονολεκτικές απαντήσεις στις ερωτήσεις της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού ή επαναλήψεις των λέξεων που η ίδια ανέφερε.

Η συμπεριφορά αυτή συμπίπτει με αποτελέσματα διεθνών ερευνών, όπου υποστηρίζεται πως οι αναδυόμενοι δίγλωσσοι μαθητές δε διαθέτουν ειδικό λεξιλόγιο για πολλές ιδέες, έννοιες ή αντικείμενα (Musanti, Celedón-Pattichis & Marshall, 2010). Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι ο συνδυασμός της παραπάνω στρατηγικής με άλλες που έχουν καταγραφεί ή καταγράφονται στη συνέχεια, συντέλεσε τις περισσότερες φορές στην κατανόηση νέων πτυχών του μαθηματικού περιεχομένου.

Συμπερασματικά, λοιπόν, στο ερευνητικό ερώτημα που εξετάζεται παρατηρείται ότι η αξιοποίηση των μαθητικών πόρων γνώσης είναι **απαραίτητη** για την οικοδόμηση νέων. Για αυτή τη γεφύρωση ο εκπαιδευτικός μπορεί να αξιοποιήσει ποικίλες πρακτικές που εντάσσονται στο πνεύμα της διαγλωσσικότητας και της προσέγγισης CLIL, με κυριότερες την έμφαση στην προφορική επικοινωνία, τη διερεύνηση της σκέψης των μαθητών, την πλαισίωση του καθημερινού ή ακαδημαϊκού λόγου και τη σύνδεσή τους και, τέλος, την ενσωμάτωση ποικίλων αναπαραστάσεων και επικοινωνιακών ρεπερτορίων των μαθητών.

Ε.Ε.2: Ποιες γνωστικές, κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνιο-γνωστικές στρατηγικές μπορούν να αξιοποιηθούν από τον εκπαιδευτικό στη διαμόρφωση ενός χώρου διαγλωσσικότητας για τους δίγλωσσους μαθητές;

Η διαμόρφωση ενός χώρου διαγλωσσικότητας μπορεί να επιτευχθεί από τον εκπαιδευτικό με διάφορους τρόπους. Το κλειδί στην εφαρμογή όλων των στρατηγικών που αναφέρονται παρακάτω για τον σκοπό αυτό αφορά στην πολυτροπικότητα. Με άλλα λόγια, σε μία τέτοια προσέγγιση χρησιμοποιούνται

ποικίλες στρατηγικές και σημειωτικές μέθοδοι ταυτόχρονα, βάσει της πολυσημειωτικής αντίληψης των μαθηματικών.

Ξεκινώντας με τις γνωστικές στρατηγικές, διαπιστώνεται από τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν και αναλύθηκαν ότι εκείνη που συνδέεται περισσότερο με τη λογική της διαγλωσσικότητας είναι η **ανάγνωση μαθηματικών προτάσεων**. Δηλαδή, ζητήθηκε αρκετές φορές από τα παιδιά να μεταφράσουν τα μαθηματικά σύμβολα σε προφορικό λόγο σε οποιαδήποτε γλώσσα. Έτσι, κατόρθωσαν να αποκωδικοποιήσουν μια ισότητα, να εντοπίσουν ενδεχόμενα λάθη τους και να τα διορθώσουν, χωρίς την επισήμανση των τελευταίων από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό. Παράλληλα, οι μαθητές ήρθαν σε επαφή με τη συμβολική μαθηματική γλώσσα, καλλιέργησαν ικανότητες χρήσης της απλής γλώσσας για τη διαπίστωση της ορθολογικότητάς της και ανέπτυξαν αισθήματα αυτοπεποίθησης και αυτοεκτίμησης.

Η εν λόγω στρατηγική προτείνεται από την Robertson (2009) και άλλους ερευνητές για την υποστήριξη των δίγλωσσων μαθητών στη μαθηματική κατανόηση. Η ίδια επισημαίνει ότι με τον τρόπο αυτό οι μαθητές εξοικειώνονται με σημαντικούς όρους του μαθηματικού λεξιλογίου, βελτιώνουν τις ικανότητες επεξεργασίας των πράξεων και δομούν πιο συγκροτημένα τον τρόπο σκέπτεσθαι κατά τη διαχείρισή τους στην επίλυση προβλημάτων.

Συνεχίζοντας με τις στρατηγικές κοινωνικο-πολιτισμικού προσανατολισμού, γίνεται εύκολα αντιληπτό πως στηρίζονται κατά κόρον στην ενσωμάτωση του ευρύτερου γλωσσικού ρεπερτορίου των μαθητών κατά την επικοινωνία. Συγκεκριμένα, η αξιοποίηση μαθητών με περισσότερη εμπειρία ομιλίας της Γ2 και η τοποθέτησή τους σε ρόλο διερμηνέων ή δασκάλων για τους υπόλοιπους συμμαθητές τους, αλλά και η μεταξύ τους συνεργασία σε γλωσσικά ομοιογενείς ή ετερογενείς ομάδες συνέβαλαν στη φυσική **ενσωμάτωση της Γ1** των μαθητών στη διδασκαλία και μάθηση και στο άνοιγμα του σχολείου προς την πολυγλωσσία και τη διαγλωσσικότητα. Κατά συνέπεια, οι μαθητές αντιλήφθηκαν πως έχουν τη δυνατότητα να επικοινωνήσουν με τους συμμαθητές τους στη Γ1 τους για να διασαφηνίσουν οδηγίες εκτέλεσης έργων, να μεταφράσουν έναν όρο ή μία ιδέα και, τέλος, να κατακτήσουν τη Γ2 παράλληλα με το μαθηματικό περιεχόμενο.

Ο τρόπος εφαρμογής των προαναφερόμενων στρατηγικών και ιδίως της μαθητικής συνεργασίας υπογραμμίζεται ως ιδανικός από τους ερευνητές που μελετούν το φαινόμενο της διαγλωσσικότητας. Οι Creese & Blackledge (2015) συμπληρώνουν ότι στην πρακτική αυτή ο εκπαιδευτικός δρα έτσι ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν εξουσία στην από κοινού διαπραγμάτευση ενός νοήματος με τους υπόλοιπους συμμαθητές τους, ανεξαρτήτου κοινωνικής ή πολιτισμικής καταγωγής.

Η ενσωμάτωση της Γ1 των μαθητών αξιοποιήθηκε από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό και ως στρατηγική κοινωνιο-γνωστικού προσανατολισμού για τη διαμόρφωση ενός χώρου διαγλωσσικότητας. Αναλυτικότερα, η ίδια χρησιμοποίησε αρκετές φορές τη Γ1 των μαθητών για να μεταφράσει λέξεις ή φράσεις από την

ελληνική ή την αγγλική γλώσσα, με τη χρήση λεξικών ή άλλων εφαρμογών που προσφέρονται σε ηλεκτρονική μορφή.

Το αξιοσημείωτο είναι πως στην προσπάθεια αυτή αντιμετώπισε δυσκολίες με την προφορά των λέξεων στην αραβική και στην περσική γλώσσα. Οι μαθητές, όμως, διόρθωσαν με τον τρόπο τους τα λάθη της και την οδήγησαν στην ορθή προφορά, κάτι το οποίο έγινε σεβαστό εκ μέρους της. Αποτέλεσμα όλων των παραπάνω ήταν, όχι μόνο η νομιμοποίηση της χρήσης της Γ1 αλλά και η απομάκρυνση από τον φόβο του λάθους στην ομιλία οποιασδήποτε γλώσσας.

Η προαναφερόμενη στρατηγική επιβεβαιώνεται από τα ερευνητικά δεδομένα των Lin & Lo (2017), κατά τα οποία ο εκπαιδευτικός της τάξης χρησιμοποίησε την Γ1 των μαθητών για να εισάγει μία νέα έννοια. Αυτός ο τρόπος αντιπαράθεσης των εννοιών και στις δύο γλώσσες στο πλαίσιο πρακτικών της διαγλωσσικότητας, σύμφωνα με τους Chronaki, Moutzouri & Magos (2015) δημιουργεί τον κατάλληλο χώρο ώστε τα παιδιά να μοιραστούν ελεύθερα και συλλογικά τις ιδέες και σκέψεις τους, να συνειδητοποιήσουν την επιστημολογική και πολιτισμική ποικιλομορφία, να την αποδεχθούν ως πηγή και, τέλος, να αντιληφθούν την πολλαπλή, υβριδική πτυχή της ταυτότητας.

Αναφορικά με τις υπόλοιπες κοινωνιο-γνωστικές στρατηγικές που εφάρμοσε η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός στην παρούσα έρευνα για τη διαμόρφωση ενός χώρου διαγλωσσικότητας φαίνεται πως κυρίαρχη θέση καταλαμβάνουν οι **αναπαραστάσεις**. Σε αυτές ανήκουν εικόνες και αντικείμενα του ενδοσχολικού ή εξωσχολικού περιβάλλοντος, η κατασκευή μαθηματικών αναπαραστάσεων, όπως αριθμογραμμές, κλασματικές περιοχές, γραφήματα και διαγράμματα, η χρήση χειραπτικών υλικών (π.χ. νομίσματα, ξυλάκια, πλαστελίνη) ή άλλων διαμεσολαβητικών εργαλείων (αριθμομηχανή, μετατροπέας, ζάρια, γεωμετρικά όργανα, διαφημιστικά φυλλάδια σούπερ μάρκετ κ.ά.) και, τέλος, η ενσωμάτωση τεχνολογικών μέσων, όπως λ.χ. βίντεο ή ψηφιακά εκπαιδευτικά παιχνίδια σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο.

Με την ένταξη όλων των παραπάνω τρόπων αναπαράστασης, σε συνδυασμό με άλλες στρατηγικές που εφαρμόσθηκαν ταυτόχρονα, επιτεύχθηκε η πολυτροπικότητα στην ανταλλαγή της μαθηματικής επικοινωνίας. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές κατόρθωσαν να αξιοποιήσουν τις αναπαραστάσεις για να εκφράσουν τη σκέψη τους, χωρίς να ανησυχούν για τις γλωσσικές απαιτήσεις και την ορθότητα του λόγου τους, ενώ παράλληλα είχαν τη δυνατότητα να αποδώσουν νόημα σε αφηρημένες μαθηματικές ιδέες, που δε θα μπορούσαν να οπτικοποιηθούν διαφορετικά και να προστεθούν στο μαθηματικό τους λεξιλόγιο.

Επιβεβαιώνοντας τις παραπάνω στρατηγικές, οι Celedón-Pattichis & Turner (2012) αναφέρουν ότι η ενσωμάτωση πολλαπλών αναπαραστάσεων από τον εκπαιδευτικό βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν τις ικανότητες συμμετοχής σε μαθηματικούς διαλόγους, αξιοποιώντας τες για να ενισχύσουν τον λόγο τους και να υποστηρίξουν ή να διασαφηνίσουν τις ιδέες και τα επιχειρήματά τους. Έτσι, δίνεται

στα παιδιά η δυνατότητα να εμβαθύνουν στη μάθηση των μαθηματικών, αφού επεξεργάζονται ποικίλες αναπαραστάσεις συγχρόνως και μετακινούνται μεταξύ διαφόρων μορφών τους μέσα σε έναν χώρο διαγλωσσικότητας.

Εξίσου σημαντικό αρωγό στη διαμόρφωση χώρου διαγλωσσικότητας φαίνεται πως αποτέλεσε η χρήση **χειρονομιών** εκ μέρους της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού και των ίδιων των μαθητών. Η σημειωτική αυτή πηγή, σε συνδυασμό με τον προφορικό λόγο, κατέστησε δυνατή την κατανόηση μηνυμάτων και πληροφοριών σχετικά με τη μαθηματική γλώσσα και το μαθηματικό περιεχόμενο, ενώ συνάμα διευκόλυνε τη μετάδοσή τους από τον πομπό προς τον δέκτη, ανεξάρτητα από την ευχέρειά τους. Πολλές φορές, οι χειρονομίες λειτούργησαν ως επίδειξη της χρήσης μη λεκτικών πόρων και ως σκαλωσιές για την απόκτηση γνώσεων σχετικά με το περιεχόμενο και τη λειτουργική ποικιλία της γλώσσας των μαθηματικών.

Η παραπάνω διαπίστωση είναι σύμφωνη με την άποψη του Dominguez (2005), για την οποία ο συνδυασμός λόγου και χειρονομιών είναι καλύτερος δείκτης της μαθηματικής σκέψης και κατανόησης των μαθητών, από ότι κάθε μέσο έκφρασης ξεχωριστά. Ο ίδιος τονίζει ότι η εν λόγω στρατηγική στηρίζεται στην πολυσημειωτική αντίληψη της δίγλωσσης μαθηματικής εκπαίδευσης και δύναται να διευρύνει τη μαθηματική επικοινωνία και κατανόηση.

Επιπλέον, οι Warren, Young & deVries (2007) παραθέτουν ερευνητικά στοιχεία που επιβεβαιώνουν την τάση των μαθητών να μιμούνται τη συμβολική ή μη γλώσσα του εκπαιδευτικού και υποστηρίζουν ότι ο ρόλος της τριαδικής φύσης της πρώτης μπορεί να είναι ιδιαίτερα σημαντικός για την ερμηνεία της και την βαθύτερη κατάκτηση ενός νοήματος. Ωστόσο, οι Herbert & Pierce (2007) εφιστούν την προσοχή του εκπαιδευτικού σε χειρονομίες που φέρουν μια πληροφορία αντικρουόμενη με τον λόγο που εκφέρεται και οδηγούν σε αμφιλεγόμενα μηνύματα με δύσκολη ερμηνεία.

Τέλος, μία τεχνική που αποδείχθηκε απαραίτητη στη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας αφορά στη χρήση της **αγγλικής** ως διαμεσολαβητικής μεταφραστικής γλώσσας. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων, τα αγγλικά αποτέλεσαν τον μοναδικό κοινό γλωσσικό κώδικα στον οποίο μπορούσαν να εκφραστούν ιδέες, τόσο από την πλευρά της ερευνήτριας-εκπαιδευτικού όσο και από την πλευρά των μαθητών. Η χρήση της γινόταν συνήθως στην κατά το δυνατόν πιο απλουστευμένη μορφή των λέξεων, φράσεων ή προτάσεων, καθώς δεν ήταν γνωστό το επίπεδο ευχέρειας των συνομιλητών.

Η ενσωμάτωση μιας γλώσσας με αυτή τη λειτουργία, και ιδιαίτερα η επιλογή της αγγλικής, επιβεβαιώνεται από τη σχετική βιβλιογραφία που μελετήθηκε. Οι Celic & Seltzer (2011) παραθέτουν τον τρόπο χρήσης των αγγλικών ως διαμεσολαβητικής γλώσσας από τους μαθητές κατά τη συνεργασία τους σε γλωσσικά ετερογενείς ομάδες για την επίλυση ενός προβλήματος.

Κλείνοντας, οι Portolés & Martí (2017) αναφέρουν πως η αγγλική γλώσσα συνιστά την lingua franca και η εναλλακτική χρήση της στο σχολικό πλαίσιο παράλληλα με τις υπόλοιπες γλώσσες (ελληνικά, αραβικά, περσικά) δεν υποδηλώνει έλλειψη γλωσσικών ικανοτήτων στις τελευταίες, αλλά πλήρη αξιοποίηση του πολύγλωσσου ρεπερτορίου ενός ατόμου. Με άλλα λόγια, τα αποτελέσματα των ερευνών των παραπάνω συγγραφέων και της παρούσας έρευνας συγκλίνουν στο γεγονός ότι η αγγλική γλώσσα αποκτά διευκολυντικό ρόλο στην κατανόηση της γλώσσας-στόχου και του περιεχομένου του υπό μελέτη γνωστικού αντικειμένου, καθώς ανήκει στο ενσωματωμένο σύστημα πηγών που διαθέτει το μαθητικό κοινό.

Συμπερασματικά, ως προς το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα γίνεται αντιληπτό ότι **η ίδια η τάξη πρέπει να μεταμορφωθεί και να είναι «ανοιχτή» σε έναν χώρο διαγλωσσικότητας**. Οι στρατηγικές διαμόρφωσής του αφορούν κατά κύριο λόγο στην ενθάρρυνση των μαθητών προς την αξιοποίηση όλου του γλωσσικού και ιδιαίτερα του σημειωτικού τους ρεπερτορίου για την επίτευξη της μαθηματικής κατανόησης. Επιπλέον, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ωθήσει τους μαθητές στην από κοινού διαπραγμάτευση ενός νοήματος με τον ίδιο ή τους συμμαθητές τους, όπου αναιρούνται σχέσεις κύρους ή εξουσίας και οι ομιλούμενες γλώσσες δεν ανταγωνίζονται, αλλά συνυπάρχουν και αλληλεπιδρούν αυθόρμητα μεταξύ τους.

7. Κριτική-Προτάσεις

Με την ολοκλήρωση της παρούσας έρευνας έρχονται στην επιφάνεια ποικίλα θέματα που αξίζει να αναφερθούν. Το τελευταίο, λοιπόν, κεφάλαιο της εργασίας περιλαμβάνει μία σύντομη κριτική της, αλλά και προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση των υπό μελέτη ζητημάτων.

Αρχικά, ο διττός ρόλος της συγγραφέως ως ερευνήτριας και ως εκπαιδευτικού στην προσέγγιση που υιοθετήθηκε, φαίνεται πως συνέβαλε στην καλλιέργεια ιδιαίτερα σημαντικών επαγγελματικών και επιστημονικών δεξιοτήτων. Μεταξύ των εφοδίων που αποκτήθηκαν συμπεριλαμβάνονται η διαπίστωση της αναγκαιότητας της ευελιξίας που οφείλει να επιδεικνύει κάθε άτομο που ασχολείται με τη μαθηματική εκπαίδευση και επιστήμη, δεδομένης της πολυπλοκότητας του φαινομένου, της συνεχούς αλλαγής των συνθηκών και, φυσικά, της ποικιλομορφίας των πόρων γνώσεων που φέρουν οι δίγλωσσοι μαθητές.

Οι τελευταίοι, συγκεκριμένα, γίνεται αντιληπτό ότι επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τον σχεδιασμό και τις αποφάσεις που καλείται να λάβει ο εκπαιδευτικός μιας δίγλωσσης τάξης, οδηγώντας τον στην επιστράτευση νέων, εξατομικευμένων στρατηγικών, όχι μόνο διδασκαλίας αλλά και επικοινωνίας σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο. Έτσι, γίνονται τα πρώτα βήματα προς την κατάκτηση της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου και την επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού.

Με βάση όλα τα παραπάνω, και ταυτόχρονα αξιοποιώντας τα συμπεράσματα της έρευνας, διαπιστώνεται ότι θα ήταν σκόπιμη η διεξαγωγή νέας έρευνας, σε μεγαλύτερη κλίμακα ως προς τη διάρκεια και το δείγμα της, αποβλέποντας στην εμβάθυνση ανάλογων ζητημάτων και στην σαφέστερη αποτύπωση της αποτελεσματικότητας των στρατηγικών που αξιοποιούνται. Κλείνοντας, περαιτέρω έρευνα θα μπορούσε να υλοποιηθεί για τη διερεύνηση των στρατηγικών μάθησης των ίδιων των δίγλωσσων ή αναδυόμενων δίγλωσσων μαθητών, προκειμένου να κατακτήσουν το μαθηματικό περιεχόμενο μέσω της γλώσσας.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση

Baker, C. (2001). *Εισαγωγή στη Διγλωσσία και στη Δίγλωσση Εκπαίδευση* (Α. Αλεξανδροπούλου, Μετάφρ.). Αθήνα: Gutenberg.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας* (5η έκδοση). Αθήνα: Μεταίχμιο.

Δαμανάκης, Μ. (2001). *Η εκπαίδευση των παλιννοστούντων και αλλοδαπών μαθητών στην Ελλάδα*. Αθήνα: Gutenberg.

Δούβλη, Γ. (2009). *Η σημασία της συνεργατικής μάθησης στη μαθηματική εκπαίδευση παιδιών γλωσσικών μειονοτήτων* (Διδακτορική διατριβή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα). Ανακτήθηκε 4 Ιανουαρίου, 2017, από http://phdtheses.ekt.gr/eadd/handle/10442/26175.

Duval, R. (2003). Γλώσσα(ες) και αναπαράσταση(εις) στην διδασκαλία των Μαθηματικών: δύο και μία τρίτη πρακτικές. Στο Μ. Κούρκουλος, Κ. Τσανάκης, & Γ. Τρούλης (Επιμ.), *Πρακτικά 3ης Διημερίδας Διδακτικής των Μαθηματικών*, σσ. 34-57. Πανεπιστήμιο Κρήτης (Ρέθυμνο): Π.Τ.Δ.Ε.

Καλαϊτζίδου, Ε. (2013). *Διερεύνηση πρακτικών γραμματισμού δίγλωσσων μαθητών Δημοτικού Σχολείου*. (Μεταπτυχιακή εργασία, Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Γνωστική και κοινωνική ανάπτυξη», Φλώρινα, Ελλάδα). Ανακτήθηκε 2 Απριλίου, 2017, από http://ikee.lib.auth.gr/record/132971?ln=el.

Κοταρίνου, Π. (2014). Η διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από τη χρήση τεχνικών της «δραματικής τέχνης στην εκπαίδευση» (drama in education): διερεύνηση της επίδρασης της Δραματικής Τέχνης στη μάθηση των μαθηματικών σε τάξεις του Λυκείου (Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος, Ελλάδα). Ανακτήθηκε 15 Νοεμβρίου, 2017, από http://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/38460#page/1/mode/2up

Μαντζανίδου, Σ. (2009). *Η ανάπτυξη της διγλωσσίας και της διπολιτσιμικής ταυτότητας των παλιννοστούντων και αλλοδαπών μαθητών: Ο ρόλος του σχολείου και της οικογένειας*. (Μεταπτυχιακή εργασία, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα). Ανακτήθηκε 2 Απριλίου, 2017, από http://ikee.lib.auth.gr/record/122723?ln=el.

Μήτσης, Ν., & Μήτση, Α. (2007). Η διδασκαλία της γλώσσας. Στο *Ετερότητα στη Σχολική Τάξη και Διδασκαλία της Ελληνικής Γλώσσας και των Μαθηματικών: η περίπτωση των Τσιγγανοπαίδων - Επιμορφωτικός Οδηγός* (σσ. 83-108). Βόλος: Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Μπέλλα, Σ. (2016). *Η δεύτερη γλώσσα: Κατάκτηση και Διδασκαλία*. Αθήνα: Πατάκης.

Secada, W. (2007). Διδασκαλία των Μαθηματικών σε δίγλωσσους μαθητές και μαθήτριες. Στο Ε. Τρέσσου (Επιμ.), *Η Διδασκαλία των Μαθηματικών* (σσ. 42-61). Αθήνα: Επίκεντρο.

Σελλά-Μάζη, Ε. (2001). *Διγλωσσία και κοινωνία. Η κοινωνιογλωσσολογική πλευρά της διγλωσσίας. Η ελληνική πραγματικότητα*. Αθήνα: Προσκήνιο.

Σταθοπούλου, Χ. (2005). *Εθνομαθηματικά: Διερευνώντας την Πολιτισμική Διάσταση των Μαθηματικών και της Μαθηματικής Εκπαίδευσης*. Αθήνα: Ατραπός.

Σκούρτου, Ε. (2011). *Η διγλωσσία στο σχολείο*. Αθήνα: Gutenberg.

Τριάρχη-Herrmann, Β. (2005). *Πολύγλωσσα παιδιά: Η αγωγή τους στην οικογένεια και στο σχολείο*. Θεσσαλονίκη: Αφοί Κυριακίδη.

Τριάρχη-Herrmann, Β. (2000). *Η διγλωσσία στην Παιδική Ηλικία: Μια Ψυχογλωσσική Προσέγγιση*. Αθήνα: Gutenberg.

Τσοκαλίδου, Π. (2012). *Χώρος για δύο.* Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Ξενόγλωσση

Adler, J. B. (2002). *Teaching Mathematics in Multilingual Classrooms*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Adoniou, M., & Qing, Y. (2014). Language, Mathematics and English language learners. *Australian Mathematics Teacher, 70*(3), 3-13.

Ajayi, K. O., & Lawani, A.O. (2015). Speaking Mathematically: The Role of Language and Communication in Teaching and Learning of Mathematics. In N. Ololube, P. Kpolovie, & L. Makewa (Eds.), *Handbook of Research on Enhancing Teacher Education with Advanced Instructional Technologies* (pp. 304-318). Hershey, PA: IGI Global. doi:10.4018/978-1-4666-8162-0.ch017

Alibali, M. W., & Goldin-Meadow, S. (1993). Gesture-speech mismatch and mechanisms of learning: What the hands reveal about a child's state of mind. *Cognitive Psychology, 25*, 468–523.

Alt, M., Arizmendi, G. D., & Beal, C. R. (2014). The Relationship Between Mathematics and Language: Academic Implications for Children With Specific Language Impairment and English Language Learners. *Language, Speech, and Hearing Services in Schools*, *45*, 220–233.

Anfara, V. A., Jr., Brown, K. M. & Mangione, T. L. (2002). Qualitative analysis on stage: Making the research process more public. Educational Researcher. 31(7), 28-38.

Avalos, M. A., Bengochea, A., & Secada, W. G. (2015). Reading Mathematics: More than Words and Clauses; More than Numbers and Symbols on a Page. In K. L. Santi & D. K. Reed (Eds.), *Improving Reading Comprehension of Middle and High School Students* (pp. 49-74). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

Baker, C. (2011). *Foundations of bilingual education and bilingualism* (Vol. 79). Bristol/Buffalo/Toronto: Multilingual matters.

Barton, B., & Neville-Barton, P. (2003). Language issues in undergraduate mathematics: A report of two studies. *New Zealand Journal of Mathematics, 32*(Supplementary Issue), 19-28.

Barton, M.L., Heidama, C., & Jordan, D. (2002). Teaching reading in mathematics and science. *Educational Leadership, 60* (3), 24–28.

Bialystok, E. (1991). Metalinguistic dimensions of bilingual language proficiency. In E. Bialystok (Ed.), *Language processing in bilingual children* (pp. 113-140). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Bialystok, E. (2003). *Bilingualism in Development: Language, Literacy, and Cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Bialystok, E., & Barac, R. (2012). Emerging bilingualism: Dissociating advantages for metalinguistic awareness and executive control. *Cognition, 122*(1), 67-73.

Bloomfield, L. (1933). *Language*. NY: Holt.

Bresser, R., Melanese, K., & Sphar, C. (2009α). *Supporting English language learners in math class: grades K-2*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Bresser, R., Melanese, K., & Sphar, C. (2009β). Equity for language learners. *Teaching Children Mathematics, 16* (3), 170-177.

Brown, T. (2001). *Mathematics education and language: Interpreting hermeneutics and post-structuralism*. The Netherlands: Kluwer Academic Press.

Brutt-Griffler, J., & Varghese, M. (2004). "Introduction". Special Issue (Re)writing Bilingualism and the Bilingual Educator's Knowledge Base. In *International Journal of Bilingual Education and Bilingualism, 7*:2 & 3, 93-101.

Burgess, R. G. (1995). *In the Field: An Introduction to field research*. London: Routledge.

Campbell, A. E., Adams, V. M., & Davis, G. (2007). Cognitive demands and second language learners: A framework for analysing mathematics instructional contexts. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(1), 3–30.

Canagarajah, S. (2011). Codemeshing in academic writing: Identifying teachable strategies of translanguaging. *The Modern language Journal, 95*, 401-417.

Cantone, K. F. (2007). *Code-switching in bilingual children* (Vol. 296). Dordrecht: Springer.

Carrasquillo, A., & Rodríguez, V. (1996). *Language minority students in the mainstream classroom*. Clevedon: Multilingual Matters.

Celedón-Pattichis, S. (2003). Constructing meaning: Think-aloud protocols of ELLs on English and Spanish word problems. *Educators for Urban Minorities*, 2(2), 74-90.

Celedón-Pattichis, S., Musanti, S. I., & Marshall, M. E. (2010). Bilingual elementary teachers' reflections on using students' native language and culture to teach mathematics. *Mathematics teaching & learning in K–12: Equity and professional development*, 7-24.

Celedón-Pattichis, S., & Turner, E. E. (2012). "Explícame tu respuesta": Supporting the development of mathematical discourse in emergent bilingual kindergarten students. *Bilingual Research Journal, 35*(2), 197-216.

Celic, C. (2009). *English language learners day by day, K-6: A complete guide to literacy, content-area, and language instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Celic, C., & Seltzer, K. (2011). *Translanguaging: A CUNY-NYSIEB Guide for Educators*. NY: The Graduate Center, The City University of NY.

Chan, S. (2015). Linguistic challenges in the mathematical register for EFL learners: linguistic and multimodal strategies to help learners tackle mathematics word problems. *International Journal of Bilingual Education and Bilingualism, 18*(3), 306-318. http://dx.doi.org/10.1080/13670050.2014.988114

Chapman, A. (1993). Language and learning in school mathematics: A social semiotic perspective. *Issues in educational research*, 3(1), 35-46.

Chronaki, A., Moutzouri, G., & Magos, K. (2015). 'Number in Cultures' as a Playful Outdoor Activity: Making Space for Critical Mathematics Education in the Early Years. In U. Gellert, J. Giménez Rodríguez, C. Hahn & S. Kafoussi (Eds.), *Educational Paths to Mathematics* (pp. 143-159). Springer: Cham.

Coyle, D., Hood, P., & Marsh, D. (2010). *Clil: Content And Language Integrated Learning*. Cambridge: Cambridge University Press.

Crawford, K. (1990). Language and Technology in Classroom Settings for Students from Non-Technological Cultures. *For the Learning of Mathematics*, *10* (1), 2-6.

Creese, A., & Blackledge, A. (2015). Translanguaging and Identity in Educational Settings. *Annual Review of Applied Linguistics*, *35*, 20-35.

Creese, A., & Blackledge, A. (2010). Translanguaging in the bilingual classroom: A pedagogy for learning and teaching? *Modern Language Journal*, *94*(1), 103–115.

Cuevas, G. J. (1984). Mathematics Learning in English as a Second Language. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(2), 134-144.

Cummins, J. (2000). *Language, Power and Pedagogy: Bilingual Children in the Crossfire.* New York: Multilingual Matters.

Cummins, J. (1983). Bilingualism and special education: Program and pedagogical issues. *Learning Disability Quarterly*, *6*(4), 373-386.

Czura, A., & Kołodyńska, A. (2015). CLIL instruction and oral communicative competence in a primary school setting. In K. Ożańska-Ponikwia & B. Loranc-Paszylk (Eds.), *Cross-cultural perspectives on bilingualism and bilingual education* (pp. 123-153). Bielsko-Biała: Wydawnictwo Naukowe Akademii Techniczno-Humanistycznej

Dalton-Puffer, C. (2007). *Discourse in Content and Language Integrated Learning (CLIL) Classrooms*. Amsterdam/Philadelphia: John Benjamins Publishing Co.

Dana-Picard, T., & Kidron, I. (2008). Exploring the phase space of a system of differential equations: different mathematical registers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(4), 695-717.

Devies, A. (2003). *The Native Speaker: Myth and Reality*. Clevedon: Multilingual Matters.

Devos, N. J. (2016). *Peer Interactions in New Content and Language Integrated Settings*. Cham: Springer.

Diaz, R.M., & Klingler, C. (1991). Towards an explanatory model of the interaction between bilingualism and cognitive development. In E. Bialystok (Ed.), *Language processing in bilingual children* (pp. 167-192). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Doerr, H. M., & Chandler-Olcott, K. (2009). Negotiating the literacy demands of standards based curriculum materials: A site for teachers' learning. In A. Schoenfeld (Series Ed.) & J. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, & G. Lloyd (Vol. Ed.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 282–301). New York: Routledge.

Dominguez, H. (2005). Bilingual students' articulation and gesticulation of mathematical knowledge during problem solving. *Bilingual Research Journal*, *29*(2), 269-293.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37-65.

Duval, R. (1999). Representations, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st conference of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 3–26). Atlanta, GA: Georgia State University.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Ellerton, N. F., & Clarkson, P. C. (1996). Language Factors in Mathematics Teaching and Learning. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Part 1, pp. 987-1034). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Falle, J. (2007). Students' tendency to conjoin terms: An inhibition to their development of algebra. *Mathematics: Essential research, essential practice*, 285-294.

Favilli, F., Maffei, L., & Peroni, R. (2013). Teaching and Learning Mathematics in a Non-native Language: Introduction of the CLIL Methodology in Italy. *US-China Education Review A*, *3*(6), 374-380.

Franke, M.L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*(1), 225-256.

Freudenthal, H. (2002). *Revisiting mathematics education: China lectures* (Vol. 9, Mathematics Education Library). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Garcia, E. (2005). *Teaching and learning in two languages: bilingualism & schooling in the United States*. NY: Teachers College Press.

García, O. (2009). *Bilingual education in the 21st century: A global perspective*. Malden: Wiley/Blackwell.

García, O. (2011). Theorizing translanguaging for educators. In C. Celic, C., & K. Seltzer (Eds.), *Translanguaging: A CUNY-NYSIEB Guide for Educators* (pp. 1-6). NY: The Graduate Center, The City University of NY.

García, O. (2012). Theorizing translanguaging for educators. *Translanguaging: A CUNY-NYSIEB guide for educators*, 1-6.

García, O., & Lin, A. M. (2016). Translanguaging in bilingual education. In O. Garcia, A.M.Y. Lin, & S. May (Eds.), *Bilingual and Multilingual education (Encyclopedia of Language and Education)* (pp.117-130). Switzerland: Springer.

García, O., & Leiva, C. (2014). Theorizing and enacting translanguaging for social justice. In A. Blackledge & A. Creese (Eds.*), Heteroglossia as practice and pedagogy* (pp. 199–218). Dordrecht: SpringerScience+Business Media.

García, O., & Wei, L., (2014). *Translanguaging: Language, bilingualism and education*. Basingstoke, UK: Palgrave Macmillan.

García, O., & Wei, L. (2015). Translanguaging, bilingualism, and bilingual education. In W. E. Wright, S. Boun, & O. García (Eds.), *The handbook of bilingual and multilingual education* (pp. 223-240). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Garrison, L., & Mora, J. K. (1999). Adapting Mathematics Instruction for English Language Learners: The Language-Concept Connections. *Changing the Faces of Mathematics: Perspectives on Latinos*, 35-48.

Gebhard, M., Hafner, A. H., & Wright, M. (2004). Teaching English-Language Learners "The Language Game of Math". ? In M. Sadowski (Ed.), *Teaching immigrant and second-language students: strategies for success.* Cambridge, MA: Harvard Education Press.

Gellert, U. (2008). Cognitive academic language proficiency in primary mathematics classrooms. In J.F. Matos, P. Valero & K. Yasukawa (Eds.) (2008), *Proceedings of the Fifth International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 140-143). Lisboa: Centro de Investigação em Educação, Universidade de Lisboa – Department of Education, Learning and Philosophy, Aalborg University.

Gibbons, P. (2002). *Scaffolding language, scaffolding learning: Teaching second language learners in the mainstream classroom*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Goetz, J., & LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. New York: Academic Press.

Graham, B. (1988). Mathematics Education and Aboriginal Children. In A. Bishop (Ed.), *Mathematics Education and Culture* (pp. 119-135). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Greenfield, P. M. (1984). *A theory of the teacher in the learning activities of everyday life.* Cambridge: Harvard University Press.

Guzula, X., McKinney, C., & Tyler, R. (2016). Languaging-for-learning: Legitimising translanguaging and enabling multimodal practices in third spaces. *Southern African Linguistics and Applied Language Studies*, *34*(3), 211-226.

Halai, A., & Karuka, S. (2013). Implementing Language in Education Policy in Multilingual Mathematics Classrooms: Pedagogical Implications. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *9*(1), 23-32.

Hamers, J.F., & Blanc, M.H.A. (1995). *Bilinguality and Bilingualism* (2nd Edition). Cambridge: Cambridge University Press.

Hammond, J., & Gibbons, P. (2005). Putting scaffolding to work: the contribution of scaffolding in articulating ESL education. Prospect, 20(1), 6–30.

Harrop, E. (2012). Content and Language Integrated Learning (CLIL): Limitations and possibilities. *Encuentro, 21,* 57-70.

He, P., Lai, H., & Lin, A. M. (2016). Translanguaging in a Multimodal Mathematics Presentation. *Translanguaging in Higher Education: Beyond Monolingual Ideologies*, *104*, 91.

Heine, L. (2010). *Problem Solving in a Foreign Language. A study in Content and Language Integrated Learning*. Belin: De Gruyter Mouton.

Herbel-Eisenmann, B. (2002). Using student contributions and multiple representations to develop mathematical language. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(2), 100–105.

Herbel-Eisenmann, B., Johnson, K., Otten, S., Cirillo, M., & Steele, M. (2015). Mapping talk about the mathematics register in a secondary mathematics teacher study group. *The Journal Of Mathematical Behavior*, *40*(A), 29-42. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.09.003

Herbert, S., & Pierce, R. (2007). Video evidence: What gestures tell us about students' understanding of rate of change. In J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the*

30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: Mathematics - Essential Research, Essential Practice (pp. 362-371). Adelaide: MERGA Inc.

Heredia, R., & Cieślicka, A. B. (2015). *Bilingual Figurative Language Processing*. New York, NY: Cambridge University Press.

Herr, K., & Anderson, G. L. (2005). *The action research dissertation: A guide for students and faculty*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., & Murray, H. (1997). *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Hornberger, N. H., & Link, H. (2012) Translanguaging and transnational literacies in multilingual classrooms: a biliteracy lens. *International Journal of Bilingual Education and Bilingualism, 15*(3), 261-27. DOI: 10.1080/13670050.2012.658016.

Ikonomou, A., Kaldrimidou, M., Sakonidis, H., & Tzekaki, M. (1999). Interaction in the mathematics classroom: some epistemological aspects. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the 1st Conference of the ESRME, Vol.1* (pp. 1168-181). Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik: Osnabrueck.

Jamison, R. E. (2000). Learning the Language of Mathematics. *Language and Learning Across the Disciplines*, *4*(1), 45-54.

Jegede, O. (2011). Code switching and its implications for teaching Mathematics in primary schools in Ile-Ife, Nigeria. *Journal of education and practice*, *2*(10), 41-54.

Jessner, U. (2006). *Linguistic Awareness in Multilinguals: English as a Second Language*. Edinburgh: Edinburgh University Press.

Johnson, J. (2000). *Teaching and learning mathematics: Using research to shift from the "yesterday" mind to the "tomorrow" mind*. (P.O. Box 47200, Olympia, 98504-7200): Office of Superintendent of Public Instruction.

Jones, B. (2017). Translanguaging in Bilingual Schools in Wales. *Journal of Language, Identity & Education*, *16*(4), 199-215.

Kirsner, S. A., & Bethell, S. (1992). *Creating a Flexible and Responsive Learning Environment for General Mathematics Students.* Research Report 92-7. East Lansing, Mich.: National Center for Research on Teacher Learning.

Klimova, B. F. (2012). CLIL and the teaching of foreign languages. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, *47*, 572-576.

Korosidou, E., & Deligianni, A. (2017). Let me introduce you to Crete": A CLIL Project in the English as a Foreign Language Classroom. *Research Papers in Language Teaching and Learning, 8*(2), 35-50.

Kotarinou, P., Gana, E., & Stathopoulou, C. (2017). When geometry meets the language arts: questioning the disciplinary boundaries of a school curriculum. In A. Chronaki (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Mathematics Education and Society Conference: Mathematics Education and Life at Times of Crisis* (pp. 622-632). Volos, Greece: University of Thessaly.

Lasagabaster, D., & García, O. (2014). Translanguaging: towards a dynamic model of bilingualism at school/Translanguaging: hacia un modelo dinámico de bilingüismo en la escuela. *Cultura y Educación*, *26*(3), 557-572. DOI: 10.1080/11356405.2014.973671

Lewis, G., Jones, B., & Baker, C. (2012). Translanguaging: Developing its conceptualisation and contextualisation. *Educational Research and Evaluation, 18*(7), 655–670.

Lin, A. M., & He, P. (2017). Translanguaging as Dynamic Activity Flows in CLIL Classrooms. *Journal of Language, Identity & Education, 16*(4), 228-244.

Lin, A. M., & Lo, Y. Y. (2017). Trans/languaging and the triadic dialogue in content and language integrated learning (CLIL) classrooms. *Language and Education, 31*(1), 26-45.

Lopez, A., Turkan, S., & Guzman-Orth, D. (2017). Conceptualizing the Use of Translanguaging in Initial Content Assessments for Newly Arrived Emergent Bilingual Students. Princeton, NJ: Educational Testing Service.

Macken-Horarik, M., & Adoniou, M. (2008). Genre and Register in Multiliteracies. In B. Spolsky & F. M. Hult (Eds.), *The Handbook of Educational Linguistics* (pp. 367-382). Malden, MA: Blackwell Publishing.

Mägiste, E. (1980). Arithmetical calculations in monolinguals and bilinguals. *Psychological Research, 42*(4), 363-373.

Mallet, D. G. (2011). Walking a mile in their shoes: Non-native English speakers' difficulties in English language mathematics classrooms. *Journal of Learning Design, 4*(3), 28-34.

Makalela, L. (2015). Moving out of linguistic boxes: The effects of translanguaging strategies for multilingual classrooms. *Language and education, 29*(3), 200-217.

McDonald, S., Warren, E., & DeVries, E. (2011). Refocusing on oral language and rich representations to develop the early mathematical understandings of Indigenous students. *The Australian Journal of Indigenous Education, 40*, 9-17.

McLaughlin, M., & Allen, M.B. (2002). *Guided Comprehension in Action: Lessons for Grades 3–8*. Newark, DE: International Reading Association.

Meaney, T. (2007). Weighing up the Influence of Context on Judgements of Mathematical Literacy. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*(1), 681-704.

Meaney, T. (2006). Acquiring the mathematics register in classrooms. *set: Research Information for Teachers, 3,* 39–43.

Meaney, T., Fairhall, U., & Trinick, T. (2007α). *Te Reo Tātaitai: Developing rich mathematical language in Māori immersion classrooms*. Wellington: NZCER.

Meaney, T., Fairhall, U., & Trinick, T. (2007β). Acquiring the Mathematics Register in te reo Māori. In J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: Mathematics - Essential Research, Essential Practice* (pp. 493-502). Adelaide: MERGA Inc.

Meaney, T., Trinick, T., & Fairhall, U. (2009). *Mathematics: She'll be wirte!* Wellington: Crown.

Meaney, T., Trinick, T., & Fairhall, U. (2012). *Collaborating to Meet Language Challenges in Indigenous Mathematics Classrooms*. Dordrecht/Heidelberg/London/New York: Springer.

