ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ Π.Δ.Μ. – ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ ΠΑ.ΜΑΚ ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ Α.Π.Θ. – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ Δ.Π.Θ.

΄΄Ικανότητες μαθητών Ε΄ - ΣΤ΄ Δημοτικού στα κλάσματα και επίλυση προβλήματος΄΄

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Της Μπούτσκου Λεμονιάς

Α.Μ. 579

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΤΙΤΛΟΥ

στην «Διδακτική των Μαθηματικών»

ΦΛΩΡΙΝΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ, 2018

ΦΥΛΛΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

1. Επόπτης: Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής

Βαθμός: ______________________________

Υπογραφή: Ημερομηνία:

2. Δεύτερος Βαθμολογητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης, Αν.Καθηγητής

Βαθμός: ______________________________

Υπογραφή: Ημερομηνία:

3. Τρίτος Βαθμολογητής: Τσακιρίδου Ελένη ,Καθηγήτρια

Βαθμός: ______________________________

Υπογραφή: Ημερομηνία:

Γενικός Βαθμός: ____

Η συγγραφέας, Μπούτσκου Λεμονιά, βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος έργου είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει η κατάλληλη αναφορά στις εργασίες τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

Υπογραφή:

Ημερομηνία:

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους μου πρόσφεραν τη βοήθειά τους και συνέβαλαν στην ολοκλήρωσή της.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Λεμονίδη για τις εύστοχες παρατηρήσεις του και για όλη την καθοδήγησή του κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής.

Ευχαριστώ πολύ και την οικογένειά μου και ιδιαίτερα το σύζυγό μου Σταύρο για την συμπαράστασή του , την στήριξή και την υπομονή που έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ βαθιά την μητέρα μου που με βοηθά με κάθε τρόπο…όπου και αν βρίσκεται !!

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εμπειρικής μελέτης ήταν να καταγράψει τις ικανότητες μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ Τάξης Δημοτικών Σχολείων, οι οποίοι συμμετείχαν σε Μαθηματικό Διαγωνισμό, όσον αφορά την αντιμετώπιση προβλημάτων με ρητούς αριθμούς. Παράλληλα μελετήθηκε το κατά πόσο υπάρχει διαφορά ανάμεσα στους μαθητές της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης, όσον αφορά στις στρατηγικές επίλυσης και στα λάθη που κάνουν κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. Οι μαθητές που έλαβαν μέρος στον διαγωνισμό δεν έλαβαν κάποιου είδους εκπαίδευση ώστε να εκφράσουν προφορικά ή γραπτά τον τρόπο σκέψης τους κατά την εκτέλεση των καθορισμένων εργασιών. Επομένως, εξετάστηκε αν αυτοί οι μαθητές είναι σε θέση να εκτελούν πράξεις με ρητούς αριθμούς, ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν και ποια λάθη κάνουν. Εξετάστηκε επίσης αν μπορούν να δικαιολογήσουν τις απαντήσεις τους σε προβλήματα με ρητούς αριθμούς και επιπλέον εξετάστηκε η ικανότητα αυτή με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων καθώς επίσης και με τη δυνατότητα ανάπτυξης μεταγνωστικών δεξιοτήτων.

ΛΕΞΕΙΣ – ΚΛΕΙΔΙΑ

Κλάσματα, Επίλυση προβλήματος, Μεταγνώση

ABSTRACT

Aim of this empirical study was to capture the competencies of 5thand 6^{th} grade of primary school students who participated in a Mathematical Contest with regard to problem-solving with rational numbers. At the same time, it was studied the extent to which there is a difference between the students of 5th and 6^{th} grade, regarding the resolution strategies and the errors they make when solving problems with fractions. The students who took part in the competition did not receive any training in order to express their way of thinking orally in the execution of the assigned tasks. Therefore, it was examined whether these students are able to work with rational numbers, which strategies they use and what mistakes and errors they make. It has also been examined whether they can justify their answers to problems with numbers and in addition have examined this ability with the ability to solve problems as well as with the ability to develop metacognitive skills.

KEY WORDS

Fractions, Problem solving, Metacognition

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μάθηση και διδασκαλία των ρητών και ιδιαίτερα των κλασματικών αριθμών αποτέλεσε για σειρά ετών και συνεχίζει να αποτελεί εξέχον αντικείμενο μελέτης εφόσον λογίζεται ως ιδιαίτερα σημαντική στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών. Ειδικότερα, όπως αναφέρουν οι περισσότεροι ερευνητές, στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση η καλή γνώση των κλασμάτων αποτελεί ισχυρό προβλεπτικό παράγοντα κατάκτησης της γνώσης που σχετίζεται, τόσο με συναφή πεδία (όπως οι αναλογίες και τα ποσοστά), όσο και με την άλγεβρα, ανεξαρτήτως από το νοητικό δυναμικό του μαθητή, τις γνωστικές λειτουργίες του που αφορούν τη μνήμη, το πολιτισμικό υπόβαθρο και τη γλωσσική ικανότητα (Sowder, 1984). Αξίζει να σημειωθεί πως αρχικά η ερευνητική κοινότητα στράφηκε στον τρόπο μάθησης των κλασματικών αριθμών αλλά και στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν. Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές δυσχεραίνουν την εκμάθηση των κλασμάτων και σχετίζονται τόσο με την εννοιολογική όσο και τη διαδικαστική γνώση σχετικά με τα κλάσματα. Στη συνέχεια, το επίκεντρο μετατοπίστηκε στη διδασκαλία των κλασμάτων και στην έμφαση που αποδίδεται στη διαδικαστική ή την εννοιολογική γνώση αλλά και στον τρόπο που οι μαθητές διαχειρίζονται καταλληλότερα κάποιον από τους δύο τύπους μαθηματικής γνώσης.

Επιπλέον είναι σημαντικό να διερευνηθεί και ο ρόλος του εκπαιδευτικού εφόσον αποτελεί τον κύριο κοινωνό της θεωρίας σε πράξη και πρωτεύει στην εκτέλεση της διδακτικής πράξης. Πιο αναλυτικά, οι διδακτικές προσεγγίσεις που υιοθετούν οι εκπαιδευτικοί στη διδασκαλία των κλασμάτων έχουν προσδιοριστεί ως κρίσιμος παράγοντας διεκπεραίωσης της μάθησης των κλασματικών αριθμών. Έτσι, επισημαίνεται σημαντικός αριθμός διδακτικών λαθών που σχετίζονται με την παιδαγωγική γνώση των εκπαιδευτικών για τους παράγοντες που προσδιορίζουν την καταλληλότητα μίας διδακτικής παρέμβασης όσο και με την εννοιολογική κατανόηση των κλασματικών αριθμών εκ μέρους τους. (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2012)

Η διδασκαλία των κλασμάτων εντάσσεται σε όλα τα αναλυτικά προγράμματα και στην Πρωτοβάθμια και την Δευτεροβάθμια εκπαίδευση και θεωρείται πολύ σημαντική για την κατανόηση και άλλων μαθηματικών πεδίων, όπως η άλγεβρα, η στατιστική, οι πιθανότητες κλπ. Ο Smith αναφέρει: «*εξαιτίας της στενής σχέσης* *μεταξύ των ρητών αριθμών και των κλασμάτων, αυτοί οι όροι συνήθως εναλλάσσονται με αποτέλεσμα να προκαλείται μεγάλη σύγχυση»* (Smith, 1995, p. 6).

Το κλάσμα μπορεί να έχει διαφορετικές εκφράσεις, όπως αναφέρεται στο κεφάλαιο 1 και αυτές οι διαφορετικές εκφράσεις είναι δυνατό να δημιουργήσουν σύγχυση, αν δεν διαχειρίζονται σωστά από τη διδασκαλία. Πολλοί μαθητές δυσκολεύονται από τη μοναδική και υπερβολική χρήση του κλάσματος ως μέρος – όλου, όπως όταν το κλάσμα αναφέρεται σε περισσότερο από μια ολόκληρη μονάδα (π.χ. 5/3), οι μαθητές που χρησιμοποιούν περισσότερο την έκφραση μέρος – όλου, δυσκολεύονται να πάρουν και μια δεύτερη μονάδα. Σύμφωνα με τον Siegler και τους συνεργάτες του (2010, p. 26-34), για την καλύτερη κατανόηση των πράξεων με κλάσματα, απαιτείται η χρήση μοντέλων και οπτικοποίησης, εκτίμηση, αντιμετώπιση των παρανοήσεων και κατασκευή πλαισίων.

Ο κύριος σκοπός της παρούσας ερευνητικής διαδικασίας είναι αφενός η διερεύνηση των λαθών τα οποία κάνουν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα, οι κύριοι λόγοι για τους οποίους κάνουν αυτά τα λάθη, το κατά πόσο η δυνατότητα επιτυχούς επίλυσης προβλημάτων με κλάσματα συνδέεται με την επίλυση άλλων προβλημάτων από την αριθμητική και η σύγκριση των επιδόσεων των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης. Προκειμένου να επιτευχθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας μελέτης επιλέχθηκε η ποσοτική έρευνα ως η πλέον κατάλληλη προκειμένου να υπάρξει γενίκευση των συμπερασμάτων εντός πραγματικού σχολικού πλαισίου. Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύονται οι διαφορετικές εκφράσεις των ρητών αριθμών και στο δεύτερο κεφάλαιο επιχειρείται μία αποτύπωση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατάκτηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης των κλασμάτων αλλά και τα λάθη τα οποία κάνουν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. Πιο συγκεκριμένα αποτυπώνονται με βάση την ερευνητική βιβλιογραφία ζητήματα που αφορούν τα συνήθη λάθη που κάνουν οι μαθητές. Στη συνέχεια παρατίθεται η έρευνα με τη βασική περιγραφή του σκοπού και των ερευνητικών ερωτημάτων της, τη μεθοδολογία, τα αποτελέσματα και τη συζήτηση με τα συμπεράσματά της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Οι διαφορετικές εκφράσεις του κλάσματος

Είναι κοινά αποδεκτό πως οι όροι «κλάσμα» και «ρητός» χρησιμοποιούνται συχνά από τους μελετητές της ερευνητικής κοινότητας με διαφορετικούς τρόπους και αυτό δημιουργεί σχετική σύγχυση (Smith, 2002). Σύμφωνα με την Kieren (1993), ο όρος «κλάσμα» παραπέμπει σε κάποιο «προσωπικό γνωσιακό σύστημα ιδεών», σύμφωνα με το οποίο λαμβάνει χώρα μια συσχέτιση της διαίσθησης και της τυπικής πρότερης γνώσης, η οποία βασίζεται στην προσωπική θεώρηση του καθενός, ενώ ο όρος «ρητός» αφορά σε ένα σύστημα το οποίο είναι κατασκευασμένο από τους μαθηματικούς. Η άποψη αυτή καταδεικνύει πως η διάκριση αυτή μεταξύ των όρων «κλάσμα» και «ρητός», βασίζεται στη διάκριση μεταξύ συστημάτων.

Μπορούμε να πούμε πως από τη δεκαετία του 1970, οι ερευνητές ασχολούνται με τις υποκατασκευές των ρητών αριθμών. Πρώτη η Kieren (1976), εισήγαγε την ιδέα πως οι ρητοί αριθμοί αποτελούνται από πολλές κατασκευές και πως η κατανόησή τους από τους μαθητές ανάγεται στην κατανόηση της σύμπλευσης αυτών των κατασκευών. Αρχικά παρουσίασε μια ταξινόμηση κατασκευών των ρητών αριμών που αποτελούνταν από κλάσματα, δεκαδικά κλάσματα, κλάσεις ισοδυναμίας κλασμάτων, τελεστές κλπ. Το 1980, η ίδια ερευνήτρια περιέγραψε 5 υποκατασκευές: μέρος – όλου, λόγος, πηλίκο, μέτρο και τελεστής. Υποστήριξε πως αυτές οι κατασκευές αποτελούν τη βάση για την κατανόηση και σωστή αντιμετώπιση των ρητών αριθμών και πως καμιά από τις υποκατασκευές δεν είναι δυνατό να σταθεί μόνη της αλλά ταυτόχρονα κάθε μια δίνει και μια διαφορετική θεώρηση για τα κλάσματα.

Ακολούθησαν διάφοροι ερευνητές οι οποίοι απέδωσαν στους ρητούς και ειδικότερα στα κλάσματα, διαφορετικά νοήματα. Ο Freudenthal (1983) αναφέρει τέσσερις όψεις των κλασμάτων, εντάσσοντάς τα στην φαινομενολογική πηγή των ρητών αριθμών. Η πρώτη όψη αφορά στο ρόλο του κλάσματος ως «τεμαχιστής», αναφερόμενος στην εμπειρική όψη του κλάσματος, που βασίζεται σε δραστηριότητες όπως η σύγκριση ποσοτήτων. Η δεύτερη όψη αφορά στον πιο διακριτό τρόπο όπου παρουσιάζονται τα κλάσματα, δηλαδή, στο όλο – μέρος, δηλαδή παρουσιάζονται ως ολότητες που διαιρούνται σε ίσα μέρη. Η τρίτη όψη του κλάσματος αφορά στην επέκταση της έννοιας του μέρος – όλου, και αναφέρεται στη σύγκριση μερών διαφορετικών ολοτήτων, και με αυτόν τον τρόπο επεκτείνει την έννοια του κλάσματος, εντάσσοντας και τα καταχρηστικά κλάσματα. Η τέταρτη και τελευταία, κατά τον Freudenthal, κατασκευή αφορά στην έννοια του κλάσματος ως τελεστής και υποστηρίζει πως προκύπτει από τις άλλες τρεις κατασκευές του. Οι Behr, Wachsmuth, Post & Lesh (1984), υποστηρίζουν πως κάθε ρητός και συνεπώς κάθε κλάσμα μπορεί να ερμηνευτεί σαν μέρος του όλου, σαν πηλίκο και σαν τελεστής. Η Kieren (1993), υποστηρίζει πως η μορφή μέρος – όλου μπορεί να εμπεριέχεται στις άλλες κατασκευές του ρητού και επομένως κάθε ρητός μπορεί να ερμηνευτεί σαν πηλίκο, μέτρηση, τελεστής και λόγος.

Άλλοι ερευνητές, επικεντρώνοντας τις έρευνές τους στην επίλυση προβλημάτων, τοποθετούν την έννοια του κλάσματος στο γενικότερο πλάισιο του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου, και θεωρούν πως η έννοια αυτή υπάγεται στο γενικότερο πλαίσιο τριών τύπων προβλημάτων: του ισομορφισμού των μέτρων, του γινομένου των μέτρων και των πολλαπλών αναλογιών. Η Marshall (1993), υποστηρίζει πως υπάρχουν πέντε διαφορετικές ερμηνείες του ρητού και ειδικότερα του κλάσματος: μέρος – όλου, λόγος, μέτρηση, πηλίκο, τελεστής. Οι Behr κ.α. (1993), μέσα από την έρευνά τους, υποστήριξαν ότι οι πέντε υποκατασκευές των ρητών αριθμών έχουν κατά κάποιο τρόπο αντέξει στη δοκιμασία του χρόνου και ως εκ τούτου, επαρκούν για να διευκρινίσουν τη μεγάλη σημασία των ρητών αριθμών στην διδασκαλία των μαθηματικών.

1.1 Το κλάσμα ως μέρος του όλου

Η υποκατασκευή του μέρος – όλου, θεωρείται από τους ερευνητές ως η θεμελιώδης βάση για την κατανόηση των ρητών αριθμών αλλά και για τις άλλες κατασκευές (Behr et al., 1983; Freudenthal, 1983; Kieren, 1988; Pitkethly & Hunting, 1996; Ni & Zhou, 2005). Σύμφωνα με τους Lamon (1999) και Marshall (1993), η υποκατασκευή αυτή στηρίζεται στην ικανότητα των μαθητών να διαιρούν μια συνεχή ποσότητα, σε ομάδες που είναι ίσες σε μέγεθος, για παράδειγμα, τα δυο τρίτα σαν μέρος ενός όλου, ερμηνεύονται σαν τα δυο από τα τρία ίσου μεγέθους μέρη. Οι Post και Cramer (1987), αναφέρουν πως ένα συνηθισμένο λάθος των μαθητών είναι να νομίζουν πως το 1/3 είναι μικρότερο από το 1/4 γιατί θεωρούν πως η ίδια ολότητα χωρίστηκε σε περισσότερα κομμάτια.

Στη συγκεκριμένη υποκατασκευή, το όλο χωρίζεται σε κ κομμάτια και κάθε κομμάτι συμβολίζεται ως 1/κ ή στην περίπτωση λ κομματιών, τότε λ/κ. Συνήθως, το κλάσμα αναπαρίσταται ως μέρος επιφάνειας ενός γεωμετρικού σχήματος που είναι χωρισμένη σε ίσα τμήματα ή ως μέρος ενός συνόλου αντικειμένων. Ωστόσο, παρά τον θεμελιακό χαρακτήρα αυτής της κατασκευής, πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν πως η εκτεταμένη έμφαση σε αυτό το σχήμα, είναι δυνατό να δημιουργήσει σύγχυση στους μαθητές (Kerslake, 1986; Mack, 1993). Οι ίδιοι ερευνητές υποστηρίζουν πως εκτός από τη σύγχυση που μπορεί να δημιουργηθεί στους μαθητές, η εκτεταμένη αναφορά σε αυτό το σχήμα, από τους εκπαιδευτικούς, είναι δυνατό να εντείνει την αδυναμία των μαθητών να δουν το κλάσμα ως αριθμό. Έτσι, το κλάσμα 2/3 το αντιμετωπίζουν ως δυο μέρη από τα τρια ενός όλου και όχι ως ενιαίο αριθμό όπως τον ακέραιο 5. Ο Freudenthal (1983) συμπληρώνει πως αυτή η κατασκευή είναι πολύ περιορισμένη και αναφέρεται μόνο σε καταχρηστικά κλάσματα. Οι Behr κ.α. (1984) θεωρούν πως υπάρχει απόκλιση στην ικανότητα των μαθητών να αντιληφθούν καινα κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ του μεγέθους και του αριθμού των ίσων μερών σε μια ολότητα η οποία είναι χωρισμένη σε ίσα μέρη.

Από τα αποτελέσματα της έρευνας των Armstrong & Larson (1995), προέκυψε πως όταν οι μαθητές συγκρίνουν κλάσματα, δεν είναι προσεκτικοί στα μεγέθη του όλου από τα οποία προέρχονται τα ίσα μέρη. Τα παραπάνω αποτελέσματα συνάδουν με αυτά των D’Ambrosio & Mewborn (1994), στα οποία αναφέρεται πως οι μαθητές ορίζουν σαν «ίσα», τα μέρη που μοιάζουν, και όχι αυτά που έχουν το ίδιο μέγεθος. Δηλαδή, υπάρχει σύγχυση στις συγκρίσεις μεγεθών των όλων, τα οποία διαφέρουν ως προς τα μέρη που πρέπει να συγκριθούν και είναι όμοια στο σχήμα.

Οι Behr κ.α. (1994) αναφέρουν πως η λανθασμένη κατανόηση της κατασκευής μέρος – όλου, και της σχέσης της με τη μονάδα, είναι δυνατό να προκαλέσει προβλήματα στην πρόσθεση και σύγκριση κλασμάτων αλλά και στην εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων, καθώς, είναι δυνατό να μην μπορούν οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι η ολότητα πρέπει να είναι χωρισμένη σε ίσα μέρη, και ως εκ τούτου, να κάνουν το λάθος να προσθέτουν αριθμητές με αριθμητές και παρονομαστές με παρονομαστές. Στο συγκεκριμένο συμπέρασμα τείνει και ο Post (1981), ο οποίος αναφέρει πως οι μαθητές πιστεύουν σε έναν λανθασμένο αλγόριθμο για την πρόσθεση κλασμάτων, π.χ. 2/3 + 3/4 = 5/7, καθώς έχουν λανθασμένη κατανόηση για τη σχέση μέρος – όλου.

1.2 Το κλάσμα ως πηλίκο

Στην κατασκευή αυτή, το κλάσμα θεωρείται ως αποτέλεσμα της διαίρεσης του αριθμητή δια του παρανομαστή. Εδώ ο αριθμητής ταυτίζεται με το διαιρετέο και αναφέρεται στην ποσότητα που θα μοιραστεί, ενώ παρονομαστής ταυτίζεται με το διαιρέτη και αναφέρεται στο πλήθος των ίσων μερών στα οποία θα μοιραστεί η ποσότητα. Αν λοιπόν έχουμε την αναπαράσταση κ/λ, το κ αναπαριστά την ποσότητα που θα κατανεμηθεί ισομερώς, ενώ το λ αναπαριστά τον αριθμό των μερών της διαμέρισης, με δεδομένο ότι τα κ και λ είναι δυνατό να παριστάνουν διαφορετικά είδη αντικειμένων και επιπλέον δεν υπάρχει ο περιορισμός κ<λ (Κολέζα, 2000).

Στο συγκεκριμένο σχήμα, χρησιμοποιούνται δραστηριότητες που περιλαμβάνουν προβλήματα «δίκαιης μοιρασιάς», με σκοπό να βοηθηθούν οι μαθητές ώστε να κατανοήσουν την κατασκευή των κλασματικών αριθμών (Steefland, 1993). Μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στο σχήμα του κλάσματος ως πηλίκο και σε αυτό τους μέρος – όλου που είδαμε παραπάνω, είναι πως στην κατασκευή του πηλίκου, αναμειγνύονται πιθανότατα δυο διαφορετικοί χώροι, όπως λ.χ. μοιράζονται 2 πίτσες σε 3 ανθρώπους. Επιπλέον, εφόσον το αποτέλεσμα αποτελεί μια αριθμητική τιμή και όχι τα μέρη που πήραμε κατά τη διαδικασία του μοιράσματος, στην κατασκευή του πηλίκου ο αριθμητής είναι δυνατό να είναι μικρότερος, μεγαλύτερος ή ίσος με τον παρονομαστή και ως εκ τούτου, το αποτέλεσμα να είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο με τη μονάδα.