Merriam, S.B. (1988). *Case Study Research in Education: A Qualitative Approach* San Francisco, CA, US: Jossey-Bass.

Moore, P., & Lorenzo, F. (2015). Task-based learning and content and language integrated learning materials design: process and product. *The Language Learning Journal*, *43* (3), 334-357. http://dx.doi.org/10.1080/09571736.2015.1053282

Moore, P., & Nikula, T. (2016). Translanguaging in CLIL classrooms. In T. Nikula, E. Dafouz, P. Moore, & U. Smit (Eds.), *Conceptualising Integration in CLIL and Multilingual Education* (pp. 211-234). Clevedon: Multilingual Matters.

Morgan, C. (2012). Studying Discourse Implies Studying Equity. In B. Herbel-Eisenmann, J. Choppin, D. Wagner, & D. Pimm (Eds.), *Equity in Discourse for Mathematics Education: Theories, Practices, and Policies* (pp. 181-192). Dordrecht/Heidelberg/London/New York: Springer.

Moschkovich, J. (2007). Examining mathematical discourse practices. *For the Learning of Mathematics*, *27*(1), 24-30.

Moschkovich, J. (2005). Using two languages when learning mathematics. *Educational studies in Mathematics*, *64*(2), 121-144.

Moschkovich, J. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. *Mathematical Thinking and Learning. 4*, 189-212.

Musanti, S. I., Celedón-Pattichis, S., & Marshall, M. E. (2009). Reflections on language and mathematics problem solving: A case study of a bilingual first-grade teacher. *Bilingual Research Journal*, *32*(1), 25-41.

Naves, T. (2009). Effective content and language integrated learning (CLIL) programmes. In Y. Ruis de Zarobe & R.M. Jimenez Catalan (Eds.), *Content and language integrated learning: Evidence from research in Europe* (pp. 22-40). Bristol: Multilingual Matters.

Ní Ríordáin, M., Coben, D., & Miller-Reilly, B. (2015). What Do We Know about Mathematics Teaching and Learning of Multilingual Adults and Why Does it Matter? *Adults Learning Mathematics: An International Journal*, *10*(1), 8-23.

Norén, E. (2008). Bilingual students' mother tongue: a resource for teaching and learning mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *13*(4), 29-50.

Novotná, J., & Hofmannová, M. (2000). CLIL and mathematics education. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics For Living* (pp. 226-230). Jordan: Amman.

O'Halloran, K. L. (2015). The language of learning mathematics: A multimodal perspective. *The Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 63-74.

O'Halloran, K. L. (2000). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. *Linguistics and Education*, *10*(3), 359–388.

Othman, A. S. (2012). *Teaching mathematics in a second language: Malaysian primary schools* (PhD thesis). Dunedin, New Zealand: University of Otago.

Ouazizi K. (2016). The Effects of CLIL Education on the Subject Matter (Mathematics) and the Target Language (English). *Latin American Journal of Content & Language Integrated Learning*, *9*(1), 110-137. doi:10.5294/laclil.2016.9.1.5

Paez Paez, C., Cruz, M., & Gallardo, R. (2016). The meaning displayed when solving linear equations. In M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, & J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1361-1367). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Patkin, D. (2011). The interplay of language and mathematics. *Pythagoras*, *32*(2), 1-7. doi:10.4102/pythagoras.v32i2.15

Pimm, D. (1991). Communicating Mathematically. In K. Durkin, & B. Shire (Eds.), *Language in Mathematical Education: Research and Practice* (pp. 17-23). Milton Keynes: Open University Press.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms.* London: Routledge and Kegan Paul.

Pirie, S. (1991). Peer discussion in the context of mathematical problem solving. In K. Durkin, & B. Shire (Eds.), *Language in Mathematical Education: Research and Practice* (pp. 143-161). Milton Keynes: Open University Press.

Portolés, L., & Martí, O. (2017). Translanguaging as a teaching resource in early language learning of English as a an additional language (EAL). *Bellaterra Journal of Teaching & Learning Language & Literature*, *10*(1), 61-77.

Prediger, S., & Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions—design and effects of a language-and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal*, *25*(3), 435-456.

Presmeg, N. C. (1988). Mathematics for mutual understanding: towards a mathematics curriculum for mutual understanding when diverse cultures come together in the same classroom. *Cultural Dynamics*, *1*(2), 208-224.

Probyn, M. (2015). Pedagogical translanguaging: bridging discourses in South African science classrooms. *Language and Education*, *29*(3), 218-234. http://dx.doi.org/10.1080/09500782.2014.994525

Roberts, T. (1998). Mathematical Registers in Aboriginal Languages. *For the Learning of Mathematics*, *18*(1), pp. 10-16.

Romaine, S. (1994). *Language in society: An introduction to sociolinguistics*. New York, NY: Oxford University.

Saalbach, H., Eckstein, D., Andri, N., Hobi, R., & Grabner, R. H. (2013). When language of instruction and language of application differ: Cognitive costs of bilingual mathematics learning. *Learning and Instruction*, *26*, 36-44.

Sayer, P. (2013). Translanguaging, TexMex, and bilingual pedagogy: Emergent bilinguals learning through the vernacular. *Tesol quarterly*, *47*(1), 63-88.

Schleppegrell, M. J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, *23*, 139–159.

Schwartz, M., & Asli, A. (2014). Bilingual teachers' language strategies: The case of an Arabic–Hebrew kindergarten in Israel. *Teaching and Teacher education*, *38*, 22-32.

Secada, W. (1998). School Mathematics for Language Enriched Pupils. In S. H. Fradd & O. Lee (Eds.), *Creating Florida's Multilingual Global Work Force: Educational policies and practices for students learning English as a new language*. Tallahassee, FL: Florida Department of Education.

Senyatsi, K. K. (2012). *An analysis of code switching as a learning and teaching strategy in selected multilingual schools of Limpopo Povince* (Master thesis, University of Limpopo, Limpopo, South Africa).

Setati, M. (2003). Language Use in a Multilingual Mathematics Classroom in South Africa: A Different Perspective. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 151-158.

Setati, M. (1998). Code-switching in a senior primary class of second-language mathematics learners. *For the Learning of Mathematics, 18*(1), 34-40.

Shin, S. J. (2013). *Bilingualism in Schools and Society*. NY and London: Routledge.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Harvard Educational Review , 57 (1), σσ. 1-21.

Sierpinska, A. (2005). *Understanding in Mathematics*. London/Washington: The Falmer Press.

Sigley, R., & Wilkinson, L. C. (2015). Ariel's cycles of problem solving: An adolescent acquires the mathematics register. *The Journal of Mathematical Behavior, 40*, 75-87. doi:10.1016/j.jmathb.2015.03.001

Skutnabb-Kangas, T. (1981). *Bilingualism or not: The education of minorities*. Clevedon: Multilingual Matters.

Smit, J., & van Eerde, H.A.A. (2011). A teacher's learning process in dual design research: Learning to scaffold language in a multilingual mathematics classroom. ZDM, *43*(6-7), 889-900.

Smith, E. (2006). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D., Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133–160). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Smith, M.S. (1991). Language modules and bilingual processing. In E. Bialystok (Ed.), *Language processing in bilingual children* (pp. 10-24). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Somers, T. (2017). Content and Language Integrated Learning and the inclusion of immigrant minority language students: A research review. *International Review of Education, 63*(4), 495-520. DOI 10.1007/s11159-017-9651-4

Straehler-Pohl, H., Fernández, S., Gellert, U., & Figueiras, L. (2014). School mathematics registers in a context of low academic expectations. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 175-199.

Surmont, J., Struys, E., Van Den Noort, M., & Van De Craen, P. (2016). The effects of CLIL on mathematical content learning: A longitudinal study. *Studies in Second Language Learning and Teaching, 6* (2), 319-337.

Tavares, N. J. (2015). How strategic use of L1 in an L2-medium mathematics classroom facilitates L2 interaction and comprehension. *International Journal of Bilingual Education and Bilingualism*, *18*(3), 319–335, http://dx.doi.org/10.1080/13670050.2014.988115

Temple, C., & Doerr, H. M. (2012) Developing fluency in the mathematical register through conversation in a tenth-grade classroom. *Educational Studies in Mathematics, 81*(3), 287-306. doi:10.1007/s10649-012-9398-6

Thornbury, S. (2002). *How to teach vocabulary*. Harlow: Longman.

Trinick, T., Meaney, T., & Fairhall, U. (2014). Teachers learning the registers of mathematics and mathematics education in another language: an exploratory study. *Zdm, 46*(6), 953-965. doi:10.1007/s11858-014-0618-7

Uribe-Flórez, L. J., Araujo, B., Franzak, M., & Haynes Writer, J. (2014). Mathematics, power, and language: Implications from lived experiences to empower English learners. *Action in Teacher Education, 36*(3), 234-246.

Van de Craen, P., Ceuleers, E., & Mondt, K. (2007). Cognitive development and bilingualism in primary schools: teaching maths in a CLIL environment. In D. Marsh & D. Wolff (eds.), *Diverse Contexts-Converging Goals. CLIL in Europe* (pp. 185-200). Frankfurt am Main: Peter Lang.

Walqui, A. (2000). *Strategies for Success: Considerations for Programming and Instruction in Literacy Development for Bilingual Students*. Boston: New England Multifunctional Resource Center for Language and Culture Education.

Walshaw, M., & Anthony, G. (2007). The Role of Pedagogy in Classroom Discourse. In J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: Mathematics - Essential Research, Essential Practice* (pp. 765-774). Adelaide: MERGA Inc.

Warren, E., Young, J., & DeVries, E. (2007). Australian Indigenous students: The role of oral language and representations in the negotiation of mathematical understanding. In J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: Mathematics - Essential Research, Essential Practice* (pp. 775-784). Adelaide: MERGA Inc.

Wei, L. (2011). Moment analysis and translanguaging space: Discursive construction of identities by multilingual Chinese youth in Britain. *Journal of Pragmatics, 43,* 1222–1235.

Wei, L., & García, O. (2017). From Researching Translanguaging to Translanguaging Research. In K. King, Y.J. Lai, & S. May (Eds), *Research Methods in Language and Education* (pp. 1-14). Cham: Springer.

White, A. M. (2004). Lewin's action research model as a tool for theory building: A case study from South Africa. *Action Research, 2*(2), 127-144.

Wood, D., Brunner, J., & Ross, G. (1979). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Psychology and Psychiatry, 17*(2), 89-100.

Wossala, J., Laitochová J., Nocar, D., & Janská, L. (2013). Content and Language Integrated Learning in Mathematics Education. *Usta ad Albim BOHEMICA, 8*(3), 177-180.

Yamat, H., Maarof, N., Maasum, T. N. T. M., Zakaria, E., & Zainuddin, E. (2011). Teacher's Code-Switching as Scaffolding in Teaching Content Area Subjects. *World Applied Sciences Journal, 15,* 18-22.

Παράρτημα

Αναφορά 1η

Η Σαμ. και η Τζ., είναι δύο αδερφές (περίπου 10 και 11 ετών) που πολύ πρόσφατα ήρθαν στην Ελλάδα. Γι' αυτό δε μιλούν καθόλου ελληνικά ή μιλούν ελάχιστα αγγλικά. Μαζί τους μπορούσα να επικοινωνήσω μόνο με νοήματα και σύμβολα. Έτσι κάναμε προσθέσεις και αφαιρέσεις διψήφιων αριθμών, πολλαπλασιασμό διψήφιου με μονοψήφιο και διαίρεση. Κατά τη διάρκεια των πράξεων χρησιμοποιούσαν τη μητρική τους γλώσσα.

Στις προσθέσεις έγινε συνδυασμός με ζώα και με πρόσωπα της οικογένειας που μελετούσαμε προηγουμένως με εικόνες από ένα βιβλίο. Δηλαδή, σε απλά προφορικά προβλήματα: «Το πάντα είναι (ζυγίζει) 160 κιλά. Το τσιτάχ είναι 65 κιλά. Πόσο ζυγίζουν μαζί;» (το βάρος βρέθηκε με επιτόπου σύντομη αναζήτηση στο διαδίκτυο-βικιπαίδεια), «Η μαμά είναι 35 χρονών. Ο παππούς είναι 26 χρόνια μεγαλύτερος. Πόσο χρονών είναι ο παππούς;». Σε κάθε τέτοιο πρόβλημα χρησιμοποιούσαμε τις εικόνες και ένα απλό γενεαλογικό δέντρο που είχαμε φτιάξει και τοποθετούσαμε χαρτάκια (τύπου ποστ-ιτ) με την ηλικία πάνω από κάθε πρόσωπο, μέχρι να συμπληρωθούν όλες οι ηλικίες (3-4 προφορικά προβλήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης).

Τα κορίτσια καταλάβαιναν τα προβλήματα χάρη στις εικόνες, τα στοιχεία του διαδικτύου και τις χειρονομίες. Τις λέξεις βάρος-κιλά και ηλικία-χρονών τις αναζητήσαμε στο Google Translate. Στα προβλήματα φάνηκε ότι ήξεραν πρόσθεση με κρατούμενο αλλά όχι αφαίρεση με δανεικό. Έτσι προσπάθησα να την εξηγήσω δείχνοντας την αξία της θέσης των ψηφίων των αριθμών.
π.χ. το 85-27 το έδειξα ως

$$\begin{array}{rcc} & 70 & 15 \\ & \cancel{80} & \cancel{5} \\ - & 20 & 7 \\ \hline & 50 & 8 \end{array} \rightarrow 50 + 8 = 58$$

Το σκέφτηκα ως τον μόνο τρόπο που μπορούσα να το προσεγγίσω εννοιολογικά χωρίς λόγια (αν και εγώ χρησιμοποιούσα εκφράσεις στα ελληνικά ή αγγλικά και νοήματα, π.χ. πέντε, five, δείχνοντας 5 δάχτυλα κλπ, και, βγάζω κ.λπ.).

Μετά η Τζ. έκανε την αφαίρεση 48-35 σωστά με τον ίδιο τρόπο που της έδειξα (έδειχνε ότι είχε κατανοήσει εύκολα, κουνούσε καταφατικά το κεφάλι και ανέφερε «me, mathematics good»). Προσπαθώντας να μου «επικοινωνήσει» αυτές τις μαθηματικές της ικανότητες, πήρε την πρωτοβουλία να κάνει στον πίνακα τη διαίρεση 75:3. Ξεκίνησε γράφοντας στο πλάι τον πολλαπλασιασμό (κάθετα) 30x3=90 και έπειτα 20x3=60. Μετά έγραψε 20 στο πηλίκο και 60 κάτω από τον διαιρετέο. Από την αφαίρεση βρήκε 15 και διόρθωσε το 0 του πηλίκου σε 5, έγραψε 15 κάτω από το 15 και βρήκε υπόλοιπο ίσο με μηδέν.

Η Σ. έκανε κι εκείνη μια διαίρεση, διαλέγοντας τους αριθμούς 126:9. Έγραψε 1 στο πηλίκο και 9 κάτω από το 12 του διαιρετέου. Αφαίρεσε 9 από 12 και βρήκε 3.

Κατέβασε το 6 και έγραψε στο πλάι 9x_=36. Συμπλήρωσε το κενό με το 4, και το έγραψε στο πηλίκο. Τελείωσε σωστά τη διαίρεση βρίσκοντας υπόλοιπο ίσο με μηδέν. Κλείνοντας, τις ρώτησα αν αυτός είναι ο τρόπος που κάνουν τη διαίρεση στη χώρα τους (χρησιμοποιώντας νοήματα και αγγλικά - τα λίγα και απλά που θεωρώ ότι καταλαβαίνουν) και είπαν «yes, school Syria».

Αναφορά 2η

Ο Σ. ασχολιόταν με προσθέσεις με μία από τις δασκάλες του σχολείου. Τον παρακολουθούσα αρχικά να κάνει προσθέσεις πάνω από τη δεκάδα. Διαπίστωσα ότι μπορούσε να τις κάνει, τις γνώριζε, όμως μόνο απαριθμώντας (μετρούσε 5,6,7,8,9,10 με τα δάχτυλα και έδινε έμφαση ή επαναλάμβανε τον τελευταίο αριθμό). Τότε σκέφτηκα να του ζητήσω να κάνει προσθέσεις των ίδιων αριθμών: 5+5, 6+6, 7+7, 8+8, 9+9, γιατί στόχευσα στο να μπορεί να κάνει τις προσθέσεις στρατηγική. Του είπα διάφορα αθροίσματα τα οποία έγραφε στο τετράδιό του, π.χ. 5+9=**5+5+4**=**10**+4=14 (υπογράμμιζα και ένωνα με γραμμές/βελάκια τους αριθμούς). Στο άθροισμα 6+8 ο Σ. έγραψε: 6+8=6+6+2=12+2=14. Δηλαδή, προτίμησε τον χωρισμό του 8 στους αριθμούς 6+2 ώστε να προκύψει το άθροισμα 6+6 το οποίο γνώριζε, αφού είχε υπολογίσει προηγουμένως. Έτσι, του ζήτησα να υπολογίσει το άθροισμα 7+5. Εκείνος έγραψε 7+1+1+1+1+1 (κύκλωσε το 7+1+1+1 και το 1+1) = 10 + 2 = 12. Και στις δύο περιπτώσεις τον επιβράβευσα για τις στρατηγικές του.

Η τελευταία περίπτωση όμως και ο τρόπος που έγραφε το 1 (σαν γραμμή Ι) μου έδωσε μια άλλη ιδέα. Τότε χρησιμοποίησα ζάρια για να κάνει τυχαίες προσθέσεις με πιο παιγνιώδη τρόπο και του ζήτησα να φτιάξει τις κουκκίδες που έδειχναν, ώστε να εξοικειώνεται οπτικά με το πώς αναπαριστώνται οι κουκκίδες, πώς μοιάζουν και ταυτόχρονα να κυκλώνει τη δεκάδα και να βλέπει ότι όσες περισσεύουν εκτός της δεκάδας είναι αυτές που βοηθούν στο να βγει το αποτέλεσμα, π.χ. στις 6+8 κουκκίδες περισσεύουν 4 κουκκίδες που φαίνονται στο αποτέλεσμα 14 (10+4). Εκείνος συμμετείχε με ενθουσιασμό και χρησιμοποιούσε πάντα την ελληνική γλώσσα για να εκφράσει τους αριθμούς. Κάθε φορά που ο Σ. ολοκλήρωνε ένα άθροισμα ζητούσε "κι άλλο, σέλω κι άλλο!" και έριχνε ξανά τα ζάρια.

Τότε απέκτησε παρατηρητές την Φ. και την Α., τις οποίες αποφάσισα να εντάξω στη διαδικασία, δίνοντάς τους από 1 ζάρι. Όλα τα παιδιά έριξαν το ζάρι τους και τους ζήτησα να βρουν ποιος έφερε τον μεγαλύτερο και ποιος τον μικρότερο αριθμό. Ο Σ. πριν το κάνει αυτό βρήκε το άθροισμα των τριών αριθμών με το νου. Η Α. πίστευε ότι έχει φέρει τον μεγαλύτερο, ενώ είχε φέρει τον μικρότερο. Ο Σ. και η Φ. βρήκαν πως η Φ. έφερε τον μεγαλύτερο και η Α. τον μικρότερο (Φ: «Μαντάμ, this, I have the big, A. has the little, the small») και προσπαθούσαμε όλοι μαζί να εξηγήσουμε στην Α. Εγώ χρησιμοποιούσα την αγγλική γλώσσα, ενώ ο Σ. και η Φ. τη μητρική τους, που είναι διαφορετική από τη μητρική της Α. Η Α. δεν έδειχνε αν καταλαβαίνει ή όχι και έτσι έριξα κι εγώ ένα ζάρι. Ο αριθμός που έτυχε ήταν μεγαλύτερος από του Σ. κι έτσι επανέλαβα ότι ο ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος και ο άλλος μικρότερος και τα παιδιά συμφώνησαν.

Έριξαν ξανά τα δικά τους ζάρια. Τους ρώτησα ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός, απευθυνόμενη κυρίως στην Α., και εκείνη έδειξε σωστά το δικό της ζάρι, και μετά απάντησαν αντίστοιχα σωστά ότι το μικρότερο είναι το ζάρι του Σ. Έπειτα έριξε το ζάρι της πρώτα η Α. Στη σειρά της Φ. την ρώτησα ποιους αριθμούς πρέπει να φέρει για να έχει μεγαλύτερο από την Α. και να κερδίσει. Εκείνη δεν πρόλαβε να απαντήσει γιατί ο Σ. απάντησε «5, 6!». Για να μη φέρω την Φ. σε δύσκολη θέση σε περίπτωση που επιβράβευα πρώτα τον Σ., την ρώτησα αν συμφωνεί με την απάντηση που έδωσε ο Σ. και της θύμισα και την ερώτηση που της έκανα. Εκείνη επανέλαβε ερωτηματικά την ερώτηση και απάντησε «4,5,6», οπότε και της εξήγησα πως αν φέρει 4 τότε δε θα έχει μεγαλύτερο αλλά ίσο-ίδιο με την Α. Η Φ. έριξε το ζάρι και έφερε 4. Την ρώτησα ποια σχέση έχει ο αριθμός της με τον αριθμό της Α. και εκείνη απάντησε «ίδιο» και συμπλήρωσα «είναι ίδιοι, δηλαδή ίσοι οι αριθμοί, they are the same, they are equal… equal? you understand?». Η Φ απάντησε «yes, means that…, 4 (δείχνει στο ζάρι), 4 (δείχνει στο άλλο ζάρι)...», ο Σ. συμπλήρωσε «ίδιο είναι!», και του απάντησα πως ναι, είναι ίδιοι ή αλλιώς λέμε ίσοι και αυτό σημαίνει equal. Κοίταξα την Α. και την ρώτησα αν καταλαβαίνει και εκείνη κούνησε το κεφάλι της καταφατικά. Μετά, ρώτησα όλα τα παιδιά αν ξέρουν το σύμβολο του ίσον και πώς μπορούν να μου δείξουν γραπτώς ότι δύο αριθμοί είναι ίσοι. Η Φ. με ρώτησε τι εννοώ και της εξήγησα πως της ζητώ να γράψει ότι το 4 είναι ίσο με το 4.

Τότε η Α. αποχώρησε σε άλλο μάθημα του προγράμματός της και εξήγησα στην Φ. και στον Σ. ότι στα μαθηματικά αυτά που λέμε μεταφράζονται σε σύμβολα ή το αντίστροφο, δηλαδή κάτι που βλέπουμε με σύμβολα μπορούμε να το διαβάσουμε με λέξεις. Έτσι τους είπα ότι όταν λέμε ότι το 4 είναι ίσο με το 4, συμβολίζεται 4 (ζητώ από τον Σ. να γράψει), ίσον (ο Σ. δεν ξέρει και του έδειξα το σύμβολο ίσον από τις προηγούμενες πράξεις του και τότε καταλαβαίνουν και οι 2 λέγοντας «αααα»), 4 (ο Σ. γράφει το 4 μετά το ίσον). Ζήτησα από τα παιδιά να διαβάσουν μαζί μου την μαθηματική πρόταση «4 ίσον 4» και τους ρώτησα πώς το διαβάζουν αυτό στη γλώσσα τους. Τα παιδιά το έκαναν και το επανέλαβα κι εγώ στη δική τους γλώσσα, ελέγχοντάς το σε ένα ιντερνετικό λεξικό.

Έπειτα ζήτησα από τον Σ. να ρίξει το ζάρι του. Μόλις το έκανε τον ρώτησα αν το άθροισμα είναι «πάνω» ή «κάτω» από το 10, εξηγώντας ότι εννοώ αν είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από 10 κάνοντας μία αριθμογραμμή 0-5-10-15 (χωρισμός με το μάτι) και δείχνοντας τα σημεία πάνω και κάτω από το 10 για να καταλάβουν τον λόγο χρήσης αυτών των λέξεων. Εκείνος είπε σωστά «κάτω».

Στη συνέχεια έριξε ο καθένας δύο ζάρια και τους ζήτησα να βρουν το άθροισμα. Πρώτα έριξε ο Σ. και υπολόγισε με το νου το άθροισμα. Η Φ. έκανε το ίδιο στη δική της σειρά. Τα παιδιά για να βρουν το συνολικό άθροισμα ξεκίνησαν να μετρούν από την αρχή τις κουκκίδες κάθε ζαριού. Τότε τους είπα πως αρκεί να θυμούνται αυτό που υπολόγισαν στην αρχή, δηλαδή το άθροισμα του ενός και το άθροισμα του άλλου δίνουν το συνολικό άθροισμα των αριθμών των ζαριών. Έτσι, ρώτησα τον Σ. ποιους αριθμούς έφερε στα ζάρια και τα κατέγραψα ως πρόσθεση, και δίπλα κατέγραψα ως συνεχιζόμενη πρόσθεση τους αριθμούς που έτυχε η Φ. Μετά έγραψα το ίσον και

κύκλωσα τα ζευγάρια αριθμών του καθενός και τους ρώτησα αν θυμούνται πόσο κάνουν μαζί αυτά που έφεραν στο ζάρι. Ο Σ. θυμόταν, ενώ η Φ. το υπολόγισε ξανά. Τότε, τους ζήτησα να βρουν το άθροισμα των αριθμών που προέκυψαν και το έκαναν και οι 2 με το νου (οι αριθμοί ήταν <10 και το τελικό άθροισμα >10).

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουν και αριθμούς μεγαλύτερους από αυτούς που δείχνει ένα ζάρι, τους είπα να αφαιρούν το άθροισμα των αριθμών που φέρνουν στα ζάρια τους (δηλαδή το ζάρι του ενός και το ζάρι του άλλου να προστίθενται και έπειτα να αφαιρείται) από το 10 και από το 20. Τα παιδιά έκαναν με το νου τις πράξεις τους και φώναζαν δυνατά το αποτέλεσμα που έβρισκαν, όμως κάθε φορά που έριχναν τα ζάρια έκαναν και συγκρίσεις των αριθμών. Συγκεκριμένα, άκουσα τον Σ. να λέει «εγώ 4, εσύ 3, μεγαλύτερο εγώ δικό μου ζάρι!» και η Φ. του απάντησε στη μητρική τους γλώσσα, δείχνοντας να συμφωνεί μαζί του.

Παρατήρησα πως στις πρώτες περιπτώσεις χρησιμοποιούσαν τα δάχτυλά τους και τη μητρική τους γλώσσα, ενώ έπειτα ο Σ. με ρώτησε αν το αποτέλεσμα που βρήκε κάνει «14» (στα ελληνικά) και τον επιβεβαίωσα και τότε μέτρησε από το 14 ως το 20 στα ελληνικά. Η Φ. από τότε χρησιμοποιούσε κι εκείνη την ελληνική στις πράξεις της. Επίσης, έπειτα από μερικές περιπτώσεις, τα παιδιά σταμάτησαν να χρησιμοποιούν τα δάχτυλά τους και εφάρμοσαν την ίδια στρατηγική που χρησιμοποιούσαν και για την αφαίρεση από το 10. Μάλιστα, ο Σ. μου έδειξε «μαντάμ, έτσι! 20, 4, 16, 10, 4, 6» και τον επιβράβευσα. Ειδικά ο Σ. φάνηκε ότι ευχαριστήθηκε πολύ το μάθημα. Η προηγούμενη δασκάλα απόρησε με την αλλαγή της στάσης του απέναντι στα μαθηματικά και με τη συμπεριφορά του. Πολλές από τις επόμενες μέρες μάλιστα ζητούσε να κάνουμε «ματηματικά», ανεξάρτητα από το αν είχε άλλο μάθημα ή όχι.

Αναφορά 3η

Η Γ. και η Σ. είναι δύο αδερφές που, όπως η Σαμ. και η Τζ., ήρθαν πρόσφατα στην Ελλάδα και δε μιλούν ελληνικά ή αγγλικά. Οι δύο τελευταίες θέλησαν και πάλι να μου δείξουν τις γνώσεις τους και μέτρησαν από το 1 μέχρι το 10, με τις άλλες δύο να προσπαθούν πιο σιγανά να συμπληρώσουν αυτά που ξέρουν. Όλα τα κορίτσια θέλησαν να συνεχίσουν να μετράνε και παραπέρα κι έτσι σκέφτηκα να ασχοληθώ με αυτό. Κάθε φορά έγραφαν στο τετράδιό τους το αριθμητικό σύμβολο, την ελληνική λέξη και την προφορά της με τη χρήση των αραβικών χαρακτήρων. Έτσι γράψαμε τους αριθμούς 1-10 και κάθε φορά τις έβαζα να το ακούν και από μια εφαρμογή μετάφρασης.

Στον αριθμό 3 η Τζ. ρώτησε «τρίτο;», η Γ. συμπλήρωσε «τρίτο, τετάρτο…» και η Σ. ξεκίνησε να λέει «πέ…». Κατάλαβα πως τα κορίτσια μιλούσαν για τις ημέρες της εβδομάδας, κι έτσι τους είπα πως όταν κάποιος είναι «νούμερο ένα, number one» τότε λέμε ότι είναι πρώτος, ο επόμενος δεύτερος κτλ., τα οποία μοιάζουν με τις μέρες Δευτέρα, Τρίτη κ.ό.κ., γιατί η Δευτέρα θεωρείται η δεύτερη μέρα της εβδομάδας κ.ό.κ.

Συνεχίσαμε μέχρι το 20 όπου εξήγησα σε αυτές πως οι αριθμοί 13 έως 19 που μελετάμε εκφράζονται σαν 10+3 και 10+9 αντίστοιχα, όπως δηλαδή είναι και οι αξίες των ψηφίων των αριθμών, όμως το «και» δεν ακούγεται. Ρώτησα τα κορίτσια αν ισχύει κάτι τέτοιο στα αραβικά και μου εξήγησαν δείχνοντας πως λένε 3+10 δηλαδή αντίστροφα από εμάς, όμως το «και» ακούγεται, κάτι το οποίο έλεγξα στην εφαρμογή που είχα ανοίξει.

Έπειτα, συνεχίσαμε με μερικά παραδείγματα 20-30 κλπ όπου έλεγα τις αριθμολέξεις και τα κορίτσια έγραφαν τα αριθμοσύβολα και έψαχναν να βρουν τις γραπτές λέξεις από τα προηγούμενα. Εδώ χρησιμοποίησαν την αντιστοιχία προφορικής και γραπτής γλώσσας, όπου βέβαια βοήθησε και η γραφή τους στη μητρική. Συνεχίσαμε με τις δεκάδες το 100 με παρόμοιο τρόπο. Τότε τους είπα μερικούς αριθμούς για να πουν και να γράψουν, αφού εγώ έγραφα μόνο το αριθμητικό σύμβολο, π.χ. 46, 85, 119 κλπ. Τις άφησα να δουλέψουν ατομικά όσο ασχολούμουν με αγγλικά σε μερικά άλλα παιδιά. Τα κορίτσια στο διάλειμμα έφυγαν και είδα πως τα είχαν πάει αρκετά καλά στη γραφή και τους ζήτησα αν θέλουν να ολοκληρώσουν στο σπίτι.

Αναφορά 4η

Ο Ε. και μια δασκάλα (Δ.) έκαναν διάφορους πολλαπλασιασμούς όταν τους πλησίασα. Γνώρισα τον Ε. και συστηθήκαμε. Μου είπε πως βρίσκεται μεγάλο διάστημα στην Ελλάδα και στον καταυλισμό και παρατήρησα πως έχει αρκετά καλό επίπεδο ελληνικής γλώσσας, το οποίο μου αιτιολόγησε πως βελτιώνει όσο πηγαίνει στο σχολείο αλλά και σε φροντιστήριο ελληνικών στο κέντρο της πόλης. Τον ρώτησα πόσο χρονών είναι κι έκανε κι εκείνος το ίδιο και του απάντησα πως είμαι λίγο πιο μεγάλη από την Δ. Η Δ. συμφώνησε και είπε πως είναι γεννημένη το 1996 και είναι 21 χρονών, ενώ εγώ του είπα πως γεννήθηκα το 1992 και του ζήτησα να σκεφτεί μόνος του πόσο χρονών είμαι. Εκείνος είπε 28 και του είπα πως μπορεί να βρει την ακριβή μου ηλικία γράφοντας τη σημερινή ημερομηνία και την ημερομηνία που γεννήθηκα, το ίδιο και για τον εαυτό του, δείχνοντάς του πώς γίνεται αυτός ο υπολογισμός με συμμιγείς αριθμούς. Οι έννοιες ημέρες, μήνες και έτη δεν τον δυσκόλεψαν αφού ήταν εξοικειωμένος με τη χρήση της ημερομηνίας, όμως για επιβεβαίωση του έδειξα στο ημερολόγιο του κινητού μου την ημερομηνία που γεννήθηκα και βρήκαμε πως ήταν Τρίτη, το ίδιο και για τη δική του.

Έπειτα η Δ. του ζήτησε να βρει τη διαφορά των ηλικιών μας, δηλαδή πόσο πιο μικρός είναι εκείνος. Ο Ε. αρχικά σκέφτηκε να κάνει πολλαπλασιασμό γράφοντας τα έτη γέννησης το ένα κάτω από το άλλο και το σύμβολο «επί». Τον αφήσαμε να το ολοκληρώσει και κατέληξε σ' έναν πολύ μεγάλο αριθμό εκατομμυρίων, όπου ήδη είχε δυσκολευτεί στις ενδιάμεσες πράξεις και τα πολλά κρατούμενα. Παρόλα αυτά το ολοκλήρωσε κι ας είχε κάνει λάθη σε κάποια ψηφία και τον ρώτησα αν είναι λογικό αυτό το αποτέλεσμα που βρήκε και τι σημαίνει με βάση την ερώτηση που του έγινε αρχικά σχετικά με το πόσο μεγαλύτερος είναι ο ένας από το άλλον. Ο Ε. κοιτούσε τον αριθμό κατάπληκτος λέγοντας «αυτό δεν είναι σωστό!» και όταν τον ρώτησα «γιατί;» απάντησε «είναι πολύ μεγάλο!». Του ζήτησα να πει πιο συγκεκριμένα γιατί και τι

καταλαβαίνει και εκείνος επανέλαβε «αυτό δεν είναι σωστό!» και του απάντησα «δεν είναι σωστό το ότι είμαι 2 εκατομμύρια τόσες χιλιάδες φορές μεγαλύτερη από σένα;». Εκείνος γέλασε και συμφώνησε μαζί μου και του είπα πως καλά κατάλαβε, γιατί δε γίνεται να είμαι τόσα εκατομμύρια χρονών. Τότε τον ρώτησα πώς θα βρει την πραγματική διαφορά των ηλικιών μας και έγραψε από δίπλα την πράξη με τους ίδιους αριθμούς σε αφαίρεση και το υπολόγισε. Έκανε το ίδιο και για άλλες διαφορές ηλικιών με την Δ. και με την μητέρα του.

Λίγο αργότερα, ασχολούμουν με τη διδασκαλία αγγλικών σε άλλα παιδιά κι έτσι έδωσα στον Ε. ένα τάμπλετ για να παίξει ένα ηλεκτρονικό μαθηματικό παιχνίδι με πράξεις σε προκαθορισμένο χρόνο, ενώ τον παρατηρούσα συχνά. Ξεκίνησε με τον πολλαπλασιασμό θετικών ακεραίων στο εύκολο επίπεδο, όπου έβρισε τις σωστές απαντήσει με μεγάλη ευκολία. Μόλις τελείωσε τον γύρο αυτό αποφάσισε να διαλέξει το δύσκολο επίπεδο της ίδιας κατηγορίας, γιατί του είχαν φανεί εύκολα. Εκεί τις βρήκε επίσης εύκολα και σωστά και τον ρώτησα πώς μπορεί να υπολογίζει τόσο γρήγορα (π.χ. τον πολλαπλασιασμό 36·53).

Μου εξήγησε ότι υπολογίζει με βάση τα τελευταία ψηφία και τον πιο κοντινό αριθμό (στο περίπου δηλαδή) που μπορεί να προκύπτει ως γινόμενο (συνδυαστικά αυτοί οι δύο τρόποι σκέψης). Ο τρόπος που μου εξηγούσε (δείχνοντας τα αντίστοιχα ψηφία καθώς μιλούσε ώστε να καταλάβω) ήταν σαν να το θεωρούσε απόλυτα φυσιολογικό το να έχει κανείς αυτόν τον τρόπο σκέψης και αυτήν την ικανότητα. Έπειτα, διάλεξε να κάνει πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς (προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς δεκαδικών ή δεκαδικών με ακέραιο) και ακολούθησε την ίδια στρατηγική. Μάλιστα, όταν έκανε λάθος το καταλάβαινε και μου τόνιζε πως βιάστηκε και έπρεπε να πατήσει κάτι άλλο. Γενικά τον επιβράβευα και πιστεύω πως αυτό του έδωσε αυτοπεποίθηση για να συνεχίσει.

Αναφορά 5η

Η Μ. και η Λ. έπαιζαν σκάκι και πήγα κοντά τους και παρατηρούσα. Τις ρώτησα πόσο καλά ξέρουν να παίζουν, αν ξέρουν σε ποια θέση πηγαίνει κάθε πιόνι κ.ά.. Ανέφερα ότι κάθε θέση έχει διαφορετικό όνομα που προσδιορίζεται από ένα γράμμα και έναν αριθμό με βάση την κατακόρυφη και την οριζόντια θέση στην οποία βρίσκεται. Έτσι, έδειξα τους αριθμούς 1-8 που υπάρχουν κατακόρυφα και τα γράμματα Α-Θ που υπάρχουν οριζόντια και πως αυτό βοηθά να πούμε ότι ένα συγκεκριμένο πιόνι βρίσκεται π.χ. στη θέση Β6 και μπορεί να μετακινηθεί στις θέσεις Β8, Γ7 κλπ. Εξετάσαμε μαζί μερικά παραδείγματα, π.χ. ότι εκείνη τη στιγμή ο πύργος της Λ. ήταν στη θέση Ε2 κ.λπ.

Έπειτα, είπα στα κορίτσια να συνεχίσουν κανονικά το παιχνίδι για να τις παρατηρήσω. Ρώτησα την επόμενη παίκτρια ποια θα είναι η κίνησή της και εκείνη μετακίνησε κατά μία θέση ένα στρατιωτάκι. Την ρώτησα σε ποια θέση το πήγε και εκείνη μέτρησε τις θέσεις και χρησιμοποίησε τα δάχτυλά της για να βρει το σημείο όπου συναντώνται η τετμημένη και η τεταγμένη. Ουσιαστικά δηλαδή τα κορίτσια

επεξεργάζονταν τις συντεταγμένες, χωρίς να είναι απαραίτητο να ξέρουν τις έννοιες αυτές (ψευδο-έννοιες). Όταν έπαιξε η επόμενη παίκτρια, την ρώτησα αν μπορεί να μετακινήσει το πιόνι (άλογο) που έχει σε μια συγκεκριμένη θέση. Εκείνη είπε ναι μόλις το βρήκε, την ρώτησα σε ποιες θέσεις μπορεί να το πάει και μου έδειξε την κίνηση του αλόγου. Μαζί την συμπαίκτριά της βρήκαν τις συντεταγμένες των θέσεων όπου μπορεί να μετακινηθεί το άλογο και φάνηκαν χαρούμενες με αυτό που ανακάλυψαν για ένα παιχνίδι που τους αρέσει.

Αυτό μου θύμισε μία σκηνή από τον Χάρι Πότερ και τις ρώτησα αν τον ξέρουν και αν τον έχουν δει και αν θυμούνται την σκηνή όπου έπαιζαν σ' ένα μεγάλο σκάκι. Τα κορίτσια είπαν ότι τον ξέρουν αλλά δεν θυμούνται το περιστατικό κι έτσι έψαξα αμέσως το βιντεάκι στο διαδίκτυο και το είδαμε μαζί. Μάλιστα βρήκα ένα βιντεάκι που χρησιμοποιεί υπότιτλους, τους οποίους ρύθμισα στα αραβικά. Δεν ξέρω αν η μετάφραση ήταν σωστή, όμως τα κορίτσια συζητούσαν μεταξύ τους στη Γ1 τους και κοιτούσαν στο σκάκι τους καθώς το έβλεπαν. Τους είπα πως μπορεί στον Χάρι Πότερ το ένα πιόνι να «σκοτώνει» το άλλο, όμως εδώ στα ελληνικά λέμε «τρώει/eats», π.χ. «το άλογο τρώει τη βασίλισσα» (και αντίστοιχα στα αγγλικά) και τα κορίτσια γέλασαν. Συνέχισαν το παιχνίδι λέγοντας τις συντεταγμένες του σημείου όπου μετακινούσαν το πιόνι τους, όπως τα παιδιά στο βίντεο. Καθώς έφταναν στο τέλος ρώτησα την Λ. σε ποια θα θέση πρέπει να πάει το πιόνι της για να κερδίσει το παιχνίδι και εκείνη έδειξε τον βασιλιά. Όμως το παιχνίδι δεν ολοκληρώθηκε, εξαιτίας μιας μπάλας με την οποία έπαιζαν κάποια άλλα παιδιά.

Τα κορίτσια είπαν πως θα ξαναπαίξουν άλλη φορά. Τους είπα πως έχω βρεθεί κι εγώ σ' ένα μεγάλο σκάκι με μικρά πιόνια και μετακινούμουν κι εγώ σαν πιόνι. Στο διάλειμμα που ακολούθησε πήγαμε έξω και κάναμε πως ήμασταν πιόνια, π.χ. το άλογο ή ο βασιλιάς και παίξαμε ένα νοητό παιχνίδι το οποίο θέλησαν να καταλάβουν και να παίξουν κι άλλα παιδιά, όμως δίσταζαν.

Αναφορά 6η

Σε μία τάξη είχαν συγκεντρωθεί τα αγόρια Σρ, Ε., Μορ. και Αμπντ. καθώς και η Χ. Ξεκινώντας το μάθημα τους έδωσα μερικά γεωμετρικά όργανα (χάρακα, γνώμονα, διαβήτη) και τους ζήτησα να πουν ή να δείξουν τι ξέρουν να κάνουν με αυτά και πώς τα χρησιμοποιούν. Ο Σρ. είπε «Μπορώ να κάνω έτσι!», κάνοντας μία γραμμή με τον χάρακα στο τετράδιό του. Η Χ. έκανε το ίδιο με τον γνώμονα. Τους είπα (ερωτηματικά) «Αα σχεδιάσατε μία γραμμή;» και τους ρώτησα ποια είναι πιο μεγάλη. Ο Σρ. είπε «αυτή» δείχνοντας τη δική του και τον ρώτησα πώς το ξέρει. Δεν απάντησε κι έτσι του ζήτησα να κάνει άλλη μία γραμμή. Του έκανα την ίδια ερώτηση και εκείνος είπε «this is bigger» δείχνοντας πάλι την ίδια γραμμή. Τότε τους είπα πως ο χάρακας που χρησιμοποίησαν έχει επάνω σημεία με αριθμούς και τους ρώτησα αν ξέρουν τι δείχνουν αυτά. Η Χ. απλά διάβασε τους αριθμούς και ο Σρ. σχεδίασε άλλη μια γραμμή. Τους είπα πως με τον χάρακα δε σχεδιάζουμε απλά, αλλά μετράμε κιόλας. Τοποθέτησα έναν χάρακα σε μία γραμμή του Σρ. και τους έδειξα πώς γίνεται η μέτρηση. Βρέθηκε 6,8 εκ. το οποίο σημείωσα ως cm για να ενεργοποιήσω τυχόν

γνώσεις με τον διεθνή συμβολισμό και τους ζήτησα να μετρήσουν μόνοι τους τις γραμμές που σχεδίασαν. Όταν μετρούσε η Χ., τους εξήγησα πως αν το τέλος της γραμμής είναι σε μικρό σημείο και όχι μεγάλο, τότε γράφουμε τον αριθμό του σημείου μετά το κόμμα. Ταυτόχρονα, μία άλλη δασκάλα (Δ.) εξηγούσε σε άλλα παιδιά (Ε. και Αμπντ.) τη χρήση του διαβήτη για τη σχεδίαση κύκλων.

Μόλις ολοκλήρωσαν όλοι, τους ρώτησα «τι μπορούμε να μετρήσουμε με αυτόν τον χάρακα;», κρατώντας και δείχνοντας έναν μικρότερο χάρακα σε σχέση με τους υπόλοιπους. Η Χ. σχεδίασε ένα τρίγωνο και το ονομάσαμε «σκαληνό» μετρώντας κάθε πλευρά του. Ο Σρ. σχεδίασε ένα παραλληλόγραμμο και μέτρησε κάθε πλευρά του ξεχνώντας να βάλει υποδιαστολή και το σύμβολο cm. Τους είπα ότι έκαναν σωστά και ότι μ' αυτόν τον χάρακα μπορούμε να μετρήσουμε ένα σχήμα, τις πλευρές ενός σχήματος που έχουμε σχεδιάσει σε χαρτί και μετά τους ρώτησα αν μπορούμε να μετρήσουμε το χαρτί -το μήκος του χαρτιού. Τότε η Χ. προσπάθησε αλλά δυσκολεύτηκε εκεί που τελείωνε ο χάρακας και πήρε έναν μεγαλύτερο που υπήρχε στο θρανίο. Μόλις το έκανε την βοήθησα να μετρήσει το χαρτί οριζόντια και κατακόρυφα με τον προηγούμενο χάρακα ώστε να δει τον τρόπο χρήσης του.

Στη συνέχεια ρώτησα όλα τα παιδιά τι άλλο μπορούμε να μετρήσουμε και ο Σρ. μέτρησε τη σβήστρα του. Τον επιβράβευσα και του πρότεινα να μετρήσει κάτι άλλο, όπως το μήκος του θρανίου. Δοκίμασε με την Χ. όλους τους χάρακες αλλά κανένας δεν τους έφτανε ακριβώς, ενώ η Χ. προσπαθούσε με τον ίδιο αλλά τον τοποθετούσε στραβά ή σε λάθος σημείο.

Τότε ήρθε ο Μορ. και έδειξα σε όλα τα παιδιά το μέτρο, λέγοντάς τους πως για μεγάλες επιφάνειες χρησιμοποιούμε το μέτρο που ισούται με 100 cm και για μικρές χρησιμοποιούμε τον χάρακα που μπορεί να είναι 10, 15, 20 κλπ. εκατοστά όπως αυτοί που έχουμε. Τότε τους ρώτησα «με το μέτρο δηλαδή μπορούμε να μετρήσουμε το…;» και ο Μορ. φώναξε «θρανίο!», ενώ συνέχισα να τους ρωτάω «και τι άλλο;» και τόνισα «ψάξτε γύρω σας να δείτε…». Αμέσως, ο Ε. απάντησε «πίνακα!» και τον επιβράβευσα, ενώ η Χ. και ο Σρ. είπαν «αυτό!» δείχνοντας από ένα χαρτόνι που ήταν κρεμασμένο στον τοίχο. Τότε τα παιδιά μέτρησαν το θρανίο τους με τη βοήθεια της Δ., όσο ο Ε. με τον Μορ. και τον Αμπντ. επεξεργάζονταν το μέτρο.

Τότε τους είπα ότι αυτό είναι 1 μέτρο-meter, έχει 100 cm δηλαδή 100 σημεία στις μεγάλες γραμμούλες που δείχνουν τα εκατοστά (cm), ότι 10 τέτοιες γραμμούλες κάνουν 1 δέκατο (decimeter) και ότι ανάμεσα σε δύο τέτοιες μεγάλες γραμμούλες υπάρχουν μικρότερες, τις οποίες ρώτησα αν μπορούν να εντοπίσουν. Τα παιδιά τις έδειξαν και όταν τους ρώτησα πόσες είναι τις μέτρησαν και είπαν 9, ενώ ήρθε και ο Σρ. ο οποίος τις είδες και είπε 10. Τον επιβράβευσα και τους είπα πως είναι όντως 10, καθώς τις μετρήσαμε όλοι μαζί δείχνοντας. Τους είπα πως αυτά λέγονται χιλιοστά, milimeters, τους ρώτησα αν τα έχουν ξανακούσει και όταν είπαν ναι, τους ρώτησα «πού;». Ο Ε. απάντησε «ξύλα!» και του ανταπάντησα «αα όταν κόβουμε τα ξύλα, το πάχος του ξύλου είναι ας πούμε 8 mm!», ενώ τον επιβράβευσα για την σκέψη του.

Συνεχίζοντας, τους ρώτησα πόσα mm υπάρχουν σε 1 μέτρο (σε ελληνικά-αγγλικά). Ο Μορ. απάντησε 2 και του είπα να μην απαντά τυχαία, αλλά να σκέφτεται πρώτα. Καθώς έδειχνα ανάμεσα σε 2 σημεία εκατοστών κάθε φορά (0-1, 1-2, 2-3 κλπ) τους ρωτούσα πόσα mm έχουμε κάθε φορά σ' αυτό το διάστημα. Στο πρώτο ο Ε. απάντησε 1, όμως του είπα πως είναι 1 cm και ψάχνουμε πόσα mm έχει. Τότε απάντησε 10 και συνέχισα με το ίδιο μοτίβο μέχρι τα 10 cm. Εκεί τους ζήτησα να βρουν πόσα mm είχαμε μέχρι τώρα και ο Αμπντ. με τον Σρ. υπολόγισαν 100 mm. Επιβράβευσα τα παιδιά, εξηγώντας στα υπόλοιπα πως είναι «10+10+10+10+10+10+10+10+10+10, δηλαδή 10 φορές το 10». Συνέχισα λέγοντας ότι «από το 0 μέχρι το 10 έχουμε 100» και ρωτώντας «από το 10 μέχρι το 20;». Πρώτος απάντησε ο Μορ. λέγοντας «100!» και του είπα μπράβο, γιατί σκέφτηκε και κατάλαβε πως είναι η ίδια απόσταση. Προχώρησα λέγοντας «100, κι άλλα 100 κι άλλα 100 (κ.ό.κ.)… σύνολο στο 1 μέτρο;» και ο Σρ. είπε σωστά «1.000!».

Τα παιδιά φάνηκαν σκεπτικά και τους είπα πως έχω μια ιδέα που θα τους αρέσει. Τους ρώτησα αν θέλουν να μετρήσουν το ύψος τους και είπαν «ναιιι!». Μετρήσαμε το ύψος όλων των παιδιών και ο καθένας το κατέγραφε στο τετράδιό του στη φράση «Το ύψος μου είναι …. m.». Έτσι, τους εξήγησα πώς συμβολίζουμε τέτοια δεδομένα (τα μέτρα πριν το κόμμα και τα δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά μετά το κόμμα που είναι ίδιες λέξεις στις μονάδες μέτρησης και στην αξία θέσης ψηφίου των δεκαδικών αριθμών). Επίσης, εδώ τους είπα με λίγα απλά λόγια για τους δεκαδικούς ώστε να μπορούν να κάνουν μετρήσεις και να συζητούν για αυτές με την ψευδο-έννοια. Σε όλα αυτά βοήθησε το δίγλωσσο ψηφιακό λεξικό που είχα σχετικά με τις έννοιες για τα αραβικά και τα περσικά.

Τα παιδιά βρήκαν ότι πιο ψηλός είναι ο Ε. και θέλησαν να μετρήσουν και τις Δ. Συνεργάστηκαν άψογα μεταξύ τους, χωρίς βοήθεια από δασκάλους: ένας κρατούσε το κατώτατο σημείο του μέτρου, ένας ψηλότερα, ένας τοποθετούσε το δάχτυλό του στο 1μ. ώστε να συνεχιστεί από εκεί η μέτρηση, ένας τοποθετούσε έσερνε το χέρι του μέχρι το μέτρο.

Μόλις βρήκαν το ύψος μου ήταν έκπληκτοι γιατί τους φάνηκε μεγάλος ο αριθμός και είπαν γελώντας «it's big! you are big!». Τους ρώτησα ποιος είναι ο πιο κοντός από όλους και συμφώνησαν πως είναι ο Μορ., με τον ίδιο να γελάει και πάλι. Τέλος, τους ζήτησα να μπουν σε σειρά ύψους, όπου συνεργάστηκαν και πάλι και μπήκαν στη σειρά αφού μιλούσαν χρησιμοποιώντας τις μητρικές τους γλώσσες και μετρούσαν διαισθητικά τα ύψη τους, ενώ ο Σρ. έλεγξε την σειρά βλέποντας τους αριθμούς που είχαν καταγράψει στα τετράδιά τους.

Αναφορά 7η

Τα περισσότερα παιδιά είχαν πάει εκδρομή στην πόλη. Έτσι, δεν υπήρχε μεγάλη ανάγκη εκπαιδευτικών και τοποθετήθηκα στην τάξη όπου ήταν μόνο η Χ. και ζήτησε να κάνει μαθηματικά. Μία δασκάλα (Δ1) της είπε να κάνουμε κλάσματα κι εκείνη ρώτησε «τι είναι αυτό;». Η άλλη δασκάλα (Δ2) της είπε τον όρο στα αγγλικά, όμως η

Χ. ακόμα δεν καταλάβαινε. Έτσι η Δ1 της έγραψε ένα κλάσμα σε ένα τετράδιο και η Χ. είπε πως κατάλαβε τι είναι αλλά δεν έχει κάνει ποτέ. Τότε με τη βοήθεια του ίντερνετ βρήκα πώς λέγεται ο όρος στη Γ1 της (φαρσί), της το έδειξα γραπτά κι εκείνη το διάβασε, όμως πάτησα και τη φωνή του Google Translate για επιβεβαίωση. Επανέλαβα κι εγώ στη Γ1 της και της έδειξα μερικές εικόνες Google όπως εμφανίστηκαν όταν έψαξα τη λέξη στα φαρσί για επιβεβαίωση. Εκεί είδε πολλές αναπαραστάσεις των κλασμάτων, όπως ¾ σε κυκλικό σχήμα, μία τούρτα, ισοδύναμα κλάσματα κ.ά. και όλα αυτά με τίτλους-γράμματα-λέξεις στη Γ1 της. Έτσι, έγινε μια πρώτη εξοικείωση με τα κλάσματα μέσω της οπτικοποίησης.

Αφού είχε δει τις αναπαραστάσεις, το πρώτο που προσπάθησα να της εξηγήσω είναι το τι αριθμοί είναι τα κλάσματα και ποια η σημασία τους. Έτσι, της εξήγησα με τη βοήθεια της Δ1 ότι κάθε κλάσμα είναι ένας αριθμός, χρησιμοποιώντας και την αγγλική γλώσσα (με την οποία η Χ. είναι εξοικειωμένη σε αρκετά καλό βαθμό) για τη μετάφραση των ελληνικών φράσεων και κυρίως για την επιβεβαίωση του νοήματος. Ανέφερα πως τους αριθμούς αυτούς τους χρησιμοποιούμε όταν δεν έχουμε κάτι ολόκληρο, αλλά χωρισμένο-μοιρασμένο σε μέρη-κομμάτια. Το πρώτο παράδειγμα που της έδωσα ήταν με την τούρτα που είχε δει στις εικόνες. Της είπα ότι αν αυτή την τούρτα την κόψουμε σε 2 κομμάτια και πάρουμε το 1 για να το φάμε, τότε έχουμε πάρει το ½, δηλαδή τη μισή τούρτα. Εδώ, της είπα ότι λέμε πολύ συχνά στην καθημερινή μας ζωή ότι «φάγαμε μισή τούρτα» ή «μισή πίτσα» κ.λπ. και ότι αυτό το «μισό» είναι half, δεν είναι ολόκληρο, δηλαδή είναι λιγότερο από 1 αλλά περισσότερο από 0-τίποτα. Σχεδίασα μία πρόχειρη αριθμογραμμή 0-½-1 σημειώνοντας ότι ½=0,5 για να ελέγξω αν γνωρίζει τους δεκαδικούς αριθμούς και είπε πως ξέρει αλλά «όχι καλά».

Οι Δ1 και Δ2 της έδειχναν αναπαραστάσεις κλασμάτων σε τετράγωνες και κυκλικές περιοχές, όπου σημείωναν το κλασματικό μέρος. Η Χ. δεν αντιμετώπισε κανένα πρόβλημα και έβρισκε εύκολα τις ποσότητες. Μάλιστα, έκανε και η ίδια αναπαραστάσεις και σημείωνε μέρη σύμφωνα με τις προφορικές οδηγίες που δεχόταν. Η Δ1 ανέφερε τα μέρη του κλάσματος στην ελληνική γλώσσα, όμως για τους αντίστοιχους όρους στα φαρσί χρησιμοποίησα και πάλι το ίντερνετ (αριθμητής-παρονομαστής). Η Χ. ρώτησε τον δάσκαλο της Γ1 της που περνούσε τότε αν είναι σωστές οι λέξεις και εκείνος τις επανέλαβε σχεδόν με ίδιο τρόπο.

Τότε δείξαμε στην Χ. τη σχέση δεκαδικών αριθμών και κλασμάτων. Συγκεκριμένα, γράψαμε μερικά δεκαδικά κλάσματα και συζητήσαμε για τον τρόπο μετατροπής τους σε δεκαδικούς αριθμούς και το αντίστροφο. Σε αυτή τη διαδικασία επέμενα στο να συνδυάσει την ονοματολογία των κλασμάτων (των παρονομαστών) με την αξία θέσης ψηφίου στους δεκαδικούς αριθμούς, όπου π.χ. το 4/100 αντιστοιχεί στο 0,04, δηλαδή το 4 βρίσκεται στη θέση των εκατοστών. Εδώ η Χ. βοηθήθηκε από τη μικρή συμμετοχή της στις μετρήσεις με μέτρο μαζί με κάποιους συμμαθητές της, όπου βρήκαμε ότι το ύψος κάποιου είναι π.χ. 1 μέτρο και 40 εκατοστά ή 1 και 40 ή «ένα σαράντα». Έτσι η διαδικασία των μετατροπών δεν ήταν για εξάσκηση σε αυτές, αλλά για την εξοικείωση με τις έννοιες και την κατανόηση των μεταξύ τους σχέσεων. Σε

ένα κλάσμα που προέκυψε από έναν δεκαδικό αριθμό της δείξαμε πώς μπορεί να απλοποιηθεί σε ισοδύναμο, με διαίρεση, το οποίο της εξήγησα με τον πιο απλό γλωσσικά και εννοιολογικά τρόπο που μπορούσα ότι σημαίνει ότι είναι ο ίδιος αριθμός, δεκαδικός ή μη, απλά με άλλη μορφή. Εδώ της έδειξα και μια εικόνα με ισοδύναμα κλάσματα που είχα βρει κατά την προηγούμενη αναζήτηση στο διαδίκτυο, γιατί θεώρησα ότι οι περσικές φράσεις-λέξεις που είχε γραμμένες θα την βοηθήσουν να συνδέσει τα νοήματα που επεξεργάστηκε στην ελληνική γλώσσα με άλλα που πιθανώς έχει κατακτήσει στη μητρική της, μιας και εγώ δεν μπορώ να διαβάσω ή να μιλήσω αυτή τη γλώσσα.

Έπειτα, η Δ1 και η Δ2 προσπάθησαν να της δείξουν την πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων, όμως σαν παρατηρήτρια και μιλώντας με τις δασκάλες αυτές διαπιστώθηκε πως τα σύμβολα και οι αριθμοί δεν είναι αρκετά για να καταλάβει κάποιος κάτι στα μαθηματικά, όταν δεν υπάρχει κοινός γλωσσικός κώδικας. Η Χ. δυσκολευόταν να αντιληφθεί τη διαδικασία και μάλλον κουράστηκε σε εκείνο το στάδιο, οπότε πήγε στο τμήμα ενός άλλου μαθήματος του προγράμματος, παρόλο που αρχικά είχε δηλώσει ότι δε θα συμμετάσχει.

Αναφορά 8η

Με πολλά παιδιά ηλικίας 9-11 ετών έγινε ενασχόληση με τα ευρώ. Τα 6 παιδιά κατάγονταν από τη Συρία και τα 4 από το Αφγανιστάν. Με έναυσμα τον χάρτη google βρήκαμε τις χώρες από τις οποίες κατάγονται τα παιδιά (επανάληψη/ αξιοποίηση προηγούμενης γνώσης από μάθημα γεωγραφίας) και τις χώρες όπου πρόκειται ενδεχομένως να μετακινηθούν (4 Γερμανία, 1 Ρωσία, 4 άγνωστο/καμία μετακίνηση).

Τους ρώτησα ποιο νόμισμα έχουν στη χώρα καταγωγής τους, όμως φάνηκε πως δεν καταλαβαίνουν την ερώτησή μου και επαναδιατύπωσα με άλλο τρόπο: «Ποιο νόμισμα έχετε στη Συρία/στο Αφγανιστάν;», «Με τι πληρώνετε;» χρησιμοποιώντας χειρονομίες. Τα παιδιά μιλούσαν στη Γ1 τους και κατάλαβα πως έπρεπε να χρησιμοποιήσω πιο απλή γλώσσα: «Εδώ (με χειρονομία) έχουμε το ευρώ. Εκεί;», δείχνοντας στον χάρτη. Επανέλαβα την προηγούμενη φράση στα αγγλικά και απευθύνθηκα στα παιδιά που έχουν καλύτερο επίπεδο αγγλικών (συμπέρασμα από εμπειρία προηγούμενων ημερών), όμως και πάλι δεν απαντούσαν. Συνέχισαν να συνομιλούν στη Γ1 τους (σε ζεύγη τα κορίτσια Μ. και Λ., Γ. και Σ., και τα αγόρια Σ. και Ρφ. με την Φ.).

Σκέφτηκα να κοιτάξω τις σημειώσεις μου και να προφέρω σε φαρσί και αραβικά τα νομίσματα Συρίας (λίρα Συρίας = al-lira as-suriyya) και Αφγανιστάν (Αφγάνι = afghani) δείχνοντας πάλι στον χάρτη τις αντίστοιχες χώρες παράλληλα με τον λόγο. Τότε κατάλαβαν και επανέλαβαν τα νομίσματα πιο σωστά, διορθώνοντας την προφορά μου, για την οποία απολογήθηκα αμέσως ζητώντας συγγνώμη.

Προχωρώντας, ζήτησα την προσοχή τους και έγραψα το σύμβολο του ευρώ στον πίνακα, λέγοντας ότι στην Ευρώπη, την οποία εντοπίσαμε στον χάρτη, οι

περισσότερες χώρες έχουν το ευρώ. Επανέλαβα δυνατά «ευρώ, όπως Ευρώπη» στα ελληνικά και στα αγγλικά, έγραψα στον πίνακα Ευρώπη και κύκλωσα το «ευρώ». Τα παιδιά επανέλαβαν ατομικά, χωρίς να τους έχει ζητηθεί.

Έτσι, βρήκαμε στον χάρτη τις χώρες που έχουν ευρώ, ξεκινώντας από την Ελλάδα και τη Γερμανία που μου ανέφεραν προηγουμένως ότι μπορεί να μετεγκατασταθούν. Βρήκαμε τις χώρες: Αυστρία, Βέλγιο, Γαλλία, Γερμανία, Ελλάδα, Εσθονία, Ιρλανδία, Ισπανία, Ιταλία, Κύπρος, Λετονία, Λιθουανία, Λουξεμβούργο, Μάλτα, Ολλανδία, Πορτογαλία, Σλοβακία, Σλοβενία, Φινλανδία. Τα παιδιά πλησίαζαν στην οθόνη και έδειχναν την κάθε χώρα.

Μετά, τους ζήτησα να σχεδιάσουν το σύμβολο του ευρώ. Οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν και κοιτούσαν με προσοχή το σύμβολο που ήταν ήδη γραμμένο στον πίνακα. Μία μαθήτρια (Α.) έγραψε το σύμβολο ως 3 αντί για €, κάτι που παρατήρησαν οι υπόλοιποι (Μ. και Ρφ.) και της έδειξαν τη σωστή γραφή σχηματίζοντας νοητά το σύμβολο στον αέρα (χειρονομία που ζήτησα και από τους υπόλοιπους να κάνουν). Έτσι εξασκούνται όλοι στη γραφή του συμβόλου €.

Έπειτα, έδειξα τη Ρωσία, ρώτησα αν ξέρουν ποια χώρα είναι (αν το θυμούνται από την έναρξη του μαθήματος) και η απάντησή τους ήταν σωστή. Τους είπα πως η χώρα αυτή δεν έχει ευρώ, όπως κι άλλες χώρες της Ευρώπης τις οποίες βρήκαμε (Αγγλία, Ουκρανία, Σουηδία, Βουλγαρία, Ουγγαρία, Ελβετία). Εδώ καθώς έδειχνα διαφορετικές χώρες άλλαζα συχνά κώδικα - μία στα ελληνικά (δεν έχει ευρώ) και μία στα αγγλικά (no euro).

Η σύνδεση με τη γεωγραφία τελείωσε όταν ζήτησα πάλι την προσοχή τους και απευθύνθηκα σε όλους («Ακούστε όλοι καλά»). Τους έδειξα τον μετατροπέα ξεκινώντας με την ισοτιμία του 1 € με τα δικά τους νομίσματα. Κουνούσαν καταφατικά το κεφάλι και έλεγαν «ααα, οκ!». Δώσαμε μερικά παραδείγματα με αντικείμενα από τον περιβάλλοντα χώρο τους, όπως ένα μικρό μπουκάλι νερό («κοστίζει 0,50 €»), ένα μολύβι (0,30€), ένα ζευγάρι παπούτσια (25€), ένα κινητό τηλέφωνο (300€). Σε κάθε περίπτωση έγραφα την ισοδυναμία με μεγάλα γράμματα στον πίνακα καθώς έλεγα «1 € ισοδυναμεί/είναι ίσο (έμφαση στο σύμβολο και στη λέξη ίσον) με ...». Τότε ζήτησα να επαναλάβουν μαζί μου, ενώ σε κάποια σημεία (π.χ. στο ίσον) έκοβα τη φωνή μου.

Τους ρώτησα αν έχουν κάποια απορία, αν θέλουν να ρωτήσουν ή να προσθέσουν κάτι στα ελληνικά και στα αγγλικά. Τότε η Μ. ρώτησε διστακτικά «Ένα παγωτό πόσο ευρώ είναι;». Την ρώτησα επαναδιατυπώνοντας και διορθώνοντας: «Ένα παγωτό; Πόσα ευρώ κοστίζει;» με διευκρινιστικό τόνο, ενσωματώνοντας τους σωστούς γραμματικούς τύπους και όταν κούνησε καταφατικά το κεφάλι της απάντησα «Μπορεί να κοστίζει περίπου 1 € ή 2 € ή και περισσότερο ή λιγότερο». Εκείνη ρώτησε με έμφαση «Δύο ευρώ;» και τελικά της είπα ότι θα της δείξω σε λίγο σε μία εικόνα.

Μετά, έβγαλα τα κέρματα και χαρτονομίσματα του ευρώ. Ξεκινώντας από τη μονάδα (1€), πέρασα στα πολλαπλάσιά της, δηλαδή το κέρμα των 2 € όπου εξήγησα ότι 1 € +1 € = 2 € και έπειτα στα υπόλοιπα χαρτονομίσματα.

Οι σχέσεις που δείξαμε (κρατώντας τα αντίστοιχα νομίσματα και γράφοντας στον πίνακα) ήταν:
2+2=4 € (2 κέρματα των 2 €) ή 1+1+1+1=4 € (προφορικά «4 φορές το 1 €»)
2+2+1=5 € (χαρτονόμισμα) ή 1+1+1+1+1=5 € («5 φορές το 1 €»)
5+5=10 € (χαρτονόμισμα) ή 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=10 € («10 φορές το 1 €»)
10+10=20 € (χαρτονόμισμα) ή «20 φορές το 1 €»
20+20+10=50 € (χαρτονόμισμα) ή «50 φορές το 1 €»
50+50=100 € (χαρτονόμισμα) ή «100 φορές το 1 €»
εναλλακτικά 20+20+20+20+20=100 € ή «5 φορές τα 20 € = 5·20 €» (προφορικά και γραπτά)
100+100=200 € (χαρτονόμισμα) ή «200 φορές το 1 €»
και εναλλακτικά «2 φορές τα 100 € = 2·100 €» ή «4 φορές τα 50 € = 4·50 €"»
200+200+100=500 € («το μεγαλύτερο χαρτονόμισμα» - με χειρονομία)
500+500=1.000 € (2 χαρτονομίσματα των 500 €)

Ύστερα πέρασα στις υποδιαιρέσεις. Εξήγησα ότι υπάρχουν και «αξίες» μικρότερες από 1 € που λέγονται cents ή λεπτά του ευρώ. Ο Σ. ρώτησε «λεπτά;» δείχνοντας ένα νοητό ρολόι στο χέρι του. Με αφορμή αυτήν την ερώτηση εξήγησα ότι τα λεπτά της ώρας (δείχνοντας το νοητό ρολόι και κάνοντας τικ τοκ τικ τοκ, κεντρίζοντας με το γέλιο την προσοχή των παιδιών) είναι διαφορετικά από τα λεπτά του ευρώ, όμως και τα δύο τα λέμε λεπτά γιατί είναι μικρότερης αξίας από τη μονάδα. Δηλαδή ότι 1 λεπτό (της ώρας) είναι μικρότερο από 1 ώρα και 1 λεπτό του ευρώ (1 cent) είναι μικρότερο (λιγότερο) από 1 ευρώ.

Έγραψα ότι 1 € =100c και ότι 1 h = 60 min για να διαχωρίσουν τις σχέσεις των "λεπτών" με τις μονάδες τους και ξαναδιάβασα ότι 1 € =100c. Έδειξα το κέρμα του 1 cent και τους είπα ότι αυτό είναι το νόμισμα του ευρώ με τη μικρότερη αξία. Θύμισα συγκριτικά (με ερώτηση προς τα παιδιά) ποιο είναι το νόμισμα του ευρώ με τη μεγαλύτερη αξία το οποίο συναντήσαμε προηγουμένως και έδειξαν τα 500 €. Αμέσως, τους συνεχάρη και επανέλαβα ότι 100 φορές το 1 cent ισοδυναμούν με 1 ολόκληρο ευρώ (χειρονομία στο ολόκληρο).

Έτσι, εξήγησα ότι 1 λ. = 1/100 € = 0,01 € (δείχνοντας στη θέση των εκατοστών και τον παρονομαστή 100 του κλάσματος). Εδώ δεν επέμενα στη γλώσσα (ένα εκατοστό, μηδέν κόμμα μηδέν ένα ευρώ) αλλά στις σχέσεις και στη μετατροπή ακέραιου σε δεκαδικό. Επίσης, αποφάσισα να χρησιμοποιώ κυρίως τον όρο cents, ο οποίος εξήγησα ότι σχετίζεται με το 100 (έγραψα στον πίνακα cents=100). Μετά, έδειξα τη λέξη cent που είναι γραμμένη στο κέρμα του 1 cent και πέρασα στις υπόλοιπες σχέσεις των υποδιαιρέσεων γράφοντας:
1 c + 1 c = 2 c (κέρμα) = 2/100 € = 0,02 €
Στη συνέχεια, τα παιδιά έγραφαν με τη σειρά άλλες σχέσεις:

2+2+1 = 5 c (κέρμα) = 5/100 € = 0,05 €
5+5=10 c (κέρμα) = 10/100 € = 0,10 €
10+10=20 c (κέρμα) = 20/100 € = 0,20 €
20+20+10=50 c (κέρμα) = 50/100 € = 0,50 € (εδώ είπα πως αυτό το λέμε μισό ευρώ, half, δείχνοντας και το κλάσμα ½ αλλά και την επόμενη σχέση)
50+50=100 Σ = 100/100 € = 1 € (κέρμα)

Η συνέχεια της διδασκαλίας πήρε διαφορετική τροπή από την προγραμματισμένη. Κρατούσα κάρτες με διάφορα ποσά, κάποιες από τις οποίες (ροζ) έδειχναν το ποσό σε δεκαδική και συμμιγή μορφή αλλά και τα νομίσματα που χρησιμοποιούνται για τον σχηματισμό αυτού του ποσού, ενώ οι υπόλοιπες (πράσινες) έδειχναν στη μία πλευρά τους ένα αντικείμενο και έναν σχηματισμό νομισμάτων και στην άλλη πλευρά το ποσό μόνο σε δεκαδική μορφή. Κάθε φορά έδειχνα μία κάρτα και διάβαζα το ποσό.

Ζήτησα την προσοχή τους δείχνοντας την πρώτη κάρτα με ένα παγωτό, το οποίο είχε αναφέρει η Μ. Τους ρώτησα αν μπορεί κανείς να πει πόσο κοστίζει. Αυτό που έκαναν όλα τα παιδιά ήταν να δουν τα νομίσματα της κάρτας και να διαλέξουν τα αντίστοιχα από αυτά που είχαν μπροστά τους λέγοντας «1, 20, 10», «madame, look», «madame, να» (πρώτα η Μ. που είχε ενδιαφερθεί προηγουμένως για το παγωτό και έπειτα οι υπόλοιποι). Τους επιβράβευσα και τους είπα δείχνοντας στο δεκαδικό ποσό ότι «κοστίζει 1 ευρώ και (έμφαση στο σύμβολο κόμμα και τη λέξη και) 30 λεπτά/cents» ή πιο σύντομα «1 και 30», εξηγώντας ότι η υποδιαστολή διαβάζεται ως κόμμα ή και. Στα νομίσματα που κρατούσε η Μπ. έδειξα ότι 20+10=30 λεπτά για τα οποία δεν υπάρχει ένα ξεχωριστό κέρμα, αλλά σχηματίζεται με συνδυασμούς των υπολοίπων. Επίσης, επανέλαβα την ανάγνωση του ποσού της κάρτας δυνατά και ρώτησα αν κατάλαβαν.

Στις επόμενες κάρτες έγινε η ίδια διαδικασία, με τα παιδιά να επιλέγουν κάθε φορά το αντίστοιχο ποσό από τα νομίσματα που είχαν ατομικά μπροστά τους, έργο που ήταν προγραμματισμένο για την επόμενη μέρα. Ζητούσα από τα παιδιά να διαβάσουν πρώτα το ποσό και σε περίπτωση λάθους (η Α. είπε «ένα και δύο εφτά» αντί για «1 κόμμα 27», η Σ. είπε «8 ευρώ και 3 cents» αντί για «8 ευρώ και 30 cents», ο Ρφ. είπε «3 ευρώ και 15 ευρώ» αντί για «3 ευρώ και 15 cents»), έδινα δεύτερη ευκαιρία δείχνοντας το λάθος (π.χ. με ερώτηση «3 ευρώ και 15 ...;», με έμφαση στο 15 και με ερωτηματική έκφραση προσώπου), ή ρωτούσα αν κάποιος άλλος μπορεί να διορθώσει ή έλεγα την απάντηση δυνατά. Σε κάθε περίπτωση ζητούσα από το σύνολο της τάξης να επαναλάβει το ποσό. Στην περίπτωση του 1,50 € τους θύμισα ότι τα 50 cents τα διαβάζουμε και «μισό ευρώ», άρα το 1,50 € «ενάμιση ευρώ» και έδωσα ως επιπλέον παράδειγμα τα 2,50 € («δυόμιση ευρώ») για να καταλάβουν το πρότυπο.

Στο τέλος της διαδικασίας ζήτησα από τα παιδιά να σηκώνονται στον πίνακα ατομικά και να γράφουν ένα νομισματικό ποσό, το οποίο διάβαζε ένας άλλος μαθητής, μία ιδέα που δεν ήταν προγραμματισμένη. Έτσι έγινε έλεγχος της κατανόησης της γραφής και ανάγνωσης μιας νομισματικής αξίας με αυθόρμητο και ενεργά

συμμετοχικό τρόπο. Αποφάσισα να χρησιμοποιήσω τον πίνακα γιατί παρατήρησα πως δείχνουν μεγάλο ενδιαφέρον κάθε φορά που έρχονται σε επαφή με αυτόν.

Μετά, ήρθε η ώρα ενός παιχνιδιού. Τους μοίρασα τις κάρτες (3 στον καθένα) και άφησα στη μέση των ενωμένων θρανίων τους δύο φακέλους. Ανέφερα τι εννοούμε περισσότερο και λιγότερο από, χρησιμοποιώντας χειρονομίες μεγαλύτερου και μικρότερου, τις αγγλικές λέξεις more/less than και τα σύμβολα της ανισότητας (>,<). Για να εμπεδώσουν το παιχνίδι τους έδειξα ένα παράδειγμα με μία κάρτα από κάθε κατηγορία, ζητώντας τη βοήθειά τους. Μία σκέψη μου τότε ήταν ο διαχωρισμός βάσει χρώματος του φακέλου, όμως αποφάσισα να αποφύγω κάθε τέτοια αναφορά. Ανέφερα όμως ότι το περισσότερο το λέμε αλλιώς και «πιο πολύ» και το λιγότερο «πιο λίγο», όμως δε λέμε «πιο λιγότερο» ή «πιο περισσότερο».

Παρατήρησα πως κάποια παιδιά (4/9) έκαναν σωστή ταξινόμηση, κάποια άλλα τοποθέτησαν τη μία από τις κάρτες τους σε λάθος φάκελο (2/9), κάποια έκαναν λάθος στις 2 από τις 3 κάρτες (2/9), ενώ ένας μαθητής τοποθέτησε λάθος όλες τις κάρτες του (1/9). Έτσι, στο τέλος της διαδικασίας άνοιξα τους φακέλους και τους ρώτησα αν είναι όλες οι κάρτες σωστές, αν συμφωνούν, να βρουν το λάθος και να το διορθώσουν. Τότε μιλούσαν με 2 κώδικες, αγγλικά και ελληνικά ή μητρική και αγγλικά ή μητρική και ελληνικά μεταξύ τους για να καταλήξουν ομαδικά στην ταξινόμηση των καρτών στους φακέλους: «this is περισσότερο», «this εδώ», «(Γ1) δυόμισο ευρώ», «όχι, no, madame look, κοίτα, αυτό είναι πιο λίγο», «αυτό (Γ1) ευρώ» κ.ά. Ιδίως στην περίπτωση χρήσης των αγγλικών κατάλαβα πως ήταν για να με βοηθήσουν να καταλάβω τι λένε.

Η τελική ομαδική ταξινόμηση που έκαναν ήταν σωστή. Παράλληλα, ως μία ακόμη μη προγραμματισμένη ιδέα, έγραφα στον πίνακα τα ποσά των καρτών το ένα κάτω από το άλλο, δίπλα τους ένα κενό διάστημα και δίπλα τον αριθμό 2,50 €. Έτσι, όταν έγινε ο τελικός έλεγχος των φακέλων, τους ζήτησα να μου πουν για κάθε ποσό αν είναι περισσότερο ή λιγότερο από 2,50 € και ποιο σύμβολο χρειάζεται (>,<). Εδώ παρατήρησα ότι αυτός ο έλεγχος ήταν χρήσιμος γιατί χρησιμοποίησαν το απαιτούμενο λεξιλόγιο πιο καθαρά, σε κατάλληλες προτάσεις-φράσεις και έγινε εμπέδωση σε ικανοποιητικό βαθμό.

Με την ολοκλήρωση και αυτής της διαδικασίας τα παιδιά εκτέλεσαν ακόμη ένα έργο. Έδωσα σε κάθε παιδί 1 ξυλάκι (τύπου γλωσσοπίεστρο) όπου σε κάθε μεριά του υπάρχουν γραμμένα νομίσματα σε ακέραια μορφή με την αξία τους σε cents ή ευρώ και ζητήθηκε να επιλέξουν τη σωστή απάντηση από τις 3 δοσμένες ως το συνολικό ποσό που σχηματίζεται από αυτά τα νομίσματα. Όταν τους έδωσα την οδηγία παρατήρησα πως δυσκολεύτηκα να χρησιμοποιήσω κατάλληλες φράσεις, σε λόγο απλό και κατανοητό, γι' αυτό και πήρα ένα ξυλάκι και έδειξα ένα παράδειγμα ρωτώντας τη γνώμη τους για τη σωστή απάντηση. Λόγω χρόνου, δόθηκε αρχικά ένα ξυλάκι σε κάθε παιδί και όχι δύο, όμως δόθηκε δεύτερο σε κάποια παιδιά που ολοκλήρωσαν γρήγορα και ορθά την άσκηση (Λ., Μ., Ρ.). Έτσι υπήρχαν συνολικά 9/12 απαντήσεις σωστές, ενώ κάποια παιδιά δυσκολεύτηκαν και απάντησαν λάθος σε

ένα από τα δύο ποσά. Με αυτά τα παιδιά συζήτησα τις απαντήσεις κατά τη διάρκεια του διαλείμματος. Τα λάθη ήταν στα ποσά 1,06 €, όπου ο μαθητής επέλεξε το ποσό 106 € (τα μέτρησε ως ευρώ και όχι ως cents), στο 0,99 € όπου η μαθήτρια επέλεξε το 1 € (τα μέτρησε στο περίπου ή κατάλαβε ότι το 1 € ήταν κοντά ή έκανε λάθος μέτρηση) και στα 251 € όπου η μαθήτρια δεν επέλεξε καμία απάντηση ενώ έγραψε δίπλα τον αριθμό 240,10 € (μέτρησε κάποια ως cents αντί ως ευρώ). Σε όλα τα παιδιά έδωσα αυτοκόλλητα για να τα επιβραβεύσω και να τα ευχαριστήσω για τη συμμετοχή τους και την προσπάθειά τους.

Αναφορά 9η

Την επόμενη μέρα ενασχόλησης με τα ευρώ έγινε κυρίως επανάληψη όσων έμαθαν την προηγούμενη μέρα. Τα παιδιά στην έναρξη του μαθήματος άρχισαν να ρωτούν ευχάριστα αν θα κάνουμε πάλι για τα ευρώ. Έβγαλαν τα ψεύτικα κέρματα και χαρτονομίσματά τους και άρχισαν να μοιράζονται φωναχτά τις σκέψεις τους. Κάποια παιδιά άρχισαν να μετρούν τα χρήματά τους ως σύνολο (πρώτα τα κέρματα και έπειτα τα χαρτονομίσματα), έτσι όμως μπερδεύτηκαν κάπου (κάποια cents τα μέτρησαν ως ευρώ: τα 10, 20 και 50 cents και όχι τα 1, 2 και 5 cents) και δεν μπορούσαν να εκφράσουν το σύνολο.

Μία μαθήτρια τότε κατέγραψε με μολύβι ένα μέρος του συνόλου που είχε μετρήσει (των κερμάτων), έπειτα κατέγραψε το υπόλοιπο και τα προσέθεσε νοερά. Προσπάθησε να μου διαβάσει το ποσό, όμως ο αριθμός είχε πολλά διαφορετικά ψηφία με διαφορετική αξία που έπρεπε να ξεχωρίσει και έτσι διέκοψε τον λόγο της και μου έδειξε γραπτά τον αριθμό της (748,65). Ο Ρ. ανέφερε μία εμπειρία του σχετικά με τις συναλλαγές: «Μαντάμ, εχτές με μαμά μπαμπά μου πήγα στο μαγαζί μεγάλο μάρκετ και ήταν όλο 1 ευρώ, 2 ευρώ, ψωμί, πατάτα, γάλα για το αδερφός μου 2 χρονών, όλο ευρώ που κοστίζει κοίταξα». Τον επιβράβευσα για την προσοχή του και την προσπάθειά του να πει ολόκληρη την πρόταση στα ελληνικά, που παρά τα γραμματικοσυντακτικά λάθη που έκανε χρησιμοποίησε τη λέξη κοστίζει που έμαθε στο προηγούμενο μάθημα. Τον ρώτησα αν θυμάται πόσα ευρώ πλήρωσαν και μου είπε δείχνοντας παράλληλα με τα δάχτυλά του τους αριθμούς «22 ευρώ, εεε λεπτά δεν, δεν ξέρω». Του απάντησα «περίπου (χειρονομία) 22 ευρώ δηλαδή πληρώσατε» και όταν μου είπε «ναι» τον ρώτησα αν αυτά είναι περισσότερα ή λιγότερα από 20 ευρώ, προσπαθώντας να κάνω σύνδεση με το παιχνίδι. Εκείνος μου είπε «περισσότερα» και επανέλαβε «22 ευρώ».

Τότε παίξαμε τον δύσκολο γύρο του παιχνιδιού της προηγούμενης ημέρας. Έβγαλα τους 4 φακέλους και μοίρασα τις κάρτες. Εδώ ήταν πιο εύκολο να τους δώσω την οδηγία γιατί το παιχνίδι τους ήταν ήδη γνωστό. Κάθε παιδί είχε 3 κάρτες. Η κατηγορία που μπέρδεψε περισσότερο τα παιδιά ήταν η 2η (1,50-2,50€), όπου το εύρος των ποσών που έπρεπε να συμπεριληφθούν ήταν από 1,50 € ως 2,31 €, παρόλο που είχαν επεξεργαστεί τον αριθμό-κλειδί (2,50€) και την προηγούμενη μέρα. Οι μαθητές θεώρησαν ότι ο αριθμός 1,50 € ανήκει στην προηγούμενη κατηγορία (<1,50€), και ο αριθμός 2,51 € ανήκει στη δεύτερη. Επίσης στη δεύτερη κατηγορία

συμπεριέλαβαν τον αριθμό 2,80 €. Η πιο εύκολη κατηγορία φάνηκε πως ήταν η τελευταία (>5€), όπου δεν έγινε κανένα λάθος από τους μαθητές.