Γενικά μπορούμε να πούμε πως στη σύγχρονη εκπαίδευση, η έννοια του κλάσματος εισάγεται συνήθως μέσα από το μοντέλο του μέρους – όλου. Αυτό το μοντέλο , όπως αναφέραμε παραπάνω, περιλαμβάνει ένα γεωμετρικό σχήμα, όπως έναν κύκλο ή ένα ορθογώνιο, που θεωρείται ως «όλο». Επιπροσθέτως, το όλο χωρίζεται ή διαιρείται σε ένα συγκεκριμένο αριθμό ισομεγεθών μερών. Το μέγεθος των ξεχωριστών μερών του όλου εξαρτάται από τον αριθμό των μερών που θέλουμε να διαιρέσουμε τη συγκεκριμένη ποσότητα, το όλο. Σε όσα περισσότερα κομμάτια διαιρούμε την ολόκληρη ποσότητα, τόσο μικρότερα κομμάτια θα δημιουργούνται. Προβλήματα, όπως για παράδειγμα: «*Ποιος παίρνει περισσότερη πίτσα, εκείνος που κάθεται στο τραπέζι που έχει 2 πίτσες για 3 άτομα ή εκείνος που κάθεται στο τραπέζι που έχει 5 πίτσες για 8 άτομα;*», διευκολύνουν τη σύνδεση του κλάσματος ως «μέρους

– όλου» με μια αντίληψη του κλάσματος ως «πηλίκο». Στην πρώτη περίπτωση το καθένα από τα τρία άτομα παίρνει το 1/3 της πίτσας (το κλάσμα ως μέρος – όλου) και συνολικά 1/3 + 1/3=2/3 (το κλάσμα ως πηλίκο). Η παραπάνω διαπίστωση συνάδει με το ότι οι υποκατασκευές δεν μπορεί να σταθούν η κάθε μια μόνη της, αλλά πως διδακτικά, είναι δυνατό να αξιοποιηθούν συνδυαστικά ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος.

1.3 Το κλάσμα ως τελεστής

Στη συγκεκριμένη ερμηνεία, το κλάσμα νοείται ως μία συνάρτηση που εφαρμόζεται σε αντικείμενα όπως αριθμούς, συλλογές διακριτών αντικειμένων, γεωμετρικά σχήματα, και τα μετασχηματίζει ως προς κάποιο μέγεθος (π.χ. μέγεθος αριθμού, πλήθος, επιφάνεια) (Beh et al., 1993). Για παράδειγμα, όταν ζητούνται τα 2/3 του 56, το κλάσμα λειτουργεί ως τελεστής. Σύμφωνα με τη Lamon (1999), με αυτή την κατασκευή, μπορούμε να ορίσουμε το κλάσμα ως τελεστή ή ως μετασχηματιστή και ως εκ τούτου να μεταβάλλουμε το μέγεθος μιας ποσότητας π.χ. να μικρύνουμε ή να μεγεθύνουμε ευθύγραμμα τμήματα. Επίσης, με τη συγκεκριμένη κατασκευή οι μαθητές είναι δυνατό να κατανοήσουν τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων, ιδιαίτερα για τα προβλήματα τύπου: να υπολογιστεί το 1/4 του 1/2 (Behr et al., 1993).

1.4 Το κλάσμα ως λόγος

Το κλάσμα ως λόγος εκφράζει τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων (Hart, 1988). Οι Behr κ.α. τονίζουν πως είναι περισσότερο ορθό, ο λόγος να λαμβάνεται ως συγκριτικός δείκτης και όχι ως ένας αριθμός, ενώ οι Lamon (1994) και Streefland (1991), αναφέρουν πως η έκφραση του ρητού ως λόγος στηρίζεται στην ικανότητα του συντονισμού, δηλαδή, ο αριθμός των αντικειμένων που πρέπει να μοιραστεί, να «συντονίζεται» με τον αριθμό των ατόμων που θα τα μοιραστούν. Σύμφωνα με την Κολέζα (2000) από μαθηματικής άποψης αναφερόμαστε σε δύο χώρους μέτρησης που μπορούν να συνδεθούν είτε με μία «μεταξύ» των χώρων στρατηγική οπότε και μιλάμε για λόγο υπό μορφή ρυθμού μεταβολής είτε με μια «εντός» του ίδιου χώρου στρατηγική και μιλάμε για «εσωτερικό» λόγο. Για παράδειγμα η σύγκριση των τμημάτων που προκύπτουν από διαμοιρασμό 3 πιτσών σε 7 κορίτσια και μίας πίτσας σε 3 αγόρια μπορεί να διενεργηθεί είτε με σύγκριση των λόγων 3/7 και 1/3 (μεταξύ στρατηγική) είτε των λόγων 3/1 (πίτσες) και 7/3 (παιδιά) οπότε και μιλούμε για σύγκριση εσωτερικών λόγων (καθαρών αριθμών) και όχι σχέσης μεταξύ μεγεθών.

Είναι δυνατό να δούμε τα κλάσματα ως ένα υποσύνολο του λόγου και έτσι είναι δυνατό να εκφράσουν συγκρίσεις μεγεθών. Οι δεκαδικοί, που αποτελούν μια δεκαδική αναπαράσταση των κλασμάτων, κατά τον ίδιο τρόπο είναι δυνατό να εκφράσουν συγκρίσεις μεγεθών. Οι Lachance & Confrey (2002) αναφέρουν πως τα κλάσματα και οι δεκαδικοί αριθμοί προέρχονται από τους λόγους, και συνακόλουθα η διδασκαλία τους βασίζεται στους λόγους με αποτέλεσμα, οι μαθητές να βρίσκουν εύκολη της διασύνδεση με τα προβλήματα από την καθημερινότητά τους. Η Marshall (1993), υποστηρίζει ότι για να συλλάβουν οι μαθητές την έννοια του λόγου, πρέπει να είναι σε θέση να συνειδητοποιήσουν την ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ δυο ποσοτήτων και να κατανοήσουν πως σε μια σχέση λόγου, οι δυο συσχετιζόμενες ποσότητες αλλάζουν ταυτόχρονα. Συνεπώς, όταν οι δυο ποσότητες πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, η τιμή του λόγου παραμένει ως έχει. Αυτή η ικανότητα της αναγνώρισης του αμετάβλητου του λόγου, θεωρείται απαραίτητη αφενός για τη διάκριση μεταξύ των κατασκευών «μέρος – όλου» και «λόγου», αφετέρου δε για την ανάπτυξη της ιδέας της ισοδυναμίας. Παρόλα αυτά, οι μαθητές που έχουν την ικανότητα να κατασκευάσουν ισοδύναμα κλάσματα, δεν είναι απαραίτητο να είναι ικανοί να αναγνωρίσουν το αμετάβλητο του λόγου (Lamon, 1999).

1.5 Το κλάσμα ως μέτρο ή μέτρηση

Σε αυτή την κατασκευή το κλάσμα κ/λ μπορεί να παρουσιαστεί ως ένα σημείο πάνω στην αριθμογραμμή στην οποία θέτουμε αυθαίρετα ένα σημείο ως αρχή που αντιστοιχεί στο μηδέν και επαναλαμβάνουμε το μοναδιαίο κλάσμα «1/λ» κ φορές. Σύμφωνα με την Ni (2000), πάνω στην αριθμογραμμή είναι δυνατό να αναπαρασταθούν θεμελιώδεις ιδιότητες των κλασματικών αριθμών όπως για παράδειγμα, η πυκνότητα, η διαδοχικότητα, η μοναδικότητα και το άπειρο των κλασματικών αριθμών.

Η αναπαράσταση των κλασμάτων πάνω στην αριθμογραμμή ευνοεί την ανάπτυξη της αίσθησης των αριθμών και κατά συνέπεια των κλασμάτων. Βασικό στοιχείο της αίσθησης του αριθμού είναι η ικανότητα διερεύνησης και ερμηνείας των αριθμών και των πράξεων χωρίς την εκτέλεση τυποποιημένων αλγορίθμων. Σύμφωνα με τον Howden: «*Η αίσθηση του αριθμού μπορεί να περιγραφεί ως μια καλή διαίσθηση για τους αριθμούς και τις σχέσεις τους. Αναπτύσσεται βαθμιαία, ως αποτέλεσμα της διερεύνησης των αριθμών, της οπτικοποίησής τους σε μια ποικιλία πλαισίων και τους συσχετισμούς τους με τρόπους που δεν περιορίζονται από τους κλασσικούς αλγόριθμους*» (Howden, 1989, p. 11). Γενικά, τα άτομα που έχουν την αίσθηση του αριθμού εκδηλώνουν μια άνεση σε αριθμητικά ερωτήματα και προβλήματα και είναι ικανά να κάνουν συσχετισμούς με την καθημερινή τους εμπειρία, μπορούν να αναπαριστούν τους αριθμούς και τις πράξεις με πολλούς τρόπους και να εκτιμούν το αποτέλεσμα ενεργειών σε αριθμούς. Η χρήση της αριθμογραμμής στην περίπτωση των κλασμάτων, μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση του κλάσματος, ως αριθμό και όχι ως σχέση μεταξύ δυο άλλων αριθμών (Ni, 2000).

Συνεπώς, το κλάσμα έχει διαφορετικές εννοιολογικές πτυχές (νοήματα). Για παράδειγμα το 3/4 μπορεί να τα σημαίνει τα 3 από τα 4 ίδια τμήματα ή να υποδηλώνει διαίρεση (3 αντικείμενα και τα μοιράζω σε τέσσερα άτομα), ή λόγο (3 κίτρινα αυτοκίνητα για κάθε 4 πράσινα αυτοκίνητα που συναντούμε). Επίσης το 3/4 μπορεί λειτουργεί και ως τελεστής (π.χ. τα 3/4 του κιλού) που στον συγκεκριμένο παράδειγμα μειώνει μία ποσότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Δυσκολίες και λάθη των μαθητών στην αντιμετώπιση προβλημάτων με κλάσματα

Η έννοια του κλάσματος είναι μία από τις πιο σημαντικές έννοιες με τις οποίες έρχονται σε επαφή τα παιδιά στο Δημοτικό Σχολείο και σχετίζεται τόσο με την ανάπτυξη δεξιοτήτων χειρισμού καθημερινών προβλημάτων όσο και με τα θεμέλια της άλγεβρας (Γαγάτσης, Ευαγγελίδου, Ηλία & Σπύρου, 2004). Ωστόσο, από την βιβλιογραφία προκύπτει πως οι μαθητές δυσκολεύονται σημαντικά στην κατανόησή τους και κατ' επέκταση στη λειτουργική αξιοποίησή τους (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου & Σιακαλλή, 2001).

Τα κλάσματα διδάσκονται για πρώτη φορά στους μαθητές της Γ' δημοτικού (Λεμονίδης κ.α.,2010). Σε αυτή την τάξη, τα παιδιά έρχονται σε επαφή αρχικά με την έννοια της κλασματικής μονάδας μέσα από παραδείγματα που προέρχονται από την καθημερινή ζωή. Επιπλέον παρουσιάζονται τα δεκαδικά κλάσματα και γίνεται σύνδεση των κλασμάτων με τους δεκαδικούς αριθμούς, με δραστηριότητες όπως η χρήση της αριθμομηχανής. Το ευρώ και οι υποδιαιρέσεις του χρησιμοποιούνται σε πολλές δραστηριότητες με δεκαδικούς αριθμούς, με στόχο να αξιοποιηθούν οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών. Επίσης, παρουσιάζονται τα ισοδύναμα κλάσματα καθώς επίσης τα κλάσματα που ισούνται με τη μονάδα. Σύμφωνα με τη συγγραφική ομάδα του βιβλίου, δίνεται έμφαση κυρίως στο σχήμα μέρος – όλο, τόσο σε συνεχείς όσο και σε διακριτές ποσότητες. Επίσης, διδάσκεται στους μαθητές η συμβολική γραφή και η ονοματολογία κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών.

Οι ρητοί αριθμοί ορίζονται ως το σύνολο των αριθμών

–

δηλαδή, το σύνολο των αριθμών που είναι δυνατό να εκφραστούν ως κλάσματα της μορφής –, με τους ακέραιους αριθμούς και τον αριθμό . Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι ευρύτερο του συνόλου των φυσικών και των ακεραίων αριθμών, τα οποία και εμπεριέχει και μια σημαντική διαφορά αυτών είναι πως ενώ οι ακέραιοι αριθμοί εκφράζουν τον πληθάριθμο μιας ποσότητας με έναν αριθμό που συγκροτείται από μονάδες, οι ρητοί αριθμοί εκφράζονται με μια σχέση δύο ακεραίων αριθμών σε μορφή πηλίκου.

Αυτή η διαφορά αναδεικνύει και μια από τις ερμηνείες που δίνονται για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στους ρητούς αριθμούς. Πολλοί ερευνητές (Ni&Zhou, 2005; Vamvakoussietal, 2011,2012; Vamvakoussi&Vosniadou, 2004; VanDooren, Lehtinen, Verchaffel, 2015 κ.α.) υποστηρίζουν τη λεγόμενη «προκατάληψη των φυσικών αριθμών» (the natural number bias). Εναλλακτικά, ο ίδιος όρος αναφέρεται και σαν «προκατάληψη των ολόκληρων αριθμών» (whole number bias), ο οποίος εισήχθη για πρώτη φορά από τους Ni&Zhou (2005). Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2016), προτιμάται ο πρώτος όρος, καθώς υποστηρίζει πως είναι μαθηματικά ορθότερος.

Ο όρος «προκατάληψη των φυσικών αριθμών» αφορά στην ιδέα πως οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κάνοντας πράξεις με τους ρητούς αριθμούς, μπορεί να οφείλονται σε ακατάλληλες εφαρμογές των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών. Επομένως, είναι ιδιαίτερα σημαντική η καλή αίσθηση της έννοιας του φυσικού αριθμού καθώς βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν τις πρώτες αριθμητικές έννοιες αλλά και γενικότερα στη βαθιά μαθηματική κατανόηση και γνωστική τους ανάπτυξη. Εφόσον η κατανόηση των φυσικών αριθμών δεν μπορεί να εφαρμοστεί πάντα στις περιπτώσεις των ρητών αριθμών και παράλληλα οι μαθητές εφαρμόζουν τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών και στους ρητούς αριθμούς, παρουσιάζονται λάθη που αφορούν κυρίως στο γεγονός πως οι ρητοί αριθμοί γίνονται αντιληπτοί με διαφορετικό τρόπο σε σχέση με τους φυσικούς αριθμούς (Nunes&Bryant, 2008).

Όπως αναφέρουν οι Λεμονίδης κ.α. (2016) και Stafylidou&Vosniadou (2004), οι βασικές διαφορές μεταξύ των ρητών και των ακεραίων αριθμών στις οποίες οφείλονται τα λάθη των μαθητών όταν κάνουν πράξεις με κλάσματα αλλά και για τη γενικότερη γνωστική σύγκρουση των μαθητών, μπορούν να συνοψιστούν στα εξής σημεία:

- Ο φυσικός αριθμός είναι ένας αριθμός ενώ το κλάσμα είναι σχέση δύο αριθμών .
- Ο φυσικός αριθμός συνδέεται με την απόλυτη τιμή μιας ποσότητας (δηλαδή τον πληθάριθμο) και συνακόλουθα απαντά στην ερώτηση «πόσα πολλά», ενώ το κλάσμα παριστάνει ποσοτική σχέση και επομένως απαντά στην ερώτηση «πόσο πολύ».

- Η μονάδα είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός ενώ στα κλάσματα δεν υπάρχει μοναδικός μικρότερος αριθμός.
- Οι φυσικοί αριθμοί υποστηρίζονται από κατασκευής στην ακολουθία που τους διέπει, ενώ τα κλάσματα δεν υποστηρίζονται από αυτή την ακολουθία.
- Ο πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών μεγαλώνει τους αριθμούς ενώ ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων μπορεί να μεγαλώσει το κλάσμα ή να το μικρύνει.
- Η διαίρεση φυσικών αριθμών μικραίνει τους αριθμούς ενώ η διαίρεση κλασμάτων μπορεί να μεγαλώσει το κλάσμα ή να το μικρύνει.
- Υπάρχει πάντα ένας προηγούμενος και ένας επόμενος φυσικός αριθμός και ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς δεν υπάρχει κανένας άλλος, ενώ στα κλάσματα δεν υπάρχει ένας μοναδικός επόμενος ή προηγούμενος αριθμός και ανάμεσα σε δυο κλάσματα υπάρχουν άπειρα κλάσματα.

2.1 Δυσκολίες των μαθητών στην κατάκτηση της γνώσης των κλασμάτων

Οι κυριότερες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετίζονται με το φαινόμενο της (ακατάλληλης) μεταφοράς χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών σε μη φυσικούς αριθμούς (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012). Επιπλέον, παρατηρείται δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού, μιας αυτόνομης οντότητας, γεγονός που φαίνεται να οφείλεται στην κυρίαρχη αναπαράσταση του κλάσματος μόνο σε μία μορφή του, αυτής του μέρους ενός όλου (Lamon, 2001).

Συνεπώς, δημιουργείται μία σύγχυση εφόσον το κλάσμα θεωρείται κάτι ξέχωρο από αριθμό μιας και οι αριθμοί που αναγράφονται στο σύμβολό του, οι παρανομαστές και οι αριθμητές, αναπαριστούν ξεχωριστές οντότητες (όλο και μέρος αντίστοιχα) (Pitkethly & Hunting, 1996). Έτσι, παρατηρούνται λάθη που συνδέονται με τον χειρισμό των συμβόλων του κλάσματος με ανεξάρτητο μεταξύ τους τρόπο όπως για παράδειγμα η πρόσθεση του ίδιου αριθμού στον αριθμητή και τον παρανομαστή και η θεώρηση του νέου κλάσματος ως ισοδύναμου του αρχικού ή ο πολλαπλασιασμός μόνο του αριθμητή και όχι του παρανομαστή στην παραγωγή ισοδύναμων κλασμάτων σε διαδικασίες αλγοριθμικής επίλυσης προβλημάτων (Hart, 1987).

Ακόμη, αναφέρονται λάθη που σχετίζονται και με την ίδια την διαισθητική απεικόνιση του κλάσματος ως μέρος συνεχούς επιφάνειας ή διακριτού συνόλου αντικειμένων. Οι μαθητές στρέφουν την προσοχή τους μόνο στο μέρος που χρωματίζεται ή αποκόπτεται και δεν συγκρατούν και τις δύο διαστάσεις που απεικονίζει ένας κλασματικός αριθμός ενώ μπορεί και να μην κατανοούν ότι τα μέρη πρέπει να είναι ισοδύναμα για ισχύει η σχέση που αντανακλά το κλάσμα ενώ δυσκολεύονται και να απαντήσουν σε παρόμοιες ασκήσεις όπου το σύνολο των αντικειμένων είναι πιο μεγάλο από τον παρανομαστή του κλάσματος που τους ζητείται να επιλέξουν (Φιλίππου & Χρίστου, 1995).

Παράλληλα, εννοιολογικές παρανοήσεις που σχετίζονται με την κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού οδηγούν και σε δυσκολίες αναπαράστασης και τοποθέτησης του κλασματικού αριθμού στην κλασματική γραμμή (Post et al.,1993) αλλά και σε δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων στα οποία οι υποδιαιρέσεις στην αριθμητική γραμμή δεν ισούνται με τον παρανομαστή του κλάσματος ή δεν είναι πολλαπλάσια του (Ηλία & Γαγάτση, 2004). Προβλήματα και παρανοήσεις υπάρχουν επίσης και στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος ως αναλογία και συνεπώς της σχέσης αναλογίας των ποσοτήτων του αριθμητή και του παρανομαστή με τρόπο που παρουσιάζει σταθερότητα (Lamon, 1993; Marshall, 1993).

Τέλος, σημαντικές δυσκολίες παρατηρούνται και στη διαδικαστική γνώση των κλασμάτων από τους μαθητές που συνδέονται επίσης με παρανοήσεις εννοιολογικής φύσης. Έτσι, στην πρόσθεση ή την αφαίρεση των κλασμάτων, συχνά οι μαθητές προσθέτουν (ή αφαιρούν) αριθμητές με αριθμητές και παρανομαστές με παρανομαστές (Mack, 1990, Streetfland, 1993, Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Συνοψίζοντας θα μπορούσαμε να πούμε πως τα κλάσματα, οι δεκαδικοί και τα ποσοστά, θεωρούνται τομείς που είναι δύσκολο να διδαχθούν στις τάξεις του Δημοτικού και τα παιδιά είναι δύσκολο να μάθουν. Συμπερασματικά οι λόγοι αυτών των δυσκολιών μπορεί να αφορούν τους τρόπους που είναι δυνατό να παρουσιαστούν, για παράδειγμα:

- Ως μέρος του «όλου» (π.χ. 50% των παιδιών της τάξης είναι κορίτσια, μισό κέηκ)
- Ως μέρος ενός συνόλου (π.χ. τα ¾ των 12 κομματιών μιας πίτσας)
- Ως μέρος ενός αριθμού (π.χ. τα ¾ του 20, το μισό του 10)

- Ένα σημείο στην αριθμογραμμή που παριστάνει έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα σε δυο άλλους (π.χ. το 1.5 βρίσκεται ανάμεσα στο 1 και το 2)
- Το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης (π.χ. 3: 4= 0.75)
- Ως αναφορά σε ποσότητα (π.χ. μισό χιλιόμετρο, μισή ώρα)

Άλλοι λόγοι που δημιουργούν σύγχυση:

- Τα κλάσματα αποτελούν μέρος της καθημερινής μας γλώσσας αλλά δεν χρησιμοποιούνται με συνέπεια (πχ. κανείς δεν λέει «μπορώ να έχω 0.5 μήλο;»)
- Τα κλάσματα αποτελούν μέρος της καθημερινής μας γλώσσας αλλά δεν χρησιμοποιούνται με ακρίβεια (π.χ. κάποιος μπορεί να πει «μπορώ να έχω μικρότερο μισό κομμάτι;»)
- Το θεσιακό σύστημα των ακεραίων αριθμών ερμηνεύεται πιο εύκολα με τους δεκαδικούς αριθμούς και σπάνια κάνουμε αναφορά στην εναλλακτική έκφραση των αριθμών ως π.χ. το 1/10 ή το 1/100 κάποιου αριθμού.
- Τα κλάσματα εισάγουν ένα νέο σύστημα που εκφράζει τους αριθμούς με διαφορετικό τρόπο απ' ότι παρουσιάζονται στην αριθμογραμμή.
- Οι περισσότεροι βρίσκουν πιο εύκολη τη χρήση των ποσοστών καθώς η χρήση του κοινού παρονομαστή 100 επιτρέπει την εύκολη σύγκριση των κλασμάτων.
- Το απόλυτο μέγεθος ενός κλάσματος εξαρτάται από το σύνολο του οποίου αποτελεί μέρος (π.χ. το ½ ενός μεγάλου κέηκ, είναι μεγαλύτερο από το μισό ενός μικρού κέηκ).
- Ένα κλάσμα μιας μονάδας μήκους ή ενός αριθμού μπορεί να εκφραστεί με έναν τρόπο, αλλά μια κλασματική περιοχή μπορεί να εκφραστεί με πολλούς τρόπους (π.χ. το ¼ ενός τετραγώνου μπορεί να εκφραστεί με πολλούς τρόπους, αλλά το ½ του 8 είναι πάντα ίσο με 4).
- Τα παιδιά συχνά αποτυγχάνουν να κατανοήσουν πως το σύνολο των κλασμάτων είναι άπειρο, καθώς ανάμεσα σε δυο κλάσματα μπορείς πάντα να βρεις άλλο ένα π.χ. ανάμεσα στο 1/100 και στο 2/100 μπορείς να τοποθετήσεις το 15/1000.