Στον έλεγχο της άσκησης, για τη διατύπωση των επιχειρημάτων τους, τους έδωσα ένα παράδειγμα της μορφής της πρότασης που καλούνται να χρησιμοποιήσουν: «Έχω ..... ευρώ. Τα βάζω σε αυτόν τον φάκελο γιατί είναι περισσότερα/λιγότερα από .... ευρώ» ή «γιατί είναι περισσότερα από .... και λιγότερα από .... ευρώ». Για να πετύχει αυτό χρειάστηκε αρκετή ενθάρρυνση του μαθητή που είχε τον λόγο, ανεξαρτήτως σωστής ή λανθασμένης ταξινόμησης. Οι προτάσεις ήταν γραμμένες στον πίνακα και κάθε φορά που χρειαζόταν να καθοδηγήσω τον μαθητή περισσότερο έδειχνα τις αντίστοιχες λέξεις. Χρησιμοποίησα και τις αγγλικές λέξεις more/less και τις αντίστοιχες αραβικές/φαρσί με τη βοήθεια του Google Translate (αφού ρώτησα τους μαθητές αν είναι σωστή η λέξη). Οι μαθητές που μίλησαν πρώτοι χρειάστηκαν περισσότερη υποστήριξη και σιγά σιγά η υποστήριξη μέσω της ανάγνωσης και συμπλήρωσης της πρότασης του πίνακα μειώθηκε. Παράλληλα, στον έλεγχο χρησιμοποιήθηκε η τεχνική της προηγούμενης ημέρας με τα μαθηματικά σύμβολα της ανισότητας. Τους εξήγησα ότι όταν λέμε «από ... μέχρι και...», ή αλλιώς «μεταξύ» ή αλλιώς «μεγαλύτερο/μικρότερο ή ίσο» χρησιμοποιούμε ενωμένα τα σύμβολα >/< και «=» ως την ανισοισότητα (≤ και ≥).

Τότε πέρασε ένας μεγαλύτερος μαθητής από την τάξη και εκμεταλλεύτηκα την ευκαιρία να τον εντάξω ως βοηθό. Τον ρώτησα αν ξέρει το σύμβολο (απάντησε ναι) και αν μπορεί να μου εξηγήσει στα παιδιά στη Γ1 τους. Ο Ε. δέχτηκε, αφού είπε «arabic, no, μόνο φάρσι». Τότε τους μίλησε, φώναξε έναν φίλο του, συνεννοήθηκαν και εξήγησαν και όλα τα παιδιά έδειχναν να καταλαβαίνουν, κουνώντας καταφατικά το κεφάλι και ψελλίζοντας «ααα, ok!». Τους άκουσα να χρησιμοποιούν τις λέξεις που βρήκα στον μεταφραστή. Τους ρώτησα αν κατάλαβαν επαναλαμβάνοντας «μεγαλύτερο ή ίσο ≥ και μικρότερο ή ίσο ≤» και δείχνοντας τα σύμβολα. Μου απάντησαν θετικά και τους ευχαρίστησα για τη βοήθεια.

Στο σημείο αυτό ανακοίνωσα πως θα παίξουμε ένα παιχνίδι στο τάμπλετ με νικητή αυτόν που θα έδινε τις πιο πολλές σωστές απαντήσεις στον γύρο του. Κάποια παιδιά τότε έφυγαν από την τάξη γιατί κλήθηκαν στην τάξη της μητρικής γλώσσας (αραβικά), ενώ ο Σ. έφυγε από το σχολείο. Τα υπόλοιπα παιδιά έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη χρήση της τεχνολογίας στο μάθημα των μαθηματικών. Οι οδηγίες του παιχνιδιού προβάλλονταν στα αγγλικά, αλλά τους εξήγησα στα ελληνικά τον τρόπο που παίζεται το παιχνίδι και το τι χρειάζεται να κάνουν. Περίμενα πως δε θα καταλάβουν τι εννοούσα μέχρι να το παίξουν οι ίδιοι και να το δουν στην πράξη. Δεν ήθελα όμως να δώσω πάλι εγώ το παράδειγμα κι έτσι ζήτησα από κάποιον να το δοκιμάσει πρώτος. Η μαθήτρια (Φ.) που εκδήλωσε επιθυμία επίδειξης-δοκιμής δυσκολεύτηκε στις πρώτες συναλλαγές παρά την καθοδήγησή μου και των συμμαθητών της. Όμως έφτασε σε μία συναλλαγή που την βοήθησε να αντιληφθεί το ζητούμενο της άσκησης. Τότε τους ρώτησα όλους αν κατάλαβαν και αν είναι έτοιμοι να ξεκινήσει το παιχνίδι με χρόνο 3 λεπτά/άτομο και 8 συναλλαγές/άτομο. Ο Ρ. έκανε 6 συναλλαγές (1/6 με βοήθεια) και η Φ. έκανε 7 συναλλαγές (2/7 με βοήθεια). Κατά

τη διάρκεια του παιχνιδιού έβλεπα τα παιδιά να δοκιμάζουν διάφορους συνδυασμούς μέχρι να βρουν τον κατάλληλο, όμως όταν κατάλαβαν ότι πρέπει να καθαρίσουν την οθόνη επιλογής και να τα ξαναεπιλέξουν, κάτι που είναι χρονοβόρο, έκαναν τους συνδυασμούς νοερά, δείχνοντας με το δάχτυλο τα νομίσματα και ψιθυρίζοντας στον εαυτό τους. Έτσι ανέδειξα και τους δύο νικητές.

Τα παιδιά από την τάξη των αραβικών επέστρεψαν σύντομα, ενώ έφυγε και ο Ρ., αφήνοντας στην τάξη 7 κορίτσια. Έδωσα σε κάθε παιδί 3 κάρτες, με χρηματικά ποσά, και μερικά χάρτινα νομίσματα, ζητώντας να κόψουν τα κατάλληλα νομίσματα και να τα κολλήσουν στις κάρτες κάτω από τα ποσά. Τους εξήγησα ότι μπορεί να μην υπάρχει μόνο ένας τρόπος αλλά πολλοί για να σχηματίσουν αυτό το ποσό. Έτσι, τις αφήνω να δουλέψουν ατομικά, ενώ περνούσα από καθεμία για να της ζητήσω να μου δείξει έναν ακόμη τρόπο σχηματισμού του ποσού της κάρτας τους.

Στα παιδιά φάνηκε να άρεσε ιδιαίτερα αυτή η δραστηριότητα. Δούλευαν ατομικά, όμως συζητούσαν μεταξύ τους στη Γ1 και μερικές φορές ενσωμάτωναν ελληνικές λέξεις/φράσεις στον λόγο τους. Μάλιστα, κάποια στιγμή συνειδητοποίησαν ότι δεν υπήρχαν αρκετά νομίσματα αξίας 1 €, 50 λ και 10 λ. Μου το ανέφεραν λέγοντας, για παράδειγμα «μαντάμ, δεν έχει άλλο 1 ευρώ», ή αντίστοιχα ότι χρειαζόταν ο καθένας, «τελείωσε».
Ερευνήτρια-Εκπαιδευτικός (ΕΕ): Τελείωσαν; (ρωτώ τη Λ.)
Λ: Ναι
ΕΕ: Πόσα χρειάζεσαι;
Λ: Θέλω 1.
ΕΕ: 1 κέρμα του 1 ευρώ;
Λ: Ναι
ΕΕ: Τι άλλο μπορείς να βάλεις αντί για το 1 ευρώ, αφού δεν έχει;
Της δίνω ένα χρωματιστό χαρτάκι (τύπου post-it) για να καταγράψει τις σκέψεις της λέγοντάς της «γράψε εδώ τι άλλο μπορείς να χρησιμοποιήσεις από αυτά τα κέρματα που έμειναν για να φτιάξεις το 1 ευρώ» (έγραψα 1 € στο πάνω μέρος του). Αντίστοιχα, με τη Μ. που χρειάστηκε 2 κέρματα των 10 λ., την Α. που χρειάστηκε 1 κέρμα των 50 λ. και την Φ. που χρειάστηκε 1 κέρμα των 20 λ. Η Λ. σχεδίαζε κάθε φορά τα νομίσματα που χρησιμοποιούσε στους συνδυασμούς της: 50+20+10+20 c, 50+50 c, 20+20+20+20+20 c. Τότε της έδωσα να κόψει το κέρμα που χρειαζόταν για να το κολλήσει στην κάρτα.
Η Α. και η Μ. βρήκαν τον τρόπο και αντάλλαξαν μεταξύ τους κάποια κέρματα ώστε να έχουν για να τα κολλήσουν στην κάρτα τους. Το ίδιο έκαναν και οι αδερφές Σ. και Γ. μεταξύ τους.

Η Φ. προσπάθησε κι εκείνη να κάνει ανταλλαγή με κάποιες από τις συμμαθήτριές της, όμως ξεκίνησαν να δημιουργούνται εντάσεις από διαφωνίες μεταξύ τους. Τότε είδα πως η Μπ. χρειαζόταν 1 κέρμα των 10 λ. και 1 κέρμα των 50 λ., όμως ακόμα δεν είχε ζητήσει κάτι από αυτά. Είχε συμπληρώσει όλα τα υπόλοιπα νομίσματα και είχε αφήσει μόνο τα κενά (γενικά δεν εκφράζεται συχνά, αν δεν της απευθύνει κάποιος τον λόγο). Έτσι, προσπάθησα να ζητήσω από τα κορίτσια να ανταλλάξουν κέρματα

όπως οι υπόλοιπες. Εδώ το ζήτημα ήταν ενδιαφέρον καθότι η μητρική τους γλώσσα μοιάζει αλλά είναι διαφορετική. Η Μπ. μιλά αραβικά ενώ η Φ. μιλά Φαρσί. Έτσι, η μόνη κοινή γλώσσα ήταν η γλώσσα των μαθηματικών.

Η Φ. προσέγγισε πρώτη την Μπ. μιλώντας στα Φαρσί και χρησιμοποιώντας τις λέξεις ευρώ και cents. Η Μπ. δεν απάντησε και η Φ. συνέχισε, κοιτώντα τις κάρτες της Μπ. και τα χρήματά τους. Αφού σκέφτηκε λίγο, της είπε: «εσύ πάρε αυτό, 10 λεπτά και 10 λεπτά, cents, και πάρω 20 cents». Η Μπ. συμφώνησε και τα κορίτσια συνέχισαν να κολλούν τα κέρματά τους. Την επιβράβευσα, όμως ζήτησα από τη Μπ. (ώστε να είναι πιο συμμετοχική) να βρει τα 50 λ. που χρειάζεται από τα νομίσματα της Φ., παρόλο που η Φ. απάντησε αμέσως «δεν έχει άλλο, μόνο 5 ευρώ έχει και 2 cents, 5 cents". Την ρώτησα πόσα χρήματα έχει και απάντησε δείχνοντας τα χρήματά της «Έχω 1 ευρώ, 2 ευρώ, 2 ευρώ, 1 cents, 50 cents, 2 λεπτά, 50 cents πάλι, α και αυτό και αυτό 5 cents». Τότε είπα στα κορίτσια πως επομένως η μόνη λύση είναι η Μπ. να δώσει στη Φ. το χαρτονόμισμα των 5 ευρώ και εκείνη να της δώσει 5 ευρώ σε κέρματα.

Τα κορίτσια συμφώνησαν, με την Φ. να λέει δυνατά «ναι» και την Μπ. να κοινά καταφατικά το κεφάλι και τις ενθάρρυνα να μετρήσουν τα κέρματα της Φ. να δουν αν έχει 5 ευρώ σε κέρματα, όμως σίγουρα να έχει 1 κέρμα των 50 λ. μέσα που η Μπ. το χρειάζεται. Η Φ. έφτιαξε το σύνολο με 2 €, 1 € και 2 κέρματα των 5 λ. (αντί για τα 50 λ.). Εντόπισα το λάθος και ότι έλειπε και 1 €, αλλά η Φ. πήρε τα 5 € από τη Μπ., με την Μπ. να διακόπτει αμέσως μιλώντας πολύ σιγανά στη γλώσσα της. Η Μπ. έδειξε με το δάχτυλό της τα 50 λ., τα αντικατέστησε στη θέση των 5 λ. κι έτσι η Φ. κατάλαβε το λάθος της.

Τότε είπα στα κορίτσια μπράβο, τόνισα πως δεν πειράζει που η Φ. μπερδεύτηκε γιατί όλοι μπερδευόμαστε μερικές φορές και ρώτησα την Φ. αν είναι σίγουρη ότι έδωσε ακριβώς 5 ευρώ. Η Φ. είπε «ναι» και ρώτησα την Μπ. αν μπορεί να τα μετρήσει. Επειδή η Μπ. δεν απάντησε, της πρότεινα να τα μετρήσουμε μαζί. Ξεκίνησα για να την παροτρύνω, λέγοντας «2 ευρώ και 1 ευρώ, κάνουν 3 ευρώ. Οκ; Έχουμε 3 ευρώ μέχρι τώρα.», η Φ. συμπλήρωσε «αυτά κάνουν 1 ευρώ» και ρώτησα «άρα πόσα έχουμε συνολικά;». Πρώτα απάντησε η Φ. λέγοντας «3», όμως της εξήγησα πως «3 είναι αυτά (δείχνω), και αυτά (δείχνω) είναι 1» και ρώτησα και πάλι πόσο είναι όλα μαζί. Η Φ. τότε απάντησε σωστά «4».

Μετά απευθύνθηκα στην Μπ., ρωτώντας την πόσα ευρώ θέλει ακόμα για να έχει ακριβώς 5 και να μην την «κλέβει» η Φ. (αστειευόμενα). Η Μπ. κοίταξε τα νομίσματα της Φ., πήρε 1 € και η Φ. κατάλαβε και πάλι το λάθος της. Προσπάθησε να αδράξω την ευκαιρία συμμετοχής της Μπ., ρωτώντας την τι νόμισμα πήρε. Εκείνη απάντησε «1 ευρώ». Επιβράβευσα και τα δύο κορίτσια και πρόσθεσα ότι «τώρα κάνατε μια ανταλλαγή», την οποία ρώτησα αν τους άρεσε και αν τους φάνηκε δίκαιη. Η Φ. ρώτησε: «Τι είναι; Δί… δίκιη;» και της εξήγησα ότι λέγεται «δί-και-η», που σημαίνει ότι παίρνω τα χρήματα που χρειάζομαι δίνοντας αυτά που δε χρειάζομαι, στο ίδιο όμως ποσό. Η Φ. είπε πως το κατάλαβε και συμπλήρωσα ότι η ανταλλαγή που έκαναν ήταν δίκαιη, γιατί πήραν και οι δύο ακριβώς τα χρήματα που ήθελαν και

έδωσαν αυτά που δε χρειάζονταν, χωρίς να δώσουν ούτε περισσότερα ούτε λιγότερα, και ότι «κανείς δεν έκλεψε σε αυτήν την ανταλλαγή», κάνοντας την Φ. να γελάσει.

Αναφορά 10η

Η Χ. με προσέγγισε έχοντας ένα φυλλάδιο με προσθέσεις και αφαιρέσεις από άλλη δασκάλα. Στην πρόσθεση έδειχνε μία σκάλα, ένα σκίτσο να λέει ανεβαίνω και ένα βελάκι προς την κορυφή της σκάλας και αντίστοιχα στην αφαίρεση αντίστοιχα (κατεβαίνω, βελάκι κάτω). Η Χ. είχε κάνει ήδη μερικές προσθέσεις.

Παρατήρησα πως στους υπολογισμούς της χρησιμοποιούσε τα δάχτυλα αλλά μετρούσε στην ελληνική γλώσσα. Μου ζητούσε να κρατώ στα δάχτυλα («εσύ κάνε 12») τον μεγάλο προσθετέο. Έτσι καταμετρούσε και έγραφε το αποτέλεσμα, χωρίς να κάνει πουθενά λάθος, εκτός από την πρόσθεση 9+8 όπου βρήκε αποτέλεσμα 14 το οποίο αρχικά πήγε να γράψει ως 41 (περσική γραφή από δεξιά προς τα αριστερά) και μία από τις προηγούμενες προσθέσεις που παρατήρησα ότι στην 9+4 μέτρησε +1 και βρήκε άθροισμα 14.

Στις αφαιρέσεις, μου ζητούσε αρχικά να κρατώ τις μονάδες και εκείνη κρατούσε τη δεκάδα. Ξεκινούσε να κατεβάζει τα δάχτυλα καταμετρώντας αντίστροφα: π.χ. στο 14-7 έλεγε 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7. Η έκφρασή της ήταν «14 φύγε 7». Της εξήγησα πως χρησιμοποιούμε την έκφραση βγάζω/αφαιρώ για την αφαίρεση, όπως αντίστοιχα για την πρόσθεση λέμε βάζω, προσθέτω ή απλά και (γράψαμε τις λέξεις σε λίστα). Σκέφτηκα να της δώσω ένα παράδειγμα όπου ακούγεται το φύγε που χρησιμοποίησε. Έτσι της είπα ότι «όταν λέμε "ήρθαν 10 παιδάκια στο σχολείο αλλά τα 3 έφυγαν (με τονική έμφαση στο έφυγαν)…πόσα παιδιά έμειναν;" είναι ένα πρόβλημα όπου κάποιοι φεύγουν και ψάχνω να βρω πόσοι είναι οι υπόλοιποι που μένουν. Οι υπόλοιποι». Την ρώτησα αν κατάλαβε κι εκείνη είπε «ναι». Στις επόμενες αφαιρέσεις χρησιμοποιούσε λέξεις από τη λίστα της και της είπα ότι το σύμβολο μετά την πράξη το λέμε ίσον, για να το χρησιμοποιεί και αυτό.

Λίγο παρακάτω όμως ξεκίνησε να μπερδεύεται, ξεχνώντας πόσα δάχτυλα έχει κατεβάσει, πόσα πρέπει να κατεβάσει και σε ποιον αριθμό της αντίστροφης μέτρησης έχει μείνει. Έτσι, της εξήγησα ότι μπορεί να κάνει ακριβώς αυτό που λέει το σύμβολο μείον, δηλαδή να βγάζει, να αφαιρεί ολόκληρο τον αριθμό από έναν άλλον αντί να κατεβαίνει 1-1. Για παράδειγμα, χρησιμοποίησα την αφαίρεση 15-3, όπου κράτησα τα 10 και της ζήτησα να κρατήσει τα υπόλοιπα. Εκείνη κράτησε σωστά 5 και της είπα «Έχω 15. Τώρα βγάζω 3. Κατέβασε 3 δάχτυλα. [τα κατεβάζει]. Πόσα έχεις τώρα;». Τότε, χωρίς να απαριθμήσει, απλά κοιτάζοντας τα χέρια και γνωρίζοντας πως κρατώ ακόμα 10 δάχτυλα ανοιχτά και εκείνη 2, απάντησε εύκολα 12 και το κατέγραψε. Έτσι στις επόμενες πράξεις ακολούθησε την ίδια στρατηγική και υπολόγισε σωστά τις διαφορές.

Στη συνέχεια έπρεπε να κάνει μερικές ακόμα εναλλασσόμενες προσθέσεις και αφαιρέσεις. Τότε ήταν που δεν παρατήρησε την αλλαγή του συμβόλου από - σε + και αντίστροφα, μέχρι που της ζήτησα να διαβάσει τις αντίστοιχες πράξεις-μαθηματικές

προτάσεις και παρατήρησε ότι το σύμβολο δεν ταίριαζε με την πράξη που έκανε (δεν μπορώ να ξέρω αν το παρατήρησε βάσει αποτελέσματος, δηλαδή αν σκέφτηκε ότι στην πρόσθεση το άθροισμα δε μπορεί να είναι μικρότερο από τον προσθετέο ή αντίστοιχα στην αφαίρεση η διαφορά να είναι μεγαλύτερη του μειωτέου). Έτσι, ήταν αργότερα προσεκτική και δεν έκανε κανένα υπολογιστικό λάθος. Χρησιμοποιούσε και στις προσθέσεις και στις αφαιρέσεις λέξεις από τη λίστα της: π.χ. έλεγε «12 μείον 7 κάνει ...», «16 να βγάλω 5... ίσον...», «15 και 3», «9 συν 6» κ.λπ.

Στο τέλος των πράξεων της είπα ένα πρόβλημα προφορικά και της ζήτησα να μου πει αν είναι πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης (σύμφωνα με το ποια πράξη κάνουμε για να το λύσουμε, για να βρούμε αυτό που ζητάει): «Είμαι 11 χρονών. Ο αδερφός μου ο Ε. είναι δύο χρόνια μεγαλύτερος από μένα. Πόσο χρονών είναι ο αδερφός μου;»

Χ.: 11 και 2, 13… Ε. είναι 13 χρονών.
ΕΕ: Μπράβο. Άρα τι πράξη έκανες;
Χ.: Χμμ….
ΕΕ: Πρόσθεση ή αφαίρεση;
Χ.: Πρόσθεση
ΕΕ: Ωραία! Λοιπόν, πάμε άλλο τώρα. Έχω 14 αυτοκόλλητα. Η δασκάλα μου έδωσε ακόμα 1. Πόσα αυτοκόλλητα έχω τώρα;
Χ.: 14;
ΕΕ: Ναι, και η δασκάλα μου έδωσε άλλο 1, ακόμα 1.
Χ.: Είναι πρόσ..πρόσθιση
ΕΕ: Πρόσθεση, μπράβο, είναι πρόβλημα πρόσθεσης. Λοιπόν. Στην κασετίνα μου είχα 3 μολύβια. Έχασα το 1. Πόσα μολύβια μου έμειναν;
Χ.: 3 μολύβια;
ΕΕ: Ναι
Χ.: Και έφυγε 1;
ΕΕ: Το έχασα. Κάπου το άφησα και δεν το ξαναβρήκα (έκφραση προσώπου). Δεν έφυγε μόνο του, δεν έβγαλε πόδια και περπάτησε (γέλια)! Κατάλαβες;
Χ.: Ναι
ΕΕ: Τι πρόβλημα είναι αυτό;
Χ.: … Όχι πρόσθεση...εφαί..εφαίρεση;
ΕΕ: Αφαίρεσης, μπράβο. Αφαίρεση. Για να βρούμε το αποτέλεσμα κάνουμε αφαίρεση. 3 μολύβια που είχα μείον 1 που έχασα, ίσον 2 μολύβια που μου μένουν. Οκ;
Χ.: Ναι. 3 βγάζω 1 (δείχνει με τα δάχτυλα), 2.
ΕΕ: Αυτό είναι. Λοιπόν, άλλο. Αυτή η τάξη που είμαστε τώρα έχει 6 θρανία. Η απέναντι τάξη (δείχνω), απέναντι, opposite, έχει 4 θρανία. Πόσα θρανία έχουν και οι δύο τάξεις μαζί;
Χ.: 10 .
ΕΕ: Πώς το βρήκες αυτό; Είσαι γρήγορη!
Χ.: 6, 7, 8, 9, 10.
ΕΕ: Τι έκανες; Ποια πράξη;

Χ.: Πρόσθεση.
ΕΕ: Μπράβο! Κι ένα τελευταίο;
Χ: Ναι.
ΕΕ: Η τάξη έχει 7 αγόρια. Τα κορίτσια της τάξης είναι 2 λιγότερα από τα αγόρια. Πόσα είναι τα κορίτσια;
Χ.: Χμμ... Δεν ξέρω.
ΕΕ: Πρόσεξε. 7 αγόρια. Το θυμάσαι;
Χ.: Ναι.
ΕΕ: Τα κορίτσια, 2 λιγότερα. Πιο λίγα. Όχι πιο πολλά. Ούτε τα ίδια, ίσα. Λιγότερα. Άρα;
Χ.: Βγα..
ΕΕ: Ναι... πες το.. Κάνω...
Χ.: Βγάζω.
ΕΕ: Δηλαδή; Α...
Χ.: Αφαίρεση.
ΕΕ: Μπράβο!
Και το μάθημα έληξε έτσι, καθώς ευχαριστήσαμε η μία την άλλη.

Αναφορά 11η

Ο Ρ., η Φ. και η Μπ. ασχολήθηκαν και πάλι με τα ευρώ. Ξεκινώντας τους έδωσα πορτοφόλια με διαφορετικά ποσά ψεύτικων νομισμάτων στον καθένα και τους ζήτησα να πουν πόσα χρήματα περίπου πιστεύουν ότι έχει μέσα το πορτοφόλι τους, χωρίς να τα μετρήσουν «με το μάτι, στο περίπου…just look, don't count all your money». Καθώς τους έδινα τα χρωματιστά χαρτάκια ώστε να γράψουν στη μία όψη το συνολικό ποσό που υπολόγισαν ότι έχουν περίπου στο πορτοφόλι τους, η Φ. ρώτησε «just look?» και της απάντησα πως μπορεί να σκεφτεί πόσο νομίζει ότι είναι «στο περίπου» (με χειρονομία). Εκείνη μου ζήτησε να της εξηγήσω στα αγγλικά, όμως οι όροι φαίνεται ότι ήταν πιο δύσκολοι. Έπειτα, η Φ. είπε πως νομίζει ότι κατάλαβε και μου ζήτησε να κοιτάξω το ποσό που έγραψε στο χαρτάκι της.

Η Φ. έγραψε 260, ο Ρ. 102 και η Μπ. 100. Ζήτησα από όλους να διαβάσουν αυτό που έγραψαν με όλη την πρόταση που ήταν γραμμένη, δηλαδή «Έχω στο πορτοφόλι μου περίπου.... ευρώ». Όλοι το έκαναν σωστά, εκτός από την Φ. που είπε «δύο εξήντα ευρώ», και έτσι την ξαναρώτησα «δύο;». Εκείνη προσπάθησε να πει «δια...» αλλά την πρόλαβε ο Ρ. που είπε «διακόσια». Η Φ. επανέλαβε «διακόσια εξήντα, διακόσια εξήντα ευρώ».

Τους εξήγησα ότι το να ξέρουμε πόσα χρήματα έχουμε στο περίπου μας βοηθά όταν θέλουμε να αγοράσουμε κάτι και χρειάζεται να ξέρουμε αν τα χρήματα που έχουμε μας φτάνουν ή όχι. Τους έδωσα ένα παράδειγμα ότι θέλουμε να αγοράσουμε κάτι που δεν είχαμε στη λίστα με τα ψώνια μας από το σούπερ μάρκετ και πρέπει να υπολογίσουμε πόσο κοστίζουν περίπου όσα έχουμε αγοράσει μέχρι τώρα και αν είναι αρκετά τα χρήματα που έχουμε για να αγοράσουμε κι άλλα προϊόντα. Η Μπ. δεν έδειχνε ανταπόκριση, η Φ. αντέδρασε στα αγγλικά «ah, I understand, I want to buy

something more and I don't know if I have enough money», και ο Ρ. συμπλήρωσε «όπως κάνει μαμά, μπαμπάς σούπερ μάρκετ τεφτέρ" και τους είπα «ναι, κοιτάζουν το τεφτέρι τους (κοινή λέξη) και υπολογίζουν στο περίπου».

Έπειτα τους ζήτησα να γυρίσουν στην άλλη πλευρά και να γράψουν πόσα χρήματα έχουν στο πορτοφόλι τους ακριβώς. Η Φ. υπολόγισε 261,52 ευρώ τα οποία ήταν πολύ κοντά στο ποσό που είχε υπολογίσει στο περίπου. Δυσκολευόταν, όμως, να το γράψει σε μορφή δεκαδικού αριθμού και μου ζήτησε να το γράψω εγώ. Τότε της είπα να πει ξανά το ποσό που υπολόγισε, καθώς έγραφα. Είπε «διακόσια εξήντα ένα και πενήντα δύο ευρώ» και της έδειξα στην άλλη μεριά πώς είχε γράψει το 260. Επανέλαβα το ποσό καθώς έγραφα «διακόσια εξήντα ένα <u>και</u> (βάζοντας την υποδιαστολή)...πενήντα δύο πώς γράφεται;», την ρώτησα κι εκείνη απάντησε «πέντε δύο». Της είπα να μην την τρομάζουν αυτοί οι αριθμοί, αφού μπορεί να τους πει μόνη της σωστά και ξέρει πως το κόμμα λέγεται «και». Η Φ. τότε συμφώνησε και της ζήτησα να διαβάσει όλη την πρόταση που ήταν γραμμένη στην καρτέλα της. Την βοήθησα λέγοντάς της ότι είναι η ίδια πρόταση μόνο που αντί για περίπου τώρα λέμε ακριβώς, γιατί μετράμε ακριβώς όλα τα ευρώ και τα cents που έχουμε. Εκείνη διάβασε «Έχω στο πορτοφόλ ακριβώς διακόσια εξήντα ένα ευρώ και πενήντα δύο cents» (αντί για «Έχω στο πορτοφόλι μου ακριβώς ...», όμως δεν την διόρθωσα).

Ο Ρ. υπολόγισε 275,11 ευρώ τα οποία κατέγραψε σωστά ως δεκαδικό αριθμό, όμως απείχε πολύ από το ποσό που υπολόγισε στο περίπου. Η Μπ. ακόμα δεν είχε καταγράψει κάτι, και για να μην την φέρω σε δύσκολη θέση με τις ερωτήσεις και να μην την πιέσω, αρχικά μέτρησα μπροστά της τα χρήματά της και της ζήτησα να κάνει το ίδιο. Έπειτα την ρώτησα στα ελληνικά και στα αγγλικά αν μπορεί να το γράψει, όμως δεν απαντούσε και έτσι δεν ήξερα αν δε θέλει ή αν δεν καταλαβαίνει. Οι υπόλοιποι μαθητές της τάξης δε μιλούν τη γλώσσα της για να της μεταφέρουν το μήνυμα. Τότε έστρεψα την προσοχή μου από πάνω της και ρώτησα όλα τα παιδιά ποιος έχει τα περισσότερα χρήματα (ελληνικά και αγγλικά). Επανέλαβα ξανά τις λέξεις «τα περισσότερα, the most, τα πιο πολλά από όλους». Τότε είδα την Μπ. να ολοκληρώνει την καταγραφή του ποσού της και της έκανα νόημα μπράβο.

Η Φ. απάντησε πρώτη: «I have the most euro, because I have διακόσια εξήντα .... (κοίταξε ξανά την καρτέλα του Ρ.) No... no, P.. He has διακόσια εβδομήντα πέντε και έντεκα, I have διακόσια εξήντα ένα, Μπ. εβδομήντα τέσσερα είκοσι», και την επιβράβευσα για την σκέψη της, παροτρύνοντάς την να συμπληρώσει «και η Μπ. έχει ακριβώς…; εβδομήντα τέσσερα….;», όπως και έκανε λέγοντας «ευρώ και είκοσι cents». Ο Ρ. τότε είπε χαρούμενος «Ναιιι, έχω τα πιο πολλά λεπτά!» και γελώντας του απάντησα «Λεφτά, καλέ, λεφτά, φφφ!». Εκείνος επανέλαβε «λεφτά», του εξήγησα ότι τα λεπτά είναι αυτά τα μικρά κέρματα, τα «κίτρινα» και τα «κόκκινα» και επανέλαβα με έμφαση «λεπτά (δείχνοντας τα κέρματα), λεφτά (δείχνοντας όλα τα χρήματα), χρήματα, money, λεφτά is money, λεπτά is cents». Ο Ρ. έγνεψε καταφατικά «ναι, ναι, money».

Τότε επέστρεψα στο ζήτημα με τα περισσότερα και τα λιγότερα χρήματα, ρωτώντας τους ποιος έχει τα λιγότερα και εκείνοι απαντούν «Μπ.». Τους ρώτησα ποιος έπεσε πιο κοντά στην εκτίμησή του, εξηγώντας ότι εννοώ ποιανού το ποσό ακριβώς είναι πιο κοντά στο ποσό περίπου. Την θεώρησα μια δύσκολη ερώτηση κατανόησης γλώσσας και μαθηματικού περιεχομένου. Προσπαθούσα να βρω απλούστερο λεξιλόγιο για να το εξηγήσω, όμως ταυτόχρονα να μη χαθεί το νόημα της μαθηματικής έννοιας. Δεν ξέρω αν τα κατάφερα, δυσκολεύτηκα αρκετά. Σκέφτηκα να αποφύγω την αγγλική γλώσσα για να μην τους μπερδέψω με τους πολλούς όρους. Απευθύνθηκα στην Φ. ζητώντας της να κοιτάξει τι έγραψε και να βρει αν οι αριθμοί είναι «κοντά» (με χειρονομία δαχτύλων που πλησιάζουν) ή «μακριά» (με χειρονομία δαχτύλων που απομακρύνονται).

Η Φ. έκανε τις ίδιες χειρονομίες λέγοντας κοντά και μακριά και, αφού σκέφτηκε λίγο, απάντησε πως οι αριθμοί της είναι κοντά. Της ζήτησα αν μπορεί να εξηγήσει στον Ρ., όπως και έκανε, μεταφέροντας στη μητρική γλώσσα τους τι θέλουμε να πούμε. Μιλούσε στα φαρσί, αλλά συμπεριέλαβε τις ίδιες χειρονομίες που της έδειξα. Τότε ο Ρ. κοίταξε την καρτέλα του και απάντησε στα φαρσί. Υπέθεσα ότι ήταν μια λέξη που αντιστοιχούσε στο κοντά ή στο μακριά. Τότε έκανα πάλι τις χειρονομίες αφού είδα ότι βοήθησαν ρωτώντας στα ελληνικά κοντά ή μακριά. Εκείνος απάντησε κοντά κάνοντας τη χειρονομία των δαχτύλων που απομακρύνονται. Επομένως επανέλαβα την ερώτηση προφέροντας τις λέξεις πιο δυνατά και αργά και καθαρά και απέφυγα στην επανάληψη να χρησιμοποιήσω το διαζευκτικό «ή». Τότε ο Ρ. κατάλαβε ότι προηγουμένως μπερδεύτηκε και ταυτόχρονα με την Φ. απάντησαν μακριά.

Οπότε τους είπα συμπερασματικά ότι η Φ. έπεσε κοντά στην εκτίμησή της, ενώ ο Ρ. έπεσε μακριά στην εκτίμησή του, δηλαδή «not close, όχι κοντά». Τα παιδιά συμφώνησαν και στράφηκα προς την Μπ., που έδειχνε προβληματισμένη. Η Φ. γύρισε την καρτέλα της Μπ. για να δει τι έχει σημειώσει, χωρίς η Μπ. να αντιδράσει, και η Φ. είπε πως είναι «κοντά». Και τότε είχα τον λόγο για αρκετή ώρα. Τους είπα ότι η Μπ. έκανε μια καλή εκτίμηση, έπεσε αρκετά κοντά, όχι όμως τόσο κοντά όσο η Φ., γιατί έκανε εκτίμηση στο περίπου προς τα κάτω, δηλαδή τα λεφτά που έβαλε στο περίπου είναι πιο λίγα από αυτά που είχε ακριβώς. Συνέχισα λέγοντας ότι, αντίθετα, η Μπ. θεώρησε ότι έχει περισσότερα χρήματα απ' όσα έχει στην πραγματικότητα, έκανε εκτίμηση προς τα πάνω (δείχνω πάνω), με αποτέλεσμα ο αριθμός στο περίπου (δείχνω την καρτέλα) να είναι πιο μεγάλος από τον αριθμό ακριβώς (δείχνω την καρτέλα) και αν η Μπ. πάει στο σούπερ μάρκετ (προσποιούμαι ότι παίρνω το πορτοφόλι και προχωράω και γελάνε) θεωρώντας ότι έχει 100 ευρώ (δείχνω το 100 στην καρτέλα της) και θέλει να ψωνίσει κάτι παραπάνω, τα λεφτά δε θα της φτάσουν γιατί έχει 74, έχει πιο λίγα από 100. Αφού είδα ότι τους άρεσε η θεατρικότητα συνέχισα λέγοντας με ίδιο τρόπο ότι μπορεί να φτάσει στο ταμείο και να πρέπει να πληρώσει 80 ευρώ, θα νομίζει ότι έχει, αλλά (έκφραση προσώπου) δε θα τα έχει (γελάνε), ενώ η Φ. μπορεί να ψωνίσει για 260 ευρώ και θα της μείνουν ακόμα κάποια χρήματα. Επανέλαβα και στα αγγλικά (προς την Φ.: «you will have enough money, but she won't», με χειρονομία σαν το όχι με τον δείκτη του χεριού). Έπειτα άλλαξα

τόνο φωνής και επαναδιατύπωσα συμπερασματικά πως παρόλα αυτά είναι μια καλή εκτίμηση της Μπ., αλλά ανάμεσα στις δύο είναι καλύτερη της Φ., και γιατί είναι ακόμα πιο κοντά οι αριθμοί (επανέλαβα με έμφαση και με χειρονομία) και γιατί εκτίμησε στο περίπου προς τα κάτω (χειρονομία και καρτέλα). Επίσης, έδωσα και το αντιπαράδειγμα λέγοντας στην Φ. πως αν έκανε εκτίμηση προς τα πάνω, δηλαδή αν έγραφε έναν μεγαλύτερο αριθμό π.χ. 270 (γράφοντάς το), τότε ούτε εκείνη θα είχε «enough money» αν ήθελε να αγοράσεις κάτι «έξτρα».

Η Φ., δείχνοντας την παρατηρητικότητα, την κατανόησή της και τις ικανότητές της στην επαναδιατύπωση είπε: «Aaah, yes, I know, I know. I can pay extra, P. (κοιτάει την καρτέλα του), P. can pay extra, Μπ. no pay extra». Την επιβράβευσα και την επιβεβαίωσα, λέγοντας ότι ο P. μπορεί να πληρώσει πολύ πιο έξτρα, αφού έγραψε εκατόν δύο αλλά έχει 275,11. Για να καταλάβουν ακόμα περισσότερο, τους είπα ότι ο P. θα μπορούσε να είχε γράψει 300, προς τα πάνω, ή 270 προς τα κάτω όπως η Φ., βλέποντας τα καταφατικά νεύματα όλων των παιδιών.

Στη συνέχεια τους μοίρασα φυλλάδια του σούπερ μάρκετ στα οποία βρήκαμε μαζί κάποια προϊόντα και είπαμε πώς λέγονται στα ελληνικά και πόσο κοστίζουν (π.χ. γάλα, χυμός, κρουασάν, σοκολάτα, μολύβι, κασετίνα, πατάτες, λουκάνικα, κρεμμύδια, μήλα, αχλάδια, σταφύλια κ.ά.). Τα παιδιά βρήκαν κάποια προϊόντα σε έκπτωση και τους είπα ότι έχουν έκπτωση, βρίσκονται σε προσφορά, δηλαδή το κατάστημα τα πουλάει σε πιο χαμηλή τιμή. Τότε άρχισαν να αναγνωρίζουν κι άλλα προϊόντα σε προσφορά και να λένε «κι αυτό προσφορά, κι αυτό...» . Παράλληλα, έβλεπαν αγαπημένα τους προϊόντα και έλεγαν «ααα, αυτό θέλω» ή στα αγγλικά «I want this» (κυρίως η Φ. και λίγο ο P.).

Ο P. αναγνώρισε το σούπερ μάρκετ στο οποίο έχει παρευρεθεί και του θύμισα πως λέγεται «Μασούτης». Η Φ. είπε πως έχει πάει στο Lidl, και της έδωσα το διαφημιστικό φυλλάδιο του lidl. Τότε άνοιξα τους χάρτες Google και τους έδειξα πού είναι το κάθε σούπερ μάρκετ σε σχέση με την τρέχουσα θέση τους και πώς να πάνε εκεί. Μάλιστα, παρατήρησαν πως ο πλοηγός έγραφε τη διάρκεια της διαδρομής με αυτοκίνητο και με τα πόδια και πως η διαδρομή για το ένα σούπερ μάρκετ είναι πιο γρήγορη από ότι για το άλλο. Επίσης, είδαμε τις οδηγίες που έδινε αναλυτικά ο χάρτης παράλληλα με την προβολή του δορυφόρου. Έτσι, είδαν τη διαδρομή που ακολούθησαν για να πάνε στα σούπερ μάρκετ και παρατήρησαν ότι είναι πολύ κοντά και πως η απόστασή τους σε διάρκεια και χιλιόμετρα είναι σχεδόν ίδια.

Έπειτα επιστρέψαμε στα φυλλάδια και τους ζήτησα να διαλέξουν ένα προϊόν από διαφορετικές σελίδες. Συγκεκριμένα, ζήτησα από τη Φ. να διαλέξει ένα προϊόν από τα σχολικά, από τον P. να διαλέξει ένα προϊόν από το κρεοπωλείο του καταστήματος και από την Μπ. ένα προϊόν από το μανάβικο. Βλέποντας ότι ο χρόνος του μαθήματος τελειώνει, τους ζήτησα να προσθέσουμε τις τιμές των προϊόντων που διάλεξαν με τη βοήθεια μιας αριθμομηχανής. Ο καθένας πληκτρολόγησε την τιμή του προϊόντος που διάλεξε και ένα μαθηματικό σύμβολο. Η Φ. και η Μπ. πληκτρολόγησαν το σύμβολο της πρόσθεσης και ο P. το σύμβολο του ίσον. Έτσι, διαβάσαμε το συνολικό ποσό.

Δεν μπορέσαμε να κάνουμε το ίδιο με τα αντίστοιχα προϊόντα στο άλλο κατάστημα σούπερ μάρκετ και να συγκρίνουμε τις τιμές, όμως, κατάφερα εν συντομία να τους δείξω αληθινές αποδείξεις από διάφορα καταστήματα, π.χ. βιβλιοπωλείο, βενζινάδικο, καφετέρια, μαγαζί ρούχων, και να σημειώσω με φωσφορούχο μαρκαδόρο ότι όλες οι αποδείξεις στο πάνω μέρος τους γράφουν το όνομα του καταστήματος, έναν ειδικό αριθμό που αντιστοιχεί σε αυτό, το ονοματεπώνυμο του ιδιοκτήτη και έπειτα τα προϊόντα που αγοράσαμε από εκεί, το κόστος τους, το συνολικό ποσό και κάτω κάτω αναγράφονται πρόσθετες πληροφορίες, όπως κάποιος σειριακός αριθμός barcode, ένα ευχαριστήριο μήνυμα για τον πελάτη. Καθώς σημείωνα αυτά, μαζεύτηκαν διάφορα παιδιά γύρω μου που παρακολουθούσαν και επεξεργάζονταν τις αποδείξεις. Κάποια από αυτά δεν τα ήξερα, όμως με ρωτούσαν «what is this» και τους απάντησα «απόδειξη, receipt in english», συμπληρώνοντας ότι παίρνουν απόδειξη όταν αγοράζουν κάτι από ένα μαγαζί και δείχνοντας τη συνολική τιμή σε μια ενδεικτική απόδειξη.

Αναφορά 12η

Ο Μ. με πλησίασε και μου ζήτησε να καθίσω δίπλα του να κάνουμε «ματηματικά». Δεν ήξερα το επίπεδό του στην ελληνική γλώσσα κι έτσι ξεκίνησα να τον ρωτώ αν ξέρει τους αριθμούς 1, 2, 3 και συνέχισε γρήγορα την απαρίθμηση μέχρι το 20.