- Όταν πολλαπλασιάζουμε δυο αριθμούς, το αποτέλεσμα είναι συνήθως ένας μεγαλύτερος αριθμός, ωστόσο όταν πολλαπλασιάζουμε δυο κλάσματα το αποτέλεσμα είναι μικρότερος αριθμός.
- Μπορούμε να βρούμε το κλάσμα ενός αριθμού είτε πολλαπλασιάζοντας είτε διαιρώντας, π.χ. το ½ του 12 είναι ίσο με ½ x 12 ή 12: 2.
- Στα κλάσματα, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των ίσων κομματιών, τόσο μικρότερο είναι το κάθε μέρος, αλλά το μέγεθος του κλάσματος δεν εξαρτάται από τον αριθμητή ή τον παρονομαστή αλλά από το μέγεθος του ενός σε σχέση με το άλλο.
- Είναι απαραίτητη η εξάσκηση, απόκτηση εμπειρίας καθώς και η καλή γνώση της έννοιας του κλάσματος για να κάνει κάποιος μια απλή πρόσθεση π.χ. ¼ + ¼ δεν είναι ίσο με 2/8.
- Οι δεκαδικοί όταν διδάσκονται με τη χρήση νομισμάτων, μπορεί να προκαλέσουν σύγχυση σε παιδιά μικρής ηλικίας, καθώς τα παιδιά πρέπει να εξοικειωθούν πρώτα με το ένα δεκαδικό ψηφίο και στη συνέχεια με δυο ψηφία κλπ.

Είναι σημαντικό τα παιδιά να βοηθηθούν στο να ανακαλύψουν τη σύνδεση των κλασμάτων με όλες αυτές τις περιοχές και να αποκτήσουν εμπειρία σχετικά με το γεγονός πως μπορούν να εκφράσουν το ίδιο πράγμα με διαφορετικούς τρόπους.

Οι Lortie – Forgues, Siegler (2015), διακρίνουν τις δυσκολίες σε δυο μεγάλες κατηγορίες: α) τις εγγενείς δυσκολίες στα κλάσματα, τους δεκαδικούς και τα ποσοστά (δηλαδή, οι δυσκολίες που μπορεί να υπάρχουν ανεξάρτητα από το εκπαιδευτικό σύστημα και το πολιτισμικό επίπεδο των εκπαιδευομένων) β) τις δυσκολίες που αφορούν στην πολιτισμική προέλευση των μαθητών και αναφέρονται στις προϋπάρχουσες γνώσεις τους (δηλαδή, οι δυσκολίες εκείνες που καθορίζονται από τα χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών συστημάτων και δεν είναι εγγενείς).

Οι VanDooren, Lehtinen & Verschaffel (2015) ταξινομούν σε τέσσερις βασικές κατηγορίες τους χώρους που εντοπίζονται τα λάθη που κάνουν οι μαθητές κατά την επεξεργασία προβλημάτων με ρητούς αριθμούς: α) το μέγεθος των ρητών αριθμών προσδιορίζεται με διαφορετικές αρχές σε σχέση με τους φυσικούς αριθμούς β) η διαφορά ανάμεσα στις αριθμητικές πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με αριθμούς μικρότερους της μονάδας γ) οι φυσικοί αριθμοί παριστάνονται με μοναδικό τρόπο, σε αντίθεση με τους ρητούς που έχουν πολλαπλές αναπαραστάσεις δ) οι φυσικοί αριθμοί είναι διακριτοί ενώ οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνοί (δηλαδή, για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ένας επόμενος σε αντίθεση με τους ρητούς αριθμούς όπου για κάθε ρητό δεν υπάρχει μοναδικός επόμενος και ανάμεσα σε δυο ρητούς υπάρχουν άπειροι ρητοί) (Van Dooren, Lehtinen & Verschaffel, 2015, σελ. 2).

2.2 Λάθη και παρανοήσεις κατά την αντιμετώπιση προβλημάτων με κλάσματα

Τα κλάσματα αφορούν σε μια ενότητα που οι μαθητές είναι δύσκολο να μάθουν και οι εκπαιδευτικοί είναι δύσκολο να διδάξουν και αποτελούν μια συνεχή παιδαγωγική πρόκληση για την μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα. Αυτές οι δυσκολίες αρχίζουν νωρίς στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Empson & Levi, 2011; Moss & Case, 1999) και επιμένουν μέχρι το γυμνάσιο και το λύκειο (Armstrong και Larson, 1995; Kamii και Clark, 1995), και ακόμη και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (βλ Orpwood , Schollen, Πράσο, Marinelli-Henriques, & Assiri, 2011). Οι προκλήσεις καθώς επίσης και οι παρεννοήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των κλασμάτων (Gould, Outhred, & Mitchelmore, 2006; Hiebert 1988; NAEP, 2005) πολλές φορές επιμένουν και στην ενήλικη ζωή. Βοηθώντας τους μαθητές να επιτύχουν μια σταθερή βάση στα μαθηματικά, γενικά, και ειδικότερα στα κλάσματα, εξασφαλίζεται η δυνατότητα των μαθητών να αντιμετωπίζουν διαφόρων ειδών προβλήματα, γεγονός που υποδηλώνει ότι αξίζει να αφιερωθεί χρόνος και προσπάθεια για την καλύτερη κατανόηση των μαθητών από τα χρόνια του δημοτικού, προκειμένου να εξασφαλιστεί η επιτυχία των μαθητών αργότερα στα μαθηματικά, αλλά και γενικότερα στην αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινής ζωής.

Οι ερευνητικές κοινότητες έχουν αρκετή δουλειά μπροστά τους για να αρχίσουν να αντιμετωπίζουν τις προκλήσεις που παρουσιάζονται από τη μάθηση και τη διδασκαλία των κλασμάτων. Οι επιπτώσεις είναι ευρείες (αγγίζοντας, για παράδειγμα, ένα ευρύ φάσμα τομέων της μεταγενέστερης σταδιοδρομίας των ατόμων), αλλά είναι επίσης βαθιές, καθώς επηρεάζουν θεμελιώδεις αντιλήψεις που βοηθούν ή εμποδίζουν την εκμάθηση άλλων τομέων των μαθηματικών. Οι Behr, Harel, Post & Lesh (1993), για παράδειγμα, επέμειναν ότι «η εκμάθηση κλασμάτων είναι ίσως ένα από τα πιο σοβαρά εμπόδια για την μαθηματική ωρίμανση των παιδιών» (σε Charalampous & Pitta-Pantazi, 2007, p.293).

Η κατανόηση των κλασμάτων υποστηρίζεται από τις μεγαλύτερες γνωστικές διεργασίες, συμπεριλαμβανομένης της αναλογικής συλλογιστικής (Moss & Case, 1999) και της χωρικής συλλογιστικής (Mamolo, Sinclair, Whitely, 2011). Επιπλέον, τα κλάσματα στηρίζουν τις Πιθανότητες (Clarke & Roche,2009) και τον αλγεβρικό συλλογισμό (Brown & Quinn, 2007? Empson & Levi, 2011). Οι Empson και Levi (2011) συγκεκριμένα αναφέρουν: «η μελέτη των κλασμάτων είναι θεμελιώδης για τη μελέτη της άλγεβρας ιδίως διότι προσφέρει στους μαθητές την ευκαιρία να καταπιαστούν με θεμελιώδεις μαθηματικές σχέσεις που αποτελούν τον πυρήνα της άλγεβρας» (xxiii). Επιπλέον, η περιορισμένη κατανόηση συγκεκριμένων πτυχών των διαφορετικών εννοιών των κλασμάτων (π.χ., κλάσμα ως φορέα, όπως σε 1/5 του 3) επηρεάζει την ικανότητα των μαθητών να γενικεύσουν αλλά και να εργαστούν με αγνώστους, η οποία είναι θεμελιώδης για την άλγεβρα» (Hackenberg & Lee, 2012).

Σύμφωνα με τη διεθνή ερευνητική κοινότητα (Ball, 1990; Tirosh, 2000; Depaepeetal, 2015 κ.α.) υπάρχουν αρκετά κενά στη γνώση περιεχομένου και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, για τους υποψήφιους δασκάλους, στο πεδίο των ρητών αριθμών. Συγκεκριμένα ο Depaepe και οι συνεργάτες του, σε έρευνα που πραγματοποίησαν σε Βέλγους υποψήφιους δασκάλους, διαπίστωσαν πως υπάρχουν κενά στη γνώση περιεχομένου και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των υποψηφίων δασκάλων καθώς επίσης και θετική συσχέτιση μεταξύ τους.

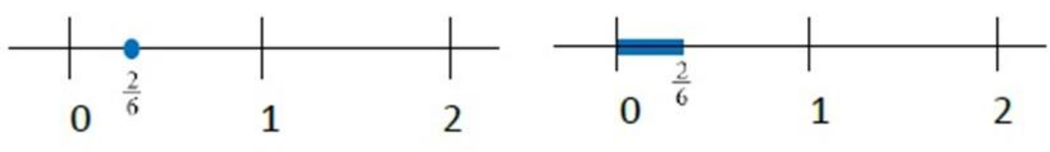
Στην ίδια κατεύθυνση, οι Lemonidis, Tsakiridou & Meliopoulou (2015), εξέτασαν την γνώση περιεχομένου και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου στους νοερούς υπολογισμούς σε δείγμα 70 εν ενεργεία δασκάλων, οι οποίοι είχαν περίπου 7 χρόνια προϋπηρεσία στην εκπαίδευση και είχαν διδάξει στην Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη την τελευταία πενταετία. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως οι δάσκαλοι επιτυγχάνουν υψηλά ποσοστά στις απλές πράξεις των κλασμάτων, των δεκαδικών και των ποσοστών, δηλαδή παρουσίασαν υψηλό ποσοστό στη γνώση περιεχομένου, ωστόσο, σε ό,τι αφορά τη σε βάθος γνώση των ρητών αριθμών, παρατηρήθηκε πως μόνο ένα 50% των δασκάλων την επιτυγχάνει. Για παράδειγμα, ποσοστό 51.4% των δασκάλων μπόρεσαν να βρουν τρία κλάσματα μεταξύ των 7/8 και 1, το 73% μπόρεσαν να βρουν έναν δεκαδικό ανάμεσα στο 3.1 και το 3.11, μόλις το 38.6% των δασκάλων ήταν σε θέση να εκτιμήσει σωστά το γινόμενο 47x2.17, ενώ το 50% μπόρεσε να βρει ποιο ποσοστό του αριθμού 60 είναι το 75. Από την ίδια έρευνα προέκυψε πως οι δάσκαλοι χρησιμοποίησαν πολύ περιορισμένο αριθμό στρατηγικών στους νοερούς υπολογισμούς στις πράξεις με ρητούς, ενώ στην ερώτηση «περιγράψτε τις δυσκολίες των μαθητών στη μάθηση των ρητών αριθμών», το 50% των εκπαιδευτικών απάντησαν πως δεν γνωρίζουν καμία από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές τους, το 38.6% γνωρίζουν μόνο κάποιες από αυτές, ενώ μόνο το 11.4% αυτών φαίνεται να αναγνωρίζει σε ικανοποιητικό βαθμό τις δυσκολίες των μαθητών στις πράξεις με ρητούς αριθμούς.

2.3 Λάθη που οφείλονται στις πολλαπλές ερμηνείες των κλασμάτων

Οι Clarke και Roche (2011) ενθαρρύνουν τους εκπαιδευτικούς να δώσουν μεγαλύτερη έμφαση στις διάφορες σημασίες των κλασμάτων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, προκειμένου να βελτιωθεί η κατανόηση του κλάσματος από τους μαθητές.

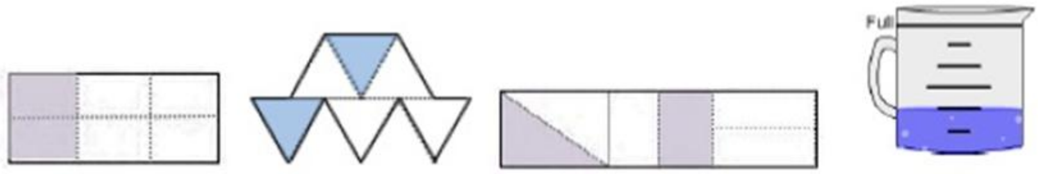
Το κλάσμα είναι ένας αριθμός που μπορεί να μας υποδείξει τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων. Αυτές οι δύο ποσότητες μας παρέχουν πληροφορίες σχετικά με τα μέρη, τις μονάδες που θεωρούμε σαν όλο. Ο ορισμός του όλου είναι σημαντικός όταν εργαζόμαστε με κλάσματα. Υπάρχει γενική συμφωνία μεταξύ των ερευνητών σχετικά με τις διάφορες ερμηνείες του κλάσματος (Clark & Roche, 2011? Empson & Levi, 2011? Petit, Laird & Marsden, 2010? Steffe & Olive, 2010, Marshall, 1993? Kieren, 1980) – όπως είδαμε και σε προηγούμενη ενότητα, οι κυριότερες από αυτές, είναι:

- Η απεικόνιση στην αριθμογραμμή: βασίζεται πάνω στην απόσταση του κλάσματος από το μηδέν και επιτρέπει την τοποθέτηση της αριθμητικής τιμής του κλάσματος, σε σχέση με τη μονάδα. Για παράδειγμα, το 2/6 μπορεί να παρασταθεί στην αριθμογραμμή, ως εξής:



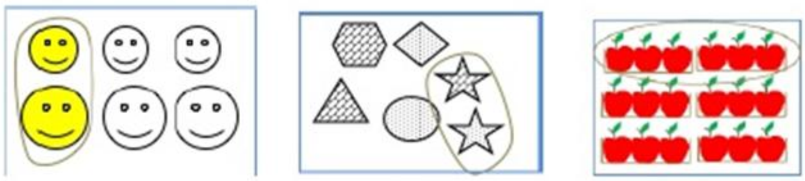
Εικόνα 1: Το κλάσμα στην αριθμογραμμή

- Η μέρος – όλου έκφραση του κλάσματος βασίζεται σε ένα συνεχές μοντέλο (όπως ένα εμβαδό ή ένας όγκος) ή σε ένα διακριτό μοντέλο (όπως ένα σύνολο). Για τα συνεχή μοντέλα, το όλο αποτελείται από ίσου μεγέθους μέρη, ενώ για τα διακριτά μοντέλα, το όλο αποτελείται από υποσύνολα που έχουν μια κοινή ιδιότητα π.χ. σε κάθε ένα από τα παρακάτω παραδείγματα απεικονίζεται το 2/6, στο συνεχές μοντέλο (γραμμοσκιασμένα μέρη). Σημειώνουμε πως, στο δεύτερο σχήμα, οι επιφάνειες πρέπει να έχουν το ίδιο μέγεθος, αλλά όχι απαραίτητα και το ίδιο σχήμα.



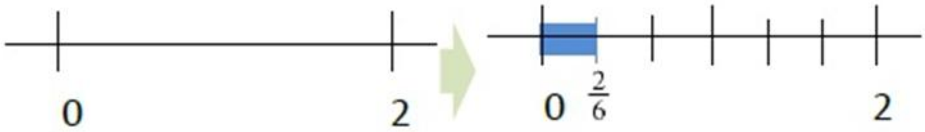
Εικόνα 2: Η μέρος – όλου έκφραση του κλάσματος στα συνεχή μοντέλα

Για τα διακριτά μοντέλα, μπορούμε να συνυπολογίσουμε κοινές ιδιότητες πέραν του ίδιου σχήματος. Στα παρακάτω παραδείγματα, για τον υπολογισμό του 2/6, οι κοινές ιδιότητες αφορούν ίδιο χρώμα, σχήμα ή αριθμό τεμαχίων:



Εικόνα 3: Η μέρος – όλου έκφραση του κλάσματος για διακριτά μοντέλα

Το κλάσμα μπορεί επίσης να εκφραστεί ως πηλίκο. Για παράδειγμα, το 2/6 είναι το ίδιο με το 2:6 ή, διαφορετικά, εκφράζει τη διαίρεση του 2 σε 6 ίσα μέρη, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:



Εικόνα 4: Η έκφραση του κλάσματος ως πηλίκο

Τέλος, το κλάσμα μπορεί να λειτουργεί σαν τελεστής, δηλαδή, σαν μετασχηματιστής μιας ποσότητας, ώστε αυτή η ποσότητα να μεγεθυνθεί ή να σμικρυνθεί, παράδειγμα, τα 2/6 ενός χωραφιού ή τα 3/2 μιας συνταγής.

Οι Moseley και Okamoto (2008) διαπίστωσαν ότι, σε αντίθεση με τους μαθητές που έχουν κορυφαίες επιδόσεις, οι μαθητές με χαμηλή ή καλή επίδοση δεν αναπτύσσουν αυτές τις πολλαπλές σημασίες των ρητών αριθμών, με αποτέλεσμα να εστιάζουν στις επιφανειακές ομοιότητες των αναπαραστάσεων και όχι στην αριθμητική τους έννοια.

Τα κλάσματα αποτελούν μια δύσκολη ενότητα καθώς απαιτούν βαθιά εννοιολογική γνώση των σχέσεων μέρος – όλου (πόσο από ένα σύνολο ή αντικείμενο αναπαρίσταται από το κλάσμα), της μέτρησης (το κλάσμα αποτελείται από αριθμούς που μπορούν να παρασταθούν στην αριθμογραμμή) και του λόγου (Hecht, Close & Santisi, 2003; Moss & Case, 1999).

Έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στον τομέα της γνωστικής ψυχολογίας και της διδακτικής των μαθηματικών (Lortie – Forgues, Siegler, 2015; Lemonidis, Kaiafa, 2014; Stafylidou&Vosniadou, 2004; Vamvakoussi&Vosniadou, 2010 κ.α.) έδειξαν πως τόσο οι μαθητές όσο και οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις διαφορετικές εκφράσεις των ρητών αριθμών.

Συγκεκριμένα, από την έρευνα των Lemonidis & Kaiafa (2014), η οποία πραγματοποιήθηκε σε δείγμα 122 μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού, που συμμετείχαν στον 9^{ο} Διαγωνισμό των «Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής» και προέρχονταν από Δημοτικά σχολεία των νομών Φλώρινας και Σερρών, προέκυψαν συνοπτικά τα ακόλουθα συμπεράσματα: α) ποσοστό 73.5% μαθητών της Ε΄ τάξης, κατάφεραν να εκτελέσουν σωστά την αφαίρεση 3/4 – 1/2, ενώ όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να κάνουν την πράξη γραπτώς, με τον αλγόριθμο, το 37.7% μπόρεσαν να υπολογίσουν με δυο τρόπους, ενώ μόλις το 3.3% ανακάλυψαν τρείς τρόπους β) το 40% των μαθητών του δείγματος έκαναν σωστά την πράξη 0.3x0.3, ενώ το σημαντικότερο λάθος στο οποίο υπέπεσαν οι μαθητές ήταν πως έδωσαν αποτέλεσμα στην παραπάνω πράξη τον αριθμό 0.9 και αυτό το λάθος το έπραξε το 46% των μαθητών. Από το παραπάνω συνηθισμένο λάθος γίνεται φανερό πως οι μαθητές δεν γνωρίζουν την αξία θέσης των αριθμών και επιπλέον φαίνεται πως τους μεταφέρεται λανθασμένα από τους ακέραιους αριθμούς η αντίληψη πως ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει τον αριθμό γ) το 52% των μαθητών της ΣΤ΄ τάξης, κάνουν σωστά τη διαίρεση 20: 0.5, ωστόσο ένα μαζικό λάθος που κάνουν οι μαθητές είναι πως δίνουν σαν απάντηση στην παραπάνω πράξη τον αριθμό 10, γεγονός που κάνει φανερό πως τους μεταφέρεται λανθασμένα από τους ακέραιους αριθμούς η αντίληψη πως η διαίρεση μικραίνει τον αριθμό. Το παραπάνω εύρημα ενισχύεται και σε επόμενη άσκηση όπου ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν το 1/2 του 1/4, όπου εδώ μόνο το 32% το έλυσε σωστά, καθώς οι μαθητές πραγματοποίησαν διαίρεση αντί για πολλαπλασιασμό, πιθανότατα επηρεασμένοι από την αντίληψη που αναφέραμε παραπάνω, πως η διαίρεση μικραίνει τον αριθμό, δίνοντας λάθος αποτέλεσμα 2/4 ή 1/2.

2.4 Λάθη των μαθητών που οφείλονται στην δυσκολία κατανόησης των σχέσεων

Τα κενά και οι παρανοήσεις των μαθητών αποκαλύπτονται μέσα από τις αναπαραστάσεις των κλασμάτων, και οι μελέτες στον τομέα αυτό παρέχουν στοιχεία που δείχνουν ότι το πλήθος των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται, κάποιες εκ των οποίων δυνητικά αποσπούν την προσοχή τους, δεν βοηθούν τους μαθητές να χτίσουν βαθιά κατανόηση των κλασμάτων (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Οι μαθητές χρησιμοποιούν συχνά κυκλικές αναπαραστάσεις των κλασμάτων (π.χ. τα κλασσικά προβλήματα διαμοιρασμού πίτσας).

Οι κυκλικές αναπαραστάσεις είναι προβληματικές καθώς η διαίρεση του κύκλου σε ίσα μέρη είναι δύσκολη για περιττούς ή μεγάλους αριθμούς. Για παράδειγμα, οι Gould, Outhred και Mitchelmore (2006) ζήτησαν από τους μαθητές να γραμμοσκιάσουν το ήμισυ, το ένα τρίτο και ένα έκτο χρησιμοποιώντας κυκλικά διαγράμματα. Σε αυτή τη μελέτη, οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι οι περισσότεροι μαθητές ήταν ακριβείς, όταν γραμμοσκίασαν το ήμισυ της περιφέρειας ενός κύκλου, χρησιμοποιώντας είτε μια οριζόντια ή κάθετη γραμμή να διαιρέσουν τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη.

Ωστόσο, όταν τα παιδιά κλήθηκαν να γραμμοσκιάσουν το ένα τρίτο και ένα έκτο, υπήρχε ένα ευρύ φάσμα λανθασμένων απαντήσεων, όπου η διαίρεση των κύκλων ήταν άνιση (μη-ίσα μέρη) και οι μαθητές στηρίχθηκαν σε μια προσέγγιση καταμέτρησης αριθμού των τεμαχίων (όπου ο αριθμός των τεμαχίων συνολικά και ο αριθμός των σκιασμένων τεμαχίων ήταν πιο σημαντικοί από το μέγεθος των κομματιών). Για παράδειγμα, ένας μαθητής παρουσίασε το ένα έκτο διαιρώντας τον κύκλο σε οκτώ τμήματα και στη συνέχεια χρωμάτισε έξι από αυτά τα τμήματα, και εισήγαγε έναν αριθμός (1 έως 6) σε κάθε χρωματισμένο τμήμα. Αυτή ήταν μια προσπάθεια να παρουσιάσει το ένα έκτο επισημαίνοντας κάθε κομμάτι του κύκλου με έναν αριθμό (και όχι σαν μια κλασματική μονάδα). Σε αυτό το παράδειγμα, ο μαθητής αντιμετωπίζει τον αριθμητή 1 και του παρονομαστή 6 ως δύο ανεξάρτητους αριθμούς, όχι ως έναν αριθμό που δηλώνει τη σχέση μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή (βλ Jigyel & Afamasaga-Fuata'i 2007 για παρόμοια ευρήματα), ενώ ταυτόχρονα αγνοεί τα επιπλέον δύο τμήματα.

Πριν από την μελέτη αυτή, Hart (1988) είχε παρόμοια αποτελέσματα όταν εργαζόμενος με μαθητές δημοτικού, παρατήρησε πως οι μαθητές ήταν σε θέση να χρωματίσουν σωστά σκιά τα δύο τρίτα ενός κυκλικού μοντέλου, αλλά χρησιμοποιούσαν σχεδόν πάντα μια στρατηγική καταμέτρησης του αριθμού των τμημάτων στο σχήμα (3 τμήματα συνολικά) και στη συνέχεια μετρώντας τις ενότητες που απαιτούν σκίαση (2 τμήματα απαιτούν σκίαση), και όχι ερμηνεύοντας το κλάσμα ως μέρος μιας συνολικής περιοχής, ή κατανοώντας ότι κάθε μία από τις ίσες περιοχές δείχνουν ένα - ένα τρίτο όλης της περιοχής. Δύο πολλά υποσχόμενες παραστάσεις, όπως σημειώνεται στην έρευνα μέχρι σήμερα, είναι τα μοντέλα ορθογωνίων και οι αριθμογραμμές καθώς πάνω σε αυτά είναι δυνατό να κατανεμηθούν ομοιόμορφα και πιο εύκολα σε σχέση με τα κυκλικά μοντέλα, ακόμα και μονός ή μεγάλος αριθμός τμημάτων (Watanabe, 2012).

Οι Hackenberg & Lee (2012) τονίζουν ότι ακόμη και οι μαθητές που επιδεικνύουν σχετικά καλή κατανόηση των κλασμάτων δεν είναι σε θέση να συνενώσουν ίσα μέρη ή να επαναλάβουν αντίστροφη διαδικασία. Δηλαδή, δεν είναι τελικά σε θέση να δουν ένα κλάσμα όπως τα τρία πέμπτα, ως τρία- ένα πέμπτα και όχι ως μια περιοχή αποτελούμενη από τρία σκιασμένα μέρη ενσωματωμένα στο πλαίσιο ενός μεγαλύτερου συνόλου. Οι συγγραφείς της μελέτης, επίσης, επιμένουν στο γεγονός ότι για την πλήρη κατανόηση της μέρος – όλου κλασματικής σχέσης, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να «αποκολλήσουν» αυτά τα μέρη από το σύνολο – δηλαδή, να τα δουν χωριστά από το σύνολο, διατηρώντας παράλληλα το σύνολο νοητά, «άθικτο» (943) (ενώ η ίδια η ενσωμάτωση επιτρέπει στο μαθητή να δει εξαρχής το μέρος του συνόλου). Ακόμα και όταν οι μαθητές είναι σε θέση να διαιρέσουν με ακρίβεια το σύνολο για να δείξουν ένα κλάσμα (δείχνοντας σωστά τον αριθμό των τμημάτων μέσα στο σύνολο), μπορεί στην πραγματικότητα να αγνοούν το όλο σαν μια διαισθητική πληροφορία στην κατανόηση της κλασματικής σχέσης.

Ως παράδειγμα των γνωστικών διαδικασιών που απαιτούνται για την «αποκόλληση» των τμημάτων (έτσι ώστε ο μαθητής να δει τα μέρη κρατώντας νοητά το σύνολο στο μυαλό του), ας υποθέσουμε ότι ένας μαθητής καλείται να προσδιορίσει το 1/6 στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 1), και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσει το 1/6 για να δημιουργήσει ένα σχήμα το οποίο είναι τα 5/6 του αρχικού συνόλου.

Σχήμα 1

Ο μαθητής θα χωρίσει αρχικά το σχήμα σε έξι ίσα κομμάτια. Έπειτα θα «αποκολλήσει» το ένα έκτο, ενώ ταυτόχρονα κρατάει τη νοητική εικόνα του όλου. Ο μαθητής τότε θα επαναλάβει το ένα έκτο για να δείξει τα 5/6 του συνόλου.

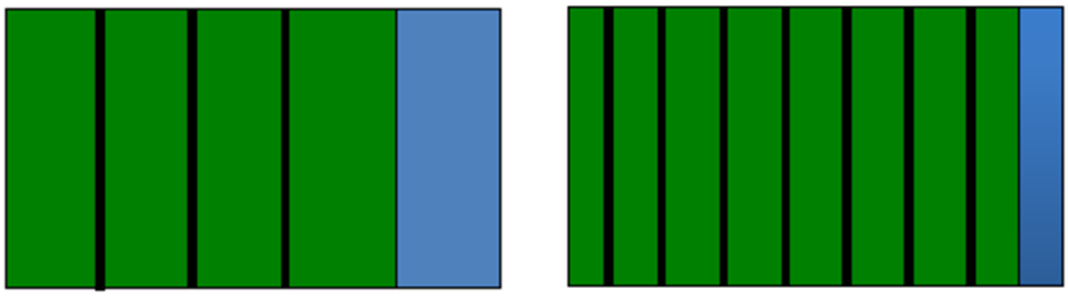
Τα κενά των μαθητών και οι παρανοήσεις αποκαλύπτονται και σε μελέτες όπου οι μαθητές καλούνται να διατάξουν ή / και να συγκρίνουν κλάσματα. Το 1995, για παράδειγμα, τα αποτελέσματα μιας ευρείας έρευνας έδειξαν πως μόνο το ένα τρίτο του δείγματος των μαθητών δημοτικού ήταν σε θέση να τοποθετήσουν σωστά ένα απλό κλάσμα στην αριθμογραμμή (Kamii & Clark, 1995). Και φαίνεται ότι από τότε υπάρχει μικρή πρόοδος όταν είκοσι χρόνια αργότερα, σε άλλη έρευνα, παρατηρήθηκε πως το 50% των μαθητών δημοτικού ίδιας ηλικίας δεν ήταν σε θέση να ταξινομήσουν κλάσματα σε αύξουσα σειρά (Siegler et al., 2010).

2.5 Λάθη που αφορούν στην παρανόηση του ρόλου αριθμητή - παρονομαστή

Οι μαθητές συχνά αντιλαμβάνονται το κλάσμα ως δύο ξεχωριστούς ακέραιους αριθμούς (Jigyel & Afamasaga-Fuata'i, 2007) και, κατά συνέπεια, δεν μπορούν να εργαστούν με τα κλάσματα θεωρώντας τα σαν έναν αριθμό. Για παράδειγμα, η πλειονότητα των μαθητών, όταν ρωτήθηκαν για την εκτίμηση του αθροίσματος 11/12 +7/8 , απάντησαν πως το αποτέλεσμα είναι 19 ή 20 (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, & Reys, 1980). Επιπλέον, οι μαθητές θεωρούν αυτονόητο πως το 1/3 είναι μεγαλύτερο από το ½ δεδομένου ότι ο αριθμός 3 είναι μεγαλύτερος από 2. O Huinker (2002), όπως αναφέρεται στο Petit et al., (2010) αναφέρει ότι «*οι μαθητές που μπορούν, κατά την επίλυση προβλημάτων, να μεταφράσουν με διαφορετικούς τρόπους ένα κλάσμα, είναι πιο πιθανό να αντιληφθούν το κλάσμα ως δυο ποσότητες που χωρίζονται από την κλασματική γραμμή και όχι ως δύο ολόκληρους αριθμούς*» (σελ. 146).

Κατά τη μετάβαση από τη θεώρηση ενός ακέραιου αριθμού, στα κλάσματα, οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν μεγάλη κατανόηση των πολλαπλών κατασκευών των κλασμάτων. Χωρίς αυτή, οι μαθητές δεν είναι δυνατό να καταλάβουν τις πιθανές σημασίες του αριθμητή και του παρονομαστή καθώς επίσης και των διαφορών μεταξύ τους (Empson & Levi, 2011; Petit et al, 2010; Jigyel et al, 2007). Για παράδειγμα, όταν θεωρούμε το κλάσμα ως σχέση μέρους – όλου, ο αριθμητής αντιπροσωπεύει την αρίθμηση των κομματιών στα οποία έχει χωριστεί το όλο, και ο παρονομαστής αντιπροσωπεύει τη μονάδα. Όταν θεωρούμε ένα κλάσμα σαν πηλίκο, ο αριθμητής είναι μια ποσότητα (διαιρετέος) που διαιρείται από τον παρονομαστή (διαιρέτης). Οι μαθητές, πρέπει επίσης να κατανοήσουν ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής έχουν διαφορετικούς ρόλους στο κλάσμα, και οι διαφορετικές αναπαραστάσεις αυτού, εξαρτώνται από τον ρόλο τους. Για παράδειγμα, στη σύγκριση των κλασμάτων, αν οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν ότι ο ρόλος του αριθμητή είναι διαφορετικός από τον ρόλο του παρονομαστή, τότε δυσκολεύονται με τις ακόλουθες παραστάσεις 3/4>3/6 και 3/4>1/4. Στην πρώτη παράσταση, το κλάσμα με τον μικρότερο παρονομαστή (4) αντιπροσωπεύει ένα μεγαλύτερο κλάσμα αφού τα κομμάτια είναι μεγαλύτερα, ενώ στη δεύτερη παράσταση, το κλάσμα με τον μικρότερο αριθμητή (1) αντιπροσωπεύει ένα μικρότερο κλάσμα καθώς τα κομμάτια έχουν το ίδιο μέγεθος (Behr et al., 1993).

Ένα από τα συνηθισμένα λάθη των μαθητών γίνεται στη σύγκριση των κλασμάτων, όπου όταν για παράδειγμα (Σχήμα 2), συγκρίνουν τα 4/5 και τα 8/9, θεωρούν πως είναι ίσα, καθώς και τα δυο χρειάζονται ένα ακόμα κομμάτι για να κάνουν ένα ολόκληρο. Οι μαθητές εδώ, θεωρώντας την ακολουθία των αριθμών (αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος), όπου το κενό ανάμεσα στο 4 και το 5, είναι το ίδιο με αυτό ανάμεσα στο 8 και το 9, ανακαλύπτουν τη διαφορά (κατ' απόλυτο τιμή) των αριθμών και όχι το πραγματικό μέγεθος της καλυπτόμενης περιοχής.



4/5 8/9

Σχήμα 2

Σε μια μελέτη του 1986, οι Post, Behr & Lesh ζήτησαν από τους μαθητές να συγκρίνουν ομώνυμα, ετερώνυμα κλάσματα καθώς και κλάσματα με ίδιο αριθμητή. Αυτή η μελέτη διαπίστωσε ότι το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό του σκεπτικού των μαθητών τους επέτρεψαν να συγκρίνουν με ακρίβεια τα κλάσματα και στους τρεις τύπους ζευγαριών ήταν η εξέταση της σημειογραφίας του κλάσματος ως εννοιολογική ενότητα, ή την ποσότητα, αντί για δύο διακριτών αριθμών που χωρίζονται από μια οριζόντια γραμμή (κοινή παρερμηνεία των μαθητών). Συνεπώς, η σύγκριση των κλασμάτων απαιτεί ισχυρή αίσθηση του χωρισμού σε ίσα κομμάτια καθώς και της ισοδυναμίας.

Τέλος, σε έρευνες (Lesh & Landau, 1983) βρέθηκε ότι τα παιδιά απέδιδαν καλύτερα σε ασκήσεις όπου έπρεπε να μοιράσουν διακριτές ποσότητες από ό,τι σε συνεχείς. «*Διακριτές ονομάζουμε τις ποσότητες οι οποίες διαχωρίζονται μεταξύ τους και εμπεριέχουν τη μονάδα μέτρησης (π.χ. στην ποσότητα 5 μήλα, τα μήλα είναι* *διακριτά μεταξύ τους και μετριούνται με βάση το ένα μήλο). Συνεχείς είναι οι ποσότητες τις οποίες δεν μπορούμε να διαχωρίσουμε και χρειάζονται μια εξωτερική αυθαίρετη μονάδα μέτρησης για να μετρηθούν (π.χ. το μήκος 5 μέτρα είναι συνεχής ποσότητα που μετριέται με την εξωτερική μονάδα μέτρησης το μέτρο, το οποίο ορίστηκε αυθαίρετα από τους ανθρώπους*)» (Λεμονίδης, κ.α., 2007:72).

Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα από έρευνες που έχουν διεξαχθεί σε Αμερικανούς μαθητές και ενήλικες, τα αποτελέσματα των οποίων δείχνουν πως υπάρχουν σοβαρές δυσκολίες στην κατανόηση των κλασμάτων, των δεκαδικών αριθμών και των ποσοστών. Σύμφωνα με το National Assessment of Educational Progress (NAEP, 2004), το 50% των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου (8^{th} grade), δεν είναι σε θέση να διατάξουν σε αύξουσα ή φθίνουσα τάξη μεγέθους τα κλάσματα 2/7, 1/12 και 5/9 (Martinetal, 2007).

Οι Lemonidis, Tsakiridou & Meliopoulou (2015), βρίσκουν πως οι Έλληνες εν ενεργεία δάσκαλοι, κατά τη σύγκριση κλασμάτων, το 37.6% αυτών χρησιμοποιούν στρατηγικές που βασίζονται σε κανόνες, ενώ μόλις το 27.6% χρησιμοποιούν στρατηγικές αίσθησης του αριθμού. Το παραπάνω εύρημα συμφωνεί και με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών (Lemonidis & Kaimakami, 2013; Newton, 2008; Tsao, 2004, 2005; Yang, Reyes&Reyes, 2009; Lemonidis, Mouratoglou & Pnevmatikos, 2015), απ' όπου προκύπτει πως υπάρχει χαμηλή αίσθηση των ρητών αριθμών, η χρήση των στρατηγικών αίσθησης του αριθμού καθώς επίσης και η ευελιξία των στρατηγικών τόσο στις πράξεις όσο και στη σύγκριση των κλασμάτων.

Γενικά μπορούμε να συμπεράνουμε πως υπάρχει ομοφωνία μεταξύ των ερευνητών στο γεγονός ότι τα κλάσματα και οι ρητοί αριθμοί είναι φημισμένοι για τη δυσκολία που παρουσιάζουν στους μαθητές της Α/Βάθμιας και Β/Βάθμιας εκπαίδευσης (Bright, Behr, Post & Wachmuth, 1988; Kerslake, 1986; Lesh, Behr & Post, 1987; Mack, 1995; Ni, 2001). Οι Pitkethly & Hunting (1996) αναφέρουν χαρακτηριστικά πως οι ρητοί αριθμοί δεν είναι προϊόν μιας φυσικής διαδικασίας σκέψης αλλά αποτελούν κατασκεύασμα που στόχο έχει να ικανοποιήσει ανθρώπινες ανάγκες, και η μη ικανοποιητική κατανόησή τους είναι δυνατό να σταθεί εμπόδιο στη γενικότερη μαθηματική τους ανάπτυξη. Πολλές από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην Άλγεβρα μπορούν να ανιχνευτούν σε μια ελλιπή κατανόηση προηγούμενων ιδεών που αφορούν τα κλάσματα και η σπουδαιότητά τους γίνεται εμφανής τόσο από πρακτική άποψη, καθώς η ικανότητα του ατόμου να διαχειρίζεται επιτυχημένα αυτές τις έννοιες είναι δυνατό να βελτιώσει σε μεγάλο βαθμό την ικανότητά του να κατανοεί και να διαχειρίζεται με μεγαλύτερη άνεση προβλήματα από την καθημερινή του ζωή, όσο και από ψυχολογική άποψη, καθώς οι ρητοί αριθμοί παρέχουν ένα πλούσιο πεδίο μέσα στο οποίο είναι δυνατό να αναπτύξουν αλλά και να επεκτείνουν τις νοητικές δομές που είναι απαραίτητες για τη συνεχή νοητική και γνωστική τους ανάπτυξη (Behretal, 1984; Ni, 2001).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Ερευνητική προσέγγιση της ικανότητας των μαθητών Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης στην επίλυση προβλημάτων με ρητούς αριθμούς

3.1 Σκοπός και Ερωτήματα της έρευνας

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν μαθητές της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης Δημοτικών σχολείων, στους οποίους χορηγήθηκαν φύλλα εργασίας αποτελούμενα από τέσσερα προβλήματα, δύο εκ των οποίων, ήταν κοινά για τους μαθητές και των δυο τάξεων. Το αντικείμενο στην παρούσα έρευνα ήταν η μελέτη των μαθητών απέναντι στην επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. Πιο συγκεκριμένα, μελετήθηκαν οι τρόποι που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να επιλύσουν τα προβλήματα, η δυνατότητα γραφικής επίλυσης, τα είδη των λαθών που έκαναν καθώς επίσης και η αναζήτηση συσχέτισης ανάμεσα στην δυνατότητα επίλυσης ενός προβλήματος με κλάσματα και στη δυνατότητα επίλυσης άλλων προβλημάτων της αριθμητικής. Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που μας απασχόλησαν στην παρούσα έρευνα, είναι τα εξής:

1. Οι συνήθεις τύποι λαθών των μαθητών αφορούν στην ελλιπή κατανόηση της έννοιας του κλάσματος;

2. Είναι σε θέση οι μαθητές να αναπαραστήσουν σχηματικά τις λύσεις;

3. Υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων με κλάσματα και στη δυνατότητα επίλυσης άλλων προβλημάτων της αριθμητικής;

4. Υπάρχει διαφοροποίηση στην αντιμετώπιση και επίλυση προβλημάτων με κλάσματα ανάμεσα στους μαθητές της Ε΄ και της ΣΤ΄ τάξης;

3.2 Μεθοδολογία έρευνας

Εφόσον ο κύριος σκοπός της εργασίας αφορά στα λάθη που κάνουν οι μαθητές κατά την αντιμετώπιση προβλημάτων με κλάσματα, και πιο συγκεκριμένα ο εντοπισμός διαφορών ανάμεσα στις λύσεις, τα λάθη και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης, οι απαντήσεις των μαθητών στα εξεταστικά δοκίμια ταξινομήθηκαν με βάση τα είδη των λαθών που έγιναν με σκοπό να αναδειχθούν οι συνήθεις τύποι λαθών τα οποία κάνουν οι μαθητές καθώς επίσης και οι λόγοι για τους οποίους οι μαθητές κάνουν αυτά τα λάθη.

Από την ίδια ταξινόμηση επίσης αναδείχθηκε το αν οι μαθητές είναι σε θέση να παραστήσουν σχηματικά τις λύσεις των προβλημάτων. Τέλος, σε μια απόπειρα ποιοτικής προσέγγισης των απαντήσεων των μαθητών, αναλύθηκε μέσα από τις απαντήσεις τους το κατά πόσο η δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων με κλάσματα συνδέεται με την ικανότητά τους να επιλύουν επιτυχώς και άλλα προβλήματα της αριθμητικής.

3.3 Το δείγμα της έρευνας

Για την διεξαγωγή της εν λόγω έρευνας διανεμήθηκαν τα θέματα σε σχολεία των νομών Φλώρινας, Καστοριάς, Γρεβενών, Κοζάνης, Καβάλας, Σερρών στις Ε΄ και Στ΄ τάξεις των δημοτικών σχολείων, και το δείγμα αποτέλεσαν 240 μαθητές ΣΤ΄ τάξης και 290 μαθητές Ε΄ τάξης. Στους εκπαιδευτικούς που διόρθωσαν τα τεστ δόθηκαν ειδικές οδηγίες που υποδείκνυαν τον τρόπο επίλυσης και τον τρόπο βαθμολόγησης τους. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά τον Μάιο του 2016.