Έτσι σκέφτηκα να τον ρωτήσω αν ξέρει τα βασικά γεωμετρικά σχήματα. Σχεδίασα μερικά σχήματα το ένα κάτω από το άλλο στο τετράδιό του και τον ρώτησα αν ξέρει πώς λέγεται το πρώτο και μου είπε τετράγωνο αντί για ορθογώνιο. Συμπέρανα ότι τα έχει μελετήσει αλλά κάπου μάλλον έχει μπερδευτεί ή τα έχει ξεχάσει. Έτσι του είπα ότι λέγεται ορθογώνιο και του έδειξα κι ένα τετράγωνο. Μου ζήτησε να το γράψω στα ελληνικά δίπλα στο αντίστοιχο σχήμα. Τον ρώτησα αν θέλει εκείνος να γράψει την προφορά των λέξεων ή τη μετάφρασή τους στη γλώσσα του, κάτι που είχα δει πολλά παιδιά να κάνουν, όμως αρνήθηκε. Τον ρώτησα ποιο είναι το επόμενο σχήμα π και μου απάντησε στα αγγλικά triangle και αμέσως, χωρίς να τον ρωτήσω, circle δείχνοντας τον κύκλο.

Αφού μέτρησε γρήγορα και εύκολα μέχρι το 20, σκέφτηκα να ανακαλύψω μέχρι πού μπορεί να διαβάσει έναν αριθμό στην ελληνική γλώσσα. Έγραψα τον αριθμό 50 που τον διάβασε με ευκολία. Πρόσθεσα το ψηφίο 3 μπροστά από το 50 και πάλι τον διάβασε εύκολα. Πρόσθεσα το ψηφίο 5 μπροστά από το 3 και την τελεία που συμβολίζει τις χιλιάδες. Διάβασε «5 thousand» και του είπα πως στα ελληνικά το διαβάζουμε χιλιάδες. Εκείνος συνέχισε να διαβάζει τον αριθμό, λέγοντας τελικά σωστά 5 χιλιάδες 350. Έπειτα έγραψα τον αριθμό 81.297 και τον διάβασε σταδιακά και σιγά «ογδόντα ένα χιλιάδες διακόσια... εεε.... ενε..νήντα...εφτά» (στο ενενήντα περίμενε την έγκρισή μου για σιγουρευτεί και να συνεχίσει, την οποία πήρε με ένα νεύμα μου). Για άλλη μια φορά του είπα μπράβο.

Τότε έγραψα στη μέση της επόμενης σειράς τον αριθμό 100.000 και τράβηξα δύο γραμμές πριν και μετά από αυτόν. Τον ρώτησα ποιος αριθμός είναι αυτός και τον είδα

να διστάζει αρκετά και να το σκέφτεται. Έκρυψα με το χέρι μου τα τελευταία 3 ψηφία και τον ρώτησα ποιον αριθμό βλέπει και είπε 100. Του έδειξα την τελεία και διάβασε χιλιάδες και μετά πήρα το χέρι μου λέγοντάς του «100 χιλιάδες». Εκείνος έγνεψε καταφατικά και επανέλαβε τον αριθμό.

Με αφορμή αυτόν τον αριθμό, του ζήτησα να γράψει στις κενές γραμμές τον (φυσικό) αριθμό που είναι πριν και μετά. Συμπλήρωσε πρώτα το δεύτερο κενό με τον αριθμό 200.000 και στο πρώτο κενό αφού το σκέφτηκε λίγο με ρώτησε «εννιά, εννιά, εννιά, εννιά, εννιά, εννιά;». Του είπα με ενθουσιασμό «ναι!» και του ζήτησα να το γράψει και να το διαβάσει, όπως και έκανε λέγοντας «εννιακόσια ενενήντα εννιά χιλιάδες», ενώ με το χέρι του έκρυψε το μέρος του αριθμού που είχε ήδη διαβάσει για να διαβάσει το υπόλοιπο «εννιακόσια ενενήντα εννιά». Του είπα μπράβο σκεπτόμενη ότι αν του διορθώσω το εννιακόσιες μπορεί να του χαλάσω όλη την μέχρι τώρα προσπάθεια και τον ενθουσιασμό του.

Του ζήτησα να διαβάσει και τον επόμενο αριθμό. Το διάβασε «διακόσια χιλιάδες», και τότε σκέφτηκα να δοκιμάσω να του πω «διακόσι<u>ες</u> χιλιάδες» εξηγώντας ότι παίρνει την κατάληξη της λέξης χιλιάδες, ποντάροντας στο ότι φάνηκε να μαθαίνει γρήγορα. Το επόμενο πρόβλημα που αντιμετώπισα εκείνη τη στιγμή ήταν στο πώς θα του εξηγήσω ότι ο επόμενος (φυσικός) αριθμός του 100.000 δεν είναι αυτός που έγραψε. Ξεκίνησε δείχνοντας και διαβάζοντας τον πρώτο αριθμό της σειράς, έπειτα τον δεύτερο και στη θέση του τρίτου αριθμού πήρα μια ερωτηματική έκφραση και για να είμαι μαθηματικά πιο σωστή, του είπα αμέσως ότι η σειρά είναι «plus one, συν ένα». Όμως είχε ήδη ξεκινήσει να διορθώνει τον αριθμό από 200.000 σε 100.001. Του είπα μπράβο, του ζήτησα να το διαβάσει, όπως και έκανε με μικρές παύσεις «εκατό… χιλιάδες… ένα» και τον είδα να κλείνει λίγο τα μάτια του σα να σκέφτεται μια συγκεκριμένη εικόνα στο μυαλό του (ίσως προσπαθούσε να το διαβάσει εκ μνήμης σπασμένο σε κομμάτια σαν να κάλυπτε το ένα μέρος με το χέρι του). Αφού κάναμε κόλλα το για να τον συγχαρώ, του ζήτησα να πει προφορικά τον επόμενο αριθμό. Εκείνος μάλλον δεν κατάλαβε και είπε πάλι 100.001.

Τότε σκέφτηκα να πω εγώ τον επόμενο αριθμό και να το κάνουμε σαν παιχνιδάκι, όπου ο καθένας λέει τον επόμενο αριθμό. Ξεκίνησα λέγοντας 100.002 και του έδειξα ότι του δίνω τη σειρά να μιλήσει. Εκείνος είπε 100.003, τον διέκοψα για να πω 100.004 και με την ίδια χειρονομία του έδωσα τη σειρά να μιλήσει και με αυτόν τον τρόπο φτάσαμε μέχρι το 100.011. Έτσι, δεν του ζητούσα απλά να απαριθμήσει αλλά και να προσέχει τα δικά μου λόγια. Στη συνέχεια είπα 200.000 και είπε 200.001, είπα 299.999 και είπε «τριακόσια χιλιάδες», είπα «τριακόσιες χιλιάδες ένα», είπε «τριακόσιες χιλιάδες δύο».

Αποφάσισα να του δημιουργήσω μία ακόμη πρόκληση και να του πω τον αριθμό 999.999. Με κοιτούσε με απορία και του είπα τον αριθμό 1 εκατομμύριο καθώς τον έγραφα στο τετράδιό του. Το διάβασε αμέσως στα αγγλικά «million! one million!" και του είπα «ναι, Greek 1 εκατομμύριο», επαναλαμβάνοντας πιο αργά «εκατομμύριο». Το επανέλαβε κι εκείνος και μου ζήτησε να το γράψω. Κοιτούσε με

προσοχή πώς το έγραφα. Τότε του είπα να γράψει εκείνος 2 εκατομμύρια. Δεν κατάλαβε και απλά επανέλαβε «δύο εκατομμύριο». Του είπα ξανά δείχνοντας το αντίστοιχο πλήθος δαχτύλων, «1 εκατομμύριο, 2 εκατομμύρια, πολλά είναι εκατομμύρια, 1, πολλά», επανέλαβα στα αγγλικά να γράψει 2 εκατομμύρια και τότε έγραψε τον αριθμό 2.000.000 κάτω από τον αριθμό 1.000.000. Από δίπλα του έγραψα τη λέξη δύο και εκείνος συμπλήρωσε «εκατομμύρια» κοιτώντας την επάνω λέξη.

Επέστρεψα στον αριθμό 1.000.000 και τον ρώτησα πόσα μηδενικά έχει (στα ελληνικά και στα αγγλικά). Μου είπε «six» δείχνοντας ταυτόχρονα 6 δάχτυλα. Του είπα «μπράβο, six zeros, εκατομμύριο» (καθώς έδειχνα πάνω από τα ψηφία του αριθμού, ίσως ασυναίσθητα, γιατί είναι ένας τρόπος που ακολουθώ κάθε φορά που γράφω τον αριθμό εκατομμύριο -αντιστοιχίζω ένα μηδενικό σε κάθε συλλαβή). Ο Μ. αμέσως είπε «ααα, ε-κα-το-μύ-ρι-ο, six, like 6 zeros», δηλαδή κατάλαβε την στρατηγική μου κι έτσι του αποκάλυψα ότι αυτός είναι ο τρόπος που το σκέφτομαι από μικρή, παρόλο που πίστευα ότι δεν έγινε φανερός αυτός ο τρόπος καθώς διάβαζα τον αριθμό. Όμως, αντιλήφθηκα ότι όπως κοιτούσε με πολλή προσοχή όταν έγραφα μια λέξη, έτσι κοιτούσε και όταν την έλεγα.

Έπειτα έγραψα τον αριθμό 1.462.700 και τον είδα να δυσανασχετεί. Του είπα να τον διαβάσουμε μαζί και είπαμε «ένα», εκείνος σταμάτησε και τότε ακολούθησα την προηγούμενη στρατηγική με την κάλυψη του χεριού, καθώς είπα «εκατομμύριο». Ο Μ. συμπλήρωσε «ένα εκατομμύριο», έκρυψα τους άλλους αριθμούς και τον παρότρυνα να συνεχίσει λέγοντας «τετρακόσιες...», όπως και έκανε λέγοντας σωστά «εξήντα δύο... χιλιάδες». Τέλος, έκρυψα τους υπόλοιπους αριθμούς και επειδή δίστασε λίγο, ξεκίνησα λέγοντας «ε..φτα...», εκείνος συνέχισε «εφτακό...σια...». Επανέλαβα «εφτακόσια» και του ζήτησα να διαβάσει τον αριθμό όλο μαζί, όπως και έκανε σωστά. Τότε του ζήτησα να γράψει εκείνος έναν αριθμό που ήθελε και να τον διαβάσει. Χωρίς κανένα λάθος, έγραψε και διάβασε τον αριθμό 1.999.999 και μετά έγραψε τον αριθμό 2.000.000.000, παρόλο που δεν ήξερε πώς διαβάζεται, οπότε και του είπα πως λέγεται δύο δισεκατομμύρια και στα αγγλικά «two billion».

Τότε δυσανασχέτησε και αποφάσισα να μην προχωρήσουμε άλλο με την ανάγνωση και αναγνώριση και την ονομασία των αριθμών. Του είπα αν θέλει να κάνουμε μια διαίρεση και αν ξέρει να την επιλύει. Ο Μ. έγνεψε καταφατικά και του έδωσα τους αριθμούς 135:2. Εκείνος απάντησε αμέσως «I know this, easy», οπότε σκέφτηκα να αλλάξω τον αριθμό 2 σε 12, κάτι το οποίο είδε σαν πρόκληση με ενδιαφέρον και ξεκίνησε να λύνει. Τον ρώτησα αν κάνουν έτσι τη διαίρεση στη χώρα του και μου είπε ναι. Καθώς έγραφε έλεγε μόνο τους αριθμούς στην ελληνική γλώσσα:

«1(στο πηλίκο), 12(κάτω από το 13), (γραμμή), 1 (κάτω από τη γραμμή), 5 (δίπλα στο 1), 1 (στο πηλίκο), 12 (κάτω από το 15), (γραμμή), 3 (κάτω από τη γραμμή)». Εκεί σταμάτησε, οπότε τον ρώτησα γιατί δε συνεχίζει. Ο Μ. απάντησε «finish, είναι 11, είναι 3» (δείχνοντας σε κάθε αριθμό αντίστοιχα), με αποτέλεσμα να νιώθω ότι πρέπει να του πω πως μπορεί να συνεχίσει. Του έδειξα πως βάζουμε 0 και γίνεται 30 και μετά κόμμα κλπ., όμως κατάλαβα από την αντίδρασή του και τον τρόπο που κοιτούσε

ότι δεν ξέρει τους δεκαδικούς αριθμούς. Μόλις σχηματίστηκε το αποτέλεσμα 11,25 του είπα για αυτούς τους αριθμούς.

Ξεκίνησα με μια πρόχειρη αριθμογραμμή από το 0 μέχρι το 2 και του είπα ότι ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς έχουμε άλλους που λέγονται δεκαδικοί. Ο Μ. επανέλαβε «δεκαδικοί» (επανέλαβε και ένας μαθητής που καθόταν παραδίπλα και παρατηρούσε πού και πού ταυτόχρονα με τα αγγλικά του). Χώρισα την αριθμογραμμή πρώτα στη μέση και σημείωσα τον αριθμό 1, και έπειτα από το 0 μέχρι το 1 ξανά στη μέση και σημείωσα το 0,5 και αντίστοιχα από το 1 μέχρι το 2. Έπειτα χώρισα ξανά ανά 0,1 και σημείωσα τους αριθμούς από το 0,1 μέχρι το 1,9. Ως τότε είχε καταλάβει το πρότυπο και απαριθμούσε μαζί μου. Του τόνισα τον τρόπο ανάγνωσης με το κόμμα.

Έπειτα «ζούμαρα» σε ένα σημείο της αριθμογραμμής και έκανα άλλη μία πιο κάτω από το 1,2 μέχρι το 1,3. Χώρισα σε εκατοστά και σημείωσα ένα 0 δίπλα στο 1,2 και στο 1,3 δείχνοντας ότι είναι το ίδιο και ότι ο δεκαδικός μπορεί να πάρει κι άλλα μηδενικά. Τον ρώτησα τι θα γράψω μετά το 1,20 και απάντησε «είκοσι ένα». Το σημείωσα και τον συνεχάρη, γι' αυτό και του ζήτησα να συμπληρώσει εκείνος τους υπόλοιπους αριθμούς.

Μετά «ζούμαρα» ξανά, φτιάχνοντας άλλη μια αριθμογραμμή από το 1,24 μέχρι το 1,25, την οποία του ζήτησα να χωρίσει και να σημειώσει. Αφού δυσανασχέτησε, του είπα «όπως κάναμε πριν» και τον καθοδήγησα να βάλει 0 στα άκρα. Αυτό τον βοήθησε να συνεχίσει με τη συμπλήρωση των αριθμών, παρόλο που οι αποστάσεις των σημείων δεν ήταν ίσες. Σε κάποιο σημείο μπερδεύτηκε, μάλλον από βιασύνη και σημείωσε 1,246 αντί για 1,245 αλλά το παρατήρησε και το διόρθωσε αμέσως.

Εδώ δε θεώρησα σημαντικό να μάθει την αξία θέσης των δεκαδικών ψηφίων, από τη στιγμή που δεν ξέρω αν ξέρει την αξία θέσης των άλλων ψηφίων και δεν ήθελα να τον επιβαρύνω με επιπλέον όρους σε μια άλλη γλώσσα. Έτσι έμεινα στην κατανόηση του τι είναι δεκαδικός αριθμός και πού τους βρίσκουμε και επαναλάβαμε και οι δύο «δεκαδικοί αριθμοί».

Λίγο πιο πριν, ο Ρ. και η Φ. τελείωσαν τις δράσεις τους και ήρθαν κοντά μου. Τότε τους έδωσα ως ατομική εργασία μία άσκηση με κουμπαράδες και υπολογισμό των χρημάτων που περιέχουν, ώστε να κλείσει η ενασχόληση με τα ευρώ με κάτι που δε θα ήταν πολύ απαιτητικό ώστε να μην το ολοκληρώσουν ή να χρειάζονται πολύ βοήθεια από εμένα αφού εργαζόμουν ατομικά με τον Μ., αλλά ούτε και πολύ απλό ώστε να μη φανεί η κατανόηση.

Έδωσα στα παιδιά την οδηγία για την άσκηση αφού την διάβασα και τους εξήγησα τι είναι κουμπαράς. Τους έδειξα την εικόνα του κουμπαρά και τους είπα πως αυτό είναι, και εκεί μέσα μαζεύουμε τα λεφτά μας. Τους ρώτησα αν κατάλαβαν και αν έχουν-είχαν κουμπαρά και είπαν ναι στο πρώτο και όχι στο δεύτερο αντίστοιχα. Η Φ. επαναδιατύπωσε στα αγγλικά για να μου δώσει να καταλάβω τι κατάλαβε παρόλο που χρησιμοποιεί την αγγλική γλώσσα και ρώτησα τον Ρ. αν κατάλαβε και απάντησε

θετικά δείχνοντας τον τελευταίο κουμπαρά και λέγοντας «this πενήντα έχει, πενήντα και πέντε….» και συνέχισε να σκέφτεται εσωτερικά. Τους είπα πως με αυτόν τον τρόπο θα υπολογίσουν το σύνολο των χρημάτων και θα το γράψουν κάτω από κάθε κουμπαρά.

Ο Ρ. ολοκλήρωσε τη σκέψη του και έγραψε 55,11 € κάτω από τον τρίτο κουμπαρά. Και τα δύο παιδιά βρήκαν σωστά τα αποτελέσματα του πρώτου κουμπαρά, ενώ η Φ. χρειάστηκε λίγο περισσότερο χρόνο για να βρει τον δεύτερο και τον τρίτο. Στον δεύτερο συγκεκριμένα με ρώτησε αν είναι «27 cents» και της είπα να προσέξει να ξεχωρίσει τα cents από τα ευρώ. Τότε έβαλε τον αριθμό 2 στα δεξιά του αριθμού 100 που είχε γράψει όμως το έσβησε γιατί σχημάτισε τον αριθμό 1002 αντί του αριθμού 102 και τελικά έγραψε 102,07. Ο Ρ. στον ίδιο κουμπαρά, δεν αντιμετώπισε πρόβλημα στο ακέραιο μέρος του δεκαδικού αριθμού αλλά στο δεκαδικό, όπου έγραψε 7 αντί για 07, κάτι το οποίο είναι σημαντικό. Γι' αυτό αποφάσισα να του εξηγήσω, κι ας μην έχει ασχοληθεί με τους δεκαδικούς πέρα από τα χρήματα, πως υπάρχει διαφορά στο 0 μπροστά από έναν φυσικό ή ακέραιο αριθμό και μέσα σε έναν δεκαδικό αριθμό ή στο τέλος του, δείχνοντας πως το 102,7 ισοδυναμεί με το 102,70 ή 102,700 ή 0102,7000 όμως όχι με το 102,07 ή με το 102,007.

Από τη συζήτηση προέκυψε ότι κάθε ακέραιος μπορεί να γραφτεί ως δεκαδικός με υποδιαστολή και άπειρα μηδενικά, όπως π.χ. το 1 να γίνει 1,000. Η Φ. είχε αποχωρήσει, όμως ο Μ. παρακολουθούσε και επενέβη δείχνοντας ποια μηδενικά μπορούν να σβηστούν από ποιους αριθμούς και εξηγώντας στον Ρ. στη Γ1 τους. Τον ρώτησα αν μπορεί να μου εξηγήσει τι του είπε και εκείνος ουσιαστικά επαναδιατύπωσε σε ελληνοαγγλικά το νόημα όσων τους έλεγα πριν για τα μηδενικά. Ο Ρ. συμφώνησε και καταλήξαμε πως τα 7 cents γράφονται 0,07 €, τα 70 cents γράφονται 0,70 € και τα 170 cents γράφονται 1,70 €. Εδώ ο Μ. σκέφτηκε να κάνει μια αριθμογραμμή από το 0,70 ως το 1,70 τοποθετώντας με τη βοήθειά μου όταν κατάλαβα τι ήθελε να κάνει τους αριθμούς 1, 1,50, και τους παραπάνω αριθμούς, με άκρα τους αριθμούς 0,50 και 2.

Αναφορά 13η

Μιας και στην τάξη βρίσκονταν πολλά παιδιά που δεν τα γνώριζα, τους μοίρασα χρωματιστά χαρτάκια τύπου post-it (ροζ στα κορίτσια και πράσινα στα αγόρια) ώστε να γράψουν τα ονόματά τους, σκεφτόμενη ότι θα μπορέσουμε να ασχοληθούμε με τα γραφήματα και την στατιστική. Έτσι, έγραψα στον πίνακα τις λέξεις γάτα και σκύλος, τους ζήτησα να διαλέξουν το ζώο που προτιμούν από τα δύο και να τοποθετήσουν στην αντίστοιχη στήλη το όνομά τους. Διαβάσαμε μαζί τις λέξεις, τις μεταφράσαμε στα αγγλικά (κάποια παιδιά τα ανέφεραν από μόνα τους), τους έδειξα εικόνες και μιμηθήκαμε τους ήχους των ζώων. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα τα παιδιά που ήταν νέα στο σχολείο και δε μιλούν ελληνικά ή αγγλικά να ξεκινήσουν να εγκλιματίζονται και να μαθαίνουν νέες λέξεις. Τη διαδικασία αυτή παρατήρησα και μερικά παιδιά από τις διπλανές τάξεις και θέλησαν να γράψουν κι εκείνα το όνομά τους σε χαρτάκι στον πίνακα, όπως και έκαναν αλλά μετά αποχώρησαν.

Ξεκινήσαμε να διαβάζουμε τα ονόματα των παιδιών σε κάθε στήλη και έπειτα μετρήσαμε τα χαρτάκια κάθε κατηγορίας. Τα παιδιά που ήταν εξοικειωμένα με την ελληνική αρίθμηση (Φ., Αν.) ηγούνταν κατά κάποιο τρόπο μέσω της δυνατότερης φωνής τους και της γρηγορότερης και πιο καθαρής ομιλίας, ενώ άλλα παιδιά μπορούσαν να απαριθμήσουν με τη βοήθεια των πρώτων (Αμπ., Μαχ.). Τα υπόλοιπα παιδιά απαριθμούσαν επαναλαμβάνοντας τις λέξεις που άκουγαν, συνδυάζοντάς τες με τις χειρονομίες μου (έδειχνα τον αντίστοιχο αριθμό δαχτύλων, καθώς έδειχνα ανά ένα τα χαρτάκια στον πίνακα), είτε δυνατά (Μν., Ι., Α., Γ.), είτε πιο σιγανά (Μαρ., Χρ., Μπ., Μπ.). Το ίδιο συνέβη και στην καταμέτρηση των ονομάτων της δεύτερης κατηγορίας. Έτσι, βρέθηκε ότι στην κατηγορία γάτα συγκεντρώθηκαν 9 παιδιά και στην κατηγορία σκύλος συγκεντρώθηκαν 8 παιδιά.

Αφού έγινε η γνωριμία με τα παιδιά, τους ρώτησα στα ελληνικά και στα αγγλικά πόσα αγόρια διάλεξαν τη γάτα. Εδώ χρειάστηκε να επαναλάβω την ερώτηση στα αγγλικά, να δείξω τη στήλη γάτα («cat, here, γάτα») και να εξηγήσω ότι τα αγόρια (με επανάληψη της αγγλικής λέξης) αντιστοιχούν στα χαρτάκια που είναι πράσινα (δείχνοντας τα πράσινα χαρτάκια και μερικά ακόμη αντικείμενα ή επιφάνειες του γύρω χώρου που είναι πράσινα). Παρατήρησα ότι τα νεοφερμένα παιδιά επαναλάμβαναν μαζί μου κάθε φορά που έδειχνα κάτι και έλεγα πως είναι πράσινο και εντόπιζαν μόνοι τους κι άλλα αντικείμενα π.χ. μία τσάντα, μία σβήστρα (επιβεβαίωνα την απάντησή τους λέγοντας π.χ. ναι, η σβήστρα είναι πράσινη/this is green).

Για να δω αν κατάλαβαν, ζήτησα να σηκώσουν το χέρι όλα τα αγόρια (δείχνοντας την κίνηση του χεριού) και έπειτα ζήτησα από όσους δε διάλεξαν τη γάτα να κατεβάσουν το χέρι τους. Με αυτόν τον τρόπο άρχισαν να εξοικειώνονται με την κατανόηση οδηγιών. Το τελικό αποτέλεσμα ήταν μικρότερο από το πλήθος που φαινόταν στη στήλη του πίνακα, γιατί υπήρχαν τα επιπλέον χαρτάκια των άλλων παιδιών που αποχώρησαν. Βρήκα τα ονόματα των παιδιών της τάξης στη στήλη και τα διάβασα καθώς τα έδειχνα, καταλήγοντας ότι τη γάτα τη διάλεξαν 3 αγόρια της τάξης και 3 αγόρια άλλων τάξεων. Αντίστοιχα και με τα κορίτσια, στη στήλη σκύλος, όπου η διαδικασία ολοκληρώθηκε πιο γρήγορα αφού είχε προηγηθεί η προηγούμενη με τα αγόρια. Έτσι βρέθηκε ότι στην τάξη υπήρχαν 4 από τα 7 κορίτσια που διάλεξαν τη στήλη σκύλος.

Απευθύνθηκα σε όλα τα παιδιά ρωτώντας πόσα είναι όλα τα κορίτσια της τάξης και πόσα είναι όλα τα αγόρια (επανέλαβα και στα αγγλικά, όμως από τις εκφράσεις τους νομίζω πως είχαν καταλάβει την ερώτησή μου στα ελληνικά, ιδίως λόγω της χειρονομίας, απλά περίμεναν την αγγλική μετάφραση για επιβεβαίωση). Τα παιδιά άρχισαν να μετρούν, άλλα φωναχτά (στα ελληνικά, στη μητρική γλώσσα τους, στα αγγλικά ή μεικτά), άλλα σιγανά ή από μέσα τους και έδιναν διάφορες απαντήσεις. Εντόπισα ότι κάποια παιδιά έδιναν κοινές απαντήσεις. Μερικά παιδιά που έδωσαν διαφορετικές απαντήσεις άρχισαν να συζητούν μεταξύ τους και να το διαπραγματεύονται, μετρώντας ξανά, αν αμφισβητούσαν την προηγούμενη καταμέτρησή τους βάσει της καταμέτρησης του συμμαθητή τους, περιμένοντας τη

δική μου επιβεβαίωση. Κάποια παιδιά έδειχναν με τα δάχτυλα τον αριθμό (δύο χέρια και μετά δύο δάχτυλα για τον αριθμό 12), άλλα το έλεγαν δυνατά, συνήθως πρώτα στη γλώσσα τους ή στα αγγλικά και μετά (ακούγοντας άλλους πιο έμπειρους ομιλητές ελληνικών) στα ελληνικά, και άλλα χρησιμοποιούσαν τα δάχτυλα για να δείξουν τα ψηφία (1 στο ένα χέρι και 2 στο άλλο) και τα τοποθετούσαν δίπλα δίπλα για να σχηματίσουν τον αριθμό. Επίσης, υπήρχαν παιδιά που έδειξαν 10 δάχτυλα και έλεγαν προφορικά τον αριθμό που αντιστοιχεί στις μονάδες (1, 2 ή 3), είτε σωστό είτε λάθος ως προς το αποτέλεσμα.

Ακούγοντας προσεκτικά όλες τις απαντήσεις των παιδιών, αποφάσισα να τους δείξω αντί να πω τη σωστή απάντηση. Θυμήθηκα πως στον πίνακα υπάρχει μια ειδική θέση με μια χάρτινη κατασκευή για την συμπλήρωση του αριθμού παιδιών της τάξης κι έτσι πλησίασα, έγραψα εκεί τον αριθμό 12 λέγοντας και ταυτόχρονα δείχνοντας την πρόταση που διαβάζω «Σήμερα στην τάξη υπάρχουν 12 παιδιά».

Εδώ είχα προγραμματίσει να κάνω κι άλλες ερωτήσεις, όπως τι άλλες πληροφορίες μπορούμε να πάρουμε από τις στήλες του πίνακα, σε πόσα περισσότερα ή λιγότερα αγόρια/κορίτσια αρέσει ο σκύλος από τη γάτα ή αντίστροφα. Όμως ήδη είχαν γίνει πολλές ερωτήσεις και δεν ήθελα να δυσκολέψω το επίπεδο, επειδή πολλά παιδιά ήδη κατέβαλαν πολλές προσπάθειες να κατανοήσουν το περιεχόμενο και το λεξιλόγιο.

Αντ' αυτού, τους εξήγησα ότι η διαδικασία που ακολούθησαν λέγεται συλλογή και επεξεργασία δεδομένων. Δηλαδή τους είπα ότι κάναμε συλλογή δεδομένων («αυτά είναι τα δεδομένα, data, από τις απαντήσεις που δώσατε εσείς») και μετά κάναμε ανάλυσή τους, γιατί απαντήσαμε σε πολλές ερωτήσεις, όπως πόσα είναι τα κορίτσια που προτιμούν τη γάτα. Επίσης, τους είπα ότι τα δεδομένα που συλλέγουμε τα παρουσιάζουμε σε γραφήματα (graphs ή charts), όπως αυτό που κάναμε με τα post-it.

Στη συνέχεια ανέφερα ότι όλη αυτή η διαδικασία μπορούμε να πούμε ότι ανήκει σε μία έρευνα, που ξεκινά με την ερώτηση «Ποιο είναι το αγαπημένο ζώο των μαθητών της τάξης» και ότι αν αλλάξει κάτι στα δεδομένα αλλάζουν και τα αποτελέσματα της έρευνας όταν τα επεξεργαζόμαστε ή τα αναλύουμε. Για να καταλάβουν τις έννοιες στη μητρική τους γλώσσα χρησιμοποίησα τη φωνή του Google translate. Έπειτα έγραψα κι εγώ το όνομά μου σε ένα ροζ χαρτάκι και το τοποθέτησα στην πρώτη στήλη, εξηγώντας τους ότι με αυτήν την αλλαγή έχουμε άλλα δεδομένα και άλλα αποτελέσματα.

Περνώντας σε ένα άλλο είδος γραφήματος, έδειξα στα παιδιά ένα εικονόγραμμα που είχα ετοιμάσει με τα μέσα μεταφοράς. Μερικά άλλα παιδιά πέρασαν και πάλι από την τάξη και κάθισαν σε μερικές άδειες καρέκλες κοντά στους φίλους τους ανοίγοντας μικρές ομαδικές συζητήσεις στην οικεία γλώσσα τους. Εδώ κανονικά θα έδινα στα παιδιά ένα φύλλο εργασίας που είχα ετοιμάσει, όμως θεώρησα ότι θα δυσκολευτούν να το συμπληρώσουν δεδομένου του επιπέδου τους στην ελληνική, ενδεχομένως να χάσουν και κίνητρα συμμετοχής, και, επιπλέον, δεν είχα αρκετά αντίγραφα διότι δεν

περίμενα αυτήν την εισροή μαθητών. Έτσι, ακολούθησα τη ροή της διδασκαλίας χωρίς το φύλλο εργασίας.

Αφού συγκέντρωσα την προσοχή τους, ανέφερα ότι αυτό που κρατώ είναι ένα εικονόγραμμα, δηλαδή ένα γράφημα με εικόνες, που δείχνει κάτι, έχει κάποια δεδομένα για τα μέσα μεταφοράς, δηλαδή τα μέσα που χρησιμοποιούμε για να μετακινηθούμε, να πάμε κάπου. Τόνισα τις κατηγορίες των μέσων μεταφοράς και τα παιδιά επαναλάμβαναν μαζί μου, ανεξαρτήτως επιπέδου Γ2. Έπειτα, τους ρώτησα ποια στήλη έχει τις πιο πολλές εικόνες και τα περισσότερα παιδιά έδειξαν το ποδήλατο, ή είπαν το ποδήλατο, ή είπαν αυτή (δείχνοντας στο εικονόγραμμα), ενώ άλλα παιδιά (ίσως δεν κατάλαβαν την ερώτηση ή μπερδεύτηκαν στο γράφημα) έδειχναν ή έλεγαν το αεροπλάνο. Αντί να τους πω κάτι για να τους εξηγήσω και να τους διορθώσω αμέσως, τους ζήτησα να μετρήσουμε τις εικόνες κάθε στήλης, όπως και κάναμε βρίσκοντας ότι υπάρχουν 5 αυτοκίνητα, 8 ποδήλατα, 4 καράβια και 7 αεροπλάνα. Αμέσως, έγραψα τις λέξεις των μέσων μεταφοράς στον πίνακα, τα παιδιά τις έγραψαν στα τετράδιά τους και από δίπλα σημειώσαμε το πλήθος τους στο γράφημα, καταλήγοντας στην απάντηση της προαναφερόμενης ερώτησης ότι η στήλη με τις περισσότερες εικόνες αντιστοιχεί στο ποδήλατο.

Τότε τους εξήγησα ότι αυτό το εικονόγραμμα δεν παρουσιάζει απλά τυχαίους αριθμούς για κάθε μέσο, αλλά δείχνει γραφικά τις απαντήσεις κάποιων μαθητών σχετικά με το αγαπημένο τους μέσο μεταφοράς. Δηλαδή, ότι 5 μαθητές είπαν ότι το αγαπημένο τους μέσο μεταφοράς είναι το αυτοκίνητο, 8 μαθητές είπαν ότι το αγαπημένο τους είναι το ποδήλατο κ.ο.κ. Τους ρώτησα ποιο είναι το δικό τους αγαπημένο μέσο μεταφοράς και παρατήρησα ότι κανένας μαθητής δεν διάλεξε το καράβι (ίσως λόγω αρνητικών βιωμάτων), λίγοι μαθητές διάλεξαν το ποδήλατο και το αυτοκίνητο, ενώ οι περισσότεροι διάλεξαν το αεροπλάνο (ίσως λόγω της ελπίδας ότι με αυτό θα φύγουν). Έτσι, όταν ένας μαθητής με ρώτησε ποιο είναι το δικό μου αγαπημένο μέσο, απέφυγα να διαλέξω το καράβι.

Έπειτα, τους ζήτησα να κατατάξουν τα μέσα μεταφοράς με τη σειρά σημειώνοντας 1ο, 2ο, 3ο και 4ο αντίστοιχα ανάλογα με τη σειρά προτίμησής τους σύμφωνα με την έρευνα. Αυτό έγινε ατομικά από τους μαθητές με καλύτερο επίπεδο ελληνικών (Φ., Αν.) και ομαδικά με τους νέους μαθητές. Έτσι, ένας μαθητής (Μαχ.) έγραψε στον πίνακα 1ο δίπλα στη λέξη ποδήλατο, 2ο δίπλα στη λέξη αεροπλάνο, 3ο δίπλα στη λέξη αυτοκίνητο και 4ο δίπλα στη λέξη καράβι.

Λίγο πριν χτυπήσει το κουδούνι για το διάλειμμα, τους εξήγησα ότι κάθε γράφημα αποτελείται από τον τίτλο («title, όπως λέμε το όνομα, the name»), τις ετικέτες («labels, όπως η ετικέτα στα ρούχα μας», δείχνοντας την ετικέτα της μπλούζας μου και ενός κοριτσιού που ήταν κοντά μου) και τα δεδομένα (data), δείχνοντας στο αντίστοιχο σημείο του εικονογράμματος κάθε φορά. Τους ανέφερα ότι αυτά τα στοιχεία θα τα δούμε και σε επόμενα γραφήματα που θα κάνουμε μετά το διάλειμμα.

Μετά το διάλειμμα και την ολοκλήρωση της προηγούμενης δραστηριότητας με το εικονόγραμμα, έδωσα στα παιδιά ένα μεγάλο ζάρι από βαμβακερό υλικό. Ξεκίνησαν να λένε τους αριθμούς που βλέπουν στο ζάρι και προσέλκυσα την προσοχή τους λέγοντας ότι αυτό είναι ένα ζάρι, που έχει σχήμα κύβου. Ζήτησα από τη Μν. να σχεδιάσει στον πίνακα μία γραμμή και να σημειώσει τους αριθμούς που υπάρχουν στο ζάρι, δηλαδή 1 έως 6. Της επισήμανα να κάνει τους αριθμούς μεγάλους ώστε να φαίνονται σε όλους και την βοήθησα να χωρίσει τη γραμμή ώστε να τοποθετήσει τους αριθμούς σε καλές αποστάσεις μεταξύ τους.

Τα παιδιά άρχισαν να ρίχνουν το ζάρι με τη σειρά και η Μν. (πρώτα με τη βοήθειά μου και έπειτα χωρίς) σημείωνε ένα Χ στην αντίστοιχη νοητή στήλη του πίνακα στη γραμμή που έκανε, ενώ τα υπόλοιπα παιδιά έγραφαν παράλληλα στο τετράδιό τους. Αυτή η διαδικασία (ρίψη ζαριού) πραγματοποιήθηκε αρχικά από μία φορά για κάθε μαθητή και έπειτα μερικές ακόμα φορές μέχρι να συμπληρωθούν 20 ρίψεις.

Έπειτα, το σημειόγραμμα μετατράπηκε σε ραβδόγραμμα με τη συμβολή των ίδιων των μαθητών. Σχεδίασα και χώρισα τους άξονες και κατέγραψα τις τιμές του κατακόρυφου άξονα. Ζήτησα από τον Ι. να «με βοηθήσει» να συμπληρώσουμε το ραβδόγραμμα ανάλογα με τις τιμές που βρήκαμε στο σημειόγραμμα. Αρχικά έδειχνα και μιλούσα με απλές κοφτές λέξεις στα αγγλικά, για να γίνει κατανοητή η οδηγία. Η Φ. κατάλαβε και προσφέρθηκε να βοηθήσει, συμπληρώνοντας τη δεύτερη ράβδο μετά τη δική μου. Η συμβολή της Φ. ήταν σημαντική γιατί με την κατανόησή της βοήθησε τον Ι. να συμπληρώσει τις επόμενες ράβδους αλλά και τα άλλα παιδιά να κατανοήσουν καθώς μιλούσε στη μητρική γλώσσα της, τα φαρσί, που είναι και η πρώτη γλώσσα της πλειοψηφίας των παιδιών της τάξης.

Επίσης, διαπίστωσα ότι τα παιδιά δεν αντιμετώπισαν κανένα εμπόδιο στη σχεδίαση του γραφήματος και δε χρειάστηκαν τη βοήθειά μου. Ίσως έπαιρναν βοήθεια από τους συμμαθητές τους, όμως η ικανότητά τους να «αντιγράφουν» σχέδια και σύμβολα, είτε αριθμητικά είτε όχι, είναι κάτι το οποίο έχω παρατηρήσει ιδίως στα γλωσσικά μαθήματα (που ακολούθησαν τις επόμενες μέρες με τα νέα παιδιά), όπου με εξαιρετική δεξιοτεχνία αντέγραφαν γράμματα και λέξεις στη νέα γλώσσα, χωρίς δυσκολία και με λίγα λάθη.

Στο τέλος του ραβδογράμματος τους ρώτησα αν παρατήρησαν ότι λείπει κάτι από αυτό και θυμηθήκαμε τα 3 βασικά πράγματα που έχει ένα γράφημα (τίτλο, ετικέτες, δεδομένα). Η Αν. παρατήρησε ότι το ραβδόγραμμα αυτό έχει ετικέτες, απάντηση την οποία επιβεβαίωσα με επανάληψη της φράσης και με καθοδηγητική ερώτηση. Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν title, όμως τους ρώτησα και για την ελληνική λέξη:

ΕΕ: There are labels, but there is no… ? (Υπάρχουν ετικέτες, αλλά δεν υπάρχει…;)
Μαθητές: Title!
ΕΕ: Δηλαδή; Ελληνικά; Μοιάζει πολύ! Τί….;
Μαθ.: Τίτλος!

Προσπάθησα να ζητήσω από τα παιδιά να βάλουν έναν τίτλο στο γράφημα, όμως επικρατούσε μεγάλη σύγχυση στον σχολικό χώρο από την συγκέντρωση πολλών νέων παιδιών, με αποτέλεσμα να μην μπορώ να πω με βεβαιότητα ότι έγινε κατανόηση του συμπεράσματος από όλους. Αποφάσισα να τρέξω σε ένα συμπέρασμα του τύπου «Αυτά είναι στατιστικά δεδομένα, που τα συλλέγουμε με μία έρευνα, που αποτελείται από ερωτήματα, και στο τέλος τα δεδομένα τα αναλύουμε, τα επεξεργαζόμαστε, τα παρουσιάζουμε για να απαντήσουμε σε αυτά τα ερωτήματα πιο εύκολα». Παρατήρησα ότι μόνο τα κορίτσια της τάξης έδειχναν την προσοχή τους και την κατανόησή τους κουνώντας το κεφάλι καταφατικά και επαναλαμβάνοντας κάποιες λέξεις ή φράσεις.

Παρατήρησα την Μαρ. που συνομιλούσε με τον πατέρα της, ο οποίος μόλις είχε έρθει και κάθισε δίπλα της. Τον χαιρέτησα και προσπάθησα να καταλάβω τι λένε στα αραβικά. Εκείνος μάλλον την ρώτησα τι κάναμε και εκείνη του απάντησε στην ίδια γλώσσα συμπεριλαμβάνοντας την ελληνική λέξη «ζάρι», δείχνοντας το ζάρι που χρησιμοποιήσαμε, και συνέχισε δείχνοντας στον πίνακα και λέγοντας «ένα, δύο, τρία...». Δηλαδή, έδειξε στον πατέρα της τη γνώση που απέκτησε στην αρίθμηση μέχρι το 10, χρησιμοποιώντας παράλληλα και τα δάχτυλά της. Η Μαρ. και ο πατέρας της με ευχαρίστησαν ευγενικά και με αποχαιρέτησαν δίνοντάς μου το χέρι τους.

Αναφορά 14η

Η Γμ. δε συμμετείχε στο τμήμα των ελληνικών κι έτσι ζήτησε να ασχοληθεί με κάτι καινούριο στα μαθηματικά. Ξεκινήσαμε κάνοντας κλάσματα, γράφοντας σε ένα φύλλο χαρτί το κλάσμα ½, το οποίο την ρώτησα αν ξέρει τι είναι και πώς λέγεται. Είπε «αα, ναι, ξέρω λίγο, είναι….» και την συμπλήρωσα λέγοντας ότι λέγεται κλάσμα και εκείνη το επανέλαβε.

Έπειτα, της εξήγησα ότι αποτελείται από δύο όρους, τον αριθμητή και τον παρονομαστή, τους οποίους τόνισα και έδειξα και εκείνη επανέλαβε χωρίς να της το ζητήσω. Την ρώτησα αν ξέρει τι συμβολίζει, τι δείχνει ένα κλάσμα και εκείνη είπε «ένα δύο», διαβάζοντας απλά τους αριθμούς που έβλεπε στο κλάσμα. Σκέφτηκα, λοιπόν, ότι το επόμενο βήμα θα έπρεπε να είναι η εκμάθηση του τρόπου ονοματολογίας των κλασμάτων, που είναι γραμματικά κάτι αρκετά δύσκολο για μη έμπειρους ομιλητές της ελληνικής γλώσσας.