3.4 Ερευνητικό εργαλείο

Το εργαλείο το οποίο χρησιμοποιήθηκε για την παρούσα έρευνα ήταν ένα εξεταστικό δοκίμιο το οποίο περιείχε 5 ασκήσεις – προβλήματα (βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι). Η κατανομή της βαθμολογίας για κάθε πρόβλημα ήταν η εξής: Τα προβλήματα 1, 2 και 4 βαθμολογήθηκαν με 1 μονάδα, το πρόβλημα 3 με 3 μονάδες και το πρόβλημα 5 με 4 μονάδες. Τα γραπτά εξετάστηκαν ως προς το συνολικό βαθμό και επιμέρους ως προς το βαθμό σε κάθε πρόβλημα καθώς και αν υπήρξε επιτυχία, αποτυχία, ή απουσία λύσης. Στην παρούσα εργασία αναλύθηκαν οι απαντήσεις καθώς επίσης και τα λάθη των μαθητών σε δυο προβλήματα που ήταν κοινά και για τις δυο τάξεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ «Χωριάτικη πίτα»

Στο μαγαζί «Η χωριάτικη πίτα», ένα τετράγωνο ταψί πίτα κοστίζει 12 €. Από ένα ταψί, στο οποίο έμειναν τα ¾ της πίτας, η Δανάη αγόρασε τα 2/3 της πίτας. Ποιο κλάσμα της αρχικής πίτας αγόρασε η Δανάη; Πόσα χρήματα πλήρωσε; Σχεδιάζω ένα σχήμα για να δείξω τη λύση.

Το πρώτο πρόβλημα χωρίζεται σε τρία επιμέρους ερωτήματα τα οποία εξετάζονται ξεχωριστά:

Ερώτημα 1: Ποιό κλάσμα της αρχικής πίτας αγόρασε η Δανάη;

Ερώτημα 2: Πόσα χρήματα πλήρωσε;

Ερώτημα 3: Σχεδιασμός της λύσης

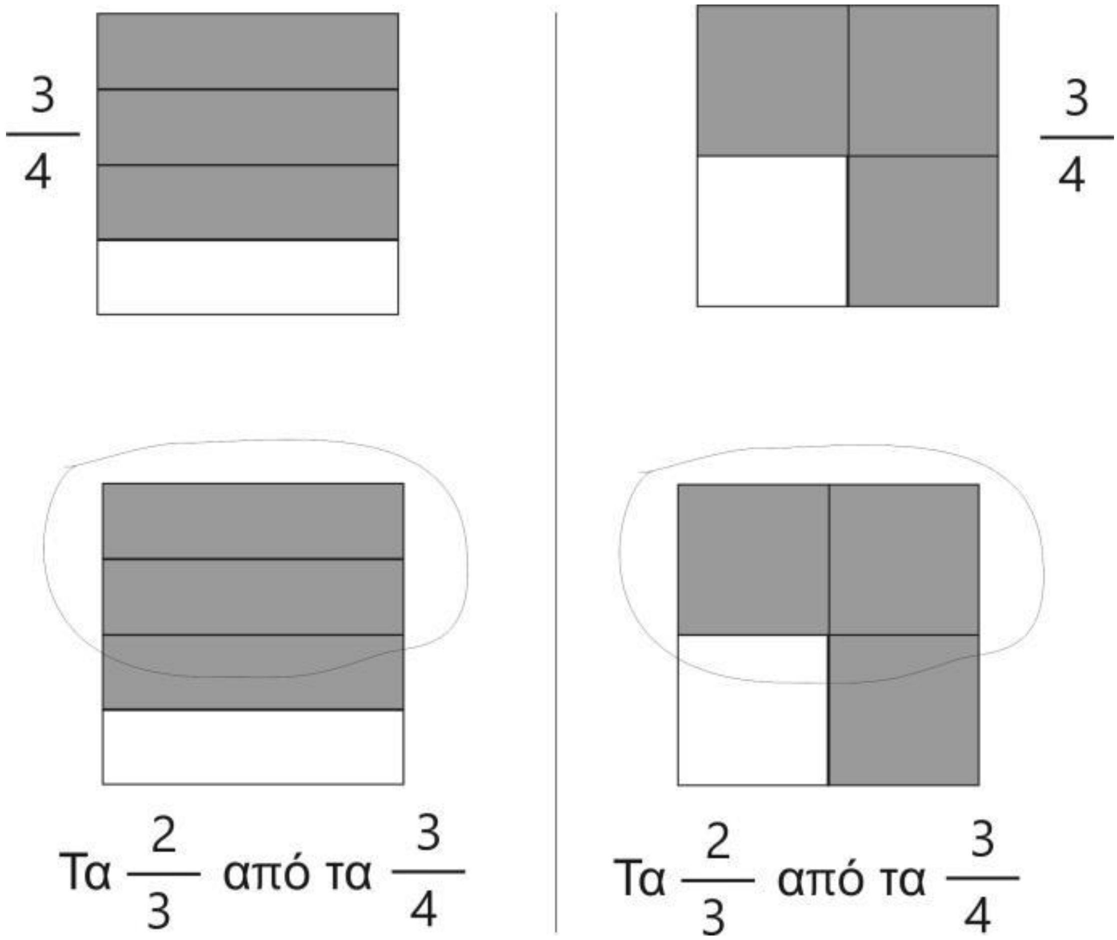
Σε κάθε ένα από τα επιμέρους ερωτήματα αναλύθηκαν η επιτυχία ή αποτυχία στην επίλυση, τα είδη των λαθών που πραγματοποιήθηκαν καθώς επίσης και ο τρόπος επίλυσης.

Σχετικά με την λύση του προβλήματος 1:

Αν πάρω τα 2/3 από τα ¾ που έμειναν θα έχω 2/4 ή 1/2 της αρχικής πίτας. Αυτό αντιστοιχεί στην πράξη 2/3x3/4=2/4 ή το αποτέλεσμα αυτό μπορεί κάποιος να το δει από το σχήμα που θα σχεδιάσει χωρίς να το αντιστοιχίσει στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων.

Άρα η Δανάη θα πλήρωσε το 1/2x12€ ή το μισό του 12€ που είναι 6 €.

Στην ερώτηση για τα χρήματα που πλήρωσε, κάποιος μπορεί να υπολογίσει τα ¾ των 12 €, δηλαδή 3/4x12€=36/4= 9€. Στη συνέχεια υπολογίζει τα 2/3 των 9€ που είναι 2/3x9€=18/3=6€, ενώ για τον σχεδιασμό ενός σχήματος για να παρουσιαστεί η λύση, δυο πιθανά σχήματα είναι τα παρακάτω:



ΠΡΟΒΛΗΜΑ «Πίτσα»

Η Μαρία έχει μια πίτσα αγνώστου μεγέθους, από την οποία τρώει τα 4/6. Ο Ανδρέας έχει μια πίτσα αγνώστου μεγέθους, από την οποία τρώει τα 5/6. Η Μαρία τρώει περισσότερη πίτσα από τον Ανδρέα. Μπορείτε να εξηγήσετε πώς είναι δυνατόν να συμβαίνει αυτό;

Το δεύτερο πρόβλημα έχει μόνο μια ερώτηση η οποία επίσης εξετάστηκε ως προς τα παραπάνω χαρακτηριστικά, δηλαδή, το κατά πόσο επιλύθηκε επιτυχώς, τα είδη των λαθών που έγιναν και τέλος, το είδος της λύσης που παρουσιάστηκε.

Απάντηση:

Επειδή η πίτσα των παιδιών είναι αγνώστου μεγέθους, η πίτσα της Μαρίας θα είναι μεγαλύτερη από την πίτσα του Ανδρέα. Αν και το κλάσμα 4/6 είναι μικρότερο από το κλάσμα 5/6 η Μαρία τρώει περισσότερη πίτσα, γιατί παίρνει 4/6 από μια μεγάλη πίτσα ενώ ο Ανδρέας παίρνει 5/6 από μια μικρή πίτσα. Το σημαντικό εδώ όπως αναφέρουμε και στα σχόλια των προβλημάτων είναι ότι για να συγκρίνουμε κλάσματα μεταξύ τους πρέπει να προέρχονται από το ίδιο όλο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Αποτελέσματα

Στο πρώτο μέρος των αποτελεσμάτων παραθέτουμε τα αποτελέσματα ανά τάξη και στη συνέχεια τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα και για τις δύο τάξεις, σχετικά με το κατά πόσο έλυσαν τα δυο κοινά προβλήματα, το είδος της λύσης που χρησιμοποίησαν καθώς επίσης και τα είδη των λαθών που έκαναν.

4.1 Αποτελέσματα σχετικά με το ΠΡΟΒΛΗΜΑ «Χωριάτικη πίτα»

Στο μαγαζί «Η χωριάτικη πίτα», ένα τετράγωνο ταψί πίτα κοστίζει 12 €. Από ένα ταψί, στο οποίο έμειναν τα ¾ της πίτας, η Δανάη αγόρασε τα 2/3 της πίτας. (Ερ.1) Ποιο κλάσμα της αρχικής πίτας αγόρασε η Δανάη; (Ερ.2) Πόσα χρήματα πλήρωσε; (Ερ.3) Σχεδιάζω ένα σχήμα για να δείξω τη λύση.

Πίνακας 1: Ποσοστά επιτυχίας των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης στο πρόβλημα «Χωριάτικη Πίτα».

	Ερ.1 Επιτυχία	Ερ. 2 Επιτυχία	Ερ. 3 Επιτυχία	Συνολική επιτυχία στο Πρόβλημα
Ε΄ τάξη N=290	135 (51,33%)	156 (60,7%)	115 (42,28%)	187
Στ΄ τάξη N= 240	128 (48,66%)	101 (39,3%)	157 (57,72%)	126
Σύνολο	263	257	272	313

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται πως, όσον αφορά το ερώτημα 1 και 2, οι μαθητές της Ε΄ τάξης είχαν καλύτερη επίδοση σε σχέση με τους μαθητές της ΣΤ΄ τάξης, σε αντίθεση με το ερώτημα 3 όπου οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης είχαν καλύτερη επίδοση. Ωστόσο, στη συνέχεια της εργασίας αυτής πραγματοποιήσαμε παραμετρική ανάλυση των ανεξάρτητων δειγμάτων για να διερευνήσουμε αν πράγματι υπάρχει διαφοροποίηση των επιδόσεων ανάμεσα στους μαθητές της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης.

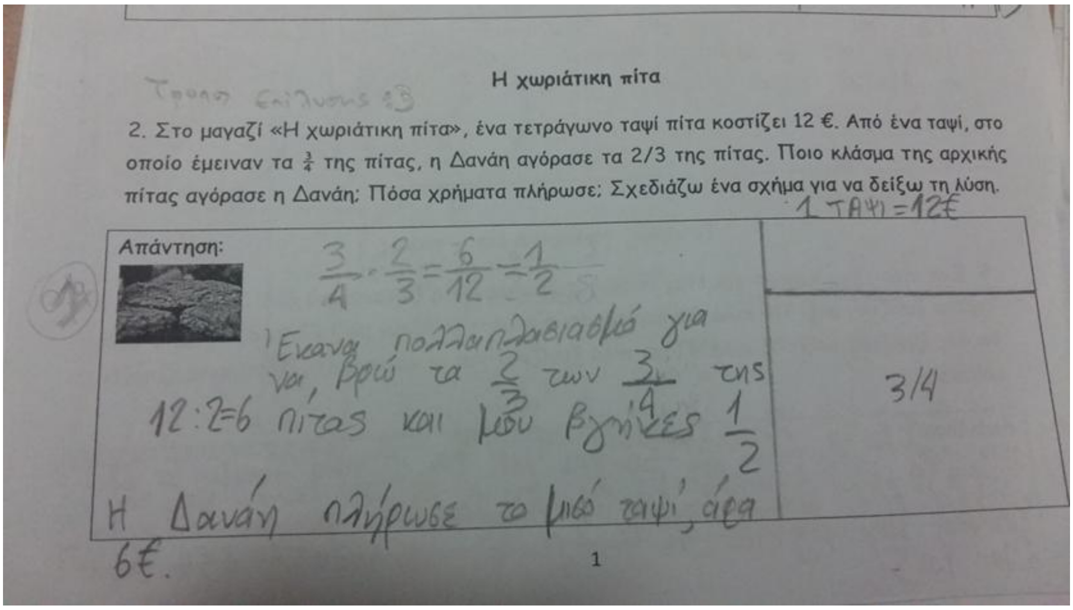
Ερώτημα 1: Ποιό κλάσμα της αρχικής πίτας αγόρασε η Δανάη;

Αρχικά παρουσιάζουμε τα είδη της επιτυχίας ανά τάξη αναφορικά με το πρώτο ερώτημα του προβλήματος «Χωριάτικη πίτα», τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2).

Επιτυχία

Πίνακας 2: Είδη σωστών απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης στο ερώτημα 1, στο πρόβλημα «Χωριάτικη Πίτα».

Τάξη	Σχηματική επίλυση	Υπολογισμός μέρους – όλου με πολλαπλασιασμό 2 κλασμάτων/ Ακριβής υπολογισμός	Χρήση επόμενων ερωτημάτων	Δεν δικαιολογείται η λύση
Ε΄ N= 290	58 (47,54%)	32 (26,44%)	8 (6,61%)	23 (19%)
ΣΤ΄ N= 240	64 (52,45%)	36 (26,67%)	6 (4,44%)	29 (21,48%)
Σύνολο	122 (23%)	68 (12,8%)	14 (2,6%)	52 (9,8%)



Η χωριάτικη πίτα

2. Στο μαγαζί «Η χωριάτικη πίτα», ένα τετράγωνο ταψί πίτα κοστίζει 12 €. Από ένα ταψί, στο οποίο έμειναν τα $\frac{3}{4}$ της πίτας, η Δανάη αγόρασε τα 2/3 της πίτας. Ποιο κλάσμα της αρχικής πίτας αγόρασε η Δανάη; Πόσα χρήματα πλήρωσε; Σχεδιάζω ένα σχήμα για να δείξω τη λύση.

1 ΤΑΨΙ = 12€

Απάντηση:

$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

Έκανα πολλαπλασιασμό για να βρω τα $\frac{2}{3}$ των $\frac{3}{4}$ της πίτας και μου βγήκε $\frac{1}{2}$

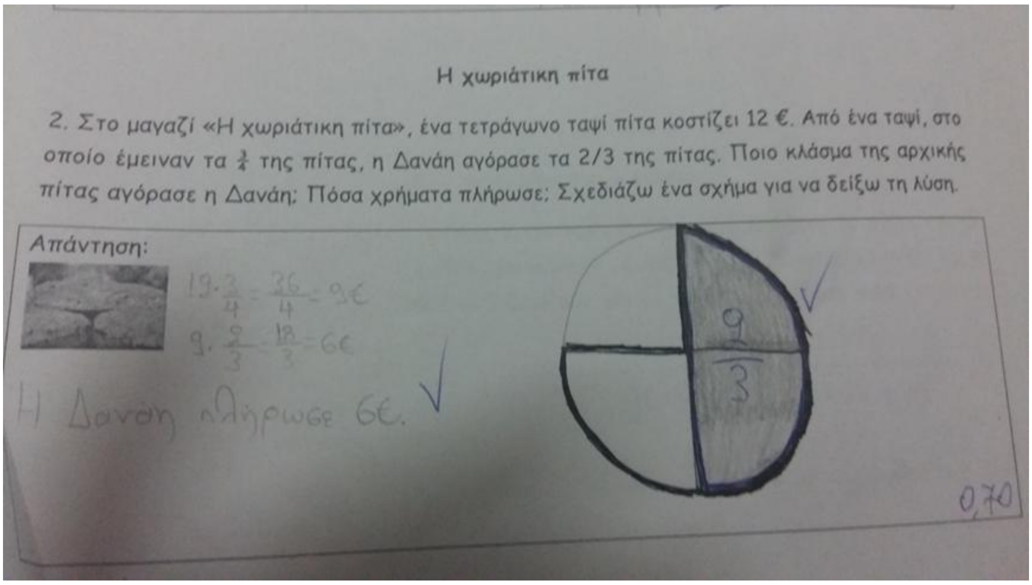
12:2=6

Η Δανάη πλήρωσε το μισό ταψί, άρα 6€.

3/4

1

Εικόνα 5. Πρόβλημα «χωριάτικη πίτα»: Υπολογισμός μέρους –όλου με πολλαπλασιασμό δυο κλασμάτων



Η χωριάτικη πίτα

2. Στο μαγαζί «Η χωριάτικη πίτα», ένα τετράγωνο ταψί πίτα κοστίζει 12 €. Από ένα ταψί, στο οποίο έμειναν τα $\frac{3}{4}$ της πίτας, η Δανάη αγόρασε τα 2/3 της πίτας. Ποιο κλάσμα της αρχικής πίτας αγόρασε η Δανάη; Πόσα χρήματα πλήρωσε; Σχεδιάζω ένα σχήμα για να δείξω τη λύση.

Απάντηση:

$12\cdot\frac{3}{4}=\frac{36}{4}=9€$

$9\cdot\frac{2}{3}=\frac{18}{3}=6€$

Η Δανάη πλήρωσε 6€.

$\frac{9}{3}$

0,70

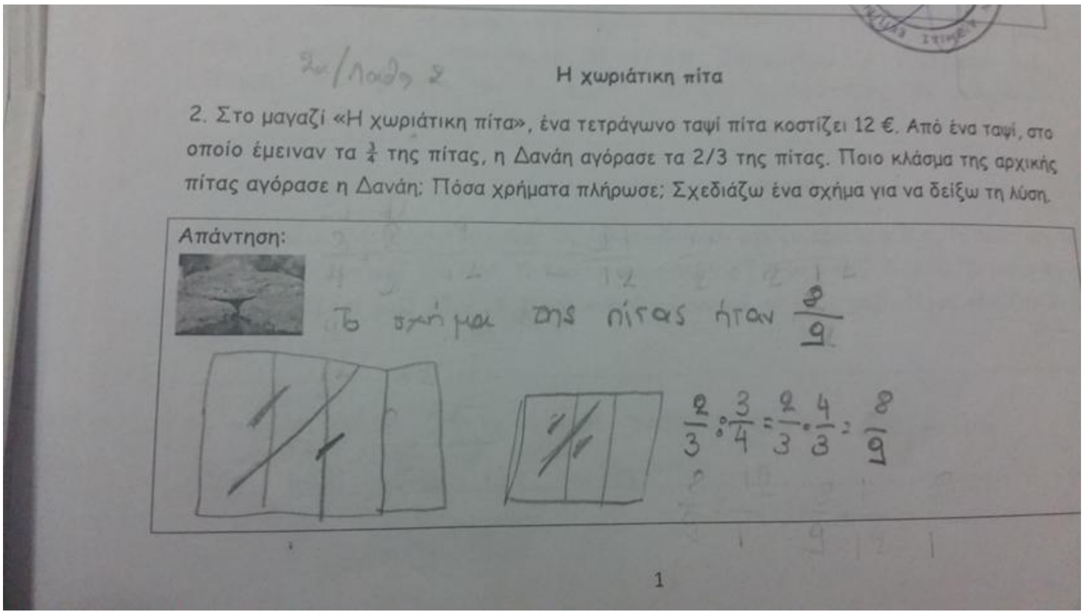
Εικόνα 6. Πρόβλημα «χωριάτικη πίτα»: Χρήση επόμενων ερωτημάτων

Πιο συγκεκριμένα, 122 μαθητές (23%) των μαθητών επέλεξαν να επιλύσουν το ερώτημα σχηματικά, 68 μαθητές (12,8%) έκαναν ακριβή υπολογισμό (υπολογίζοντας μέρος μέρους με πολλαπλασιασμό των κλασμάτων), 52 μαθητές (9.8%) απαντούν χωρίς να δικαιολογούν τη λύση και τέλος, 14 μαθητές (2.64%) χρησιμοποίησαν επόμενα ερωτήματα του προβλήματος.

Λάθη στο Ερώτημα 1

Πίνακας 3: Είδη λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης στο ερώτημα 1, στο πρόβλημα «Χωριάτικη Πίτα».

Τάξη	Πρόσθεση ή αφαίρεση των κλασμάτων	Λάθος μέρους από σχηματικό υπολογισμό	Διαίρεση των 2 κλασμάτων 3/4 : 2/3 ή 2/3:3/4
Ε΄ N= 290	58 (51,78%)	42 (37,5%)	12 (10,71%)
Στ΄ N= 240	43 (47,25%)	28 (30,77%)	20 (21,97%)
Σύνολο	101 (19,05%)	70 (13,2 %)	32 (6%)



Εικόνα 7. Πρόβλημα «χωριάτικη πίτα»: Παράδειγμα λάθους στο ερώτημα 1 (Διαίρεση των 2 κλασμάτων)

Από τα παραπάνω στοιχεία έχουμε πως 101 μαθητές (19,05%) ακολούθησαν λανθασμένη διαδικασία για την επίλυση του προβλήματος, προσθέτοντας τα δυο κλάσματα, 70 μαθητές (13,2 %) υπολόγισαν λάθος μέρος σε σχηματικό υπολογισμό και 32 (6%) διαίρεσαν τα 2 κλάσματα − − ή −:−.

Ερώτημα 2: Πόσα χρήματα πλήρωσε;

Επιτυχία

Αρχικά παρουσιάζουμε τα είδη της επιτυχίας ανά τάξη αναφορικά με το δεύτερο ερώτημα του προβλήματος «Χωριάτικη πίτα», τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 4).

Πίνακας 4: Επιλογές λύσεων των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης στο ερώτημα 2, στο πρόβλημα «Χωριάτικη Πίτα».

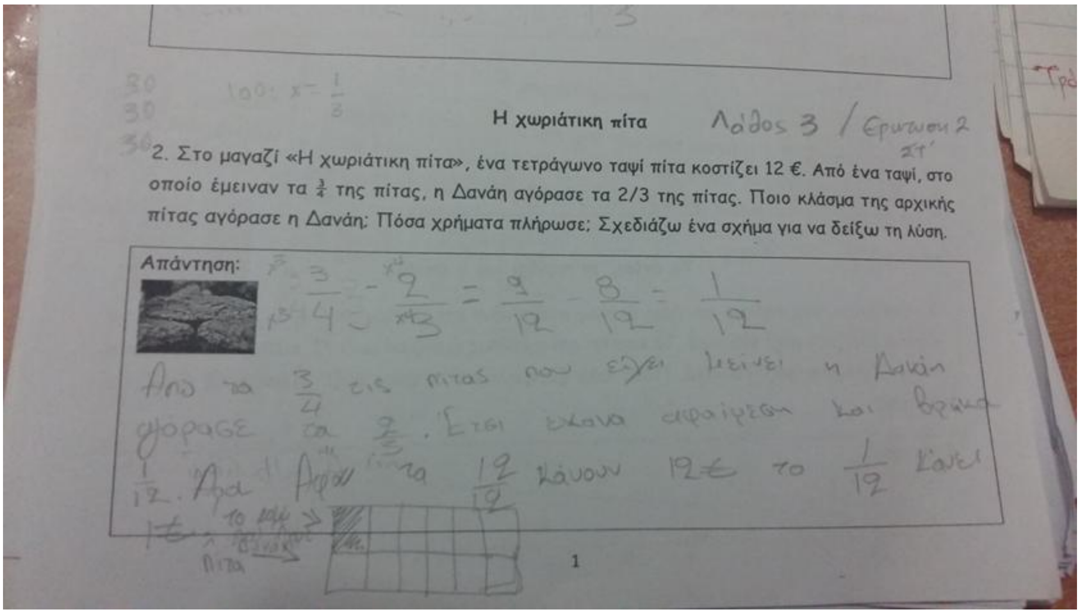
Τάξη	Αναγωγή στην κλασματική μονάδα	Με χρήση του μισού από το όλο / Ακριβής υπολογισμός	Υπολογισμός μέρος του όλου και μέρος μέρους/ Ακριβής υπολογισμός	Σωστή απάντηση - Λάθος τρόπος
Ε΄ N= 290	21 (20,79%)	58 (57,42%)	22 (21,78%)	8 (7,92%)
ΣΤ΄ N= 240	33 (25,4%)	78 (60%)	19 (14,61%)	14(10,76%)
Σύνολο	54 (10,18%)	136 (25,66%)	41 (7,7%)	22 (4,2%)

Πιο συγκεκριμένα, οι περισσότεροι μαθητές (25.7%) επέλεξαν να επιλύσουν το ερώτημα με τη βοήθεια του μισού, δηλαδή, 12:2. Ακολουθεί ποσοστό 10.19% των μαθητών οι οποίοι επέλεξαν να κάνουν αναγωγή στην κλασματική μονάδα, ποσοστό 7.7% των μαθητών οι οποίοι επέλεξαν να υπολογίσουν μέρος του όλου και μέρος μέρους με πολλαπλασιασμό του12 με το – και μετά του 9 με το –, ενώ τέλος, ποσοστό 4.15% των μαθητών έδωσαν σωστή απάντηση αλλά με λάθος τρόπο.

Λάθη στο Ερώτημα 2

Πίνακας 5: Είδη λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης στο ερώτημα 2, στο πρόβλημα «Χωριάτικη Πίτα».

Τάξη	Αναγωγή στη μονάδα αλλά σε μέρος του όλου	Δεν δικαιολογείται η απάντηση	Υπολογισμός λάθος μέρους από το ερώτημα 1
Ε΄ N= 290	53 (52,47%)	13 (12,87%)	35 (34,65%)
Στ΄ N= 240	55 (50,92%)	9 (8,33%)	44 (40,74%)
Σύνολο	108 (20,4%)	22 (4,15 %)	79 (14,9%)



Η χωριάτικη πίτα

Λάθος 3 / Ερώτηση 2 ΣΤ΄

2. Στο μαγαζί «Η χωριάτικη πίτα», ένα τετράγωνο ταψί πίτα κοστίζει 12 €. Από ένα ταψί, στο οποίο έμειναν τα $\frac{3}{4}$ της πίτας, η Δανάη αγόρασε τα 2/3 της πίτας. Ποιο κλάσμα της αρχικής πίτας αγόρασε η Δανάη; Πόσα χρήματα πλήρωσε; Σχεδιάζω ένα σχήμα για να δείξω τη λύση.

Απάντηση:

$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$

1

Εικόνα 8. Πρόβλημα «χωριάτικη πίτα»: Παράδειγμα λάθος υπολογισμού μέρους από το ερώτημα 1

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε πως 108 μαθητές (20.38%), έκαναν αναγωγή στη μονάδα αλλά σε μέρος όλου– δηλαδή –απάντησαν πως είτε i) το 3/3αντιστοιχει στο 12 , άρα το 1/3 αντιστοιχεί στο 4 , άρα τα 2/3 αντιστοιχούν στο 8 ή ii)τα 4/4 αντιστοιχούν στο 12 , άρα το 1/4 αντιστοιχεί στο 3, άρα τα 3/4 αντιστοιχούν στο 9, 79 μαθητές (14.91%) υπολογίζουν λάθος μέρος από το πρώτο ερώτημα , ενώ 22 μαθητές (4.15%) δεν δικαιολογούν την απάντησή τους.

Ερώτημα 3: Σχεδιασμός λύσης προβλήματος «Χωριάτικη πίτα»

Επιτυχία

Αρχικά παρουσιάζουμε τα είδη της επιτυχίας ανά τάξη αναφορικά με το τρίτο ερώτημα του προβλήματος «Χωριάτικη πίτα», τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 6).

Πίνακας 6: Επιλογές λύσεων των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης στο ερώτημα 3, στο πρόβλημα «Χωριάτικη Πίτα».

Τάξη	Μέρος του όλου (σχήμα)	Μέρος του μέρους (σχήμα)	Σχήμα
Ε΄ N= 290	24 (18,46%)	28 (21,53%)	78 (60%)
ΣΤ΄ N= 240	35 (25,36%)	31 (22,46%)	72 (52,17%)

Σύνολο	59 (11,13%)	59 (11,13%)	150 (28,3%)

Πιο συγκεκριμένα, σχετικά με τον σχεδιασμό της λύσης για το πρώτο πρόβλημα, το 150 μαθητές (28,3%) επέλεξαν να κάνουν σχηματική επίλυση, και 118 μαθητές (22,26%) επέλεξαν είτε να σχεδιάσουν το μέρος του όλου είτε το μέρος του μέρους.

Λάθη στο ερώτημα 3

Πίνακας 7: Είδη λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης στο ερώτημα 2, στο πρόβλημα «Χωριάτικη Πίτα».

Τάξη	Ελλιπές σχήμα	Λάθος εκτίμηση του μέρους	Μη κατανόηση του μέρους
Ε΄ N= 290	45 (59,21%)	18 (23,68%)	13 (17,10%)
Στ΄ N= 240	57 (56,43%)	24 (23,76%)	20 (19,8%)
Σύνολο	102 (19,24%)	42 (7,9 %)	33 (6,22%)

Πιο συγκεκριμένα, από το σύνολο των μαθητών που έκαναν λάθος στο σχεδιασμό της λύσης, το 19.24% των μαθητών έκαναν ελλιπή σχεδιασμό – «μισό» σχήμα, το 7.92% των μαθητών έκαναν λάθος εκτίμηση του μέρους, ενώ το 6.22% των μαθητών δεν κατανόησαν πλήρως το μέρος – ενώ ήδη έχει υπολογιστεί στο πρώτο ερώτημα.

Παραμετρική ανάλυση του δείγματος για το Πρόβλημα 1

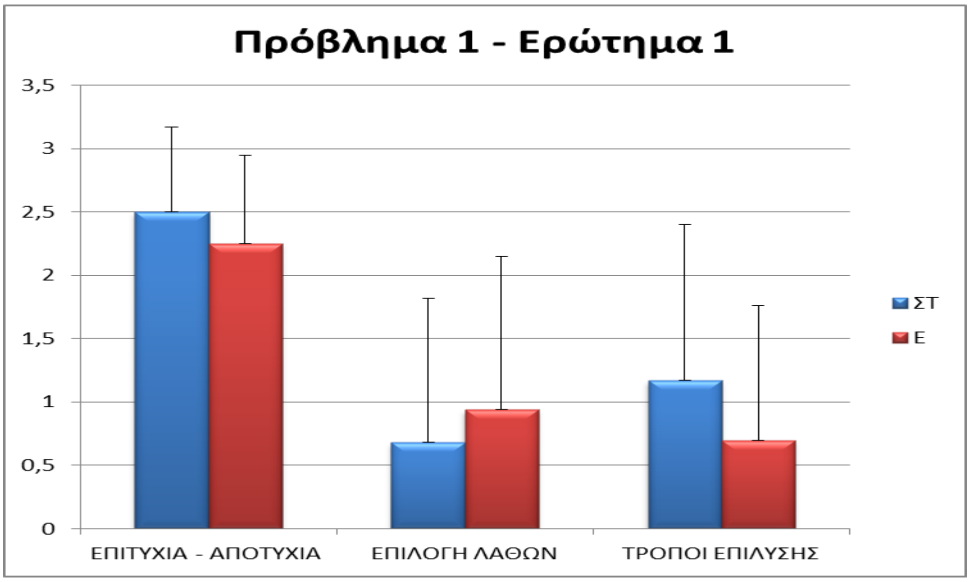
Για τον έλεγχο κανονικότητας του δείγματος, πραγματοποιήθηκε έλεγχος Kolmogorov – Smirnov, όπου βρέθηκε πως p = 0,573 (p> 0,05), γεγονός που υποδεικνύει πως το δείγμα των μαθητών ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε απλή Ανάλυσης Διασποράς (One-WayANOVA) σε ανεξάρτητα δείγματα για την τάξη που φοιτούν οι μαθητές του δείγματος, σε κάθε πρόβλημα.

Τα αποτελέσματα της απλής Ανάλυσης Διασποράς (One-WayANOVA) σε ανεξάρτητα δείγματα για την τάξη που φοιτούν οι μαθητές του δείγματος για το ερώτημα 1 του προβλήματος 1, παρουσίασαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στους τρόπους επίλυσης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές ($F_{2,\,528}$ =12,405, p = .000). Σχετικά με την επιτυχία ή αποτυχία των μαθητών, καθώς και τα λάθη που έκαναν, δεν παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών που φοιτούν στην Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη (p> .05). Οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις των απαντήσεων στο ερώτημα 1 του προβλήματος 1, ανάλογα με την τάξη που φοιτούν οι μαθητές, καθώς και τα αποτελέσματα των στατιστικών αναλύσεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 8, και την Εικόνα 9.

Πίνακας 8: Μέσες τιμές (ΜΤ), τυπικές αποκλίσεις (ΤΑ), τιμές F, βαθμοί ελευθερίας (df), στατιστική σημαντικότητα (p) των απαντήσεων στο ερώτημα 1, του προβλήματος 1, για την Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 (ΕΡΩΤΗΜΑ 1)							
	ΤΑΞΗ	N	MT	TA	F	df	p-2 tailed
ΕΠΙΤΥΧΙΑ-ΑΠΟΤΥΧΙΑ	ΣΤ	240	2,5	0,67	0,05	528	0,946
	Ε	290	2,25	0,70			
ΕΠΙΛΟΓΗ	ΣΤ	240	0,68	1,14	2,570	528	0,110

ΛΑΘΩΝ	Ε	290	0,94	1,21			
ΤΡΟΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	ΣΤ	240	1,17	1,23	12,405	528	0,000*
	Ε	290	0,70	1,06			

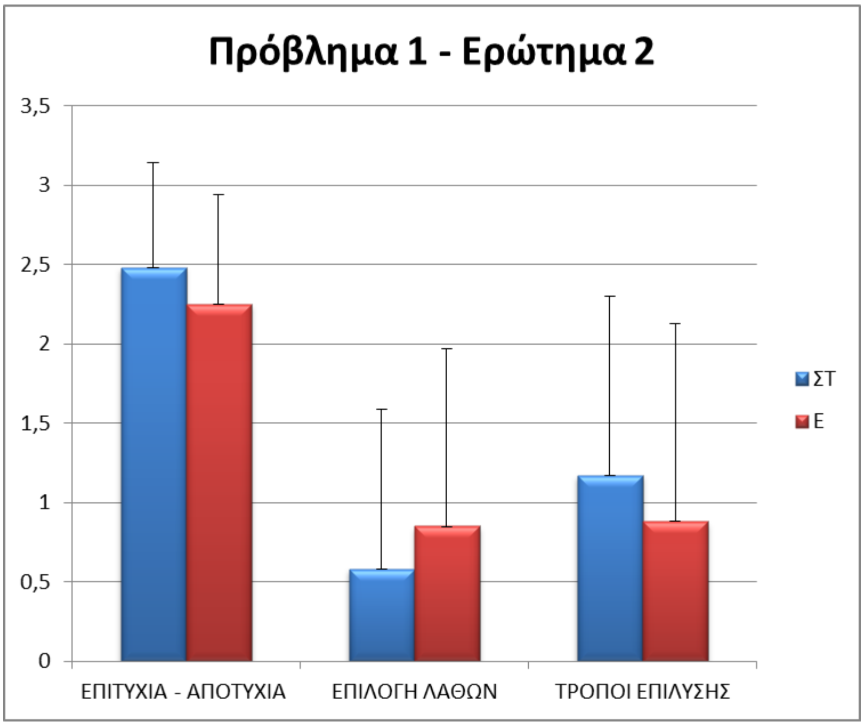


Εικόνα 9: Μέσες τιμές (ΜΤ), τυπικές αποκλίσεις (ΤΑ), των απαντήσεων στο ερώτημα 1, του προβλήματος 1, για την Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη.

Τα αποτελέσματα της απλής Ανάλυσης Διασποράς (One-WayANOVA) σε ανεξάρτητα δείγματα για την τάξη που φοιτούν οι μαθητές του δείγματος για το ερώτημα 2 του προβλήματος 1, παρουσίασαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στα είδη των λαθών που έκαναν οι μαθητές ($F_{2,\ 528}$ =5,986, p = .015). Σχετικά με την επιτυχία ή αποτυχία των μαθητών, καθώς και τους τρόπους επίλυσης του ερωτήματος, δεν παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών που φοιτούν στην Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη (p> .05). Οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις των απαντήσεων στο ερώτημα 2 του προβλήματος 1, ανάλογα με την τάξη που φοιτούν οι μαθητές, καθώς και τα αποτελέσματα των στατιστικών αναλύσεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 9, και την Εικόνα 10.

Πίνακας 9: Μέσες τιμές (ΜΤ), τυπικές αποκλίσεις (ΤΑ), τιμές F, βαθμοί ελευθερίας (df), στατιστική σημαντικότητα (p) των απαντήσεων στο ερώτημα 2, του προβλήματος 1, για την Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 (ΕΡΩΤΗΜΑ 2)							
	ΤΑΞΗ	Ν	ΜΤ	ΤΑ	F	df	p-2 tailed
ΕΠΙΤΥΧΙΑ-ΑΠΟΤΥΧΙΑ	ΣΤ	240	2,48	0,66	0,029	528	0,864
	Ε	290	2,25	0,69			
ΕΠΙΛΟΓΗ ΛΑΘΩΝ	ΣΤ	240	0,58	1,01	5,986	528	0,015*
	Ε	290	0,85	1,12			
ΤΡΟΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	ΣΤ	240	1,17	1,13	0,925	528	0,337
	Ε	290	0,88	1,25			



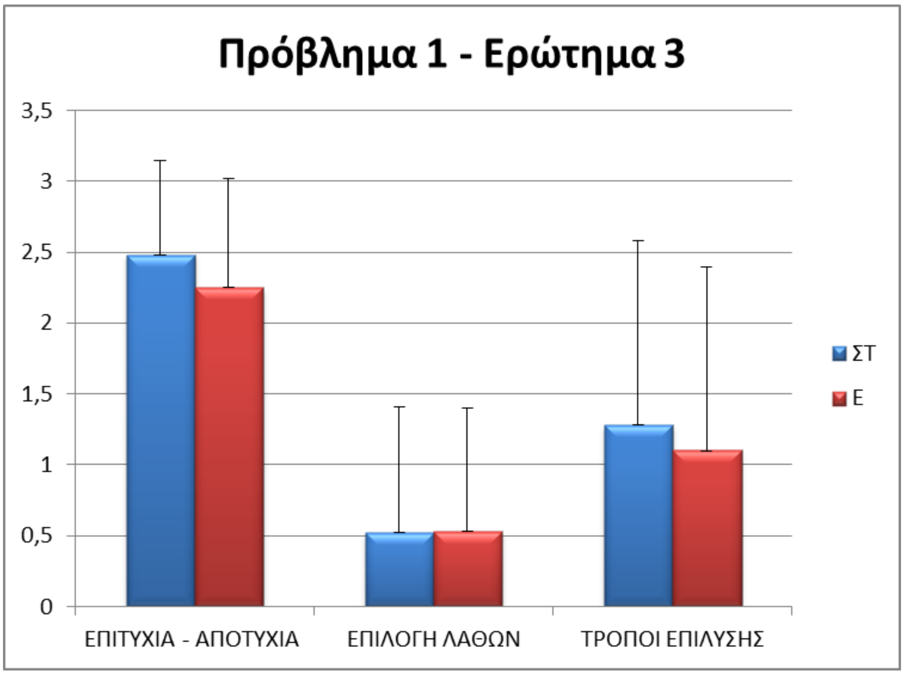
Εικόνα 10: Μέσες τιμές (ΜΤ), τυπικές αποκλίσεις (ΤΑ), των απαντήσεων στο ερώτημα 2, του προβλήματος 1, για την Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη.

Τα αποτελέσματα της απλής Ανάλυσης Διασποράς (One-WayANOVA) σε ανεξάρτητα δείγματα για την τάξη που φοιτούν οι μαθητές του δείγματος για το ερώτημα 3 του προβλήματος 1, παρουσίασαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επιτυχία ή αποτυχία επίλυσης του ερωτήματος ($F_{2,\,528}$ =7,251, p = .007). Σχετικά με τα είδη των λαθών των μαθητών, καθώς και τους τρόπους επίλυσης του ερωτήματος, δεν παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών που φοιτούν στην Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη (p> .05). Οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις των απαντήσεων στο ερώτημα 3 του προβλήματος 1, ανάλογα με την τάξη που φοιτούν οι μαθητές, καθώς και τα αποτελέσματα των στατιστικών αναλύσεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 10, και την Εικόνα 11.

Πίνακας 10: Μέσες τιμές (ΜΤ), τυπικές αποκλίσεις (ΤΑ), τιμές F, βαθμοί ελευθερίας (df), στατιστική σημαντικότητα (p) των απαντήσεων στο ερώτημα 3, του προβλήματος 1, για την Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 (ΕΡΩΤΗΜΑ 3)							
	ΤΑΞΗ	N	ΜΤ	ΤΑ	F	df	p-2 tailed
ΕΠΙΤΥΧΙΑ-ΑΠΟΤΥΧΙΑ	ΣΤ	240	2,48	0,67	7,251	528	0,007*
	Ε	290	2,25	0,77			
ΕΠΙΛΟΓΗ ΛΑΘΩΝ	ΣΤ	240	0,53	0,89	0,028	528	0,868
	Ε	290	0,53	0,87			
ΤΡΟΠΟΙ	ΣΤ	240	1,28	1,30	0,095	528	0,758

ΕΠΙΛΥΣΗΣ	Ε	290	1,10	1,30			



Εικόνα 11: Μέσες τιμές (ΜΤ), τυπικές αποκλίσεις (ΤΑ), των απαντήσεων στο ερώτημα 3, του προβλήματος 1, για την Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη.

4.2 Αποτελέσματα για το ΠΡΟΒΛΗΜΑ «Πίτσα»

Η Μαρία έχει μια πίτσα αγνώστου μεγέθους, από την οποία τρώει τα 4/6. Ο Ανδρέας έχει μια πίτσα αγνώστου μεγέθους, από την οποία τρώει τα 5/6. Η Μαρία τρώει περισσότερη πίτσα από τον Ανδρέα. Μπορείτε να εξηγήσετε πώς είναι δυνατόν να συμβαίνει αυτό;

Αρχικά παρουσιάζουμε τις επιλογές λύσεων στο πρόβλημα «Πίτσα» ανά τάξη (Πίνακας 11)

Πίνακας 11: Επιλογές λύσεων των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης, στο πρόβλημα «Πίτσα».

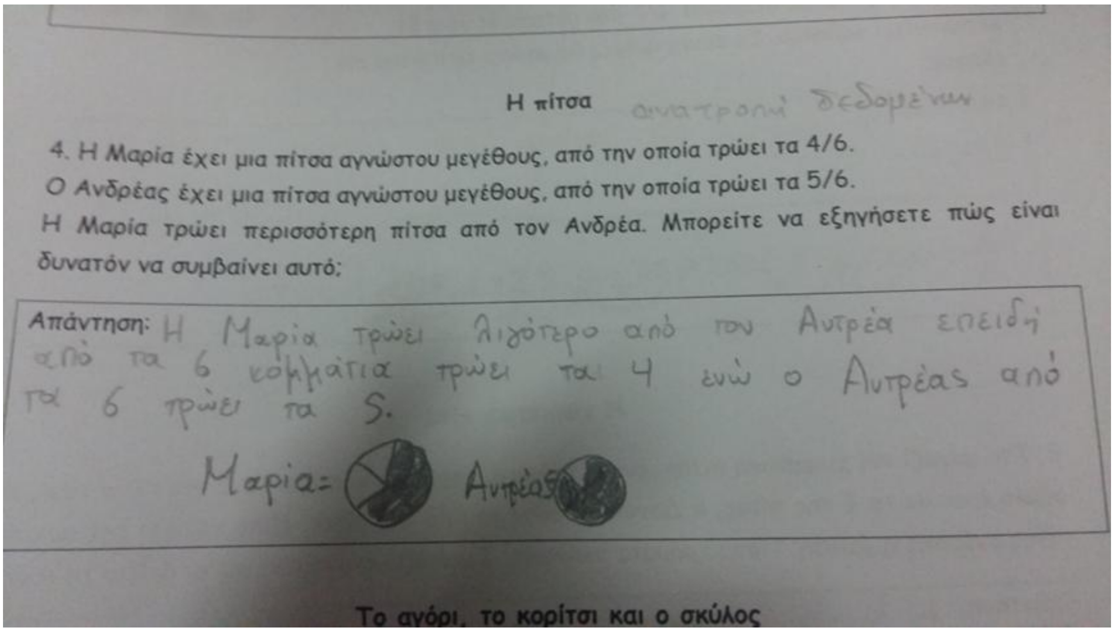
Τάξη	Μέρος του όλου (σχήμα)	Μέρος του μέρους (σχήμα)
Ε΄ Ν= 290	173 (59,65%)	0 (0%)
ΣΤ΄ Ν= 240	180 (75%)	2 (0,8%)
Σύνολο	353 (66,6%)	2 (0,8%)

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, σχετικά με τις επιλογές των λύσεων για το πρόβλημα «Πίτσα», παρατηρούμε πως 353 μαθητές (66.6%) έλυσαν σωστά το πρόβλημα, κατανοώντας πως τα δυο κλάσματα δεν προέρχονται από το ίδιο όλο, ενώ μόνο δυο μαθητές απάντησαν σωστά χωρίς να δικαιολογήσουν την απάντησή τους.