Πρώτα, όμως, της εξήγησα ότι το κλάσμα ½ που γράψαμε σημαίνει ότι «έχουμε ένα όλο (σχεδιάζω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο), που το χωρίζουμε σε 2 κομμάτια (το χωρίζω) και παίρνουμε το 1 (γραμμοσκιάζω)» και ότι αυτό το όλο, το ολόκληρο, μία ολόκληρη μονάδα μπορεί να είναι οτιδήποτε, όπως μια σοκολάτα, μια πίτα, η σβήστρα της, ένα σακουλάκι καραμέλες, ένα κουτί ρούχα κλπ. Εκείνη συμπλήρωσε «πίτσα!» και την επιβράβευσα. Αμέσως την ρώτησα τι άλλο μπορεί να σκεφτεί και απάντησε «χαρτί», με ερωτηματική έκφραση. Της απάντησα θετικά, συμπληρώνοντας ότι αυτό το χαρτί που έχουμε μπροστά μας μπορούμε να το χωρίσουμε σε δύο μέρη (το διπλώνω στη μέση), ή και σε περισσότερα, αρκεί αυτά τα

μέρη να είναι ίσα («πρόσεξε, πρέπει να είναι ίσα»). Επίσης, της είπα ότι το χωρίζουμε στη μέση όταν θέλουμε δύο κομμάτια, γιατί αλλιώς δε θα ήταν ίσα/ίδια και η Γμ. συμφώνησε.

Ακόμη, μιας και μιλούσαμε για το οικείο κλάσμα ½, της είπα ότι αυτό λέγεται το «μισό, half» και ανέφερα μερικά παραδείγματα, όπως το μισό χαρτί (δείχνοντας αυτό που έχουμε μπροστά μας), τη μισή πίτσα, τη μισή σοκολάτα, μισή ώρα (δείχνοντας σε ένα νοητό ρολόι χεριού), μισό λεπτό και πολλά άλλα.

Τότε έκανα ένα αυτοσχέδιο διάγραμμα, τύπου 4 τετράγωνα χωρίς εμφανή πλαίσια, και έγραψα με τη σειρά σε κάθε (νοητό) τετράγωνο: κλάσμα, ως παράδειγμα το ¼, την αναπαράστασή του σε κύκλο και, τέλος, την ονομασία του με λέξεις. Παράλληλα, της εξηγούσα προφορικά τι σημαίνει το καθένα και πώς συνδέονται, βγάζοντας ουσιαστικά ένα συμπέρασμα όλων των παραπάνω.

Συνεχίζοντας, σχεδίασα μία ορθογώνια περιοχή χωρισμένη σε ίσα μέρη και γραμμοσκίασα ένα τμήμα της. Ζήτησα από την Γμ. να γράψει το κλάσμα που αντιστοιχεί, όπως και έκανε σωστά. Για επιβεβαίωση, την ρώτησα «ποιο κλάσμα έγραψες;» και μου είπε «1 και 3». Τότε της εξήγησα ότι το διαβάζουμε «ένα τρίτο, γιατί δείχνει το 1 από τα 3». Για να μπορεί να διαβάζει τα κλάσματα, έγραψα τους αριθμούς 1-10 τον έναν κάτω από τον άλλο και της εξήγησα ότι όταν αυτοί οι αριθμοί είναι κάτω, δηλαδή στον παρονομαστή διαβάζουμε (καθώς έγραφα) «πρώτο, δεύτερο [...κτλ], δέκατο» κτλ. και επισήμανα βοηθητικά ότι από το δεύτερο μέχρι το πέμπτο μοιάζει με τις ημέρες της εβδομάδας (Δευτέρα, Τρίτη κτλ) και τα υπόλοιπα ακολουθούν τη μορφή του (απόλυτου) αριθμητικού, όπως είχαν αναφέρει τα κορίτσια στην πιλοτική έρευνα.

Προφορικά αναφέραμε μερικά ακόμη παραδείγματα όπως 11, 12, 15 τονίζοντας ότι όπως λέμε «έντεκα» βάζουμε μία κατάληξη και λέμε «εντέκατο», «δώδεκα-δωδέκατο» και στην περίπτωση του 15 της είπα πως το λέμε σαν 10+5 δείχνοντας τις γραμμένες λέξεις που είχαμε. Με το βλέμμα μου την παρότρυνα να διαβάσει και εκείνη είπε σωστά και καθαρά, με παύση ανάμεσα στις λέξεις, «δέκατο πέμπτο». Κατάλαβα πως η συγκεκριμένη μαθήτρια έχει αρκετά καλή αναγνωστική ικανότητα στην ελληνική γλώσσα, με καθαρή προφορική έκφραση (σε σύγκριση με τα περισσότερα παιδιά που δεν αναγνωρίζουν εύκολα μία γραπτή λέξη χωρίς υποστήριξη).

Σκέφτηκα να της δείξω κι άλλα είδη αναπαραστάσεων και σχεδίασα έναν κύκλο, γραμμοσκιάζοντας περισσότερα μέρη και, λέγοντάς της να φανταστεί πως αυτό είναι μία πίτσα ή πίτα (την ρώτησα τι της αρέσει περισσότερο και είπε και τα δύο), της ζήτησα να γράψει το κλάσμα στο οποίο αντιστοιχούσε. Το κατάφερε και πάλι και το διάβασε σωστά, χωρίς να χρειαστεί να ανατρέξει στις γραμμένες λέξεις, όπως περίμενα.

Στη συνέχεια, σχεδίασα έναν ακόμη κύκλο χωρισμένο σε 4 ίσα μέρη, έγραψα το κλάσμα ¾ και της ζήτησα να χρωματίσει με το μολύβι της το κομμάτι που αντιστοιχεί

στο κλάσμα. Μόλις το έκανε, της είπα προφορικά να κάνει το ίδιο στο ίδιο σχέδιο για τα 4/4. Στο σημείο αυτό μάλλον μπερδεύτηκε με τη γλωσσική ομοιότητα των λέξεων και χρειάστηκε να γράψω το κλάσμα για να μπορέσει να το σχεδιάσει. Μόλις το έκανε, της είπα πως τα 4/4 δείχνουν ότι πήραμε όλο το σχήμα, δηλαδή όλη την πίτα, και ότι αυτό θα μπορούσε να φανεί με οποιοδήποτε κλάσμα με όμοιους όρους π.χ. 5/5, 3/3, 10/10 κλπ. Δε φαινόταν να αντιμετωπίζει κάποια άλλη δυσκολία μαθηματικής κατανόησης, οπότε την ρώτησα αν αυτά τα έχει ξανακάνει, τα έχει ξαναδεί/τα ξέρει και μου είπε πως έκανε λίγο στο σχολείο αλλά δεν της άρεσαν. Αμέσως, προσέθεσε «έτσι πιο καλά…», οπότε την ρώτησα «μόνο που είναι στα ελληνικά..;». Η Γμ. απάντησε «ελληνικά εντάξει, αγγλικά δεν αρέσουν».

Μετά από αυτά τα θετικά στοιχεία που εξέλαβα από τη μαθήτρια, προχώρησα στον σχεδιασμό ενός (τυχαίου) τριγώνου, χωρισμένου σε άνισα μέρη και χρωμάτισα ένα κομμάτι του, ρωτώντας την αν μπορεί να γράψει με τη μορφή κλάσματος το γραμμοσκιασμένο κομμάτι. Εκείνη έγραψε τον αριθμητή και την κλασματική γραμμή και στον παρονομαστή δίστασε λίγο, με κοίταξε, κοίταξε και το τρίγωνο, όμως τελικά έγραψε τον αριθμό που αντιστοιχούσε στο πλήθος των κομματιών του τριγώνου. Τότε την ρώτησα «Πρόσεξες αν τα κομμάτια είναι ίσα;», όμως είδα την απορημένη έκφραση του προσώπου της και συμπλήρωσα ότι στο τρίγωνο αυτό τα κομμάτια δεν είναι ίσα. Η Γμ. συμφώνησε και της εξήγησα ότι για τον λόγο αυτό δεν μπορούμε να γράψουμε (συμβολίσουμε) το κομμάτι σαν κλάσμα. Την ρώτησα αν κατάλαβε, όπως και έδειξε με την εξής επαναδιατύπωση: «Ναι, δεν είναι ίσα, αυτό είναι πιο μεγάλο (έδειξε ένα κομμάτι) και αυτό μικρό (έδειξε άλλο κομμάτι)». Την επιβράβευσα για την ιδιαίτερα σημαντική της διατύπωση και της τόνισα αυτό να το θυμάται.

Ύστερα, της ζήτησα να σχεδιάσει ένα κλάσμα με όποιον τρόπο θέλει και εκείνη διάλεξε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο χώρισε και χρωμάτισε σωστά. Παρατήρησα πως ήταν προσεκτική κατά τη διάρκεια του χωρισμού των ίσων μερών στο περίπου (με το μάτι) και χρωμάτισε σωστά το κλασματικό μέρος.

Στο κλάσμα αυτό της ζήτησα να προσθέσει ένα άλλο με ίδιο παρονομαστή και να σχεδιάσει ό,τι χρειάζεται. Έτσι, προέκυψαν δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα σχήματα, χωρισμένα σε τόσα κομμάτια όσα δείχνει ο παρονομαστής και χρωμάτισε το αντίστοιχο πλήθος κομματιών. Μετατρέποντας την αναπαράσταση σε σύμβολα, της έγραψα την πρόσθεση των κλασμάτων και της ζήτησα να συμπληρώσει το ίσον και να βρει τον αριθμό που προκύπτει. Η Γμ. προσέθεσε τους αριθμητές και τους παρονομαστές, οπότε της ζήτησα να δει τα σχήματα που έκανε και να το ελέγξει. Εκείνη επέμενε πως το κλάσμα που έγραψε είναι το ίδιο με τα σχήματα που σχεδίασε.

Για να αντιληφθεί το λάθος της, της ζήτησα να ζωγραφίσει το αποτέλεσμα που βρήκε σε ένα σχήμα, όπως και έκανε σωστά. Με βάση αυτό το σχήμα και τα προηγούμενα, της ζήτησα και πάλι να ελέγξει να τα συγκρίνει οπτικά. Ακόμα με κοιτούσε με απορία και έτσι προσπάθησα να βρω έναν τρόπο να της εξηγήσω χρησιμοποιώντας μόνο αυτά που είχα μπροστά μου. Οπότε, έδωσα έμφαση στην έννοια της πρόσθεσης (ομώνυμων) κλασμάτων, λέγοντας ότι η συγκεκριμένη πρόσθεση σημαίνει ότι

παίρνουμε τόσο και τόσο μέρος (δείχνοντας τα κλάσματα κάθε φορά) από το όλο (δείχνοντας το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) που είναι ίδιο με αυτό (δείχνοντας το άλλο ορθογώνιο), και έχουμε το τελικό μέρος (συμπληρώνοντας στον αριθμητή του κενού κλάσματος δίπλα στο ίσον την πρόσθεση των αριθμητών των δύο προσθετέων) από το ίδιο όλο, που είναι χωρισμένο/κομμένο σε «πόσα κομμάτια;» (την ρώτησα). Η Γμ. απάντησε δείχνοντας τον αριθμό στον παρονομαστή ενός εκ των κλασμάτων και στο «λάθος» σχήμα που είχε κάνει κύκλωσα τα αντίστοιχα κομμάτια και σημείωσα (εξηγώντας παράλληλα προφορικά) τα κλάσματα.

Αφού το κατάλαβε αυτό, συνέχισα στη διαδικασία της πρόσθεσης ομώνυμων κλασμάτων για να συνδυάσει την έννοια με την πράξη. Στην πρώτη πράξη προσέθεσε σωστά τους αριθμητές με γρήγορες κινήσεις του μολυβιού πάνω από κάθε αριθμητή και πήγε να κάνει το αντίστοιχο και με τους παρονομαστές ψιθυρίζοντας τους αριθμούς που έδειχναν. Όμως λίγο πριν γράψει το άθροισμα δίστασε, με κοίταξε και τελικά έγραψε τον σωστό αριθμό στον παρονομαστή.

Στην επόμενη πρόσθεση βρήκε σωστά το άθροισμα και της εξήγησα ότι μπορεί να κάνει το κλάσμα ακόμη πιο «απλό» αν διαιρέσει με έναν κοινό διαιρέτη, δηλαδή με κάτι κοινό, έναν αριθμό, που τους μικραίνει και τους δύο όρους, χωρίς το κλάσμα σαν αριθμός να μικραίνει. Τόνισα ότι έτσι η αξία του κλάσματος μένει ίδια και της έδειξα την απλοποίηση του κλάσματος που είχε βρει γράφοντας με μικρά γράμματα δίπλα σε κάθε όρο τον κοινό διαιρέτη και το σύμβολο της διαίρεσης, έπειτα το σύμβολο ίσον και το αποτέλεσμα που προκύπτει. Της έδειξα ότι «κάτι κοινό» έχουν και οι όροι των προσθετέων, δηλαδή του πρώτου και του δεύτερου κλάσματος της ισότητας, σημειώνοντας με βελάκια τα ανάγωγα κλάσματα που προκύπτουν από αυτά, χωρίς να αναφέρω στην Γμ. περαιτέρω μαθηματικούς όρους.

Περάσαμε στην αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων. Της είπα να γράψει ⅞ (ανέτρεξε στη λίστα για να βρει το όγδοα), μείον-βγάζω («αφαίρεση δηλαδή, πριν κάναμε πρόσθεση, και, τώρα θα κάνουμε αφαίρεση, είναι το σύμβολο αυτό», δείχνοντας με το δάχτυλό μου), 4/8 (δε χρειάστηκε να ανατρέξει στη λίστα), «ίσον…;». Η Γμ. έγραψε το σύμβολο της ισότητας και της εξήγησα ότι χρειάζεται να κάνει το αντίστοιχο με την πρόσθεση, οι κανόνες δεν αλλάζουν. Το έκανε σωστά και της ζήτησα να δείξει αυτή τη σχέση σε ένα κυκλικό σχήμα.

Έκανε έναν κύκλο (περίπου) και προσπάθησε να τον χωρίσει. Την βοήθησα δείχνοντάς της πώς να χωρίσει σε 8 κομμάτια στο περίπου χωρίζοντας πρώτα στα 4 σαν σταυρό και έπειτα ένα Χ που το κέντρο του είναι στο κέντρο του σταυρού. Της είπα ότι έτσι σχηματίζεται ένα αστέρι που χωρίζει τον κύκλο σε 8 (περίπου) ίσα κομμάτια. Στο σχήμα χρωμάτισε 7 κομμάτια. Έπειτα έκανε το αντίστοιχο για το άλλο κλάσμα. Ανάμεσα στα δύο σχήματα της είπα να γράψει το σύμβολο της αφαίρεσης και στο τέλος το σύμβολο του ίσον και να σχεδιάσει το κλάσμα που προκύπτει. Σχεδίασε και πάλι τον ίδιο κύκλο και χρωμάτισε 3 μέρη του. Αφού την επιβράβευσα της ζήτησα να κοιτάξει τα σχήματα και να προσπαθήσει να μου το πει σε πρόβλημα, όπως ας πούμε λέγαμε με την πίτσα:

ΕΕ: Τι έχουμε εδώ; (δείχνοντας)
Γμ.: Κύκλος
ΕΕ: Κύκλος είναι το σχήμα, κυκλικό… Εμείς μπορούμε να φανταστούμε, ξέρεις τι σημαίνει να φανταστούμε;
Γμ.: Τι;
ΕΕ: Στο μυαλό μας (δείχνοντας) να το κάνουμε σαν εικόνα… Το imagine… ότι είναι μία πίτσα με… πόσα κομμάτια;
Γμ.: Οχτώ.
ΕΕ: Μπράβο. Και πήραμε (κίνηση του χεριού που παίρνει κάτι νοητά) τα…;
Γμ.: …
ΕΕ: Πόσα έχεις χρωματίσει;
Γμ.: Εφτά.
ΕΕ: Ναι. Και μετά πήραμε, φάγαμε ας πούμε, τα … ; (δείχνοντας το άλλο σχήμα)
Γμ.: Τέσσερα
ΕΕ: Από τα…;
Γμ.: Οχτώ.
ΕΕ: Σωστά! Τι μπορούμε να ρωτήσουμε εδώ; Τι είναι αυτό που βρίσκουμε; Τι βρίσκουμε σε αυτό το πρόβλημα αφαίρεσης;
Γμ: ...
ΕΕ: (Επαναδιατυπώνω/ ανακεφαλαιώνω) Πήραμε τα 7 από τα 8 κομμάτια μιας πίτσας και φάγαμε τα 4 από τα 8 κομμάτια της. Πόσα….;
Γμ.: Είναι.
ΕΕ: Πόσα….; έμειναν; Πόσα έμειναν μήπως εννοείς;
Γμ.: Εεε…
ΕΕ: Πόσα έμειναν, δηλαδή, σημαίνει πόσα είναι τα υπόλοιπα. Απλά πρόσεξε να μην μπερδέψεις τα «υπόλοιπα» (δείχνοντας τα γραμμοσκιασμένα στο τελευταίο σχήμα) με αυτά που δεν είναι χρωματισμένα.
Γμ.: Α, ναι…
Εδώ δεν ήμουν σίγουρη αν κατάλαβε. Θα μπορούσα να της εξηγήσω περισσότερο τη διατύπωση προβλήματος αλλά το απέφυγα για να μην μπερδευτεί περισσότερο, μιας και τώρα ασχολείται με τα κλάσματα στην Γ2 της. Αντ' αυτού σκέφτηκα να της κάνω μια εισαγωγή στην περίπτωση της πρόσθεσης κλασμάτων που δεν είναι ομώνυμα. Όμως δεν επεδίωκα να αναφερθώ σε επίσημες ορολογίες, γιατί η Χ. που είναι ίδιας ηλικίας, είχε αντιμετωπίσει δυσκολίες.

«Αν είχαμε διαφορετικές πίτσες…», της είπα και σχεδίασα δύο κύκλους χωρισμένους σε διαφορετικό πλήθος κομματιών και ανάμεσά τους το σύμβολο «και». Κάτω από κάθε κύκλο της ζήτησα να γράψει το κλάσμα που αναπαριστούν. Αφού το έκανε σωστά, την ρώτησα αν ξέρει τι κάνουμε σ' αυτήν την περίπτωση, όπου οι παρονομαστές δεν είναι ίδιοι. Απάντησε «Δεν ξέρω…» και την ρώτησα αν το έχει κάνει ποτέ, αν της θυμίζει κάτι και είπε πως δε θυμόταν. Τότε της εξήγησα ότι όταν δεν είναι ίδια, τα κάνουμε εμείς να είναι ίδια, δηλαδή αυτό που έχει (την πίτσα που έχει) λίγα κομμάτια (δείχνοντάς την) την κάνουμε να έχει όσα και η άλλη, δηλαδή

«από 4 πρέπει να γίνουν…;» (ερωτηματική έκφραση). Η Γμ. απάντησε «8… όχι!...8…»,, οπότε την παρότρυνα να χωρίσει το ίδιο σχήμα σε 8 μέρη.

Πιθανώς την μπέρδεψε το γεγονός ότι υπήρχε ήδη ένα γραμμοσκιασμένο μέρος του σχήματος. Γι' αυτό της θύμισα ότι ξέρει να χωρίζει σε 8 κομμάτια, όπως προηγουμένως. Αφού το έκανε, συνέχισα ρωτώντας την ποιο κλάσμα δείχνει η πρώτη πίτσα, όμως δεν εξέφραζε κάποια απάντηση. Έτσι, συμπλήρωσα λέγοντας ότι δεν είναι ¼, γιατί πλέον υπήρχαν κι άλλα χρωματισμένα. Τα μέτρησε και βρήκε πως είναι 8, άρα το κλάσμα είναι «δύο οχτώ». Της θύμισα να προσέχει την ονομασία και να την διορθώσει και αν θέλει μπορεί να δει τη λίστα της προηγούμενης σελίδας, όμως πρόλαβε και έδωσε την σωστή απάντηση, γράφοντας αμέσως μετά το κλάσμα 2/8.

Τότε έγραψα καθώς εκφωνούσα παράλληλα ότι ¼ + ⅝ = 2/8 + ⅝ = ../.. και την ρώτησα ποιο είναι το αποτέλεσμα. Η Γμ. είπε «7» δείχνοντας στη θέση του αριθμητή και «8» δείχνοντας στη θέση του παρονομαστή. Της ζήτησα να πει πώς λέγεται όλο μαζί και εκείνη απάντησε σωστά.

Αποφάσισα να χρησιμοποιήσω κλάσματα με μεγαλύτερους όρους και την ρώτησα τι πιστεύει ότι μπορούμε να κάνουμε αν οι όροι είναι πιο μεγάλοι και δεν μπορούμε εύκολα να ζωγραφίσουμε. Έγραψα μία πρόσθεση με 2 κλάσματα (⅗ + 2/15 = …) με μεγαλύτερους παρονομαστές (συγκριτικά με προηγούμενα κλάσματα). Της θύμισα ότι πρέπει τα κλάσματα να έχουν ίδιο παρονομαστή, δηλαδή να είναι ομώνυμα (τελικά ανέφερα τον όρο και εξήγησα εδώ ότι βγαίνει από το «όμοιος» και «όνομα» και σημαίνει ότι έχουν το ίδιο όνομα), ενώ όταν δεν έχουν ίδιο παρονομαστή λέγονται ετερώνυμα («έτερ και ώνυμα, δηλαδή διαφορετικό όνομα», κύκλωσα-υπογράμμισα τα συνθετικά των λέξεων για να τα εντοπίσει καλύτερα). Έπειτα της είπα ότι σ' αυτήν την περίπτωση το κλάσμα που έχει τον μικρό παρονομαστή πρέπει να γίνει ίδιο με τον άλλον και πως αυτό το κάνουμε με πολλαπλασιασμό. Της έδειξα τη διαδικασία καθώς εξήγησα ότι πολλαπλασιάζουμε με το 3 γιατί το 5 για να γίνει 15 πρέπει να μεγαλώσει 3 φορές, 5+5+5. Εκείνη κουνούσε καταφατικά το κεφάλι της και το μόνο που έλεγε ήταν «ααα», «χμμ…», «ναι….».

Μετά εξήγησα ότι αν «πάθει» κάτι ο παρονομαστής πρέπει να το «πάθει» και ο αριθμητής, άρα το 3 πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε και με το 3 του αριθμητή. Σημείωσα το κλάσμα που προκύπτει δίπλα στο ίσον (9/15) και της ζήτησα να συμπληρώσει τα υπόλοιπα. Το έκανε, μα επειδή φαινόταν σκεφτική την ρώτησα αν κατάλαβε και απάντησε «περίπου». Σκέφτηκα να κάνω μία ακόμη προσπάθεια γράφοντας τα κλάσματα 6/4 + ⅕ και εξηγώντας πως σ' αυτήν την περίπτωση και οι δύο παρονομαστές που είναι διαφορετικοί πρέπει να μεγαλώσουν προς τον ίδιο αριθμό, έναν αριθμό που είναι κοινός και για τους δύο και πως αυτόν τον αριθμό τον βρίσκουμε με τα πολλαπλάσια, ή μπορούμε να κάνουμε «ανταλλαγή» τους παρονομαστές. Παράλληλα με τον προφορικό λόγο σημείωσα δίπλα στο ίσον: 30/20 + 4/20 (εξηγώντας ότι 6*5=30, 4*5=20 και 1*4=4, 5*4=20) = (30+4)/20 = 34/20 (:2) = 17/10.

Φάνηκε πως το κομμάτι του πολλαπλασιασμού κάθε όρου, της πρόσθεσης των ομωνύμων που προκύπτουν και της απλοποίησης του κλάσματος τα κατάλαβε γιατί σε κάθε βήμα σταματούσα την κοιτούσα και την ρωτούσα αν συμφωνεί μ' αυτό που έγραψα, τι πρέπει να γράψουμε, και με τις εκφράσεις της έδειχνε να έχει όντως κατανοήσει (ψιθύριζε «ναι, ναι», κουνούσε το κεφάλι καταφατικά). Όμως, έδειχνε ότι κάτι την προβληματίζει όμως και την ενθάρρυνα να ρωτήσει ελεύθερα. Με ρώτησε «γιατί το 20;» και της είπα πως «είναι ο μικρότερος (έμφαση εδώ) αριθμός στον οποίο μπορούν να μεγαλώσουν και οι 2 παρονομαστές, είναι κοινός στον πολλαπλασιασμό και των 2». Για να το καταλάβει πιο πρακτικά της ζήτησα να πει τα πολλαπλάσια του 4 και του 5 καθώς έγραφα σε δύο σειρές (4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 και 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30), όπως έκανε χωρίς δυσκολίες, εκτός από τους αριθμούς 16, 24, 28 και 25, 30. Κύκλωσα το 20 και στις 2 σειρές πολλαπλασίων για να της δείξω ότι αυτό εννοούμε κοινός αριθμός, αποφεύγοντας να χρησιμοποιήσω τον όρο «ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο», γιατί δεν είχα τη δυνατότητα να της το εξηγήσω σε άλλη γλώσσα.

Στη συνέχεια εκφώνησα στην Γμ. μία πρόσθεση 3 ομώνυμων κλασμάτων και την εκτέλεσε σωστά, με έναν αρχικό δισταγμό περιμένοντας την επιβεβαίωσή μου, την οποία έδωσα με ένα κούνημα του κεφαλιού. Την ρώτησα αν έχει να με ρωτήσει κάτι άλλο και εκείνη μου ζήτησε να της θυμίσω τους όρους ομώνυμα και ετερώνυμα, προσπαθώντας να τους αναφέρει μόνη της με κάποια δυσκολία. Γενικά, αυτό που θα ήθελα να κάνω διαφορετικό σε αυτή τη διδασκαλία είναι η χρήση περισσότερων χειραπτικών υλικών και αναπαραστάσεων, τα οποία δεν είχα στη διάθεσή μου ώστε να τα κατανοήσει εννοιολογικά και βιωματικά.

Αναφορά 15η

Η Μ. και η Λ. βρέθηκαν στο τμήμα ελληνικών να μη θέλουν να συμμετάσχουν γιατί «τα ξέρουν», όπως είπαν. Έτσι, αποφάσισα να μοιράσω στα κορίτσια τα φύλλα εργασίας που είχα από τη διδασκαλία των ευρώ και της στατιστικής.

Ξεκινώντας με την πρώτη άσκηση στα νομίσματα τα κορίτσια με ρώτησαν «τι κάνουμε εδώ;» και εξήγησα ότι πρέπει να συμπληρώσουν τα κενά ώστε να φτιάξουν 1 ή 2 ευρώ. Τους είπα ότι θα χρειαστεί να έχουν υπόψη τους τη σχέση μεταξύ ευρώ και λεπτών-cents και τις ρώτησα αν θυμούνται με πόσα cents ισοδυναμεί 1 ευρώ. Ξεκίνησα να το γράφω στο φύλλο της Μ. και τότε είπαν ότι το θυμήθηκαν και έλεγαν «εκατό λεπτά!» καθώς το έγραφα. «Άρα τα 2 ευρώ;» είπα και το άφησα στη Μ. να το συμπληρώσει μόνη της, όπως και έκανε.

Τα κορίτσια δε χρειάστηκαν περαιτέρω οδηγίες στην άσκηση. Μόνο η Λ. με ρώτησε «πώς να κάνω αυτό;» δείχνοντας τα 0,50 € στο δεύτερο λουλούδι. Της είπα ότι μπορεί να το σχεδιάσει όπως είχαμε ξανακάνει και σχεδίασε ένα κέρμα των 50 λεπτών, το σύμβολο «+», ένα κέρμα των 50 λ., το σύμβολο «+» και ένα κέρμα του 1 ευρώ. Συμπλήρωσα το σύμβολο «=» και σχεδίασα ένα κέρμα χωρίς να γράψω αριθμό και εκείνη έγραψε 2 €. Την επιβράβευσα και την ρώτησα πόσα είναι τα χρήματα που

έβαλε και είπε «ένα μισό» και της είπα πάλι μπράβο και ότι αυτό το «ενάμιση» (με έμφαση) όταν το λέμε 1 ευρώ και 50 λ. μας βοηθά να το γράψουμε 1,50 €.

Έπειτα η Μ. με ρώτησε αν είναι σωστό το 120c που έγραψε στο δεύτερο λουλούδι και την επιβεβαίωσα. Επίσης, με ρώτησε πώς να κάνει τα 20c και την ρώτησα πώς σκέφτηκε το προηγούμενο. Εκείνη απάντησε γράφοντας απαλά στο θρανίο της κάθετα την πράξη 200-80 και της είπα «ακριβώς, μόνη σου βρήκες τη λύση σου». Αυτήν την σκέψη η Μ. την εξήγησε και στη φίλη της στη Γ1 τους και η Λ. έκανε κάποιες ερωτήσεις γράφοντας αριθμούς.

Στη δεύτερη άσκηση τα κορίτσια δυσκολεύτηκαν περισσότερο. Αρχικά έβλεπα την αντίδρασή τους με τις πράξεις με το νου. Η Μ. ξεκίνησε βάζοντας «✓» στο 5 και στο 3 και στη συνέχεια πήγε να γράψει μια πράξη στο θρανίο της, αλλά τότε την διέκοψα και της έδωσα την αριθμομηχανή για να την κάνει εκεί, όπως έδωσα και στην Λ. Τις ρώτησα αν ξέρουν τι είναι και πώς να την χρησιμοποιήσουν και η Μ. απάντησε «ναι», κουνώντας το κεφάλι καταφατικά.

Χωρίς να απομακρυνθώ παρατηρούσα τα κορίτσια σιωπηρά, δίνοντάς τους τον ατομικό χώρο να δοκιμάσουν την αριθμομηχανή, έχοντας υπόψη ότι σε ό,τι χρειαστούν μπορούν να με φωνάξουν. Είδα ότι η Λ. ήταν πιο προβληματισμένη και δε χρησιμοποίησε την υποδιαστολή στον αριθμό που πληκτρολόγησε. Τότε απευθύνθηκα στη Μ., η οποία είχε μόλις πληκτρολογήσει το «+» μετά από έναν δεκαδικό αριθμό. Απαντώντας στη Λ. και δείχνοντας την εικόνα 5 του φυλλαδίου, πληκτρολόγησε 36,40 και έπειτα η Λ. επενέβη πατώντας το «=».

Τα κορίτσια συζήτησαν στη Γ1 τους και φάνηκαν να διαφωνούν πάνω στο αποτέλεσμα που βρήκαν. Μου έδειξαν το αποτέλεσμα στην οθόνη της αριθμομηχανής, όμως, αντί να δώσω βάση στο αν αυτό είναι σωστό ή λάθος, υπενθύμισα τον σκοπό της άσκησης, λέγοντάς τους: «Έχω 60 ευρώ (το κύκλωσα στα φύλλα τους). 60. Αν αυτό (δείχνοντας στην οθόνη) είναι μεγαλύτερο από τα 60 ευρώ που έχω τότε δεν μπορώ να το αγοράσω… Άρα χι (κάνω Χ με τα χέρια). Αν είναι μικρότερο τότε βάζω τικ (κάνω την κίνηση νι/τικ με το δάχτυλο)». Τις ρώτησα αν καταλαβαίνουν και ανέφερα πως τα πηγαίνουν πολύ καλά, προτρέποντάς τες να συνεχίσουν. Η Λ. μου είπε «madame don’t go» και της απάντησα «εδώ είμαι».

Έπειτα, η Λ. έκανε άλλη μια προσπάθεια να συνεργαστεί με τη Μ. αλλά αυτή τη φορά εκείνη την απέρριψε και συνέχισε να πληκτρολογεί μόνη στην αριθμομηχανή της και να σκέφτεται κοιτάζοντας το φυλλάδιο και την αριθμομηχανή της. Όμοια έπραξε και η Λ., η οποία κατάλαβα ότι χάρη στη Μ. αντιλήφθηκε πώς να χρησιμοποιεί την αριθμομηχανή και ίσως να ντρεπόταν να αναφέρει πριν ότι δεν ήταν εξοικειωμένη ή ίσως δεν την έδωσα την ευκαιρία να το πει.

Ύστερα από λίγο είδα πως τα κορίτσια είχαν σχεδόν ολοκληρώσει την άσκηση. Η Λ. σημείωσε μόνο με «✓» τα προϊόντα που μπορεί να αγοράσει κάνοντας λάθος στις περιπτώσεις «2 και 3», όπου δε σημείωσε τίποτα, και «1+5». Τότε της ζήτησα να πάρει το φυλλάδιό της και να πλησιάσει μαζί μου το χαρτόνι με τις εικόνες και τις

λέξεις των εικόνων αυτών που υπήρχε στην τάξη. Της είπα: «Έχεις 60 ευρώ. Δείξε μου και πες μου τι μπορείς να αγοράσεις». Εκείνη μου έδειξε πρώτα το «φουστάν», μετά τη «τζακέτ» και το «πανταλόν» και της ζήτησα να κάνει το ίδιο σύμφωνα με τις απαντήσεις που έδωσε στο φυλλάδιο, ουσιαστικά δηλαδή επανέλαβα την οδηγία. Αμέσως όμως άλλαξα την οδηγία και μετέτρεψα αυτό που της ζήτησα σε πιο μικρές ερωτήσεις: «Μπορείς να αγοράσεις το φουστάνι και τη μπλούζα;»

Έτσι, έπρεπε να ανατρέξει στο φυλλάδιό της να βρει τους αριθμούς των εικόνων και να ελέγξει αν στην απάντησή της είχε «✓» ή όχι. Μου απάντησε «ναι», όμως για να την ενθαρρύνων να χρησιμοποιήσει περισσότερο λόγο την ρώτησα «πόσο κάνει» το καθένα. Ξεκίνησε να απαντά λέγοντας «φουστάν τριάντα δύο και πεντα…», όπου την βοήθησα να πει «πενήντα», το οποίο επανέλαβε και συμπλήρωσε «μπλούζα κάνει δώδεκα εννιακόσια εννιά». Εδώ την διόρθωσα λέγοντας «ενενήντα εννιά» και εκείνη το επανέλαβε και πάλι. Την επιβράβευσα και της είπα: «Αυτά μπορείς να τα αγοράσεις γιατί μαζί κάνουν λιγότερο από… ; Πόσα λεφτά έχεις; Πόσα ευρώ;». Η Λ. μέτρησε 6 δάχτυλα και είπε «έξι… εξήντα». Της απάντησα «60 τι;» και συμπλήρωσε «ευρώ» και την επιβράβευσα ξανά, τονίζοντας να σκεφτεί με τον ίδιο τρόπο και να ελέγξει αυτά που έχει γράψει, πατώντας ξανά στο κομπιουτεράκι.

Η ίδια διαδικασία έγινε και με τη Μ. Παρατήρησα ότι είχε σημειώσει «✓» στην περίπτωση «1+5». Της ζήτησα να μου δείξει τα ρούχα (παντελόνι, μπλούζα και το καπέλο) και κάθε φορά το έκανε λέγοντας «να το». Την ρώτησα αν αυτά μπορεί να τα αγοράσεις όλα και εκείνη είπε «ναι, όσα λεφτά έχω». Της είπα «με όσα λεφτά έχεις σωστά» και την ρώτησα πόσα είναι αυτά ακριβώς. Η Μ. δεν απαντούσε κι έτσι της θύμισα ότι το είχαμε κυκλώσει. Κοίταξε το φυλλάδιό της και απάντησε «60 ευρώ». Στη συνέχεια της ζήτησα να δείξει το φουστάνι και τη ζακέτα και έπραξε όπως προηγουμένως. Την ρώτησα και πάλι αν αυτά μπορεί να τα αγοράσει και απάντησε «ναι», όμως επειδή ήταν λάθος την ρώτησα αν είναι σίγουρη και της ζήτησα να το ελέγξει. Επίσης, της είπα πως μου φαίνονται λίγο ακριβά, πιο ακριβά από τα υπόλοιπα. Εντοπίζοντας τα ρούχα αυτά στο φυλλάδιό της είπα: «είναι το 1 και το 5, ε;» και εκείνη συμπλήρωσε «ναι, 1 φουστάν 5 ζακέτ», δείχνοντας στο καθένα. Της επισήμανα πως και τα δύο κάνουν πάνω από 30 ευρώ, δηλαδή το φουστάνι κάνει 32 και μισό και η ζακέτα κάνει 36 και 40, άρα μαζί κάνουν πάνω από 60 ευρώ που δεν τα έχουμε. Την ρώτησα αν κατάλαβε και αν θα προτιμούσε να της εξηγήσω και στα αγγλικά, όμως είπε πως κατάλαβε. Επίσης, της πρότεινα αν θέλει να το συζητήσει με τη Λ., αλλά είπε «no, Λ. fini..ε τελείωσε, finish» και τότε της είπα πως κι εκείνη τελείωσε, απλά πρέπει να διορθώσει το «1 και 5» όπου έβαλε «τικ».

Έπειτα από λίγο, τα κορίτσια είχαν διορθώσει τα λάθη τους και είχαν ήδη ξεκινήσει την επομένη άσκηση και τις πλησίασα γιατί είδα πως συνομιλούσαν. Τις επιβράβευσα και τις ρώτησα αν έχουν απορία. Δεν είχαν λύσει ακόμα, όμως η Λ. είχε γράψει 3 € = 300 c στο αντίστοιχο κελί του πίνακα. Η Μ. με ρώτησε «τι είναι αυτό;» (δείχνοντας στην τελευταία στήλη). Της ζήτησα να διαβάσει το όνομα της στήλης με τα έντονα γράμματα:
Μ.: Πα-ί-ρνω ρε..ρέστα… ρέστα;

ΕΕ: Παίρνω… δες… α και ι… (κύκλωσα) το λέμε ε, μαζί ε. Ρέστα είναι change. The money I take back when I pay. Δηλαδή (υπογράμμισα το ρέστα/change στο φυλλάδιο) όταν δεν πληρώνω ακριβώς (έκανα κίνηση ότι πληρώνω από την τσέπη μου) τότε μου δίνουν ρέστα (έκανα κίνηση ότι παίρνω χρήματα και τα βάζω στην τσέπη μου). Δίνω 3 ευρώ για ένα… (έδειξα στο 3 ευρώ)
Λ. και Μ. (μαζί): Παγωτό!
ΕΕ: Σωστά. Αλλά δεν κάνει 3 ευρώ. Κάνει… ; (δείχνοντας στη διπλανή στήλη και κοιτώντας τη Λ.)
Λ: 2 ευρώ και 10 cents.
ΕΕ: Μπράβο! Άρα θέλω ρέστα. Πόσα;
Λ. και Μ. (μαζί): Αααα!
Μ.: Ξέρω! Εννια… ενανήντα λεπτά!
ΕΕ: Ναι, 90 λεπτά! Και για την τσάντα;
Μ.: (αφού σκέφτηκε λίγο) 10 ευρώ!
Την επιβράβευσα λεκτικά και την ρώτησα τι έχει κάτω από την τσάντα. Μου είπε «this», έδειξε την κασετίνα της και πρόσθεσε «για μολύβι…». Της είπα πως είναι σωστό ότι το χρησιμοποιούμε για να βάζουμε μέσα τα μολύβια, τη σβήστρα, την ξύστρα μας, τις μπογιές και ό,τι άλλο θέλουμε να πάρουμε μαζί μας στο σχολείο και τόνισα ότι το λέμε:
ΕΕ: Κα……. σε….
Λ.: Κασετίνα!
Την επιβράβευσα και ζήτησα να σκεφτούν την περίπτωση αυτή.
Διαπίστωσα όμως έπειτα από λίγο ότι και τα δύο κορίτσια προσπέρασαν την κασετίνα και πήγαν στο laptop. Εκεί η Μ. ακολούθησε τον τρόπο της Λ. γράφοντας το σύνολο του ποσού (κόστους) στο ίδιο κελί (600€). Τότε παρατήρησα πως ενώ η Λ. μιλούσε στη Μ. (Γ1 τους) εκείνη μετρούσε τα δάχτυλά της και μου είπε «4;». Την ρώτησα τι εννοεί και ξαναείπε «4 ευρώ;», το οποίο αμέσως διόρθωσε σε «40 ευρώ;». Της ζήτησα να εξηγήσει καλύτερα τι εννοεί και μου έδειξε το κενό κελί της τέταρτης στήλης λέγοντας «this… laptop ρέστα». Της είπα πως το βρήκε σωστά και ξεκίνησε να το γράφει. Ταυτόχρονα συνομιλούσαμε:
ΕΕ: Αν δώσω… (δείχνοντας στο 600 €)
Μ.: Εξηκο… Εξήντα…
ΕΕ: Εξα….
Μ.: Εξακόσια.
ΕΕ: Εξακόσια (με θετικό νεύμα) …
Λ. και Μ. (μαζί): Ευρώ
ΕΕ: 600 ευρώ, ναι, για ένα laptop που κοστίζει …. (χωρίς να δείχνω)
Λ. και Μ. (μαζί): Πεντεκόσια εξήντα ευρώ.
ΕΕ: Πεντακόσια εξήντα ευρώ, τότε θα πάρω…
Μ.: Ρέστα.
Λ.: 40 ευρώ
ΕΕ: Ναι!
Λ.: Ευρώ (δείχνοντας στη Μ. να διορθώσω το c που έγραψε σε €)

Η Μ. έπραξε όπως της υπέδειξε αμέσως, ενώ η Λ. εξέφρασε τη δυσκολία της για το παραπάνω («Madame, this δεν μπορώ…», δείχνοντας την κασετίνα). Της είπα ότι θα σκεφτεί με τον ίδιο τρόπο και ρώτησα τι έκαναν για να βρουν τα άλλα. Η Μ. είπε πως μέτρησε 1,2,3,4 και επειδή κατάλαβα πως εννοούσε πρόσθεση (ότι ανέβηκε) της εξήγησα πως η μέτρηση που έκανε για να βρει τα ρέστα είναι ουσιαστικά μια πράξη. Την ρώτησα αν ξέρει ποια πράξη και εκείνη είπε πως έκανε όπως παραπάνω στην τσάντα (δείχνοντας την τσάντα). Τότε κατάλαβα πως η τσάντα την βοήθησε γιατί εκεί οι αριθμοί ήταν μικρότεροι και με διαφορά 10 €, όπου μέτρησε εύκολα ανά 10 για να βρει την απάντηση 40 € στο laptop. Έπειτα συμπλήρωσα ότι: «Αυτό που κάνουμε ουσιαστικά για να βρούμε τα ρέστα είναι αφαίρεση. Βγάζουμε. Είναι αυτή η πράξη (γράφοντας στα φυλλάδιά τους κάθετα την πράξη 600-560)». Η Λ. έδειξε την πράξη που έγραψα, με ρώτησε «αφαίρεση;» και της απάντησα: «Ναι. Αφαίρεση. Όχι πρόσθεση… (δείχνοντας παραπάνω στο σχήμα που έκανε). Πρόσθεση (δείχνοντας στο «+»), αφαίρεση (δείχνοντας στο «–»)».