Λάθη στο Πρόβλημα «Πίτσα»

Πίνακας 12: Είδη λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης στο στο πρόβλημα «Πίτσα».

Τάξη	Ελλιπές σχήμα	Λάθος εκτίμηση του μέρους/ Ανατροπή δεδομένων
Ε΄ N= 290	18 (6,2%)	49 (16,9%)
Στ΄ N= 240	14 (5,8%)	44 (18,33%)
Σύνολο	32 (6,03%)	93 (17,54 %)



Εικόνα 12. Ανατροπή δεδομένων στο πρόβλημα «Πίτσα»

Πιο συγκεκριμένα, από τα αποτελέσματα προκύπτει πως από τους μαθητές που έκαναν λάθος στην επίλυση του προβλήματος «Πίτσα», 93 μαθητές (17.55%) δεν κατανόησαν επαρκώς τα δεδομένα (δηλαδή, είτε υπέθεσαν πως τα κομμάτια της

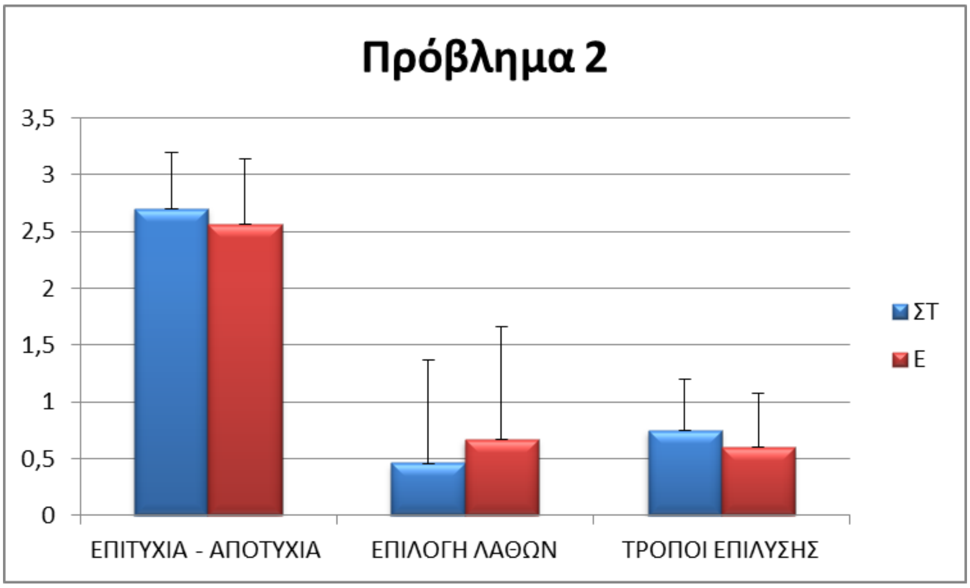
Μαρίας ήταν τετράγωνα και του Ανδρέα τρίγωνα και 1 τετράγωνο ισούται με 2 τρίγωνα, ή η πίτσα της Μαρίας είχε 12 κομμάτια και του Ανδρέα 6 είτε υπέθεσαν ότι η Μαρία έφαγε 1 πίτσα και 1 κομμάτι από την άλλη ή συμπέραναν πως ο μεγαλύτερος αριθμητής συνεπάγεται μικρότερο κλάσμα), ή ανέτρεψαν τα δεδομένα του προβλήματος – δηλαδή, υπέθεσαν πως ο Ανδρέας έφαγε περισσότερη πίτσα, ενώ 32 μαθητές (6%) έκαναν λάθος επίλυση του προβλήματος λόγω ελλιπούς σχήματος.

Παραμετρική ανάλυση του δείγματος για το Πρόβλημα 2

Τα αποτελέσματα της απλής Ανάλυσης Διασποράς (One-WayANOVA) σε ανεξάρτητα δείγματα για την τάξη που φοιτούν οι μαθητές του δείγματος για το πρόβλημα 2, παρουσίασαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επιτυχία ή αποτυχία επίλυσης του ερωτήματος ($F_{2,\ 528}$ =20,566, p = .000), στα είδη των λαθών των μαθητών ($F_{2,\ 528}$ =14,346, p = .000), καθώς και τους τρόπους επίλυσης του προβλήματος 2 ($F_{2,\ 528}$ =37,215, p = .000), μεταξύ των μαθητών που φοιτούν στην Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη. Οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις των απαντήσεων πρόβλημα 2, ανάλογα με την τάξη που φοιτούν οι μαθητές, καθώς και τα αποτελέσματα των στατιστικών αναλύσεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 13, και την Εικόνα 13.

Πίνακας 13: Μέσες τιμές (ΜΤ), τυπικές αποκλίσεις (ΤΑ), τιμές F, βαθμοί ελευθερίας (df), στατιστική σημαντικότητα (p) των απαντήσεων στο πρόβλημα 2, για την Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2							
	ΤΑΞΗ	Ν	ΜΤ	ΤΑ	F	df	p-2 tailed
ΕΠΙΤΥΧΙΑ-ΑΠΟΤΥΧΙΑ	ΣΤ	240	2,70	0,50	20,566	528	0,000*
	Ε	290	2,56	0,58			
ΕΠΙΛΟΓΗ ΛΑΘΩΝ	ΣΤ	240	0,46	0,91	14,346	528	0,000*
	Ε	290	0,67	0,99			
ΤΡΟΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	ΣΤ	240	0,75	0,45	37,215	528	0,000*
	Ε	290	0,60	0,48			



Εικόνα 13: Μέσες τιμές (ΜΤ), τυπικές αποκλίσεις (ΤΑ), των απαντήσεων στο ερώτημα 3, του προβλήματος 1, για την Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη.

4.3 Επιδόσεις των μαθητών στα προβλήματα «χωριάτικη πίτα» και «πίτσα».

Στο δεύτερο μέρος παρουσίασης των αποτελεσμάτων θα δούμε τους συγκεντρωτικούς πίνακες ανά τάξη. Για λόγους συντομίας στους παρακάτω πίνακες χρησιμοποιείται ο συμβολισμός Π15 = Πρόβλημα 1, Τάξη Ε΄, Π16= Πρόβλημα 1, Τάξη ΣΤ΄, Π25 = Πρόβλημα 2, Τάξη Ε΄, Π26 = Πρόβλημα 2, Τάξη ΣΤ΄.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι συνολικές επιδόσεις των μαθητών ανά τάξη και στα δυο κοινά προβλήματα στα οποία εξετάστηκαν.

Πίνακας 14:

Επιδόσεις των μαθητών στα προβλήματα «χωριάτικη πίτα» (Π1) και «πίτσα» (Π2).

Επίδοση	Π15	Π16	Π25	Π26
Ακριβής υπολογισμός / σχηματική επίλυση	208 (71.72%)	77 (32.08%)	157 (54.13%)	165 (68.75%)
Λανθασμένη επίλυση	82 (28.27%)	111 (46.25%)	93 (32.06%)	54 (22.5%)
Μη απάντηση	21 (7.24%)	52 (21.67%)	40 (13.79%)	21 (8.75%)
Σύνολο	290 (100%)	240 (100%)	290 (100%)	240 (100%)

Από τον παραπάνω πίνακα γίνεται φανερό πως οι μαθητές της Ε΄ Τάξης παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις στην επίλυση του πρώτου προβλήματος (71.72%), σε αντίθεση με τους μαθητές της ΣΤ΄ Τάξης (32.08%). Στο δεύτερο πρόβλημα οι επιδόσεις των μαθητών της ΣΤ΄ Τάξης είναι καλύτερες (68.75%) σε σχέση με αυτές των μαθητών της Ε΄ Τάξης (54.13%), είτε οι μαθητές επιλέγουν ακριβή υπολογισμό είτε σχηματική επίλυση των προβλημάτων. Αναφορικά με τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών, τα αποτελέσματα έδειξαν πως όσον αφορά το πρώτο πρόβλημα οι μαθητές της ΣΤ΄ Τάξης έχουν δώσει περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις (46.25%), σε σχέση με τους μαθητές της Ε΄ Τάξης (28.27%) ενώ στο δεύτερο πρόβλημα, οι μαθητές της Ε΄ τάξης έχουν δώσει τις περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις (32.06%) σε σχέση με τους μαθητές της ΣΤ΄ Τάξης που έχουν λιγότερες λανθασμένες απαντήσεις σε ποσοστό 22.5%.

4.4 Τρόποι επίλυσης των μαθητών στα προβλήματα «χωριάτικη πίτα» και «πίτσα».

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τρόποι επίλυσης των μαθητών ανά τάξη και στα δυο κοινά προβλήματα στα οποία εξετάστηκαν.

Πίνακας 15:

Τρόποι επίλυσης των μαθητών στα προβλήματα «χωριάτικη πίτα» και «πίτσα».

Τρόποι Επίλυσης	Π15	Π16	Π25	Π26
Σχηματική επίλυση	142 (48.96%)	150 (62.5%)	184 (63.44%)	168 (70%)
Ακριβής υπολογισμός*	122 (42.06%)	77 (32.08%)	-	-
Άλλος τρόπος	22 (7.58%)	13 (5.41%)	-	-

*(Μέρος όλου/ Αναγωγή στην κλασματική μονάδα/ υπολογισμός μέρους όλου και μέρους μέρους)

Από τον παραπάνω πίνακα μπορούμε να παρατηρήσουμε πως για το δεύτερο πρόβλημα οι περισσότεροι μαθητές και των δυο τάξεων επιλέγουν σχηματική επίλυση, ενώ όσον αφορά το πρώτο πρόβλημα οι περισσότεροι μαθητές της Ε΄ Τάξης (42.06%) προβαίνουν σε ακριβή υπολογισμό, χρησιμοποιώντας κάποιον αλγόριθμο (εύρεση μέρους όλου, ή αναγωγή στην κλασματική μονάδα είτε υπολογισμό μέρους όλου και στη συνέχεια μέρους μέρους).

4.5 Ποσοστά λαθών των μαθητών στα προβλήματα «χωριάτικη πίτα» και «πίτσα».

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα ποσοστά λαθών των μαθητών ανά τάξη και στα δυο κοινά προβλήματα στα οποία εξετάστηκαν.

Πίνακας 16

Ποσοστά λαθών των μαθητών στα προβλήματα «χωριάτικη πίτα» και «πίτσα».

Τύπος λάθους	Π15	Π16	Π25	Π26
Λάθος εφαρμογής του αλγόριθμου	36 (62.06%)	42 (60.41%)	29 (10%)	32 (13.33%)
Λάθος σχεδιασμός	35 (12.06%)	67 (27.9%)	-	-
Λύση χωρίς λογική εξήγηση	52 (17.93%)	22 (9.16%)	-	-
Άλλος τρόπος	35 (12.06%)	44 (18.33%)	46 (15.86%)	47 (19.5%)

Μη κατανόηση των δεδομένων

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε πως σε ό,τι αφορά τους τύπους των λαθών που κάνουν οι μαθητές, σχετικά με το πρώτο πρόβλημα, οι μαθητές της ΣΤ΄ Τάξης σε ποσοστό 60.41% κάνουν λάθος εφαρμογή του αλγορίθμου, το 27.09% κάνουν λάθος ή ελλιπή σχεδιασμό, ενώ σε ποσοστό 18.33% δεν έχουν κατανοήσει επαρκώς τα δεδομένα. Από την άλλη μεριά, το συνηθέστερο λάθος για την Ε΄ Τάξη είναι πως δίνουν τη λύση του προβλήματος χωρίς επιπλέον να δίνουν κάποια λογική ερμηνεία του αποτελέσματος. Όσον αφορά το δεύτερο πρόβλημα οι μαθητές και των δυο τάξεων κάνουν περίπου τα ίδια λάθη που αυτά αφορούν κυρίως τη λάθος εφαρμογή αλγόριθμου ή τη μη κατανόηση των δεδομένων.

Κεφάλαιο 5: Συζήτηση αποτελεσμάτων – Συμπεράσματα

5.1 Συζήτηση

Κύριος σκοπός της παρούσας ερευνητικής εργασίας ήταν να αξιολογήσει και να ερμηνεύσει τα λάθη που κάνουν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα. Ειδικότερα η εργασία αυτή στοχεύει στο να αναλύσει το κατά πόσο οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα προβλήματα με κλάσματα και ποιους τρόπους επίλυσης χρησιμοποιούν προς αυτή την κατεύθυνση, να αναδείξει τα κοινά λάθη που κάνουν και τις αδυναμίες τους στην επίλυση προβλημάτων με τους ρητούς αριθμούς, και να εξετάσει το κατά πόσο οι μαθητές είναι σε θέση να παρουσιάσουν γραπτώς τον τρόπο επίλυσης. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η αντιμετώπιση των προβλημάτων με κλάσματα ήταν κατά κύριο λόγο επιτυχής, ωστόσο ανέδειξε τα είδη των λαθών που κάνουν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να επιλύσουν προβλήματα με κλάσματα.

Όσον αφορά το πρώτο πρόβλημα «Χωριάτικη πίτα», και τα επιμέρους ερωτήματα αυτού, τα αποτελέσματα ανέδειξαν τα εξής στοιχεία:

Ερώτημα α: το 50% των μαθητών έδωσε σωστή απάντηση, το μεγαλύτερο ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων οφείλεται είτε σε απουσία λύσης είτε σε πρόσθεση ή αφαίρεση των κλασμάτων ή σε λάθος σχηματικό υπολογισμό του ζητούμενου, ενώ οι περισσότεροι μαθητές επέλεξαν τη σχηματική επίλυση του ερωτήματος.

Ερώτημα β: το 48.5% των μαθητών έδωσε σωστή απάντηση, το μεγαλύτερο ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων οφείλεται στην αναγωγή στη μονάδα, αλλά σε μέρος όλου, ενώ για την επίλυση του ερωτήματος, οι περισσότεροι μαθητές επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν το μισό του όλου.

Ερώτημα γ: το 51.3% των μαθητών έδωσε σωστή απάντηση, το μεγαλύτερο ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων οφείλεται σε ελλιπή σχεδιασμό («μισό» σχήμα), ενώ οι περισσότεροι μαθητές επέλεξαν να αντιμετωπίσουν το ερώτημα με σχηματική επίλυση.

Όσον αφορά το δεύτερο πρόβλημα «Πίτσα», τα αποτελέσματα ανέδειξαν πως το 66.4% των μαθητών αντιμετώπισε με επιτυχία το πρόβλημα, το μεγαλύτερο ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων οφείλεται στο ότι οι μαθητές δεν κατανόησαν επαρκώς τα δεδομένα του προβλήματος, ενώ όλοι οι μαθητές που έλυσαν το πρόβλημα είχαν κατανοήσει πλήρως πως τα δυο κλάσματα δεν προέρχονται από το ίδιο όλο.

Συγκρίνοντας τις επιδόσεις των μαθητών των δυο τάξεων στα προβλήματα στα οποία εξετάστηκαν γίνεται φανερό πως οι μαθητές της Ε΄ Τάξης παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις στην επίλυση του πρώτου προβλήματος, σε σχέση με τους μαθητές της ΣΤ΄ Τάξης. Στο δεύτερο πρόβλημα οι επιδόσεις των μαθητών της ΣΤ΄ Τάξης είναι καλύτερες σε σχέση με αυτές των μαθητών της Ε΄ Τάξης, είτε οι μαθητές επιλέγουν ακριβή υπολογισμό είτε σχηματική επίλυση των προβλημάτων. Αναφορικά με τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών, τα αποτελέσματα έδειξαν πως όσον αφορά το πρώτο πρόβλημα οι μαθητές της ΣΤ΄ Τάξης έχουν δώσει περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις, σε σχέση με τους μαθητές της Ε΄ Τάξης ενώ στο δεύτερο πρόβλημα, οι μαθητές της Ε΄ τάξης έχουν δώσει τις περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις σε σχέση με τους μαθητές της ΣΤ΄ Τάξης που έχουν λιγότερες λανθασμένες απαντήσεις.

Όσον αφορά τους τρόπους επίλυσης των προβλημάτων μπορούμε να παρατηρήσουμε πως για το δεύτερο πρόβλημα οι περισσότεροι μαθητές και των δυο τάξεων επιλέγουν σχηματική επίλυση, ενώ όσον αφορά το πρώτο πρόβλημα οι περισσότεροι μαθητές της Ε΄ Τάξης προβαίνουν σε ακριβή υπολογισμό, χρησιμοποιώντας κάποιον αλγόριθμο (εύρεση μέρους όλου, ή αναγωγή στην κλασματική μονάδα είτε υπολογισμό μέρους όλου και στη συνέχεια μέρους μέρους). Σχετικά με τους τύπους λαθών που κάνουν οι μαθητές όσον αφορά το πρώτο πρόβλημα, οι μαθητές της ΣΤ΄ Τάξης συνήθως κάνουν λάθος εφαρμογή του αλγορίθμου, λάθος ή ελλιπή σχεδιασμό, ενώ αρκετοί δεν έχουν κατανοήσει επαρκώς τα δεδομένα. Από την άλλη μεριά, το συνηθέστερο λάθος για την Ε΄ Τάξη είναι πως δίνουν τη λύση του προβλήματος χωρίς επιπλέον να δίνουν κάποια λογική ερμηνεία του αποτελέσματος. Όσον αφορά το δεύτερο πρόβλημα οι μαθητές και των δυο τάξεων κάνουν περίπου τα ίδια λάθη που αυτά αφορούν κυρίως τη λάθος εφαρμογή αλγόριθμου ή τη μη κατανόηση των δεδομένων.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να πούμε πως οι τύποι των λαθών που παρατηρήθηκαν στις απαντήσεις των μαθητών του δείγματος (λανθασμένοι σχηματικοί υπολογισμοί, αναγωγή στη μονάδα αλλά σε μέρος όλου, πρόσθεση ή αφαίρεση κλασμάτων, λάθος εκτίμηση του μέρους, ελλιπής κατανόηση του μέρους, ελλιπής κατανόηση των δεδομένων ή ανατροπή των δεδομένων του προβλήματος), παρουσιάζονται σε μικρά ποσοστά των απαντήσεων παρόλα αυτά, οι τύποι αυτοί των λαθών είναι ενδεικτικοί για ελλιπή κατανόηση της έννοια του κλάσματος, με δεδομένο πως πολλές από τις απαντήσεις δεν έχουν δικαιολόγηση και πως υπάρχει ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών που δεν απαντά σε κάποια ερωτήματα ή χρησιμοποιεί λάθος μέρος του όλου από προηγούμενα ερωτήματα.

Από τις λανθασμένες απαντήσεις στα ερωτήματα β και γ, του προβλήματος «Χωριάτικη πίτα», φαίνεται πως σε αρκετό ποσοστό των μαθητών υπάρχει ελλιπής κατανόηση της διαφοράς ανάμεσα στους όρους «μέρος του μέρους» και «μέρος του όλου», ενώ από τις επιλογές των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές παρατηρούμε πως οι περισσότεροι επιλέγουν τη σχηματική επίλυση των προβλημάτων παρόλο που σε ένα μικρό ποσοστό κάνει ελλιπή ή λανθασμένο σχεδιασμό.

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα : «Οι συνήθεις τύποι λαθών των μαθητών αφορούν στην ελλιπή κατανόηση της έννοιας του κλάσματος;», τα αποτελέσματα έδειξαν πως φαίνεται να υπάρχει μια διαφοροποίηση στους μαθητές της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης, σχετικά με την κατανόηση των δεδομένων του προβλήματος και σωστή μεταφορά της φυσικής γλώσσας σε μαθηματική, δηλαδή, φαίνεται πως τα λάθη των μαθητών αφορούν στην ελλιπή κατανόηση της έννοιας του κλάσματος.

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: «Κατανοούν, οι μαθητές, τη διαφορά ανάμεσα στους όρους «μέρος του όλου» και «μέρος του μέρους», τα αποτελέσματα έδειξαν πως ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης κάνει το συνηθισμένο λάθος στην υπολογιστική εκτίμηση που αφορά στην εφαρμογή του μέρους του όλου και του μέρους μέρους. Από τα λάθη των μαθητών του δείγματος μπορούμε να συμπεράνουμε πως πολλοί μαθητές δεν κατανοούν τη διαφορά σε αυτές τις δυο έννοιες.

Σχετικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα: «Είναι σε θέση οι μαθητές να αναπαραστήσουν σχηματικά τις λύσεις;» τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι περισσότεροι μαθητές είναι σε θέση να αναπαραστήσουν σχηματικά τη λύση και από την στατιστική ανάλυση των δεδομένων και στις δυο τάξεις παρατηρήθηκε πως οι μαθητές που επέλεξαν επιτυχώς τη σχηματική λύση παρουσιάζουν μεγαλύτερη ικανότητα επίλυσης και άλλων προβλημάτων.