Έπειτα άφησα τα κορίτσια να σκεφτούν. Κάθε μία δούλευε ατομικά. Η Λ. σημείωσε 7 € στο κελί «5€ 2€». Η Μ. φαινόταν προβληματισμένη και είδα πως είχε γράψει 1,50 € στα ρέστα της κασετίνας. Τότε, διάλεξα μερικά ψεύτικα νομίσματα και τους τα έδωσα (συμπεριλάμβαναν 1€, 5€, 2€, 50c, 10c, 1c, 2c), ώστε να μην αισθάνονται αρνητικά απέναντι σ' αυτό που κάνουν και προσποιήθηκα ότι είμαι πελάτης σε μαγαζί και αγοράζω την κασετίνα της Μ. που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως. Μάλιστα, κόλλησα ένα χαρτάκι επάνω της και έγραψα την τιμή της (όπως αναγραφόταν στον πίνακα της άσκησης).

Απευθύνθηκα στη Μ., ζητώντας της να μου δείξει πόσα χρήματα πρέπει να δώσω από το πορτοφόλι μου για να αγοράσω την κασετίνα. Εκείνη είπε 8 €, όμως μου έδωσε 7. Η Λ. επενέβη, λέγοντας «7» και επανέλαβα: «7€, 5 και 2 μου έδωσες που κάνουν 7». Έπειτα ρώτησα πόσο κάνει η κασετίνα και τα κορίτσια απάντησαν σχεδόν μαζί «6€ και 50 λεπτά». Τις επιβράβευσα λεκτικά και τις ρώτησα «πόσα ρέστα θα πάρω;», συμπληρώνοντας αμέσως ότι «πρέπει να πάρω ρέστα γιατί έδωσα 7 και κάνει εξίμιση, έδωσα περισσότερα απ' όσα κοστίζει». Όσο έδειχναν να είναι ακόμα προβληματισμένες συνέχιζα να προσπαθώ να εξηγήσω, αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας τα αγγλικά «I give seven, εφτά. It costs έξι και μισό. How much change, how much ρέστα θα πάρω;».

Τότε η Λ. φάνηκε να καταλαβαίνει («ααα!») και ξεκίνησε να μιλά στη Μ. στη μητρική τους. Την ρώτησα αν θέλει να μου πει και μου είπε «yes, I understand» και μου έδωσε 1 κέρμα των 50 λ. Της ζήτησα να μου εξηγήσει περισσότερο και μου είπε «50 cents», οπότε την ρώτησα αν είναι σίγουρη. Έλεγξε το κέρμα, όπως και η Μ. και κούνησαν καταφατικά το κεφάλι τους, επαναλαμβάνοντας σχεδόν μαζί «50 λεπτά». Η Λ. έγραψε σωστά 50c, οπότε απευθύνθηκα στη Μ.: «Εσύ έγραψες 1 € και 50 λεπτά. Όμως αυτό είναι παραπάνω από όσα χρειάζομαι, έτσι; If you give me 1 € και 50 λεπτά, I give you back 1 € because I need 50 λεπτά <u>μόνο</u>. Οπότε… τα 50 λεπτά μπορείς να τα γράψεις όπως η Λ., ή … (σβήνοντας το 1 από το 1,50 που έγραψε και γράφοντας 0) έτσι. Με το μηδέν μπροστά και κόμμα. Κατάλαβες;». Η Μ. με ρώτησε

«γιατί;» και της εξήγησα πως και οι δύο τρόποι γραφής δείχνουν το ίδιο, δηλαδή τα 50 λ. ή αλλιώς μισό ευρώ και πως έτσι τώρα μπορούμε να ελέγξουμε με πρόσθεση ότι 50 λ. + 6 ευρώ και 50 λ κάνουν 7 ευρώ, δηλαδή όσα ακριβώς έδωσα.

Ρώτησα και τα δύο κορίτσια αν κατάλαβαν και μου απάντησαν με καταφατικό νεύμα του κεφαλιού. Τις ρώτησα πώς τους φάνηκαν, αν τις άρεσαν, αν είναι εύκολα ή δύσκολα και μου είπαν πως θέλουν κι άλλο. «Κι άλλα μαθηματικά;», τις ρώτησα και η Μ. απάντησε «ναι, όχι άλφα βήτα (δείχνοντας στον πίνακα)». Έτσι, μετά το διάλειμμα συνεχίσαμε με το φύλλο εργασίας της στατιστικής και των γραφημάτων, από τη διδασκαλία των οποίων τα κορίτσια έλειπαν.

Για την 1η άσκηση στο φύλλο εργασίας έδωσα στα κορίτσια ένα σκίτσο με διάφορα σχήματα στο ίδιο χρώμα ανά κατηγορία και το τοποθέτησα ανάμεσά τους. Ανέφερα προφορικά την οδηγία (να μετρήσουν το πλήθος κάθε σχήματος και να το καταγράψουν) αφού πρώτα συζητήσαμε για το τι βλέπουν (τα σχήματα τρίγωνο, τετράγωνο, κύκλος και τα χρώματα πορτοκαλί κλπ). Τα κορίτσια έκαναν την άσκηση συνεργατικά. Μετρούσαν μαζί, πηγαίνοντας τα δάχτυλα πάνω από κάθε όμοιο σχήμα, σιγανά και στη Γ1 τους, αλλά στο τέλος κάθε μέτρησης έλεγαν το σύνολο στα ελληνικά (ήμουν λίγο απομακρυσμένη και παρατηρούσα) δείχνοντας (μερικές φορές) με τα δάχτυλά τους και με αυτόν τον τρόπο βρήκαν το πλήθος κάθε σχήματος.

Τις πλησίασα και τις ρώτησα αν μπορούν να διαβάσουν τα διπλανά πλαίσια. Η Μ. τα πήγε καλύτερα στην αναγνωστική της προσπάθεια, όμως η Λ. τα πήγε καλύτερα στην κατανόηση και τη λύση. Έτσι, όταν η Μ. διάβασε (με τη βοήθειά μου) «τα περισσότερα είναι», η Λ. κατάλαβε και της μίλησε στη Γ1 τους. Τότε κοίταξαν τις προηγούμενες απαντήσεις τους και είπαν «τρίγωνο», απάντηση την οποία επιβεβαίωσα και ανέφερα πως πρέπει επομένως να χρωματίσουν το τρίγωνο στο πρώτο πλαίσιο.

Στο επόμενο πλαίσιο τόνισα πως πρέπει να βρουν τα λιγότερα, δηλαδή το αντίθετο από πριν. Εκεί τα κορίτσια σημείωσαν πάλι το τρίγωνο, όμως προχωρώντας στο επόμενο πλαίσιο κατάλαβαν ότι κάτι δεν πήγε καλά. Έτσι, όταν με ρώτησαν «τι είναι this?», δείχνοντας στο δεύτερο πλαίσιο, εξήγησα τη σχέση «τα περισσότερα-τα λιγότερα», χρησιμοποιώντας τις αγγλικές μεταφράσεις. Τότε η Λ. σημείωσε 5 μέσα στον κύκλο, όμως μετά γραμμοσκίασε το τετράγωνο. Δεν ήθελα ακόμη να επέμβω, κι έτσι έδωσα τον χώρο να δοκιμάσουν, να σκεφτούν και ακόμη και να κάνουν λάθη.

Η Λ. προχώρησε στο τρίτο πλαίσιο γράφοντας μέσα σε κάθε σχήμα το πλήθος του και υπολογίζοντας το άθροισμα (με τα δάχτυλα). Η Μ. υπολόγισε πρώτα το άθροισμα χωρίς να σημειώσει κάτι. Γραμμοσκίασε το τρίγωνο στο τρίτο πλαίσιο και μετά το έσβησε. Για να τη βοηθήσω οπτικά, ζήτησα από τα κορίτσια να προχωρήσουν στην επόμενη άσκηση και να βάλουν 1 κουκκίδα σε κάθε (νοητή) στήλη για κάθε σχήμα, ανάλογα με το πλήθος που βρήκαν. Ήλπιζα αυτό να βοηθήσει οπτικά ιδίως τη Μ., συγκρίνοντας το τρίγωνο με το τετράγωνο που είναι τα περισσότερα και τα λιγότερα αντίστοιχα, αλλά οι κουκκίδες των κοριτσιών ήταν άνισες και σε άνισες αποστάσεις

μεταξύ τους. Παρόλα αυτά προσπάθησα να της δείξω με το σχήμα της, χρησιμοποιώντας τον υπολογισμό που έκανε για να βάλει τόσες κουκκίδες. Μείωσα τα σχήματα προς σύγκριση σε δύο, το τρίγωνο και το τετράγωνο που είναι δίπλα δίπλα και έχουν και το περισσότερο ενδιαφέρον. Την βοήθησα με ερωτήσεις να αντιληφθεί ότι στο σχήμα, στον πίνακα του φυλλαδίου και στο αρχικό σκίτσο φαίνεται ότι υπάρχουν 8 τρίγωνα και 4 τετράγωνα και, επομένως, τα τετράγωνα είναι τα λιγότερα. Τότε εκείνη διόρθωσε το πλαίσιο και γραμμοσκίασε το τετράγωνο.

Έπειτα τόνισα ότι το σχέδιο που έκαναν με τις τελίτσες λέγεται σημειόγραμμα επειδή «γράφω σημεία-σημάδια» ή στα αγγλικά «dot plot» επειδή «γράφω dots» (δείχνοντας μια κουκκίδα)». Επίσης ανέφερα ότι αυτό μας βοηθά να βλέπουμε καλύτερα τα δεδομένα, να τα επεξεργαζόμαστε και να βγάζουμε συμπεράσματα όπως αυτά στα πλαίσια.

Για την επόμενη άσκηση έδωσα το εικονόγραμμα με τα ΜΜΜ. Εξήγησα πώς λέγεται αυτό και γιατί (επειδή έχει εικόνες) και από τι αποτελείται (τίτλο, δεδομένα, τιμές) χρησιμοποιώντας δεικτικές χειρονομίες και συζητήσαμε για το τι βλέπουν (αεροπλάνο, πλοίο, ποδήλατο, αυτοκίνητο). Ζήτησα να πουν ποιο έχει τα περισσότερα και ποιο τα λιγότερα και το έκαναν χωρίς δυσκολία. Έπειτα, ενώ ξεκινούσα να δίνω την οδηγία για την άσκηση, η Λ. έκανε ήδη την αντιστοίχηση του 1 με το ποδήλατο. Τις ρώτησα αν κατάλαβαν και ζήτησα από τη Λ. να εξηγήσει στη Μ. στα αραβικά. Ταυτόχρονα, η Μ. σημείωσε το πλήθος κάθε μέσου μεταφοράς, τακτική που ακολούθησε και η Μ. Έπειτα, κάθε κορίτσι ατομικά την αντιστοίχιση. Ζήτησα να βρουν το σύνολο και να το γράψουν στην κενή γραμμή (υπογράμμισα το «συνολικά»). Τότε τα κορίτσια χρησιμοποίησαν τα δάχτυλά τους μετρώντας στην ελληνική γλώσσα ανά ένα και κατέληξαν χωρίς λάθος στον αριθμό 24 τον οποίο έγραψαν.

Στη συνέχεια έδειξα στα κορίτσια το διπλανό διάγραμμα πίτας και ζήτησα να το χρωματίσουν αφού δουν τη σωστή σειρά και να βάλουν το ανάλογο χρώμα στο κουτάκι δίπλα σε κάθε λέξη στο υπόμνημα. Η Λ. και πάλι κατανόησε πιο γρήγορα και ξεκίνησε να χρωματίζει. Με ρώτησε «ποιο;» και την ρώτησα «ποιο να βάψεις; Ποιο θες να βάψεις;» μου απάντησε «this… Ποδήλατο». Της θύμισα ότι το ποδήλατο είναι το νούμερο 1 (δείχνοντας στην αντιστοίχιση) και επομένως θα έχει το μεγαλύτερο κομμάτι στην πίτα. Της ζήτησα να βρει το μεγαλύτερο κομμάτι και εκείνη έδειξε το κομμάτι 27%. Της επισήμανα ότι είναι κοντά και ότι μπορεί να συμβουλευτεί τους αριθμούς που αναγράφονται σε κάθε κομμάτι (χωρίς να αναφέρω την έννοια ποσοστά). Της έδειξα το κομμάτι 31% και συγκριτικά με το 27% την ρώτησα ποιο είναι το μεγαλύτερο και ποιο πιστεύει ότι αντιστοιχεί στο ποδήλατο. Τότε μου έδειξε το σωστό κομμάτι και το χρωμάτισε. Για την ολοκλήρωση της άσκησης δε χρειάστηκε βοήθεια, παρά μόνο μια τελική επιβεβαίωση και έλεγχο.

Η Μ. χρειάστηκε ανάλογη καθοδήγηση σε κάθε βήμα για κάθε κομμάτι. Η Λ. προσπάθησε να της εξηγήσει, όμως εκείνη την αγνόησε. Ως τότε, η Μ. είχε χρωματίσει τα δύο μεγαλύτερα κομμάτια χωρίς το υπόμνημα και της ζήτησα να

χρωματίσει και τα υπόλοιπα. Έπειτα, χρωματίσαμε μαζί το υπόμνημα. Της εξήγησα ότι εκεί που έβαλε το κόκκινο χρώμα είναι το μεγαλύτερο κομμάτι, δηλαδή το νούμερο 1. Την ρώτησα ποιο είναι το νούμερο 1 στη σειρά προτίμησης και εκείνη απάντησε «ποδήλατο». Έτσι, της έδειξα ότι το ίδιο χρώμα με το κομμάτι πρέπει να βάλει και στο υπόμνημα στη λέξη ποδήλατο. Της ζήτησα να βρει πού γράφει ποδήλατο και μου έδειξε την απάντηση. Έπειτα, την ρώτησα ποιο είναι το επόμενο μεγαλύτερο κομμάτι και εκείνη έδειξε το κομμάτι 23%. Της είπα ότι αυτό είναι το αμέσως επόμενο, το τρίτο στη σειρά και τόνισα ότι πρώτα είναι το 31 και μετά το 27, δηλαδή αυτό που έχει χρωματίσει μαύρο. Την ρώτησα ποιο πρέπει να αντιστοιχίσει εδώ και μου είπε «νούμερο δύο;» της είπα ναι και απάντησε «αεροπλάνο». Το βρήκε και το χρωμάτισε μαύρο. Το ίδιο έγινε και για τα υπόλοιπα. Για το τελευταίο, μόλις το βρήκε στο υπόμνημα με ρώτησε «πλοίο; Εδώ είναι πλοίο;» (δηλαδή αν εκεί γράφει πλοίο) και της εξήγησα πως «ναι, έτσι γράφεται, με όμικρον γιώτα. Όμικρον και γιώτα κάνουν "ι"».

Αναφορά 16η

Τα κορίτσια Μ., Λ. και Α. ήθελαν πάλι να κάνουν μαθηματικά και επειδή είχα παράλληλα το τμήμα των αρχάριων ελληνικών, ετοίμασα μερικά φυλλάδια με πράξεις, γιατί είχα παρατηρήσει ότι χρησιμοποιούσαν πολύ τα δάχτυλα άλλες φορές και θεώρησα ότι είναι καλό να εξασκηθούν για να ανακαλύψουν τρόπους υπολογισμού (στρατηγικές) γρηγορότερα και νοερά. Σκόπιμα έγραψα προσθέσεις και αφαιρέσεις με τους ίδιους αριθμούς στην ίδια σειρά ώστε να δω τι μπορούν να ανακαλύψουν πάνω στη σχέση των πράξεων. Έπειτα σχεδίασα πρόχειρες αριθμογραμμές με μερικά κενά ώστε να τοποθετήσουν αριθμούς στα κατάλληλα σημεία και, τέλος, διάφορους πολλαπλασιασμούς, κυρίως απλούς (γινόμενα 0-10) και κάποιους εκτός της δεκάδας (11, 20), επίσης σκόπιμα (για πρόκληση και διερεύνηση).

Η Λ. χρησιμοποιούσε τα δάχτυλά της για όλες τις πράξεις. Στην πρόσθεση και την αφαίρεση εκφραζόταν στα ελληνικά, ενώ στον πολλαπλασιασμό στα αραβικά. Τις πράξεις με το 0 τις έκανε όλες νοερά. Στην αριθμογραμμή επέλεξε να σημειώσει πρώτα όλους τους αριθμούς από το 1-9 και έπειτα να σβήσει τους αριθμούς που δε χρειαζόταν σύμφωνα με την οδηγία στην εκφώνηση. Η Λ. είναι η μόνη που δεν έκανε λάθος στην πράξη 2Χ11 (την ρώτησα πώς το υπολόγισε και είπε ως 11+11) και γενικά στα τελικά αποτελέσματα που έγραφε από τον πρώτο της υπολογισμό.

Η Μ. έκανε όλες τις πράξεις νοερά. Στην αριθμογραμμή σημείωσε τους αριθμούς που χρειαζόταν και έπειτα συμπλήρωσε και τους υπόλοιπους θεωρώντας ότι η αριθμογραμμή πρέπει να είναι ολοκληρωμένη και συμπληρωμένη. Στον πολλαπλασιασμό «10x8» με ρώτησε αν το αποτέλεσμα «08» που έγραψε είναι σωστό. Της ζήτησα να το διαβάσει και μου είπε «10 και 8», οπότε της εξήγησα ότι το σύμβολο «x» (δείχνοντάς το) λέγεται «επί» και της θύμισα ότι το «και» είναι το σύμβολο «+» της πρόσθεσης. Την ρώτησα αν ξέρει το μείον ή αλλιώς βγάζω και μου έδειξε τις αφαιρέσεις που έκανε παραπάνω. Επέστρεψα στο επί και επανέλαβα «αυτό

είναι το επί» δίνοντάς της ένα παράδειγμα στο ακριβώς από πάνω γινόμενο όπου έγραφε «6 επί 6 (αργά) ή αλλιώς 6 φορές το 6, ίσον… ; τριάντα…;», την παρότρυνα να απαντήσει, όπως και έκανε λέγοντας «έξι». Συνέχισα δείχνοντας το 10x8 και η Μ. είπε «10 … επί … 8 …», οπότε την ενθάρρυνα επιβεβαιώνοντας τα λόγια της και ρωτώντας την «πόσο κάνει» αυτή η πράξη που είπε. Η Μ. απάντησε «ογδόντα», με αποτέλεσμα να καταλάβει εύκολα ότι το 80 που είπε δεν ταιριάζει με τον αριθμό που έγραψε. Αμέσως, έλεγξε το γινόμενο που έγραψε και το διόρθωσε από 08 σε 80.

Το λάθος αυτό της Μ. δεν το αποδίδω σε λάθος υπολογισμό, γιατί όπως φάνηκε μπορεί να το υπολογίσει, ούτε σε λάθος γραφή του αριθμού 80 από έλλειψη γνώσης, αλλά στη συνηθισμένη γραφή της από τη μητρική γλώσσα τα αραβικά από τα δεξιά προς τα αριστερά. Έτσι, προσπαθώντας να γράψει 80 βρέθηκε σε σύγχυση αραβικής και μαθηματικής γραφής συμβόλων.

Στον πολλαπλασιασμό 2x11 η Μ. ζήτησε τη βοήθειά μου. Της ζήτησα πάλι να το διαβάσει και το έκανε σωστά («2 επί 11»). Με ρώτησε «πώς κάνω;» και της απάντησα «όπως έκανες και τα άλλα». Τότε η Λ. την άκουσε και της είπε κάτι στα αραβικά. Η Μ. απάντησε «αα!» και κάτι ακόμα στα αραβικά και έμεινε λίγο σκεφτική και έγραψε 24. Την ρώτησα τι σκέφτηκε και είπε «11, 12, 13 …. 22», δείχνοντας με τα δάχτυλα. Τότε η Λ. που είχε τελειώσει νωρίτερα και με είχε βοηθήσει στον ρόλο της δασκάλας στον έλεγχο των απαντήσεων της Α., έκανε το ίδιο και στην περίπτωση της Μ. και έδειξε τον αριθμό 16 στο γινόμενο 7x2 και τον αριθμό 24 στο γινόμενο 2x11. Η Μ. όμως δεν κατάλαβε πως σκέφτηκε ως αποτέλεσμα το 22 και αντ' αυτού έγραψε 24 κι έτσι της το εξήγησα.

Η Α. έκανε τις προσθαφαιρέσεις με το νου και τους πολλαπλασιασμούς με τα δάχτυλα. Έκανε κάποια λάθη στη γραφή των αριθμητικών συμβόλων (στο 6, 9 και 3). Στην αριθμογραμμή ακολούθησε την τεχνική της Λ., γράφοντας όλους τους αριθμούς, παραλείποντας όμως να σβήσει τους περιττούς. Στα γινόμενα που δυσκολεύτηκε ζητούσε τη βοήθεια της Μ. (στη Γ1 τους) η οποία δεν της την έδινε και έτσι η Α. έγραφε ό,τι είχε γράψει η Μ. Όταν παρατήρησα το γεγονός αποφάσισα να μην επέμβω άμεσα, για να μην προκαλέσω αρνητική (επιθετική) συμπεριφορά εκ μέρους της Α., όπως άλλες φορές. Έτσι, μόλις η Α. ολοκλήρωσε και η Λ. έπαιζε τον ρόλο της δασκάλας κατά τον έλεγχο, ρώτησα την Α. πόσο κάνει 7x2, πριν φτάσουμε εκεί και εκείνη μου απάντησε μετά από λίγο «14». Τότε της είπα πως από τη στιγμή που μπορεί να το κάνει μόνη της, να προσπαθεί πάντα, ασχέτως αν το βρει σωστά ή λάθος, τουλάχιστον θα είναι δικό της σωστό ή δικό της λάθος και δε χρειάζεται να γράφει ό,τι γράφουν οι άλλοι γιατί τότε θα κάνει το ίδιο λάθος. Πολλά παιδιά μεταξύ των οποίων και η Μ. και Λ. με άκουγαν και φάνηκαν να αισθάνονται αυτά που έλεγα. Η Α. συμφώνησε και είπε πως δεν ήξερε πώς να τα κάνει αλλιώς και της απάντησα πως είμαι σίγουρη ότι μπορεί γιατί το απέδειξε και σε κάθε περίπτωση θα μπορούσε να ζητήσει βοήθεια από εμένα ή ευγενικά από κάποιον άλλο συμμαθητή της.

Ο Ρ. ήρθε αργότερα και θεώρησε πως πρέπει να γράψει τις πράξεις κάθετα (γιατί ξεκίνησε να τις γράφει έτσι στο ίδιο φύλλο κάτω από κάθε πράξη). Μάλιστα, σε δύο

από τις 3 περιπτώσεις (μάλλον κατάλαβε πόσο εύκολες είναι νοερά) δεν έγραψε την πράξη κάθετα, αλλά έγραψε μόνο το αποτέλεσμα κάτω από την οριζόντια πράξη. Του εξήγησα πως βρήκε τα αθροίσματα σωστά αλλά το αποτέλεσμα πρέπει να το γράψει δίπλα στο ίσον. Ο Ρ. έκανε τότε τους υπόλοιπους υπολογισμούς με αυτόν τον τρόπο, καταμετρώντας στα ελληνικά νοερά ή με τα δάχτυλά του για να ελέγξει κάποια αποτελέσματα που είχε βρει στις αφαιρέσεις κάτω από τη 10άδα (στο 8-4, 9-9, 10-7).

Στις πράξεις 20+16, 30+19 και 30-19 τον ρώτησα πώς τα σκέφτηκε γιατί παρατήρησα κάτι ενδιαφέρον. Στην πρόσθεση 20+16 μου είπε πως έκανε όπως στην αφαίρεση 20-16 δείχνοντάς την, όπου είχε βρει αποτέλεσμα 4. Αυτό δεν ήταν αρκετά σαφής εξήγηση κατά τη γνώμη μου, αλλά σκέφτηκα να το διερευνήσω προχωρώντας παρακάτω μήπως δώσει καλύτερη εξήγηση εκεί. Στην πρόσθεση 30+19, επειδή παρατήρησα ότι έγραψε 50 που είναι πολύ κοντά στο 49, τον ρώτησα αν το υπολόγισε με τα δάχτυλα ή με το μυαλό και μου είπε «όχι, έκανα 20» δείχνοντας το 19. Τότε του εξήγησα ότι είναι πολύ καλός αυτός ο τρόπος που σκέφτηκε και τον ρώτησε πού το έμαθε και μου απάντησε «Αφγανιστάν, σχολείο». Τότε του είπα πως στο σχολείο εκεί σίγουρα θα τους έμαθαν πως αφού το κάνουν έτσι θα πρέπει να αφαιρέσουν/βγάλουν 1 μετά για να ισχύει η ισότητα («Αν το διαβάσουμε έτσι όπως είναι τώρα αυτό λέει ότι 30+19 είναι ίσο με 50. Δεν είναι ίσο όμως. Κάτι ξέχασες…») και τότε αφαίρεσε 1 από το 50 λέγοντας «αα, ναι, ξέρω, ξέρω» και έγραψε το αποτέλεσμα 49.

Τον επιβράβευσα για τον τρόπο σκέψης του και του ζήτησα να κάνει το ίδιο και στο 30-19 όπου είχε γράψει υπόλοιπο 20. Εκεί τον ρώτησα πάλι πώς το σκέφτηκε και μου εξήγησε πως θεώρησε το 19 σαν 20. Του εξήγησα πως αν το θεώρησε έτσι, τότε έπρεπε να γράψει αποτέλεσμα 10. Για να καταλάβει οπτικά-συμβολικά αυτό που του έλεγα προφορικά, έγραψα από κάτω 30-20=10 επαναλαμβάνοντας με παρόμοιο τρόπο τα προηγούμενα λόγια μου. Τότε τον είδα προβληματισμένο και έτοιμο να τα παρατήσει αφού πλησίαζαν οι φίλοι του από την άλλη τάξη κρατώντας μία μπάλα. Προσπάθησα να τον κρατήσω συγκεντρωμένο, δείχνοντάς του τον τρόπο υπολογισμού με βάση τη στρατηγική του ώστε να το ξεκαθαρίσει στο μυαλό του. Έγραψα 30-19=30-20+1= , λέγοντάς του ταυτόχρονα ότι πρέπει να βγάλω 20 και να προσθέσω 1 για να είναι ίσο με 19, σύμφωνα με αυτά που έλεγε όπως έκαναν στο σχολείο στο Αφγανιστάν. Τότε εκείνος φάνηκε ενθουσιασμένος και φώναζε «αα, ναι, ξέρω, έτσι!» καθώς σημείωνε 11 στο αποτέλεσμα. Τον επιβράβευσα για την πολύ καλή προσπάθειά του.

Λίγο αργότερα μετά το διάλειμμά του, τον προσέγγισα γιατί κατάλαβα πως στο 20+16 δεν είχε στην πραγματικότητα σχέση η αφαίρεση 20-16=4 όπως μου είχε πει (μάλλον παρατήρησε τη σχέση πρόσθεσης και αφαίρεσης αφού τις υπολόγισε) αλλά φαντάστηκα πως το υπολόγισε όπως τα υπόλοιπα (το 30+19 και 30-19), θεωρώντας το 16 ως 20 (η κοντινή στρογγυλοποίηση), καταλήγοντας στο 20+20=40 και παραλείποντας την αφαίρεση 4 μονάδων. Τον ρώτησα πάλι πώς το σκέφτηκε και μου είπε πως δε θυμόταν. Τότε τον ρώτησα αν το έκανε και αυτό όπως στο σχολείο στο Αφγανιστάν και μου είπε «ναι». Του ζήτησα να το ελέγξει και το κοιτούσε αρκετά

ώσπου σημείωσε το σύμβολο «–» και με ρώτησε «4;» και του έγνεψα καταφατικά. Έπειτα σημείωσε το «=» και έγραψε «3», μέτρησε με τα δάχτυλά του (κατάλαβα ότι θεώρησε το 40 ως 10 γιατί μετρούσε αντίστροφα στα ελληνικά «9, 8, … 6») και έγραψε «6». Τον ρώτησα πόσο βρήκε τελικά, μου είπε «26» και του θύμισα πως «είναι 10, 20 …..;» (δείχνοντας 1 και 2 δάχτυλα) και συμπλήρωσε «30», οπότε τον παρότρυνα να διορθώσει και να πει 36. Τον επιβράβευσα και πάλι και του είπα πως θα συνεχίσουμε την επόμενη φορά.

Μετά το διάλειμμα συνέχισα τα μαθηματικά με περισσότερα παιδιά. Ξεκίνησα γράφοντας τους αριθμούς 1-10 στον πίνακα, κυρίως για υπενθύμιση, επανάληψη και εμπέδωση γραφής και προφοράς, μιας και οι περισσότεροι τους ήξεραν προφορικά. Για την εξάσκηση στη γραφή τους ζητούσα εναλλάξ να γράφουν δίπλα σε κάθε αριθμό την αντίστοιχη λέξη. Από τα παιδιά που το έκαναν, η Αν. ανταποκρίθηκε γρηγορότερα γράφοντας τις λέξεις 3 και 4, ενώ η Μαρ. δυσκολότερα, γράφοντας τις λέξεις 9 και 10. Έπειτα, έγραψα το 0 και τη λέξη μηδέν πάνω από το 1-ένα. Μετά, έσβησα τα αριθμητικά σύμβολα και τα έγραψα άτακτα, με τυχαία σειρά και ζήτησα από τα υπόλοιπα παιδιά που δεν είχαν έρθει ως τώρα στον πίνακα να αντιστοιχίσουν τη λέξη με τον αριθμό. Εδώ συμμετείχαν τα κορίτσια Μ., Λ., Φ. και Α., τα οποία δεν αντιμετώπισαν καμία δυσκολία. Τα παιδιά έγραφαν παράλληλα και στο τετράδιό τους. Οι έμπειροι μαθητές βοηθούσαν τους υπόλοιπους όπου χρειαζόταν στη γραφή της προφοράς της λέξης στη μητρική τους (π.χ. η Φ. την Αν., η Λ. την Μαρ. και την Χρ.).

Στη συνέχεια, έγραψα τους αριθμούς 11 και 12. Κάποια παιδιά (όπως και πριν) ήξεραν την προφορά τους. Έτσι, έγραψα τις λέξεις και προχώρησα στους αριθμούς 13-19, εξηγώντας πώς προκύπτουν (10+3, 10+4 κλπ και κατ' αντιστοιχία λέμε δέκα+τρία δηλαδή δεκατρία κλπ), χωρίς να γράφω τις λέξεις στον πίνακα, αλλά τα παιδιά το έκαναν ατομικά ως ανακαλυπτική διαδικασία. Περνούσα από τα θρανία και έβλεπα πως αντεπεξέρχονται σε αυτό το έργο και συμπέρανα πως δεν αντιμετώπισαν κανένα πρόβλημα, πέρα από το γράμμα ξ και τον τονισμό (τόνιζαν πάντα το ι – ίσως επιρροή από αγγλικά, ή τόνιζαν μόνο το ι και κανένα άλλο γράμμα). Εδώ το έκανα αυτό γιατί ήξερα πως θα χρειαστεί εξάσκηση λόγω του διαφορετικού τρόπου λεκτικής αρίθμησης στη μητρική τους γλώσσα, όπου γράφουν π.χ. 13 και διαβάζουν ως 3+10, δηλαδή αντίθετα από εμάς. Αυτό δεν προκάλεσε προς το παρόν κάποια εμφανή σύγχυση. Μάλιστα, ο Αχ. προχώρησε και έγραψε και το 20 ως «ίκοσι» και του εξήγησα πως είναι πολύ κοντά αλλά υπάρχει ως «ι» και το «ει». Το έγραψα στον πίνακα για να το δουν όλοι (20 – είκοσι).

Έπειτα, έγραψα 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 και υπογράμμισα τα κοινά σημεία στο πρόθημα (τρία-τριάντα, τέσσερα-σαράντα κλπ) και κύκλωσα τις κοινές καταλήξεις (τριάντα-σαράντα, πενήντα-εξήντα κλπ). Διαβάσαμε τους αριθμούς 2-3 φορές προφορικά όλοι μαζί. Τα παιδιά έγραφαν αρκετά γρήγορα και δεν εξέφραζαν απορίες. Στα 60 μέχρι 90 τους ζήτησα να βρουν τη λέξη μόνοι τους (ακολουθώντας το

πρότυπο) και τα κατάφεραν ως ένα βαθμό. Χρειάστηκε μόνο να διορθώσω το «εφτονήντα» σε 70, το «οχτήντα» σε 80 και «εννιανήντα» σε 90.

Στη συνέχεια, έγραψα τυχαίους μη στρογγυλούς αριθμούς (π.χ. 16, 27, 38, 49, 56, 61, 77, 84, 92) και ζήτησα να τους διαβάσουν προφορικά. Τα περισσότερα παιδιά τα κατάφεραν, όμως χρειάστηκε να επαναλάβω πιο καθαρά και δυνατά για να κάνουν κι οι υπόλοιποι το ίδιο. Εδώ η Αν. είπε πως και στη μητρική της γλώσσα έτσι τα λένε μόνο που βάζουν το «και» ανάμεσα στις λέξεις (π.χ. λένε το 56 ως 50+6, δηλαδή το και ακούγεται) και η Φ. συμφώνησε.

Έπειτα έγραψα το 100 και κάποια παιδιά το φώναξαν στα αγγλικά ενώ άλλα το γνώριζαν στα ελληνικά. Σκεφτόμουν να σταματήσω εδώ την αρίθμηση, όμως έλαβα υπόψη μου πως άλλα παιδιά είναι μεγαλύτερα και πρέπει να κάνω κάτι πιο κοντά στο επίπεδό τους. Τότε ζήτησα από όσα παιδιά θέλουν, να γράψουν τους προηγούμενους αριθμούς με λέξεις και, για τα υπόλοιπα παιδιά, έγραψα μερικούς τριψήφιους αριθμούς. Ξεκίνησα γράφοντας 101, 110, 111, 112, 113, 214, 315 και τα παιδιά αυτά διάβαζαν προφορικά ώσπου στο 214 σταμάτησαν γιατί δεν ήξεραν. Ο Αχ. είπε στα αγγλικά «two hundred» και τους είπα πως στα ελληνικά λέγεται «διακόσια» και έπειτα «τριακόσια» κ.ό.κ. και τα διάβασαν.

Μετά, ζήτησα από τον Αχ. να έρθει στον πίνακα και να προσπαθήσει να διαβάσει τον αριθμό 423. Επειδή δυσκολευόταν, του εξήγησα πώς να αναλύσει τον αριθμό στις αξίες που κρύβουν τα ψηφία του, δείχνοντας ένα παράδειγμα με τον αριθμό 315 ως 315=300+10+5. Ο Αχ. είπε πως κατάλαβε και έβαλε βελάκια κάτω από κάθε ψηφίο του αριθμού του και έγραψε αντίστοιχα 400, 20 και 3. Τον ρώτησα αν τώρα που ξέρει τι κρύβει κάθε ψηφίο μπορεί πιο εύκολα να διαβάσει τον αριθμό και τον βοήθησα να πει «τετρακόσια» αντί για «τεσσερακό…» που ξεκίνησε να λέει. Στο 23 δεν αντιμετώπισε κανένα πρόβλημα και χρησιμοποίησε τα δάχτυλά του ως το 3 (δηλαδή βρήκε πώς λέγεται το 3 ξεκινώντας από το 1, 2, 3), ενώ τον βοηθούσα δείχνοντας τους κάτω αριθμούς και κρύβοντας τους υπόλοιπους με το χέρι μου.

Στα παιδιά άρεσε αυτό και ήθελαν να το ξανακάνουν. Η Μ. ανέλυσε τον αριθμό 567 γράφοντας βελάκια αλλά και το + ανάμεσά τους: 500+60+7 και διάβασε σωστά (εγώ επανέλαβα πιο δυνατά και καθαρά για να ακούσουν όλοι αλλά και για να διορθώσω το πεντεκόσια που είπε σε πεντακόσια). Στη συνέχεια, ο Α. ανέλυσε και διάβασε το 618, διαβάζοντας 20 αντί για 10 και 9 αντί για 8, όμως τον επιβράβευσα για την προσπάθειά του και του ζήτησα να επαναλάβει τον αριθμό μετά τη βοήθεια (διόρθωση) που έλαβε από τους συμμαθητές του (αντί από εμένα αυτή τη φορά).

Έπειτα, μοίρασα στα παιδιά χαρτάκια με τυχαίους αριθμούς και παίξαμε ένα παιχνίδι όπου έλεγα προφορικά τους αριθμούς και όποιο παιδί τον είχε έπρεπε να τον βρει και να σηκώσει το χέρι του (π.χ. «ποιος έχει τον αριθμό 49;»). Αυτό ήταν ένα μικρό ευχάριστο διάλειμμα, που βοήθησε τα παιδιά να εξασκηθούν και να δουν το συγκεκριμένο μάθημα με περισσότερο ενδιαφέρον.

Μετά, όλα τα παιδιά έκαναν εξάσκηση στην ακολουθία των αριθμών. Έγραψα _ 100 _ και ζήτησα να μου πουν ποιος είναι ο προηγούμενος και ο επόμενος αριθμός, αφού πρώτα το γράψουν στα τετράδιά τους. Η Μαρ. σήκωσε το χέρι της και αντί να πει πήρε την κιμωλία και έγραψε 101 στον πίνακα στη θέση μετά το 100. Για τον προηγούμενο αριθμό έδειξε πως δεν ήξερε με την έκφραση του προσώπου και τη στάση του σώματός της και τη χειρονομία της παράλληλα. Την παρότρυνα να το σκεφτεί. Τότε άκουσε κάποιους συμμαθητές της στη Γ1 της και έγραψε 90. Της ζήτησα να μετρήσει απ' το 90 ως το 100 και επειδή δυσκολευόταν (ντρεπόταν) τη συνόδεψαν και οι συμμαθητές της. Στο 99, 100 έδωσα έμφαση και τότε εκείνη κατάλαβε και διόρθωσε το 90 σε 99. Μετά, έγραψα _200_ και τα παιδιά το έκαναν πιο εύκολα.

Η Αν. πολύ χαρούμενη και ενθουσιασμένη ζήτησε να το γράψει στον πίνακα αναφέροντας πως της αρέσουν τα μαθηματικά (στα αγγλικά) και το έκανε σωστά. Έπειτα, έγραψα _300_ και η Λ. συμπλήρωσε σωστά την ακολουθία. Επειδή η ώρα του μαθήματος τελείωνε έγραψα μερικούς ακόμα αριθμούς για να συμπληρώσουν τα παιδιά ατομικά στο τετράδιό τους (π.χ. _81_, _629_) και έγραψα και τον αριθμό _999_ , τον διαβάσαμε μαζί και τους είπα πως ακολουθεί ο αριθμός 1.000. Κάποιοι μαθητής τον ανέφεραν στα αγγλικά, ενώ άλλοι συμπλήρωσαν πως έτσι (όπως στα αγγλικά) είναι και στη γλώσσα τους. Επειδή πρόδωσα αυτή την ακολουθία, έγραψα μερικές ακόμη: την _1.000_ και την _1.260_.

Έπειτα έκανα έναν μικρό διάλογο με την Μαρ., όπου την ρώτησα πόσο χρονών είναι για να γνωριστούμε περισσότερο, να εξοικειωθεί με την επικοινωνία, να αποκτήσουμε καλύτερη σχέση και να μη ντρέπεται να εκφραστεί, ανεξαρτήτως γλώσσας. Έδωσε την απάντησή της, αφού σκέφτηκε λίγο, δείχνοντας 10 δάχτυλα, οπότε την προέτρεψα να πει «δέκα» ή «είμαι 10 χρονών», μιλώντας αρκετά αργά και εξηγώντας το και στα αγγλικά. Η Μαρ. συνέχισε να λέει «I am δέκα», το οποίο μάλιστα έγραψε και στον πίνακα. Της εξήγησα ότι κατάλαβα τι λέει και την παρότρυνα και πάλι να πει «είμαι 10 χρονών». Εκείνη είπε «είμαι…», όμως δεν συνέχιζε οπότε της είπα:
ΕΕ: You can say it… (Μπορείς να το πεις…) Δε…;
Μαρ.: Δέκα.
Τότε πέρασε η Λ., την οποία χρησιμοποίησα ως βοηθό μιας και έχουν ίδια Γ1. Ρώτησα την Λ. πόσο χρονών είναι και όταν μου απάντησε «8», της είπα να το πει σε πρόταση «είμαι … χρονών», όπως και έκανε. Έπειτα της ζήτησα να εξηγήσει στη Μαρ. πως μπορεί να απαντά με τον ίδιο τρόπο, βάζοντας τη δική της ηλικία και το έκανε (όντως συμπεριέλαβε την πρόταση «είμαι 10 χρονών» στα λόγια της) αλλά η Μαρ. δυσκολευόταν. Τότε της είπα πως «εγώ είμαι 25 χρονών» δείχνοντάς το με τα χέρια μου. Αυτό φάνηκε να την δυσκόλεψε, παρόλο που το επανέλαβα πολλές φορές, σε συνδυασμό με τον λόγο στην ελληνική και στην αγγλική γλώσσα. Τελικά, την καθοδήγησα να γράψει τον αριθμό 25 στον πίνακα δίπλα στο 10, και, βάζοντας το «+» ανάμεσά τους, της είπα: «Εσύ είσαι 10 χρονών (δείχνοντας αυτήν και το 10), εγώ είμαι 25 χρονών (δείχνοντας εμένα και το 25), εμείς (δείχνοντας εμάς) μαζί

(δείχνοντας την πράξη) είμαστε … ;». Της υπέδειξα να συμπληρώσει την πρόσθεση, όμως έγραψε ε5 (με βάση τις κινήσεις των χεριών της πάνω από κάθε αριθμό είδα πως υπολόγισε πρώτα τις μονάδες κάνοντας με το νου 0+5 και έπειτα τις δεκάδες με το νου 1+2), δηλαδή μπερδεύτηκε με την αραβική γραφή και έγραψε το 3 αντεστραμμένο, κάνοντάς το να μοιάζει με το ελληνικό «ε». Την βοήθησα να το διορθώσει επαναλαμβάνοντας πολλές φορές «τριάντα πέντε, thirty five» και δείχνοντας ποιο είναι το 35. Η Μαρ. κατάλαβε τελικά τι εννοούσα και της είπα: «Να μη φοβάσαι να μιλήσεις, ακόμα κι αν κάνεις λάθος, δε χρειάζεται να ντρέπεσαι. Ούτε εγώ ξέρω αραβικά… I don't know arabic… so, don't worry, it's ok!». Τότε είπαν κάτι με τη Λ., μου χαμογέλασαν, κούνησαν καταφατικά το κεφάλι και με χαιρέτησαν.

Αναφορά 17η

Συγκέντρωσα 3 κορίτσια γύρω μου και τις είπα ότι θα κάνουμε τα σχήματα, τα οποία υπάρχουν παντού γύρω μας. Άφησα στη μέση του θρανίου μια αφίσα (σε χαρτόνι) με τα σχήματα, την ονομασία τους και κάποια χαρακτηριστικά τους και τα παιδιά κάθε φορά που μιλούσαμε για ένα σχήμα το έγραφαν στα τετράδιά τους. Ζήτησα να κοιτάξουν γύρω τους και να μου πουν αν βλέπουν κάποιο αντικείμενο με γνωστό σχήμα (στο επίπεδο). Η Α. έδειξε το ρολόι λέγοντας κύκλος. Η Αν. έδειξε τον πίνακα λέγοντας τετράγωνο αντί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Για να εξηγήσω της έδειξα τα σχήματα από μεγάλα ξυλάκια που είχα και της είπα να δοκιμάσει-ελέγξει ποιο απ' αυτά ταιριάζει καλύτερα. Η Α. έκανε το ίδιο με τον κύκλο και το ρολόι.

Η Αν. τότε πήρε το τετράγωνο και είπε πως ταιριάζει με τη βιβλιοθήκη. Της έδειξα το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και συμφώνησε πως αυτό ταιριάζει περισσότερο. Βρήκε κι άλλα ορθογώνια μαζί με τη Φ. (π.χ. λάμπες, πόρτα, θρανίο, τετράδιο). Τους έδειξα τότε πως αν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (τονίζοντας την ονομασία του) με ένα ξυλάκι (κάθετα στο μέσο των μεγάλων πλευρών) το χωρίσουμε στα δύο προκύπτουν «δύο κομμάτια που είναι …;» (ερωτηματική έκφραση) και συμπλήρωσαν «τετράγωνο!». Σύγκρινα το τετράγωνο σχήμα στα κομμάτια του ορθογωνίου που προέκυψαν και έτσι μετρήσαμε τις πλευρές των τετραπλεύρων:

ΕΕ: Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μία, δύο, τρεις, τέσσερις πλευρές και μία, δύο, τρεις, τέσσερις γωνίες (δείχνοντας). Αυτά, τα ξυλάκια, λέγονται πλευρές. Εκεί που ενώνονται τα ξυλάκια λέγονται γωνίες. Οκ; Πλευρά, γωνία (δείχνοντας). Μία πλευρά (δείχνοντας 1 δάχτυλο), πολλές πλευρές (χειρονομία «πολλά»). Μία γωνία, πολλές γωνίες (δείχνοντας ό,τι λέω). Για πείτε μου τώρα για το τετράγωνο. Τι έχει;
Αν.: 1,2,3,4 … (δείχνοντας τις πλευρές)
ΕΕ: Τέσσερις…; Πώς λέγονται…; Πλε…
Αν.: Πλερ.. I can't say it.
Φ: Γωνία.
ΕΕ: Γωνία είναι αυτό (δείχνοντας). Σωστά το είπες, αλλά είναι αυτό (δείχνοντας πάλι). Μία γωνία, δύο γωνίες, τρεις γωνίες, τέσσερις…
(Όλα τα κορίτσια): Γωνίες.

ΕΕ: Μπράβο. Α., δείξε μου μία γωνία. (Η Α. το έκανε) Και μία πλευρά. (το έκανε πάλι και την επιβραβεύω)
Τους έδειξα τη βιβλιοθήκη που έδειξε η Αν. και τις παρότρυνα με ημιτελή φράση να πουν με τι μοιάζει περισσότερο. Η Φ. συμπλήρωσε «αυτό, ορθογώνιο». Αντίστοιχα για το ντουλάπι στο κάτω μέρος της βιβλιοθήκης, όπου η Αν. συμπλήρωσε ότι μοιάζει περισσότερο με «τετράγωνο!» και σηκώθηκε να τα δείξει, λέγοντας «this τετράγωνο και this τετράγωνο, but this ορθογώνιο», κρατώντας τα σχήματα και τοποθετώντας τα πάνω στις επιφάνειες συγκριτικά.

Έπειτα τους είπα ότι τα αντικείμενα έχουν γωνίες και πλευρές όπως τα σχήματα και αυτές τις λέξεις τις χρησιμοποιούμε και αλλού, π.χ. λέμε «η γωνία δύο σπιτιών», για να πας εκεί «θα στρίψεις στη γωνία», «ο πίνακας είναι σε αυτήν την πλευρά του τοίχου», «θα κοιμηθώ απ' αυτήν την πλευρά», «πονάνε τα πλευρά μου». Κάθε φορά έδειχνα το σημείο για το οποίο μιλούσα και έπαιρνα την ανάλογη έκφραση ή στάση σώματος, κάνοντας τα παιδιά να χαμογελάσουν. Επίσης, επαναλάμβαναν και συμπλήρωναν στα αγγλικά εξηγώντας η μία στην άλλη (κυρίως η Φ. και η Αν.).

Ύστερα ζήτησα από την Αν. να δείξει τις πλευρές και τις γωνίες στα ντουλάπια και το έκανε λέγοντας 1,2,3,4 πλευρά και 1,2,3,4 γωνία. Έπειτα τους είπα ότι οι πλευρές στο ντουλάπι είναι ίσες όπως κάθε πλευρά στο σχήμα είναι ίση με 1 ξυλάκι και έτσι είναι όλες ίσες μεταξύ τους, ενώ στο ορθογώνιο οι πλευρές δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους, αλλά μόνο οι απέναντι, δηλαδή τα κίτρινα ξυλάκια 2 από κάθε πλευρά και τα μωβ ξυλάκια 1 από κάθε πλευρά.

Μετά, πήρα ένα ξυλάκι, το τοποθέτησα διαγώνια στο τετράγωνο και τις ρώτησα τι βλέπουν. Η Φ. απάντησε «yes, this and this» δείχνοντας τα δύο κομμάτια. Έδειξα το τρίγωνο σχήμα και το τοποθέτησα πάνω στα τρίγωνα κομμάτια του τετραγώνου που προέκυψαν. Η Αν. είπε «τετράγωνο» και της θύμισα ότι το τετράγωνο έχει 4 γωνίες γι' αυτό λέγεται έτσι. Ρώτησα πόσες γωνίες έχει το σχήμα που βλέπουν και μου είπαν 3 και έτσι εξήγησα πως γι' αυτό προκύπτει το όνομα τρίγωνο. Στη συνέχεια ρώτησα πόσες πλευρές έχει και ζήτησα να προσέξουν τι ρωτάω. Απευθύνθηκα στη Φ. και της ζήτησα να μου δείξει τις πλευρές του τριγώνου και το έκανε, μετρώντας τες («μία, δύο, τρία»). Το επανέλαβα για να διορθώσω τη γραμματική, αφού πρώτα της είπα πως απάντησε σωστά, λέγοντας «μία πλευρά, δύο πλευρές, τρεις…;» και συμπλήρωσε «πλευρές». Της ξαναείπα «μπράβο» και συμπλήρωσα «τρεις πλευρές στο τρίγωνο».

Προχωρώντας, προσπάθησα να εξηγήσω απλά στα κορίτσια ότι λέμε μία γωνία – μία πλευρά γιατί είναι «κοριτσάκια» και χρησιμοποίησα τα αγγλικά για να αντιληφθούν το γένος: «όπως λέμε she. Like a girl. Not "he". Like we say "she is Αν.". Η Αν., η γωνία, η πλευρά, η Φ., η Α. Ok?» και η Αν. επαναδιατύπωσε για να δείξει την κατανόησή της «yes, not a he» ενώ η Φ. συμπλήρωσε «not a boy!». Τότε είπα πως θα τους δείξω ένα «boy» και έδειξα τον κύκλο, τον οποίο τα κορίτσια ονομάτισαν αμέσως. Επανέλαβα «ο κύκλος» και μετά έδειξα και τα υπόλοιπα σχήματα λέγοντας «το…» και δείχνοντας το καθένα ώστε τα κορίτσια να συμπληρώσουν το όνομά του

όπως και έκαναν, με σκοπό να τους πω πως αυτά έχουν το «το» μπροστά γιατί είναι σαν «it».

Έπειτα τις ρώτησα πόσες πλευρές έχει ο κύκλος και μου είπαν «one!». Ζήτησα να το ξανασκεφτούν και να το επανεξετάσουν, προσπαθώντας να κάνω και την Α. να συμμετάσχει πιο ενεργά στη διαδικασία. Τελικά, ανέφερα πως ο κύκλος έχει μηδέν/zero πλευρές και πως είναι εύκολο να το θυμούνται γιατί ο αριθμός 0 μοιάζει με κύκλο. Τις ρώτησα αν μπορούν να βρουν και πόσες γωνίες έχει και μου είπαν «zero!» και τις επιβράβευσα.

Αμέσως μετά, ζήτησα να πάρουν από 1 σχήμα στα χέρια τους και να βρουν όμοια αντικείμενα μέσα στο σχολείο και έξω κοντά. Βρήκαν διάφορα αντικείμενα. Για το ορθογώνιο μου έδειξαν ένα χαρτόνι, το ξύλο της καρέκλας, το βιβλίο, το σκαλί, τη σημαία, την κούνια, το σφουγγάρι. Για τον κύκλο μου έδειξαν τη ρόδα του αυτοκινήτου, τον ήλιο, το γύρω-γύρω όλοι, τον κάδο απορριμμάτων. Για το τετράγωνο μου έδειξαν ένα χαρτόνι.

Επιπλέον, έδειξα στα κορίτσια διάφορες εικόνες αντικειμένων της καθημερινής ζωής που δε βρίσκονται στο τρέχον περιβάλλον μας. Ειδικά για το τετράγωνο (που δε βρήκαν αρκετά αντικείμενα) και το τρίγωνο (που δε χρησιμοποίησαν γιατί περίσσευε) τους έδειξα εικόνες όπως σκάκι, σήματα ΚΟΚ, σοκολάτα (τετράγωνο) και σήματα ΚΟΚ, τρίγωνο για κάλαντα, τρίγωνο κομμάτι πίτσα κ.ά. (τρίγωνο). Στις υπόλοιπες εικόνες που έδειχνα, έλεγα την ονομασία του αντικειμένου και ρωτούσα τι σχήμα είναι (με τι μοιάζει) π.χ. κύκλος: 1 ευρώ, πιάτο, δίσκος, δαχτυλίδι, κουμπί, μπάλα, σφαίρα, πίτα / ορθογώνιο: τηλεόραση, υπολογιστής, τηλεκοντρόλ. Τότε, μάλιστα, η Αν. σχεδίασε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο λέγοντας ότι είναι «TV».

Επίσης, έδειξα και μερικές εικόνες με πλάγιο παραλληλόγραμμο και τις ρώτησα αν ξέρουν τι είναι (π.χ. μία σβήστρα, σκάλες, το μέρος μιας σκεπής, βιβλιοθήκη-ράφια) και είπαν «ορθογώνιο» ή «τετράγωνο», όμως τους εξήγησα πως πρέπει να παρατηρήσουν τα χαρακτηριστικά του, δηλαδή τις γωνίες και τις πλευρές του, τονίζοντας πως το σχήμα αυτό δεν είναι σίγουρα τετράγωνο γιατί δεν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και πως δεν είναι ούτε ορθογώνιο γιατί δεν έχει όλες τις γωνίες του ορθές. Τότε τους είπα πως λέγεται πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Μετά ρώτησα τα κορίτσια αν ξέρουν κάποιο αντικείμενο που δεν είδαν μέχρι τότε και, έτσι, χρησιμοποίησαν το κινητό μου για να μου δείξουν στο Google Images. Η Φ. και η Αν. αποφάσισαν να γράψουν οι ίδιες στα αγγλικά και να μου δείξουν τη σημαία της χώρας τους, με τα ορθογώνια σχήματα, ενώ η Α. μου έδειξε τις φιγούρες σε ένα από τα αυτοκόλλητα που της είχα δώσει και κατάλαβα πως μου ζητούσε να γράψω τον τίτλο της ταινίας (frozen) και από τις εικόνες που φάνηκαν μου έδειξε τον χιονάνθρωπο που μοιάζει να αποτελείται από κύκλους. Επιβράβευσα λεκτικά και πάλι τα κορίτσια για τις ιδέες τους.

Έπειτα, διεξήχθη η άσκηση. Τους έδωσα μια εικόνα με έναν άνθρωπο από σχήματα και τους μοίρασα την άσκηση που έπρεπε να συμπληρώσουν σε χαρτάκια τύπου post-it, με λίγα έργα γραφής στη Γ2.

Όταν ήρθε και ο Μ. τον ρώτησα αν ξέρει τα σχήματα. Τα θυμόταν όλα (από προηγούμενο μάθημα) και του ανέφερα μόνο μερικά χαρακτηριστικά τους, για τις πλευρές και τις γωνίες με περισσότερες λεπτομέρειες, γιατί γνώριζα πως είναι μεγαλύτερος. Δηλαδή, συζητήσαμε για τις ορθές γωνίες, τις διαγωνίους, την παραλληλία και την ισότητα των πλευρών. Ο Μ. δεν αντιμετώπισε καμία δυσκολία στη συζήτηση, μπορούσε να ξεχωρίσει τα σχήματα και τα χαρακτηριστικά τους. Τα ανέφερε μάλιστα και στην αγγλική γλώσσα. Του έδωσα την οδηγία για να συμπληρώσει και αυτός την άσκηση.

Τότε, συζητήσαμε όλοι μαζί για τα μέρη του σώματος που βλέπουν στον άνθρωπο (κεφάλι, πρόσωπο, λαιμός, σώμα, χέρια, πόδια) και σηκώθηκαν όρθιοι για να τα δείξουν και στον εαυτό τους. Έτσι, συμπλήρωσαν ευχάριστα την άσκηση. Μετρούσαν τα σχήματα σε κάθε μέρος στα ελληνικά. Η Αν. και η Φ. συζητούσαν μερικές φορές στη Γ1 τους (φαρσί) και η Α. τις κοιτούσε με απορία και προσπαθούσε να συμμετάσχει, αλλά η διαφορετική γλώσσα της την εμπόδιζε. Έτσι, χρησιμοποίησε χειρονομίες και απλές αγγλικές και ελληνικές εκφράσεις για να εκφράσει τη γνώμη της («No, έχει this μάτια, no τρία κύκλος… πέντε έχει, look»). Ο Μ. δούλευε ατομικά και αντεπεξήλθε πολύ γρήγορα, κάτι που με προβλημάτισε για τον βαθμό ευκολίας της άσκησης γι’ αυτόν. Δεν παραπονέθηκε και θεώρησα πως είναι αποδεκτό το να κάνει κάτι πιο ευχάριστο που εξασκεί το γλωσσικό του επίπεδο στα μαθηματικά. Σκέφτηκα ότι ήδη έμαθε περισσότερα χαρακτηριστικά των σχημάτων και ίσως ανέβαζα ξανά το επίπεδο γι’ αυτόν αργότερα με μία πρόκληση.

Με την ολοκλήρωση της άσκησης ζήτησα από τα παιδιά να φτιάξουν σχήματα με μικρά χρωματιστά ξυλάκια τύπου crafts. Για τον κύκλο τους έδωσα καπάκι αναψυκτικού. Δε δυσκολεύτηκαν, οπότε τους ζήτησα να γράψουν στο εσωτερικό κάθε σχήματος το όνομά του. Εκεί έδειξαν επίσης τις ικανότητές τους και την κατανόησή του. Μάλιστα, η Αν. σχεδίασε και ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Τα κορίτσια έφυγαν κι έτσι ο Μ. μου είπε πως θα ήθελε να κάνουμε εξισώσει γιατί δεν είχε καταλάβει κάτι. Καθώς εκφραζόταν στα αγγλικά και ελληνικά έγραψε στο τετράδιό του: x=2x+3=2x-3 (x ίσον δύο x plus three, equals two x minus three). Συνέχισε από κάτω: x=2x-2=-3-3, έπειτα: x=0/0=-6/0 και στο τέλος x=-6/0 («x ίσον two x, minus two, equals minus three minus three, x, zero, minus six, zero, zero, x equals minus six, zero»). Τον ρώτησα απορημένη τι έγραψε και μου είπε «εξίσωση». Τον ρώτησα αν έχει κάνει εξίσωση ξανά στο σχολείο και μου είπε «λίγο Αφγανιστάν, λίγο Μυτιλήνη» και του είπα πως καλά έκανε και ήρθε να με ρωτήσει αυτό που ήθελε. Έπειτα του εξήγησα ότι αυτό που έγραψε δεν είναι εξίσωση, γιατί αποτελείται από πολλά μέρη που δεν είναι ίσα/equal (παρομοίωσα με το εξίσωση/equation) και πως ό,τι έχει απλά χι ή ψι με αυτό τον τρόπο δε σημαίνει ότι είναι εξίσωση και επίσης ότι το «0/0», «-6/0» και γενικά το 0 στον παρονομαστή δεν καταλήγει σε κάποιο

αποτέλεσμα, γιατί δεν ορίζεται, δεν είναι υπαρκτό («it doesn't exist»). Εκείνος συμφώνησε, οπότε προχώρησα εξηγώντας του πως μία εξίσωση αποτελείται από 2 μέρη ή μέλη που είναι πάντα ίσα και προσπαθούμε να βρούμε τον άγνωστο αριθμό.

Του έδωσα ένα παράδειγμα μιας απλής εξίσωσης του τύπου 2x=6 και μου είπε αμέσως 3. Έπειτα έγραψα στο τετράδιο την εξίσωση 2x+3=11 και του ζήτησα να την λύσει ως προς x, θυμίζοντάς του να κάνει πράξεις από κάτω και όχι στην ίδια σειρά με «=». Εκείνος έγραψε από κάτω 2x=-3+11 («δύο x ίσον minus three plus έντεκα», όπου του είπα πως το θετικό πρόσημο λέγεται συν και το αρνητικό μείον, αλλά δεν επέμενα σε αυτό) και από κάτω διαίρεσε με το 2 και τα δύο μέλη λέγοντας «δύο x equals οχτώ, δύο, δύο, x ίσον οχτώ, δύο, x ίσον οχτώ divided by two, x ίσον four, τέσσερα». Τον επιβράβευσα και του είπα πως τελικά ξέρει να λύνει εξισώσεις, απλά χρειαζόταν μια μικρή υπενθύμιση. Του ζήτησα να το ελέγξει (να κάνει επαλήθευση). Δεν ήξερε πώς και του εξήγησα πως στην αρχική εξίσωση θα βάλει το αποτέλεσμα που βρήκε στο x. Εκείνος έβαλε όπου x το 4 και έγραψε 2*4+3=11, από κάτω 8+3=11 και κάτω 11=11. Μου είπε «Ok, I remember now! Πρέπει να κάνω για x, not this (δείχνοντας τα προηγούμενα λάθη)». Με ευχαρίστησε και με αποχαιρέτησε.

Αναφορά 18η

Η Μ. και η Λ. ενδιαφέρθηκαν για τα τα σχήματα από ξυλάκια, τα οποία είχαν ακούσει από τις υπόλοιπες συμμαθήτριές τους. Έτσι, με την Λ., τη Μ., την Μπ. ξεκίνησα ίδιες διαδικασίες όπως και την προηγούμενη μέρα. Η αντίδραση και η συμπεριφορά των κοριτσιών ήταν σε γενικές γραμμές παρόμοια.

Όμως, η Μ. όταν επεξεργαζόταν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από τα μεγάλα ξυλάκια είδε ότι αυτά κουνιούνται και η μορφή του αλλάζει. Αξιοποίησα αυτήν την παρατηρητικότητα για να εξηγήσω ότι αρχικά έτσι σχηματίζεται το πλάγιο παραλληλόγραμμο, συγκρίνοντάς το με το ορθογώνιο και έπειτα ότι αντίστοιχα αν κουνήσουμε τα ξυλάκια του τετραγώνου προκύπτει ρόμβος.

Η Λ. πολλές φορές έλεγε ορθογώνιο αντί για τρίγωνο και της εξήγησα ότι το τρίγωνο το λέμε έτσι γιατί έχει 3 γωνίες. Έδωσα μερικά επιπλέον παραδείγματα για να βρίσκει το όνομα του σχήματος με βάση τον αριθμό των γωνιών (εκτός από την περίπτωση 4 γωνίες γιατί εκεί υπάρχει η κατηγορία τετράπλευρο που θα την μπέρδευε), π.χ. 5 γωνίες-πεντάγωνο, 6 γωνίες-εξάγωνο, 8 γωνίες-οκτάγωνο, και σχεδίασα τα σχήματα αυτά στον πίνακα. Κάθε φορά της ζητούσα να μαντέψει πώς λέγεται το σχήμα και η προσπάθειά της ήταν πολύ καλή.

Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επεξεργασίας των σχημάτων και ανάλυσης των χαρακτηριστικών τους, η Α. τα πήρε στα χέρια της και εξήγησε στις φίλες της πόσες γωνίες και πλευρές έχουν (όπως τα θυμόταν από την προηγούμενη μέρα που είχε ασχοληθεί με αυτά) λέγοντας «μία, δύο, τρία, τέσσερα γωνία, μία, δύο, τρία, τέσσερις πλευρές» για τα τετράπλευρα, «zero γωνία, zero πλευρά» για τον κύκλο, δείχνοντας

και 0 με τα δάχτυλά της, και «1,2, τρεις πλευρές, 1,2, τρεις γωνίες» για το τρίγωνο. Τα υπόλοιπα κορίτσια την παρακολουθούσαν με προσοχή.

Αργότερα, στην άσκηση με τον άνθρωπο από σχήματα, η Λ. και η Μ. αναγνώριζαν τις γραπτές λέξεις (καπέλο, πρόσωπο κλπ) όμως με ρωτούσαν για επιβεβαίωση (π.χ. «this γράφει λαιμός;»). Η Α. σκέφτηκε να κάνει ξανά την ίδια άσκηση για να κάνει παρέα στις φίλες της κι έτσι επέλεξα να την χρησιμοποιήσω ως βοηθό της Μπ., που χρειαζόταν περισσότερη λεκτική καθοδήγηση. Η συνεργασία των κοριτσιών ήταν πολύ καλή, μιας και μοιράζονται την ίδια Γ1.

Έπειτα, κατά την κατασκευή των σχημάτων με τα μικρά ξυλάκια, η Λ. έβαλε ένα επιπλέον ξυλάκι για τον χωρισμό τους σε μικρότερα γνωστά σχήματα, όπως στην επίδειξη (2 τετράγωνα στο ορθογώνιο). Στη διάρκεια της κατασκευής επέμενα πιο πολύ σε ερωτήσεις του τύπου «τι σχήμα έφτιαξες;» και «πόσες γωνίες/πλευρές έχει;» αλλά και στη γλωσσική έκφραση των παιδιών στις απαντήσεις τους, δηλαδή να λένε «έφτιαξα ένα τετράγωνο» και όχι απλά «τετράγωνο» και ότι «έχει τέσσερις γωνίες και τέσσερις πλευρές» και όχι απλά «4» ή «τέσσερις» (δηλαδή να αποφευχθούν οι μονολεκτικές απαντήσεις) και το πέτυχα με πολλές επαναλήψεις και με prompts:

ΕΕ: Έφτιαξες ένα…;
Λ.: Τετράγωνο (δείχνοντάς το).
ΕΕ: Κι εδώ; Τι έκανες;
Λ.: Έφτιαξα ένα κύκλος.

Μετά ζήτησα από όλα τα παιδιά να φτιάξουν σχήματα με τα σώματά τους. Πρώτα τους ζήτησα με τα χέρια και έφτιαξαν έναν κύκλο, ένα τρίγωνο και ένα τετράγωνο. Μετά τους ζήτησα με τα δάχτυλα και έφτιαξαν ένα τρίγωνο και ένα αστέρι (πεντάγωνο). Μετά τους ζήτησα με τα σώματα και έκαναν ένα ορθογώνιο και ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο. Εδώ βοήθησε πολύ η Μ., που έδινε οδηγίες για την τοποθέτηση των ατόμων σε κατάλληλη θέση. Συγκεκριμένα, έβαλε 2 μαθήτριες απέναντι από 2 μαθήτριες και 1 δασκάλα απέναντι από 1 δασκάλα για να πετύχει όσο το δυνατόν καλύτερα την ισότητα των πλευρών. Έπειτα, τα κορίτσια σχημάτισαν ένα τετράγωνο και μαζί σχηματίσαμε ένα τρίγωνο. Κάθε φορά που έφτιαχναν ένα σχήμα φώναζαν όλες μαζί δυνατά το όνομά του.

Στη συνέχεια έδωσα σε όλους πλαστελίνες για να φτιάξουν πάλι τα σχήματα. Για να δώσω υψηλότερο επίπεδο στην άσκηση τους ζήτησα να φτιάξουν και το όνομα του σχήματος με την πλαστελίνη, κάνοντας παράλληλα εξάσκηση στη γραφή. Τα παιδιά ήταν ενθουσιασμένα. Η Λ. και η Μ. δυσκολεύονταν να σχηματίσουν κάποια γράμματα, όπως το γ (στο τρίγωνο και τετράγωνο) και το λ (στον κύκλο), γι' αυτό και τις πλησίασα και τις βοήθησα σε αυτά, μέχρι που δε χρειάζονταν πια αυτή τη βοήθεια. Μου έκανε εντύπωση το ταλέντο της Μπ., που δεν εκφράζεται εύκολα λεκτικά, αλλά έδειξε με αυτόν τον τρόπο την κατανόησή της.

Επίσης, η Α. έδειξε τις ικανότητές της ολοκληρώνοντας πρώτη τη δραστηριότητα και έφτιαξε και άλλα σχέδια π.χ. αστέρι, λουλούδι. Όμως, αυτό που επίσης παρατήρησα στην Α. ήταν ότι σχημάτισε τη λέξη κύκλος με την πλαστελίνη σωστά στον πίνακα και έπειτα στο θρανίο την έγραψε αντίστροφα δηλαδή "ςολκύκ". Της ζήτησα να το ελέγξει και επέμενε πως είναι σωστό. Της είπα πως θα παίξουμε το παιχνίδι των μπερδεμένων γραμμάτων και έβαλα τα γράμματα των λέξεών της σε διαφορετική-τυχαία σειρά και της ζήτησα να τα βάλει στη σωστή για να σχηματίσει τη λέξη. Η Λ. προσπάθησε να της εξηγήσει πώς να βάλει σωστά τα γράμματα στη λέξη «κύκλος» (στη Γ1 τους) και τότε η Α. το έκανε. Η βοήθεια της Λ. μετέτρεψε την άσκηση σε ομαδική, γιατί πλησίασαν όλα τα παιδιά να τοποθετήσουν σωστά τα γράμματα της λέξης κι έπειτα κάθε παιδί ανέλαβε μία λέξη και την σχημάτισε με την πλαστελίνη στη σωστή της μορφή.

Όλα τα παιδιά ολοκλήρωσαν σωστά το έργο, μιας και είχαν ήδη γράψει τις λέξεις με την πλαστελίνη. Μάλιστα, η Μπ. τελείωσε πρώτη και της είπα πως κέρδισε το παιχνίδι και αυτό με χαροποίησε πολύ και εκείνη χαμογέλασε έντονα, κάτι που δεν την είχα ξαναδεί να κάνει.

Στο τέλος της ημέρας παίξαμε παιχνίδι κρεμάλας με μαθηματικές λέξεις που ξεκίνησα να βάζω στα παιδιά (π.χ. σχήματα, παραλληλόγραμμο) και έπειτα έβαζαν τα ίδια τα παιδιά με τη σειρά (π.χ. κύκλος, τρίγωνο, τέσσερα), αφού πρώτα έλεγχαν την ορθογραφία της λέξης από το τετράδιό τους ή ρωτώντας εμένα σιγανά. Τα παιδιά έβρισκαν εύκολα τη λέξη φωνάζοντας γράμματα ή ολόκληρες λέξεις και διαβάζοντας ομαδικά τα γράμματα που έβλεπαν και τη λέξη που σταδιακά σχηματιζόταν.

Αναφορά 19η

Την τελευταία μέρα είχε πολύ λίγα παιδιά το σχολείο γιατί είχαν μια μεγάλη θρησκευτική τους γιορτή. Έτσι, το υλικό που είχα ετοιμάσει για την τάξη έπρεπε να το προσαρμόσω ατομικά για την Αν.

Της έδωσα κάποιους αριθμούς σε χαρτάκια τύπου post-it ώστε να τους ταξινομήσει από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο. Πρώτα, διάβασε όλους τους αριθμούς προφορικά και της ζήτησα να βρει τον μικρότερο και τον μεγαλύτερο από όλους. Αρχικά, δεν καταλάβαινε την οδηγία στα ελληνικά, στα αγγλικά, ούτε τις χειρονομίες και τα σύμβολα «>» και «<» κι έτσι χρησιμοποίησα το Google translate για τις λέξεις μεγαλύτερο και μικρότερο. Η Αν. διάβασε τις μεταφρασμένες λέξεις στη γλώσσα της και με ρώτησε «of all the numbers?... and ….?» (όπου … οι λέξεις μεγαλύτερο και μικρότερο αντίστοιχα στα περσικά), ουσιαστικά επαναδιατυπώνοντας την οδηγία.

Αμέσως, τους βρήκε και τους έβαλε όλους στη σωστή σειρά . Σε κάποιο σημείο μπερδεύτηκε και θεώρησε πως ο αριθμός 13 είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό 21. Την ρώτησα αν είναι σίγουρη και τότε έλεγξε την τοποθέτησή της και τους επόμενους αριθμούς και διόρθωσε τη διάταξή της.

Μετά, της εξήγησα τις έννοιες ζυγός και μονός αριθμός και της ζητούσα να μου δείξει έναν μονό ή έναν ζυγό αριθμό από αυτούς που έχει ταξινομήσει, αν ένας συγκεκριμένος αριθμός είναι ζυγός ή μονός, ή ακόμη της ζητούσα να δείξει έναν μονό αριθμό μεγαλύτερο/μικρότερο από 25 (κοιτούσε την διάταξή της και το έκανε). Τις έννοιες μονός και ζυγός τις κατάλαβε εύκολα, αφού της εξήγησα πώς τα ξεχωρίζουμε, πώς λέγονται στα αγγλικά και περσικά και εκείνη μάλιστα ήθελε να τις καταγράψει στο τετράδιό της για να τις μελετήσει και στο σπίτι. Ξεκίνησε να γράφει τις λέξεις μόνη της, με βάση τους ήχους και τα γράμματα που ήξερε, με περισσότερη ευκολία στα γράμματα ζ, ο, μ, και ν και λιγότερη στα υ (που κατέγραψε ως ε και μετά ως ι), γ και ς, τα οποία την βοήθησα να θυμηθεί και να καταγράψει.

Στη συνέχεια σκέφτηκα να της εξηγήσω τα σύμβολα > και < που της έδειξα προηγουμένως και είχε πει πως δεν τα ήξερε. Στον πίνακα κόλλησα δύο αριθμούς με τα χαρτάκια τους και έβαλα το σύμβολο > ανάμεσά τους. Της εξήγησα (σε ελληνικά και αγγλικά) ότι αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός στα αριστερά είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό στα δεξιά. Της ζήτησα να κάνει το ίδιο για άλλους αριθμούς ώστε να δοκιμάσει και το σύμβολο <. Μπερδευόταν αρκετά με την επιλογή του συμβόλου (ίσως λόγω αραβικών επιρροών και σύγχυσης του δεξιά-αριστερά με τη δική μας γραφή;). Της έδειξα πώς να το θυμάται εύκολα σαν στόμα ζώου (της είπα μερικά ζώα όπως κροκόδειλος, ψάρι, φάλαινα, την ρώτησα ποιο ζώο μπορεί να φανταστεί εκείνη και είπε «no fish…. Tiger!») όπου «το μεγάλο τρώει το μικρό» δηλαδή το άνοιγμα του στόματος είναι στον μεγάλο αριθμό και δείχνει-πλησιάζει το μικρό για να το «φάει» και τότε άρχισε να δίνει σωστές απαντήσεις όχι τυχαίες. Μου είπε «I see now, this always look the big, this the small one», δείχνοντας τα σωστά μέρη των ανισοτήτων κάθε φορά.

Στις επόμενες συγκρίσεις με άλλους αριθμούς (όχι από τα χαρτάκια αλλά από τυχαίους αριθμούς που έλεγα προφορικά κι εκείνη έγραφε) εξοικειώθηκε με την έννοια και τα σύμβολα και έπαψε να απαντά μονολεκτικά στις ερωτήσεις μου («μεγαλύτερος είναι this… 120» και «μικρότερος είναι this, 78»). Μάλιστα, όταν της είπα δύο ίδιους αριθμούς και τους έγραψε ξαφνιάστηκε, λέγοντας «no one is bigger». Της απάντησα πως έχει δίκιο και συμπλήρωσε πως οι αριθμοί είναι «the same», οπότε συμφώνησα λέγοντας ότι «ναι, they are equal, ίσοι…», δίνοντας έμφαση στο «ίσοι». Η Αν. τότε είπε «ίσοι, I know! Ίσοι, ίσον! Teacher, yes? I don't know why I couldn't think this» και σημείωσε το «=».

Την επιβράβευσα και συνεχίσαμε αμέσως με την αξία θέσης ψηφίου των αριθμών. Αυτό θεωρώ πως ήταν απαραίτητο για να εξοικειωθεί με τη γραφή των αριθμών βάσει της αξίας τους, να ξεχωρίζει δηλαδή την αξία (γιατί στη γραφή προηγουμένως του αριθμού 525 δυσκολεύτηκε να αντιστοιχήσει το 500 με τη θέση των εκατοντάδων και να γράψει τον αριθμό σωστά). Αυτό έγινε με τη χρήση πλαστικών ποτηριών όπου αναγράφονταν οι αριθμοί 0-9 στην κοντινότερη θέση στο χείλος κάθε ποτηριού και δίπλα τα μηδενικά που κρύβουν στην αξία της θέσης τους, δηλαδή κανένα μηδενικό για τις μονάδες, ένα μηδενικό για τις δεκάδες, δύο μηδενικά για τις εκατοντάδες κ.ό.κ. Χρησιμοποίησα τα ποτήρια δείχνοντας ένα παράδειγμα στην Αν. με έναν

τριψήφιο αριθμό που της ζήτησα να σχηματίσει και να διαβάσει. Με αφορμή τη δυσκολία της στην ορθή αναγνώριση του αριθμού, της έδειξα την κρυμμένη αξία κάθε ψηφίου ανοίγοντας τα ποτήρια με τη σειρά που ήταν τοποθετημένα (ΕΔΜ) το ένα μέσα στο άλλο. Έτσι, για τον αριθμό 394 πρόεκυψε ότι είναι 300+90+4 δηλαδή 3·100 + 9·10 + 4·1.

Για να ελέγξω τη γνώση της στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση με τις δυνάμεις του 10 έγραψα μερικά παραδείγματα στον πίνακα. Στο 3·10=30 και 4·100 δεν ήταν εμφανής κάποια στρατηγική κι έτσι προχώρησα στο 71·10. Εκεί δυσκολεύτηκε και την ρώτησα πώς σκέφτηκε τα προηγούμενα. Μου είπε «like 30, 30, 30 and 100,100,100 four…». Την ρώτησα αν εννοεί «four times?» και όταν μου είπε «ναι» της απάντησα πως αυτό είναι σωστό, αλλά αν οι αριθμοί είναι μεγαλύτεροι θα της πάρει πολύ χρόνο και μπορεί και να κάνει και λάθος στον υπολογισμό. Τότε της έδειξα τον γρήγορο τρόπο με τη μέτρηση των μηδενικών. Στο 71·10 της είπα πως γράφω τον αριθμό όπως είναι και συμπληρώνω/βάζω (σκόπιμα απέφυγα τη λέξη προσθέτω που χρησιμοποιούμε συνήθως) στο τέλος τόσα μηδενικά όσα έχει το 10, το 100 ή το 1.000, δηλαδή τα μηδενικά που βλέπω.

Έτσι, βρήκαμε ότι 71·10=710 και της έγραψα μετά το γινόμενο 50·10. Εκείνη έγραψε 50 και της είπα πως μετράμε όλα τα μηδενικά, υποθέτοντας λανθασμένα ότι έχει γράψει απλά τον αριθμό 5 και μετά έβαλε το 1 μηδενικό του 10. Αμέσως όμως κατάλαβα τη λανθασμένη μου υπόθεση και της ανέφερα πως μπορεί να κάνει την πράξη με 2 τρόπους: 1^{ον} να γράψει τον αριθμό χωρίς τα μηδενικά του και μετά να τα συμπληρώσει όλα μαζί στο τέλος, μαζί με τα μηδενικά του 10/100/1.000 κλπ. ή 2^{ον} να γράψει τον αριθμό όπως είναι με τα μηδενικά του και μετά να βάλει τα μηδενικά του 10/100/1.000 κλπ., ουσιαστικά αναλύοντας τον ίδιο τρόπο. Ακόμα δεν θεωρούσα αυτή την προσέγγιση κατάλληλη και της είπα πως το αποτέλεσμα 50 που βρήκε είναι το ίδιο με αυτό που υπάρχει πριν το ίσον, δηλαδή είναι σαν μην έκανε πράξη. Επιπλέον, ανέφερα πως τον τρόπο αυτόν τον χρησιμοποιούμε για συντομία γιατί έτσι ο αριθμός πολλαπλασιάζεται με το 1 που δίνει πάντα ως αποτέλεσμα τον ίδιο αριθμό οπότε μένουν μόνο τα μηδενικά (το έδειξα κρύβοντας τα μηδενικά σε ένα γινόμενο παραπάνω και έπειτα στο γινόμενο 50·10). Τότε κατάλαβε και έκρυψε τα μηδενικά του 10 με το χέρι της, έλεγξε τον αριθμό 50 που είχε γράψει, πήρε το χέρι της και έβαλε ένα μηδενικό στο αποτέλεσμα του γινομένου.

Στο επόμενο γινόμενο βρήκε με το νου πως 400·10=4000, έναν αριθμό που δεν ήξερε να διαβάζει ούτε να διαχειριστεί. Της εξήγησα πως είναι μεγαλύτερος από το 1.000 που είχαμε ξανακάνει και πως διαβάζεται εύκολα από το ψηφίο που έχει και την αξία «χιλιάδες», το οποίο ξεχωρίζει εύκολα από την τελεία μετρώντας 3 μηδενικά από το τέλος, όσα δηλαδή και οι συλλαβές της λέξης «χι-λιά-δες». Έτσι, τον διαβάσαμε μαζί 2-3 φορές ως «τέσσερις χιλιάδες» και της εξήγησα πως λέμε τέσσερις και όχι τέσσερα γιατί η λέξη χιλιάδες (της εξήγησα πως έχουμε «μία χιλιάδα, πολλές χιλιάδες») που ακολουθεί είναι κοριτσάκι, όπως η γωνία και η πλευρά που είχαμε αναφέρει κάποια άλλη φορά. Συμφώνησε και έδειξε πως κατάλαβε και θυμάται.

Εδώ αποφάσισα να μην κάνουμε διαίρεση με το 10, 100 και 1.000 για να μην προκληθεί σύγχυση. Κάναμε μερικά ακόμη παραδείγματα αριθμών με το δεκαδικό τους ανάπτυγμα και μετά προχωρήσαμε στην επόμενη άσκηση, τις «ταυτότητες των αριθμών». Της είπα να διαλέξει τους αριθμούς που ήθελε να γνωρίσει καλύτερα αλλά και τη γλώσσα στην οποία ήθελε να το κάνει κάθε φορά. Ξεκίνησε με το 5 στα ελληνικά, το 12 σε ελληνικά και αγγλικά, και ολοκλήρωσε με το 100 στα αγγλικά.

Στη γραφή της λέξης κάθε αριθμού έκανε την προσπάθειά της μόνη της χωρίς να επέμβω. Δεν θυμόταν μόνο τον αριθμό 12 στα αγγλικά και έτσι την βοήθησα να το γράψει. Στον αριθμό 100 ήξερε πώς λέγεται στα αγγλικά αλλά δε θυμόταν πώς γράφεται. Επειδή όμως το είχε ήδη γράψει στην άσκηση, έγραψε τη σωστή γραφή του αγγλικά στο τετράδιό της. Στο δεκαδικό ανάπτυγμα, στους ζυγούς/μονούς και στους προηγούμενους/επόμενους αριθμούς δε δυσκολεύτηκε καθόλου. Οι μόνες δυσκολίες της ήταν στις πράξεις ±10, ±100 και στις έννοιες μισό και διπλάσιο.

Εξήγησα στην Αν. τις έννοιες αυτές με την καθημερινή τους σημασία και με τη χρήση τους στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, της είπα πως λέμε ότι έχουμε μια σοκολάτα και φάγαμε τη μισή/half ή ότι ξέρουμε μια συνταγή για 2 άτομα αλλά αν θέλουμε να μαγειρέψουμε για 4 πρέπει να βάλουμε τη διπλάσια ποσότητα. Φάνηκε να γνωρίζει και να αντιλαμβάνεται τις έννοιες μισό και διπλάσιο, όμως δεν μπορούσε να τις διαχειριστεί σε πράξεις. Έκανε κάποιους πολλαπλασιασμούς με το νου (5·2 και 100·2), όμως δε μπορούσε να κάνει το ίδιο με τη διαίρεση.

Για να καταλάβει τη σχέση και τη διαφορά και να προσπαθήσει να το σκεφτεί με το νου της είπα στο μισό του 100 να σκεφτεί ότι 50·2=100 και ότι έτσι προκύπτει πως 100:2=50. Το ίδιο της είπα και για το μισό του 12, όπου εκεί με τους μικρότερους αριθμούς ήταν πιο εύκολη η κατανόηση. Η Αν είπε «I understand, but I don’t know this teacher», δείχνοντας το σύμβολο της διαίρεσης. Έτσι, την ενθάρρυνα να κάνει τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις με το νου, ενώ για το μισό και το διπλάσιο της είπα πως μπορεί να χρησιμοποιήσει την αριθμομηχανή. Ήξερε πώς να την χρησιμοποιήσει και ξαφνιάστηκε όταν είδε τον αριθμό 2,5 ως το μισό του 5. Της είπα πως λέγεται δεκαδικός αριθμός και είναι μεγαλύτερος από 2 αλλά μικρότερος από 3 γράφοντας 2<2,5<3 και καταλήγοντας στις συγκρίσεις που κάναμε νωρίτερα.