Σχετικά με το τέταρτο ερευνητικό ερώτημα: «Υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων με κλάσματα και στη δυνατότητα επίλυσης άλλων προβλημάτων της αριθμητικής;», τα αποτελέσματα έδειξαν πως υπάρχει θετική συσχέτιση ανάμεσα στη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων με κλάσματα και στην ικανότητα των μαθητών να επιλύουν άλλα προβλήματα της αριθμητικής. Μάλιστα, η θετική συσχέτιση αναφέρεται τόσο στην επιτυχή χρήση σχημάτων όσο και στην επαρκή ερμηνεία των λύσεων που δίνονται στα προβλήματα, δείχνοντας με αυτό τον τρόπο πως οι μαθητές που είναι ικανοί στην επίλυση προβλημάτων με κλάσματα παρουσιάζουν υψηλά επίπεδα μεταγνώσης που μπορούν να μεταφερθούν και σε άλλους τομείς των μαθηματικών.

Ακόμη, από τις σωστές αλλά μη δικαιολογημένες απαντήσεις, γίνονται φανερά λάθη που σχετίζονται και με την ίδια την διαισθητική απεικόνιση του κλάσματος ως μέρος μιας συνεχούς ολότητας ή ενός διακριτού συνόλου αντικειμένων. Οι μαθητές στρέφουν την προσοχή τους μόνο στο μέρος που χρωματίζεται ή αποκόπτεται και δεν συγκρατούν και τις δύο διαστάσεις που απεικονίζει ένας κλασματικός αριθμός ενώ φαίνεται να μην κατανοούν πλήρως ότι τα μέρη πρέπει να είναι ισοδύναμα για ισχύει η σχέση που αντανακλά το κλάσμα ενώ δυσκολεύονται και να απαντήσουν σε παρόμοιες ασκήσεις όπου το σύνολο των αντικειμένων είναι πιο μεγάλο από τον παρανομαστή του κλάσματος που τους ζητείται να επιλέξουν. Το παραπάνω γεγονός προκύπτει από τις απαντήσεις των μαθητών που απέτυχαν στο δεύτερο πρόβλημα, καθώς μη κατανοώντας πως τα δυο κλάσματα δεν προέρχονται από το ίδιο όλο, ανέτρεψαν τα δεδομένα του προβλήματος.

5.2 Συμπεράσματα

Κύριος σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να καταγράψει και να αναλύσει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές του δείγματος, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης, είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν με επιτυχία προβλήματα με κλάσματα, ποιοί είναι οι τρόποι επίλυσης που χρησιμοποιούν για να τα επιλύσουν, ποια είναι τα συνηθισμένα λάθη που κάνουν, κατά πόσο είναι ικανοί να καταγράψουν και να ερμηνεύσουν τη λύση καθώς επίσης, να αναδείξει τις διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις των δύο τάξεων.

Τα αποτελέσματα από την παρούσα έρευνα έδειξαν πως οι μαθητές στην πλειοψηφία τους επέλεξαν ακριβή υπολογισμό, στα ερωτήματα όπου υπήρχε η επιλογή ακριβούς υπολογισμού και σχηματικής επίλυσης, ενώ τα συνηθέστερα λάθη τα οποία έκαναν αφορούσαν μη κατανόηση των δεδομένων των προβλημάτων. Από τις απαντήσεις που ήταν σωστές αλλά δεν δόθηκε σαφής δικαιολόγηση μπορούμε να καταλάβουμε πως οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την αίσθηση του ρητού αριθμού.

Συμπερασματικά θα μπορούσαμε να πούμε πως παρόλο που η αντιμετώπιση των προβλημάτων με κλάσματα από τους μαθητές του δείγματος, γενικά κρίνεται επιτυχής, αναδεικνύονται τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια του κλάσματος. Τα λάθη των μαθητών οφείλονται κυρίως στην ελλιπή κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, σε ελλιπή κατανόηση της διαφοράς των όρων «μέρος μέρους» και «μέρος όλου», και σε ελλιπή κατανόηση των δεδομένων του προβλήματος. Με τη σωστή καθοδήγηση, από τον επιβλέποντα εκπαιδευτικό, είναι δυνατή η αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων, καθώς είναι ιδιαίτερα σημαντικός ο ρόλος του, έτσι ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να αναπτύξουν αφενός τη διαισθητική τους ικανότητα σε σχέση με τα κλάσματα και αφετέρου να συνδέσουν τα κλάσματα με άλλα προβλήματα της αριθμητικής αλλά και με τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν στην καθημερινότητά τους.

Περιορισμοί της έρευνας

Θα έπρεπε να είναι γνωστές οι διδακτικές προσεγγίσεις των δασκάλων, προκειμένου να διαμορφωθεί μια συνολική προοπτική σχετικά με τις πρακτικές και τις μεθόδους τους στη διδασκαλία των κλασμάτων. Επιπλέον, θα πρέπει να συμμετέχουν σε μια τέτοια έρευνα και οι εκπαιδευτικοί, προκειμένου να είναι δυνατό να γενικευτούν τα αποτελέσματα και να εξεταστεί σε βάθος η τρέχουσα κατάσταση όσον αφορά τη διδασκαλία των κλασμάτων.

Προτάσεις για μελλοντικές έρευνες

Τα αποτελέσματα της έρευνας υποδηλώνουν ότι η διδασκαλία των κλασμάτων κατά τρόπο πιο κατανοητό θα ήταν επωφελής για τους μαθητές. Η χρήση νοερών υπολογισμών και εκτιμήσεων στις πράξεις με κλάσματα και η χρήση διαφόρων τρόπων επίλυσης μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της διδασκαλίας των ρητών αριθμών. Η κατανόηση της σημασίας των τρόπων επίλυσης είναι πολύ πιθανό να μειώσει τα λάθη των μαθητών, τα οποία οφείλονται σε λανθασμένη εφαρμογή αλγορίθμων. Θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνηθούν οι συνέπειες μιας πειραματικής διδακτικής παρέμβασης με αντικείμενο τους ρητούς αριθμούς, με έμφαση στην κατανόηση, τη χρήση των νοερών υπολογισμών και την αναζήτηση στρατηγικών, πέρα από την εφαρμογή αλγορίθμων.

Επιπλέον, τα ευρήματα της μελέτης έδειξαν ότι αυτή η έλλειψη ευελιξίας στη χρήση διαφόρων τρόπων λύσης, μπορεί να οφείλεται σε λανθασμένες διδακτικές προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών. Προκειμένου να αντισταθμιστεί αυτή η έλλειψη ευελιξίας που σχετίζεται με τις δεξιότητες των μελλοντικών εκπαιδευτικών, φαίνεται να υπάρχει άμεση ανάγκη για την παροχή προγραμμάτων κατάρτισης που ενσωματώνουν τη θεωρία και την πρακτική. Για το σκοπό αυτό, προτείνεται να σκεφτούμε την παροχή ενός τέτοιου εκπαιδευτικού προγράμματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90, 449–466.

Barroody, A. J. (1989). Kindergartners' mental addition with single-digit combinations. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 159-172.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15 (5*), 323-341.

Bempeni, M., & Vamvakoussi, X. (2015). Individual differences in students' knowing and learning about fractions: Evidence from an in-depth qualitative study. *Frontline Learning Research 3(1*), 17- 3.4

Byrnes, J. P. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development*, *7*, 235-257.

Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α. , ΗλίαΙ., ΣπύρουΠ. (2004). *Αναπαραστάσεις και μάθηση των Μαθηματικών;* Λευκωσία: Intercollage Press.

Γαγάτσης,Α., Μιχαηλίδου Ε., και Σιακαλλή Μ. (2001).*Θεωρίες Αναπαράστασης και Μάθηση των Μαθηματικών.* Πανεπιστήμιο Κύπρου,Λευκωσία.

Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σιημητρά-Κωνσταντίνου, Α. & Χριστοδουλίδου, Ο. (2006). Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα; *Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου.*

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L., Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education 47*, 82-92.

Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ., (2003). Curricula for elementary school. *Government Gazette. Number 303*, 2003.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education, 23(1)*, 45-55.

Dowker, A., Flood, A., Griffiths, H., Harris, L., & Hook, L. (1996). Estimation strategies of four groups. *Mathematical Cognition, 2,* 113-135.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Mathematics education library. Boston: D. Reidel.

Fuller, R.A. (1997). Elementary teachers' pedagogical content knowledge of mathematics. *Mid-Western Educational Researcher, 10 (2),* 9–16.

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22(3),* 170-218.

Hall, W. D. (1977). A Study Of Relationship Between Estimation And Mathematical Problem Solving Among Fifth-Grade Students, Doctoral dissertation, university of Illinois, 1976. *Dissertation abstracts international 37,6324a-6324B.*

Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology, 102*, 395–406.

Hallowell, K.A. (1977). A flowchart model of cognitive processes in mathematics problem solving. *Dissertation Abstracts International, 37A* : 7666-67.

Halford, G. S. (1993). *Children's understanding: The development of mental models.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hanson, S., & Hogan, Th., (2000). Computational estimation skill of college students. *Journal for Research in Mathematics Education, 31(4),* 483–499.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies & errors*. Windsor, England: NFER-NELSON Publishing Company

Heaton, R. M. (1992). Who is minding the mathematics content? A case study of a fifth-grade teacher. *The Elementary School Journal*, *93(2),* 153–162.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effect of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42 (2),* 371–407.

Ηλία Ι., Γαγάτσης, Α.(2004). *Η εικόνα στην επίλυση προβλήματος: Αρωγός ή εμπόδιο;* Λευκωσία: ΙδρυμαΠροώθησηςΈρευνας: ΠανεπιστήμιοΚύπρου.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors: A report of the strategies and error in secondary mathematics project*. Windson, England: NFER-Nelson.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A.Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49–84). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kilpatrick, Jeremy & Swafford, Jane (Eds.); *Mathematics Learning Study Committee,* National Research Council (2001). Helping Children Learn Mathematics. Washington, D.C.: The National Academies Press (p. 1).

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.

Κωσταρίδου-Ευκλείδη, Α. (1995). *Ψυχολογία Κινήτρων*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Reston, VA: NCTM.

Lehrer, R. & Franke, M. L. (1992). Applying personal construct psychology to the study of teachers' knowledge of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 23(3),* 223–241.

Leinhardt, G. & Smith D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology,* 77, 247–271.

LeFevre, J. A., Greenham, S. L., &Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction, 11,* 95-132.

Lemaire, P., Lecacheur, M., & Farioli, F. (2000). Children's strategy use in computational estimation. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 54(2),* 141-148.

Lemaire, P., Lecacheur, M., & Farioli, F. (2000). Children's strategy use in computational estimation. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 54(2),* 141-148.

Lemonidis, Ch., Kaiafa, I. (2014). Fifth and sixth grade students' number sense in rational numbers and its relation with problem solving ability. *MENON: Journal Of Educational Research*. 1st Thematic Issue, 61-74.

Lemonidis, Ch., Mouratoglou, A., Pnevmatikos, D., (2014). Elementary teachers' efficiency in computational estimation problems. *MENON: Journal Of Educational Research*. 1st Thematic Issue, 144-158.

Lemonidis, Ch., Tsakiridou, H., Meliopoulou, I. (2015). In-service teachers' number sense content knowledge and teaching practice in rational numbers. Symposium: SIG 11 – *Teaching and Teacher Education*, 16th Conference EARLI 2015, Cyprus.

Lemonidis, Ch., & Kaimakami, A. (2013). Prospective elementary teachers' knowledge in computational estimation. *Menon: Journal of Educational Research. Issue 2b,* 86 – 98.

Λεμονίδης, Χ. (2016). *Στην Τροχιά των Ρητών*. Εκδόσεις Κυριακίδη.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2010). *Μαθηματικά Γ΄Δημοτικού, Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής* (5η εκδ.). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2007). *Μαθηματικά Γ΄Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου* (2η έκδ.) ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, ΟΕΔΒ.

Levine, D. R. (1982). Strategy Use And Estimation Ability Of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 13(5),* 350-359.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review, 38,* 201–221.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Mack, N.K. (1995). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal of Mathematics Education, 21(1),* 16-32.

McIntosh, A. (2004). Where we are today. In A. McIntosh & L. Sparrow (Eds.), *Beyond written computation* 3-14. Perth: MASTEC.

Marshall, S.P. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach. In T.P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, (pp. 261-288). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Martin, W.G. et al., eds (2007). The Learning of Mathematics, 69th NCTM Yearbook, *National Council of Teachers of Mathematics*.

Mildenhall, P., Hackling, M., & Swan, P., (2009). Computational estimation in the primary school: A single case study of one teacher's involvement in a professional learning intervention. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Fremantle: MERGA.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. In M. S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), *How students learn: Mathematics in the classroom* (pp. 121–162). Washington, DC: National Academic Press.

Moss, J., Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 122-147.

Μπεμπένη, Μ., & Βαμβακούση, Ξ. (2014). Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα στην Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου: Τι (δεν) αλλάζει; *Στα Πρακτικά του 5ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (ψηφιακή μορφή, ISSN: 1792-8494).

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *Agenda for action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal, 45(4),* 1080-1110.

Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth grade pupils’ errors on written mathematical tasks. In M. A. Clements & J. Foyster (Eds.), *Research in mathematics education in Australia*. Melbourne: Swinburne Press.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, 26, 400–417.

Ni, Y. J., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origin and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40(1),* 27-52.

Nunes, T., & Bryant, P. (2008). Rational numbers and intensive quantities: challenges and insights to pupils' implicit knowledge. *Anales de Psicologia, 24(2),* 262-270.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., and Hurry, J. (2006). *Fractions: difficult but crucial in mathematics learning*. London Institute of Education, London: ESRC-Teaching and Learning Research Programme.

Paull, D. R. (1972). The Ability To Estimate In Mathematics, Doctoral dissertation, Columbia University, 1971. *Dissertation Abstracts International, 32* 3567A.

Pegg, J., & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik), vol. 37, no.6*, pp. 468-475.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30,* 5-38.

Post, T., Harel, G., Behr, M. & Lesh, R. (1991). Intermediate Teachers' Knowledge of Rational Number Concepts. In E. Fennema, T. Carpenter, S. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 177-198). NY: State University of NY Press.

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Rybolt, J. F., & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education, 13(3),* 183-201.

Reys, B. J. (1986). Teaching computational estimation: concepts and strategies. In, Estimation & Mental Computation-1986 Yearbook, *National Council of Teachers of Mathematics.*

Reys, B. J., Reys, R. W., & Penafiel, A., F., (1991a). Estimation performance and strategies use of Mexican fifth- and eighth-grade student sample. *Educational Studies in Mathematics, 22*, p. 353-375.

Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S. & Shimizu, K. (1991b). Computational estimation performance and strategies used by fifth- and eighthgrade Japanese students, *Journal for Research in Mathematics Education, 22(1),* 39–58.

Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relations between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skill* (pp. 75-110). Hove, England: Psychology Press.

Saxe, G.B., Gearhart, M. & Seltzer, M. (1999). Relations between Classroom Practices and Student Learning in the Domain of Fractions, *Cognition & Instruction, 17(1),* 1-24.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(4),* 4-14.

Smith, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. *Making sense of fractions, ratios and proportions: 2002 yearbook.*

Smith, J.P. (1995). Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction, 13,* 3-50.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of Numerical Estimation in Young Children. *Child Development, March/April 2004, Volume 75, Number 2*, Pages 428 – 444.

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction for* *kindergarten through 8th grade: A practice guide* (NCEE #2010-4039). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, US Department of Education.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science, 23*, 691-697.

Sowder, J. T., (1984). Computational estimation procedures of school children. *Journal of Educational Research, 77(6),* 332-336.

Sowder, J. T., & Wheeler, M. M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 130–146.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of student's understanding of numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*, 503-518.

Streefland, L. (1993). Fractions: A Realistic Approach. In T. P. Carpenter & E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp.289-326). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: the case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31,* 5-25.

Tsao, Y. L. (2004). Exploring the connections among number sense, mental computation performance, and the written computation performance of elementary preservice school teachers. *Journal of College Teaching & Learning, 1(12),* 71-90.

Tsao, Y. L. (2005). The number sense of preservice elementary school teachers. *College Student Journal, 39(4),* 647-679.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction, 21*, 676-685.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*,344-355.

Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics Methods: Teaching Developmentally* (8th edition). New York: Allyn and Bacon.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*, 453–467.

Vamakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*, 181–209.

Van Dooren, W., Lehtinen, E., Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction, 37*, 1-4.

Van Hoof, J., Verschaffel, L & Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies of Mathematics 90*:39–56.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes and P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective* (pp. 1-28). Hove (UK): Psychology Press.

Φιλίππου, Γ.,&ΧρίστουΚ.(1995). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Δαρδανός.

Warfield, J. (2001). Teaching kindergarten children to solve word problems. *Early Childhood Education Journal, 28(3)*, 161–167.

Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by sixth grade students in Taiwan. *Educational Studies, 31(3)*, 317–334.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΑΞΗΣ Ε΄ - ΣΤ΄

Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής

Τάξη: ΣΤ΄

Ονοματεπώνυμο:………………………………………………………………………………………………

Σχολείο:………………………………………………………………………………………………………

Η γάτα και το ποντίκι

1. Ένα ποντίκι βρίσκεται πάνω σε έναν τοίχο ύψους 2 μέτρων και κάτω στο έδαφος, περιμένοντας το, βρίσκεται μια γάτα. Κατά τη διάρκεια της ημέρας το ποντίκι κατεβαίνει μισό μέτρο, αλλά κατά τη διάρκεια της νύχτας ανεβαίνει 1/3 του μέτρου. Η γάτα δε μετακινείται καθόλου. Σε πόσες ημέρες θα φτάσει το ποντίκι στο έδαφος;

Απάντηση:

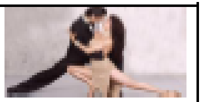
Η χωριάτικη πίτα

2. Στο μαγαζί «Η χωριάτικη πίτα», ένα τετράγωνο ταψί πίτα κοστίζει 12 €. Από ένα ταψί, στο οποίο έμειναν τα $\frac{3}{4}$ της πίτας, η Δανάη αγόρασε τα 2/3 της πίτας. Ποιο κλάσμα της αρχικής πίτας αγόρασε η Δανάη; Πόσα χρήματα πλήρωσε; Σχεδιάζω ένα σχήμα για να δείξω τη λύση.

Απάντηση:

Ο Χορός

3. Σε μια δεξίωση παραβρεθήκαν 7 άντρες και 6 γυναίκες. Κάθε άντρας χόρεψε μια και μόνο φορά με κάθε γυναίκα. Πόσα ζευγάρια χόρεψαν;



Απάντηση:

Η πίτσα

4. Η Μαρία έχει μια πίτσα αγνώστου μεγέθους, από την οποία τρώει τα 4/6.
Ο Ανδρέας έχει μια πίτσα αγνώστου μεγέθους, από την οποία τρώει τα 5/6.
Η Μαρία τρώει περισσότερη πίτσα από τον Ανδρέα. Μπορείτε να εξηγήσετε πώς είναι δυνατόν να συμβαίνει αυτό;

Απάντηση:

Το αγόρι, το κορίτσι και ο σκύλος

5. Ενα αγόρι, ένα κορίτσι και ένας σκύλος ανεβαίνουν στη ζυγαριά ανά δύο. Το αγόρι και το κορίτσι ζυγίζουν μαζί 118 κιλά. Το κορίτσι και ο σκύλος ζυγίζουν μαζί 72 κιλά. Το αγόρι και ο σκύλος ζυγίζουν μαζί 78 κιλά. Πόσα κιλά ζυγίζουν και οι τρεις μαζί; Πόσα κιλά ζυγίζει ο καθένας;

Απάντηση:

Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής

Τάξη: Ε΄

Ονοματεπώνυμο:……………………………………………………………………………………………

Σχολείο:…………………………………………………………………………………………………

Η ομάδα χορού

1. Σε μια ομάδα παραδοσιακών χορών συμμετέχουν 39 αγόρια και 23 κορίτσια. Κάθε εβδομάδα προστίθενται στην ομάδα 6 νέα αγόρια και 8 νέα κορίτσια. Μετά από ορισμένες εβδομάδες στην ομάδα θα υπάρχουν τόσα κορίτσια όσα και τα αγόρια. Πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια θα έχει τότε η ομάδα;

Απάντηση:

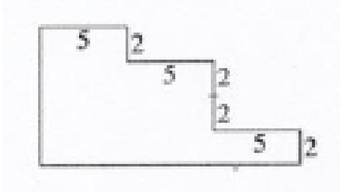
Τα πόδια  

2. Μία μύγα έχει 6 πόδια. Μία αράχνη έχει 8 πόδια. Μαζί 2 μύγες και 3 αράχνες έχουν τόσα πόδια όσα 10 πουλιά και κάποιες γάτες. Πόσες είναι οι γάτες;

Απάντηση:

Η περίμετρος του οικοπέδου

3. Ποια είναι η περίμετρος του διπλανού σχήματος, στο οποίο οι γωνίες είναι όλες ορθές;



Απάντηση·

Η πίτσα

4. Η *Μαρία* έχει μια πίτσα αγνώστου μεγέθους, από την οποία τρώει τα 4/6.

Ο Ανδρέας έχει μια πίτσα αγνώστου μεγέθους, από την οποία τρώει τα 5/6.

Η *Μαρία* τρώει περισσότερη πίτσα από τον *Ανδρέα*. Μπορείτε να εξηγήσετε πώς είναι δυνατόν να συμβαίνει αυτό;

Απάντηση·

Η χωριάτικη πίτα 

5. Στο μαγαζί «Η χωριάτικη πίτα», ένα τετράγωνο ταψί πίτα κοστίζει 12 €. Από ένα ταψί, στο οποίο έμειναν τα $\frac{3}{4}$ της πίτας, η Δανάη αγόρασε τα 2/3 της πίτας. Ποιο κλάσμα της αρχικής πίτας αγόρασε η Δανάη; Πόσα χρήματα πλήρωσε; Σχεδιάζω ένα σχήμα για να δείξω τη λύση.

Απάντηση·